HOJA 7. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F, CURSO 2006-2007

1. Sea $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Estudiar la integrabilidad de las siguientes funciones sobre A, calculando $\int_A f$ cuando sea posible.

(a) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$
(b) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}$
(c) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+2xy+y^2}$

2. Estudiar la convergencia de la siguiente integral impropia

$$\int_A \frac{x}{y} dxdy,$$

donde A es la región del plano acotada por $x = 1$, $x = y$, $x = 2y$.

3. Sea A una región no acotada del plano que puede describirse como

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < \infty,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

donde $\varphi, \psi : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $\varphi \leq \psi$. Sea f una función continua y no negativa sobre A. Utilizar el teorema de Fubini y los resultados de este capítulo para probar que

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^\infty \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dydx.$$

Formular enunciados análogos para otro tipo de regiones no acotadas del plano $\mathbb{R}^2$ y del espacio $\mathbb{R}^3$.

4. Calcular la integral $\int_A xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$, donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

5. Usar el problema 3 para integrar e^{-xy} de dos maneras sobre la región $x \geq 0$, $1 \leq y \leq 2$. Concluir que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \log 2.$$

6. Probar que la integral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$ converge.

7. Sea A un abierto con volumen de $\mathbb{R}^n$. Probar que existe una sucesión (K_j) de conjuntos compactos con volumen tales que $K_j \subseteq K_{j+1}$ para todo j, y $A = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$. *Indicación:* los K_j pueden ser uniones finitas de cubos cada vez más pequeños y más numerosos.

8. Sean $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$. Probar que $\int_0^1 f$ y $\int_0^1 g$ convergen, y sin embargo $\int_0^1 fg$ diverge.