HOJA 11. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F, CURSO 2006-2007

1. Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el camino definido por $\gamma(t) = (t, t \operatorname{sen}(1/t))$ si $t > 0$, y $\gamma(0) = (0,0)$. Probar que γ es continuo y de clase C^1 a trozos en $[0,1]$ y de hecho es diferenciable de clase C^∞ en $(0,1]$, pero su longitud es infinita.

2. *Reparametrización de curvas por la longitud de arco.*
Un camino $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es *regular* si es de clase C^1 y tiene la propiedad de que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t. Se dice que un camino regular γ está *parametrizada por la longitud de arco* si

$$\int_a^t \|\gamma'(s)\| ds = t - a$$

para todo $t \in [a,b]$, es decir, el parámetro $t-a$ coincide con la longitud de la curva recorrida por γ desde el instante $s = a$ hasta el tiempo $s = t$. Comprobar que γ está parametrizado por la longitud de arco si y sólo si

$$\|\gamma'(t)\| = 1$$

para todo $t \in [a,b]$, es decir, el vector velocidad del camino tiene longitud constante e igual a 1. Después, demostrar que todo camino regular puede reparametrizarse por la longitud de arco. Es decir, si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino regular, existe otro camino $\beta : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizado por la longitud de arco tal que α y β tienen la misma traza y la misma longitud.
Indicación: Defínase

$$u = u(t) = \int_a^t \|\alpha'(s)\| ds;$$

entonces, como $u'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ para todo t, la función $u = u(t)$ tiene una inversa diferenciable $u^{-1} : [0,l] \longrightarrow [a,b]$. Póngase entonces $\beta = \alpha \circ u^{-1}$, y compruébese que β y α tienen la misma traza, y $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo s.

3. Calcular:

(a) $\int_\gamma xdy + ydx$, si γ es un camino cualquiera que une $(-1,2)$ con $(2,3)$.
(b) $\int_\gamma yzdx + zxdy + xydz$, si γ es un camino cualquiera de $(1,1,1)$ a $(1,2,3)$.

4. Probar que dos funciones de potencial para un mismo campo vectorial (definido en un abierto conexo) difieren a lo sumo en una constante.

5. Calcular una función de potencial para el campo $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = (3x^2 + y, e^y + x).$$

6. Sea $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el campo definido por

$$F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}).$$

(a) Calcular $\int_\gamma F$, siendo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Deducir que F no es conservativo.
(b) Encontrar un abierto $A \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $F_{|A}$ sea conservativo.

7. Comprobar que el campo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$$

es conservativo, y calcular un potencial.

8. Sea F un campo vectorial definido en un abierto de $\mathbb{R}^3$. Comprobar que se satisface la condición de simetría del teorema de caracterización de los campos conservativos,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$

$i, j = 1, 2, 3$, si y sólo si $\mathrm{rot} F = 0$.

9. Sea $\sigma : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el camino definido por

$$\sigma(t) = (e^{t-1}, \sin \frac{\pi}{t}).$$

Calcular la integral de linea

$$\int_\sigma 2x \cos y dx - x^2 \sin y dy.$$

10. Demostrar que el campo gravitatorio de la tierra es irrotacional, y calcular una función de potencial suya.

11. Sea $F(x, y, z) = (2xyz + \sin x, x^2 z, x^2 y)$. Encontrar una función f tal que $\nabla f = F$.

12. Calcular $\int_\gamma F \cdot ds$, donde $\gamma(t) = (\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, y F es el campo del ejercicio anterior.