HOJA 3. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F, CURSO 2006-2007

1. Sea $h : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un abierto W de $\mathbb{R}^n$, y sea $O(h,x)$ la oscilación de h en x, esto es

$$O(h,x_0) = \text{ínf}\{\ \sup\{|h(x)-h(y)| : x,y \in U\}\ :\ U \text{ es un entorno de } x_0\}.$$

Probar que h es continua en x_0 si y sólo si $O(h,x_0)=0$.

2. Sea $D_\varepsilon = \{x \in B : O(g,x) \geq \varepsilon\}$, donde g es una función acotada definida en un rectángulo B. Demostrar que D_ε es compacto para cada $\varepsilon > 0$.

3. Sea g una función acotada definida en un rectángulo abierto B, y para cada abierto U contenido en B definamos $M_U(g) = \sup\{g(z) : z \in U\}$ y $m_U(g) = \text{ínf}\{g(z) : z \in U\}$. Probar que

$$M_U(g) - m_U(g) = \sup\{|g(z)-g(y)| : y,z \in U\},$$

y por tanto

$$O(g,x) = \text{ínf}\{M_U(g) - m_U(g) \mid U \text{ entorno abierto de } x\}.$$

4. Sea S un rectángulo cerrado, y $G_1, ..., G_k$ un recubrimiento finito de S por conjuntos abiertos. Probar que existe una partición P de S tal que cada subrectángulo de P está contenido en alguno de los abiertos G_i. *Indicación:* para cada $x \in S$ existen $i \in \{1,...,k\}$ y $\delta_x > 0$ tales que $B_\infty(x,\delta_x) \subseteq G_i$; entonces $S \subseteq \bigcup_{x\in S} B_\infty(x,\delta_x)$. Usar ahora que S es compacto, y recordar que las bolas $B_\infty(x,r)$ tienen forma de cubos.

5. Demostrar que la frontera de un rectángulo tiene siempre volumen cero.

6. Demostrar que si A y B tienen volumen, entonces $A\cup B$, $A \cap B$ y $A \setminus B$ también tienen volumen.

7. Sea $f(x,y)=1$ para $x \neq 0$, y $f(0,y)=0$ para todo y. Probar que f es integrable en cualquier rectángulo de $\mathbb{R}^2$, y hallar estas integrales.

8. Sea $f(x) = \text{sen}(1/x)$ para $x>0$, y $f(0)=0$. ¿Es f integrable en $[0,1]$?

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \text{sen}\frac{1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x^2 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Probar que f es integrable en el círculo unidad abierto, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$.

10. Para cada $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definamos

$$\lambda(B) = \text{ínf}\{\sum_{i=1}^{\infty} v(S_i) \mid (S_i) \text{ recubrimiento de } B \text{ por rectángulos abiertos}\}.$$

Probar que si B tiene volumen entonces $\lambda(B) = v(B)$.

11. Si (B_i) es una sucesión de conjuntos con volumen que son disjuntos dos a dos y $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ tiene volumen, entonces

$$v(B) = \sum_{i=1}^{\infty} v(B_i).$$

Indicación: Usar el problema anterior.

12. Sea $r_1, r_2, ...$ una enumeración de los racionales de $[0,1]$, y sea

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k - \frac{1}{5^k}, r_k + \frac{1}{5^k})$$

Probar que U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ que *no* tiene volumen.

13. Sea A un subconjunto abierto y con volumen de $\mathbb{R}^n$, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f(x) \geq 0$ para todo x. Supongamos que existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) > 0$. Demostrar que entonces $\int_A f > 0$.

14. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $\int_A |f - g| = 0$. Probar que entonces $f(x) = g(x)$ para casi todo x, es decir, salvo en quizás en un subconjunto de A de medida cero.