HOJA 6. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F, CURSO 2006-2007

1. Sea $A = [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Decidir si f es integrable en A.
(b) Calcular $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx$ si existe.
(c) Calcular $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy$ si existe.

2. ¿Es cierto que cualquier subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ tiene volumen cero cuando se le considera como subconjunto de $\mathbb{R}^3$?

3. Decidir si las functiones que siguen son integrables en los conjuntos indicados:

(a) $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

con $A = \{(x,y) : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \leq 1\}$.

(b) $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 + y^2 < 1/2 \quad \text{o bien} \quad y = 0; \\ x \sin(\frac{1}{y}) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y; \\ x & \text{si } y < x, \end{cases}$$

con $C = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

4. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$ e $y = 1$ y la superficie $z = x^2 + y^4$.

5. Calcular la integral $\int_A (xy)^2 \cos x^3 dxdy$, donde $A = [0,1] \times [0,1]$.

6. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones A determinadas por los límites de integración:

(a) $\int_0^1 (\int_1^{e^x} (x+y)dy)dx$;
(b) $\int_0^1 (\int_{x^3}^{x^2} ydy)dx$.

7. Sea D la región acotada por los ejes positivos x e y y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular $\int_D (x^2 + y^2)dxdy$.

8. Sea D la región dada como el conjunto de los (x, y) del plano tales que $-\varphi(x) \leq y \leq \varphi(x)$ y $a \leq x \leq b$, donde φ es una función continua no negativa en el intervalo $[a, b]$. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en D tal que $f(x, y) = -f(x, -y)$ para todo $(x, y) \in D$. Probar que

$$\int_D f(x, y)dxdy = 0.$$

9. Dibujar la región correspondiente a cada una de las sigientes integrales dobles, cambiar el orden de integración y evaluar la integral usando el orden que sea más adecuado:

(a) $\int_0^1 (\int_x^1 xydy)dx$
(b) $\int_0^1 (\int_{2-y}^1 (x+y)^2 dx)dy$
(c) $\int_{-1}^1 (\int_{|y|}^1 (x+y)^2 dx)dy$

10. Calcular $\int_W x^2 \cos z dxdydz$, donde W es la región acotada por los planos $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$ y $x + y = 1$.

11. Integrar $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ sobre la porción del primer octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, cortada por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

12. Utilizar integrales triples para hallar el volumen del sólido T de $\mathbb{R}^3$ limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ e inferiormente por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 3y^2$.