HOJA 4. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F, CURSO 2006-2007

1. Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Probar que la función producto fg es también integrable en A.

2. Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables Probar que las funciones $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son también integrables en A.

3. Demostrar que si A y B tienen volumen, entonces $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \setminus B$ también tienen volumen. *Indicación*: Usar los problemas anteriores y el hecho de que

$$1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B,\ 1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B \text{ y } 1_{A\setminus B} = 1_A(1 - 1_B).$$

4. Sean $A_1, A_2, ...$ una familia numerable de conjuntos con volumen. £Es cierto que su unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ también tiene volumen?.

5. Sea f una función integrable sobre cualquier intervalo acotado de $\mathbb{R}$. Definamos $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ cuando $a \geq b$. Probar que, para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

6. Sean A y B conjuntos con volumen tales que $A \cap B$ tiene volumen cero. Probar que

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B).$$

7. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $v(A) > 0$ y que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in A$. Demostrar que $\int_A f < \int_A g$.

8. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \setminus C$, donde C es un subconjunto de A que tiene medida cero. Probar que entonces $\int_A f = \int_A g$.

9. Sean $f(x, y) = e^{\sin(x+y)}$, $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Probar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_D f(x, y)dxdy \leq e.$$

10. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida sobre un conjunto abierto A; para cada $\varepsilon > 0$ sea B_ε la bola cerrada de radio ε centrada en un punto $x_0 \in A$. Probar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{v(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} f(x)dx = f(x_0).$$

11. Probar que en el teorema del valor medio integral no hace falta suponer que A sea compacto.

12. Si $A \subseteq A_1 \cup ... \cup A_N$, donde todos los conjuntos tienen volumen, probar que $v(A) \leq \sum_{i=1}^{N} v(A_i)$.

13. Probar que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, donde A es un conjunto abierto con volumen, y es $\int_B f = 0$ para cada $B \subseteq A$ con volumen, entonces $f = 0$.

14. Sea $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, $f \geq 0$. Si $A \subseteq B$ y f es integrable en A, entonces $\int_A f \leq \int_B f$. +Es esto cierto si no se supone $f \geq 0$?

15. Sean $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables definidas sobre un rectángulo de $\mathbb{R}^n$. Sea D un subconjunto denso de S, y supongamos que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$. Probar que $\int_S f \leq \int_S g$.

16. Deducir del problema anterior que si $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables definidas sobre un rectángulo de $\mathbb{R}^n$ y D es un subconjunto denso de S, de modo que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, entonces $\int_S f = \int_S g$.