HOJA 5. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F, CURSO 2006-2007

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x^4y+y^2)dydx$

(b) $\int_{0}^{1}\int_{e^x}^{e^{2x}} x\log ydydx$

(c) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\frac{arcseny}{y}} y\cos(xy)dxdy$

2. Expresar las integrales iteradas siguientes como integrales múltiples sobre un recinto, dibujar el recinto y cambiar el orden de intergración; finalmente, hallar el valor de las integrales usando el orden de integración que dé lugar a los cálculos más simples.

(a) $\int_{-3}^{2}\int_{0}^{y^2}(x^2+y)dxdy$

(b) $\int_{1}^{2}\int_{0}^{\log x}(x-1)\sqrt{1+e^{2y}}dydx$

(c) $\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dydx$

(d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\cos x} y\sin xdxdy$

(e) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}(x+2y+3z)dzdydx$

(f) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{f(y)} xydxdy$, donde $f(y)=\text{mín}\{1,\log\frac{1}{y}\}$.

(g) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{(1-x^2)^{1/2}}(1-y^2)^{1/2}dxydx$

3. Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales iteradas:

(a) $\int_{0}^{a}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dxdy$

(b) $\int_{0}^{a}\int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{b} f(x,y)dydx$

(c) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dzdydx$

(d) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)dzdxdy$

4. *Diferenciación bajo el signo de la integral.* Sea $f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $[a,b]\times[c,d]$. Definamos

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx.$$

Probar que F es derivable y que

$$F'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Indicación: Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$F(u)=\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b(\int_c^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy+f(x,c))dx.$$

5. Sea $f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua con $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua en $[a,b]\times[c,d]$. Definamos

$$F(x,y)=\int_a^x f(t,y)dt.$$

(a) Calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$

(b) Si $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t,x)dt$, calcular $G'(x)$.

6. Calcular las integrales siguientes

(a) $\int_D x^2 y dxdy$, siendo D el triángulo de vértices $(0,0),(0,1)$ y $(1,0)$.

(b) $\int_D ye^{-xy}dxdy$, siendo D el cuadrado de vértices $(0,0),(0,1),(1,0)$ y $(1,1)$.

(c) $\int_D xdxdy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}, 0 \leq y \leq \sin x^2\}$.

(d) $\int_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$, siendo D el interior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(e) $\int_D |\max\{x,y\}|dxdy$, siendo $D = [-2,2] \times [-1,1]$.

7. Probar la siguiente generalización del corolario del teorema de Fubini. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado, y $\varphi, \psi : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funciones continuas tales que $\varphi_j(x) \leq \psi_j(x)$ para todo $x \in A$, $1 \leq j \leq m$. Sea

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in A,\ \varphi_j(x) \leq y_j \leq \psi_j(x),\ 1 \leq j \leq m\}.$$

Para cada $x \in A$ definamos $B_x \subset \mathbb{R}^n$ por

$$B_x = \{y \in \mathbb{R}^m : \varphi_j(x) \leq y_j \leq \psi_j(x),\ 1 \leq j \leq m\}.$$

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y definamos $f_x : B_x \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f_x(y) = f(x,y)$, y $g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \int_{B_x} f_x.$$

Entonces g es integrable sobre A, y

$$\int_D f = \int_A g.$$

8. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos con volumen, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Definamos

$$F(x,y) = f(x) + g(y), \text{ y } G(x,y) = f(x)g(y).$$

Hallar $\int_{A\times B} F(x,y)dxdy$ y $\int_{A\times B} G(x,y)dxdy$ en función de $\int_A f$, $\int_B g$, $v(A)$ y $v(B)$.

9. Hallar el volumen de la región acotada por $z = x^2 + 3y^2$, $z = 9 - x^2$.

10. Hallar el volumen de la región acotada por $x^2 + 2y^2 = 2$, $z = 0$, $x + y + 2z = 2$.

11. Sea A la región de $\mathbb{R}^3$ acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$. Calcular la integral $\int_A xdxdydz$.

12. Calcular la integral $\int_A ye^{-xy}dxdydz$, donde $A = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.