HOJA 12. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F, CURSO 2006-2007

1. Utilizar el teorema de Green para calcular $\int_C (y^2 + x^3)dx + x^4 dy$, donde

1. C es la frontera de $[0,1] \times [0,1]$, orientado positivamente.
2. C es la frontera del cuadrado de vértices (a,b) con $|a| = |b| = 2$, orientado negativamente.

2. Calcular $\int_C Pdx + Qdy$, donde $P(x,y) = xe^{-y^2}$, $Q(x,y) = -x^2 ye^{-y^2} + 1/(x^2+y^2)$, y C es la frontera del cuadrado de lado $2a$ determinado por las desigualdades $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$, orientado positivamente.

3. Usar la exprexión para el área encerrada por una curva que proporciona el teorema de Green para dar otra demostración de la fórmula del área del recinto delimitado por una curva en coordenadas polares.

4. Calcular el área del trébol de cuatro hojas $\rho = 3 \sin 2\theta$.

5. Si C es una curva cerrada simple regular a trozos en $\mathbb{R}^2$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, el *vector normal unitario exterior* a C se define por

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \big(y'(t), -x'(t)\big).$$

Nótese que N es ortogonal al vector tangente o velocidad de la curva, $V(t) = (x'(t), y'(t))$. Consideremos estos vectores sumergidos en $\mathbb{R}^3$. Diremos que C está orientada positivamente si el producto vectorial $N \times V$ (que tiene la dirección del eje z en este caso) tiene coordenada z positiva (es decir, $N \times V$ apunta hacia arriba) para cada t. Comprobar que esta definición corresponde intuitivamente a decir que C se recorre en el sentido contrario al de las agujas del reloj, o bien que si recorremos C con la orientación positiva entonces N apunta hacia afuera de la región interior a C, y que dicha región interior queda siempre a mano izquierda según se va recorriendo C.

6. En las mismas hipótesis del teorema de Green, si $F = (P, Q)$ y definimos

$$\mathrm{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

comprobar que el teorema de Green se expresa diciendo que

$$\int_{\partial D} F \cdot N ds = \int_D \mathrm{div} F dx dy,$$

donde $F \cdot N$ denota el campo escalar obtenido del producto escalar del campo F con el vector normal unitario N exterior a C. A esta forma del teorema de Green también se le llama *teorema de la divergencia* en el plano.

7. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto, sea C una curva cerrada simple regular a trozos, sea D la parte interior de C, y supongamos que $D \cup C \subset A$. Sean $u, v \in C^2(A)$. Denotamos:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = div(\nabla u)$$
$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}).$$

sea N la normal unitaria exterior en C. Denotamos $\frac{\partial u}{\partial N} = \nabla u \cdot N$ (producto escalar), la *derivada normal* de u según C (esto no es más que la derivada direccional de u en la dirección de N).

(a) Demostrar las identidades de Green:

$$\int_D v\Delta u + \int_D \nabla u \cdot \nabla v = \int_C v\frac{\partial u}{\partial N}$$
$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v) = \int_C (v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}).$$

(b) Supongamos ahora que u es armónica en D, es decir, $\Delta u = 0$ en D. Demostrar que si u se anula en C entonces u es idénticamente nula en D. Deducir también de (a) que si tanto u como v son armónicas en D entonces

$$\int_C v\frac{\partial u}{\partial N} = \int_C u\frac{\partial v}{\partial N}.$$

8. Sea D un recinto como este:

solo que con n agujeros delimitados por curvas cerradas simples regulares a trozos, en lugar de solamente tres. Probar la siguiente generalización del teorema de Green: para todo campo $F = (P, Q)$ de clase C^1 en D se tiene que

$$\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_C (Pdx + Qdy) - \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} (Pdx + Qdy).$$

Indicación: descomponer el conjunto D en unión de recintos simplemente conexos a los que se puede aplicar el teorema de Green; usar inducción sobre n.

9. *Invariancia de una integral de línea al deformar el camino.* Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial C^1 en un conjunto abierto y conexo A del plano $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en todo A. Sean C_1 y C_2 dos curvas cerradas simples regulares a trozos dentro de A y que satisfagan las siguientes condiciones:

1. C_2 está en la región interior a C_1.
2. Los puntos interiores a C_1 que son exteriores a C_2 pertenecen a A.

Probar que entonces se tiene que

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy,$$

siempre que ambas curvas se recorran en el mismo sentido. Nótese que cuando A es simplemente conexo (no tiene agujeros) esto implica que $\int_\gamma F \cdot ds$ es independiente del camino.
Indicación: Usar el problema anterior ($n = 1$).

10. *El número de giros (the winding number).* Sea C una curva regular a trozos en $\mathbb{R}^2$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, . Se define el número de giros de γ con respecto de un punto $p = (x_0, y_0)$ *no* situado sobre la curva γ como

$$W(C,p) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dt.$$

Puede demostrarse que $W(C, p)$ es siempre un número entero. En el caso en que C sea una curva cerrada simple, probar que $W(C,p) = 0$ si p está en la región exterior a C, mientras que $W(C,p) = 1$ si p es interior a C y esta curva está orientada positivamente, y $W(C,p) = -1$ si p es interior a C y C está orientada negativamente. *Indicación:* usar el problema anterior, tomando una de las dos curvas como una circunferencia adecuada.

11. Para $(x, y) \neq (0, 0)$ consideramos $\varphi(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ y $F = (\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x})$. Sea C una curva de Jordan regular a trozos, contenida en $\{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 25\}$. Hallar los posibles valores de la integral de F a lo largo de C.

12. ¿Existe alguna curva cerrada simple en el plano que tenga una longitud de seis metros y que delimite un área de 3 metros cuadrados?