# HOJA 2. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F, CURSO 2006-2007

**1.** Probar que si $E_1, ..., E_k$ tienen contenido cero en $\mathbb{R}^n$ entonces $\bigcup_{j=1}^{k} E_j$ también tiene contenido cero.

**2.** Demostrar que si $E$ tiene contenido cero en $\mathbb{R}^n$ entonces su adherencia $\overline{E}$ también lo tiene.

**3.** Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero. ¿Es cierto que su adherencia también tiene medida cero?

**4.** Demostrar que en la definición de contenido cero y de medida cero pueden sustituirse los rectángulos cerrados por rectángulos abiertos.

**5.** Demostrar también que pueden sustituirse los rectángulos por cubos en la definición de contenido cero y medida cero.

**6.** Probar que la recta real, considerada como subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, tiene medida cero.

**7.** Demostrar que un rectángulo *no* tiene medida cero. Concluir que si $A$ tiene medida cero, entonces $A$ tiene interior vacío. El recíproco no es cierto; ver el problema 12.

**8.** Probar que si $A$ es un conjunto con volumen y $v(A) > 0$ entonces $A$ tiene interior no vacío.

**9.** Probar que si $A$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces $A$ tiene medida cero si y sólo si tiene volumen cero.

**10.** Demostrar que si $A$ tiene volumen entonces su volumen es cero si y sólo si $A$ tiene medida cero.

**11.** Sea $C$ el conjunto de Cantor en $\mathbb{R}$. Probar que $C$ tiene medida cero. Por tanto, existen conjuntos no numerables que tienen medida cero.

**12.** *Existen compactos cuyo interior es vacío y que* no *tienen medida cero.* De hecho, puede encontrarse un subconjunto compacto $K$ del intervalo $[0, 1]$ con esta propiedad. En particular $K$ no tiene volumen, ya que todo conjunto con volumen cuyo interior sea vacío debe tener volumen cero.
*Indicación:* Modificar apropiadamente la construcción del conjunto de Cantor.

**13.** *Existen abiertos que no tienen volumen.* Utilizando el ejercicio anterior, encontrar un subconjunto abierto del intervalo $(0, 1)$ que no tenga volumen.

**14.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitziana, es decir, $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ para todo $x, y \in A$. Probar que si $E \subset A$ tiene medida cero (respectivamente, contenido cero), entonces $f(E)$ también tiene medida cero (resp., contenido cero).

**15.** Sean $U$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^1$. Probar que si $E \subset U$ tiene medida cero, entonces $f(E)$ también tiene medida cero.
*Indicación:* Expresar $U$ como unión de compactos, y utilizar el hecho de que $f$ es Lipschitz sobre cada uno de estos compactos y el ejercicio anterior para obtener el resultado.

**16.** Demostrar que toda recta en $\mathbb{R}^2$ y todo plano en $\mathbb{R}^3$ tienen medida cero.

**17.** Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. Demostrar que su gráfica $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ tiene contenido cero en $\mathbb{R}^2$. Después, generalizar este resultado para funciones integrables sobre rectángulos de $\mathbb{R}^n$.

**18.** Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar que su gráfica $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$. *Indicación:* Utilizar el ejercicio anterior.

**19.** Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase $C^1$. Probar que la imagen de $\gamma$ tiene contenido cero.

**20.** Sean $U$ un abierto de $\mathbb{R}^m$, y $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase $C^1$, con $m < n$. Probar que entonces $g(U)$ tiene siempre medida cero en $\mathbb{R}^n$.
*Indicación:* considerar $\mathbb{R}^m$ como subespacio de $\mathbb{R}^n$, y aplicar apropiadamente el problema 15.