HOJA 13. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F, CURSO 2006-2007

1. Calcular el área de las superficies siguientes:

(a) La parte de la esfera unitaria dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

(b) La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = Ry$.

(c) La parte del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

2. Sean $0 < b < a$. Calcular el área del toro obtenido al girar la circunferencia del plano xz con centro en $(a, 0, 0)$ y radio b en el plano xz alrededor del eje z. Las ecuaciones paramétricas del toro son:

$$x = (a + b\cos v)\cos u$$
$$y = (a + b\cos v)\sin u$$
$$z = b\sin v,$$

con $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Hallar también la mormal exterior unitaria a la superficie del toro. En el dibujo, $a = 5$, y $b = 1$.

3. En los siguientes casos, calcular la integral de f sobre la superficie S:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

(b) $f(x, y, z) = xyz$; S es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0$, $(0, 1, 1)$.

(c) $f(x, y, z) = z$; $S = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Determinar la masa de una lámina circular de radio R, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al centro, y vale 1 en el borde.

5. En los siguientes casos, calcular la integral del campo F sobre la superficie S.

(a) $F(x, y, z) = (x, y, -y)$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1; 0 \leq z \leq 1\}$ orientada con la normal exterior.

(b) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$; S es la superficie del tetraedro limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, orientada con la normal exterior.

(c) $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$; $S = \{(x, y, z) : z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2\}$, orientada con la normal exterior.

(d) $F(x, y, z) = (x, y, z)$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, orientada con la normal exterior.

6. Consideramos las superficies $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, $S_2 = \{(x, y, z) : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1, z \geq 1\}$ y $S = S_1 \cup S_2$. Sea el campo $F(x, y, z) = (zx+z^2y+x, z^3xy+y, z^2x^2)$. Calcular

$$\int_S rotF.$$

7. Demostrar que si S es una superficie sin borde (por ejemplo, una esfera, o un toro en $\mathbb{R}^3$) entonces

$$\int_S \text{rot}F \cdot dS = 0$$

para todo campo vectorial F de clase C^1 en S. *Indicación:* Cortar y pegar.

8. Utilizar el teorema de la divergencia para calcular $\int_S F$, donde $F(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$, y S consta de:

$$\{x^2+y^2=1, -1<z<1\} \cup \{x^2+y^2 \leq 1, z=1\} \cup \{x^2+y^2 \leq 1, z=-1\}.$$

9. Consideramos $f(x,y,z) = x^2+2xy+z^2-3x+1$, $F(x,y,z) = (e^{-xy}+z, z\sin y, x^2-z^2+y^2)$, y sea $V = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 3-x^2-y^2, x^2+y^2+z^2 \geq 4z-3\}$. Calcular

$$\int_{\partial V} \nabla f + rotF.$$

10. Sean $V = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$, $S = \{(x,y,z) : z = 1-x^2-y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, y sea C el borde de S.

(a) Calcular el área de S.

(b) Calcular el volumen de V.

(c) Calcular $\int_C F$, donde $F(x,y,z) = (1-2z, 0, 2y)$.

11. Sea $B(t)$ una bola euclídea de radio $t>0$ con centro en un punto $a \in \mathbb{R}^3$, y sea $S(t)$ la esfera correspondiente. Sea $F : B(1) \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1, y sea $\mathbf{n} = \mathbf{n}_t$ la normal unitaria exterior a $S(t)$. Probar que

$$\text{div}F(a) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\text{vol}(B(t))} \int_{S(t)} F \cdot \mathbf{n} dS.$$