HOJA 8. PRÁCTICAS DE CÁLCULO INTEGRAL

GRUPO E+F , CURSO 2006-2007

1. Determinar el área de la región acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x^2$ e $y = 2x^2$, por medio del cambio de variables $u = xy$, $v = y/x^2$.

2. Hallar el volumen de la región determinada por la intersección del cono sólido $z^2 \geq x^2 + y^2$ y la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

3. Usar coordenadas cilíndricas para hallar el volumen del sólido T limitado superiormente por el plano $z = y$ e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

4. Demostrar que el volumen de un cono circular de radio de la base r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

5. Calcular

$$\int_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dxdydz,$$

donde D es la bola unidad de $\mathbb{R}^3$.

6. Utilizando coordenadas polares, calcular las integrales:

(a) $\int_D \sin(x^2 + y^2) dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(b) $\int_D |x + y| dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(c) $\int_D \log(x^2 + y^2) dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x^2 + y^2 \leq b^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.
(d) $\int_D (x^2 + y^2)^{-3} dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$.

7. (a) Hallar el área limitada por las curvas en polares: $\rho = a\cos\theta$ y $\rho = a(1 + \cos\theta)$; $(a > 0)$.
(b) Hallar el área limitada por la curva en polares: $\rho = a|\sin 3\theta|$; $(a > 0)$.
(c) Hallar el área limitada por la lemniscata: $(x^2 + y^2)^2 = 2a(x^2 - y^2)$; $(a > 0)$.

8. Se considera la transformación $\phi(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$; sea $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u^2 + v^2 \leq 9, u \geq 0, v \geq 0\}$. Determinar el conjunto $\phi(D)$ y calcular su área.

9. Se considera la transformación $\phi(u, v) = (x = u + v, y = v - u^2)$; sea D el triángulo de vértices $(0, 0), (2, 0)$ y $(0, 2)$ en el plano (u, v). Comprobar que ϕ es un cambio de variables alrededor de D. Determinar el conjunto $\phi(D)$ y calcular su área.

10. Utilizando cambios de variable, calcular:

(a) $\int_D (x^2 + y^2) dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}$.
(b) $\int_D \frac{x}{4x^2+y^2} dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$.
(c) $\int_D (x^2 + y^2) dxdy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1, |y| \geq 1\}$.

11. Calcular:

(a) $\int_V (x^2 + y^2) dxdydz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2z \leq 4\}$.
(b) $\int_V z dxdydz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
(c) $\int_V z(x + y) dxdydz$, donde V está limitado por: $z = 0$, $z = a$, $xy = a^2$, $2(x + y) = 5a$, $(a > 0)$.
(d) $\int_V e^x dxdydz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
(e) $\int_V z \sin(x^2 + y^2) dxdydz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid o \leq (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}\}$, $(R > 0)$.
(f) $\int_V |z| dxdydz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq x^2\}$.

(g) $\int_V (x^2+y^2+z^2)^{-2} dxdydz$, donde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$.

12. Calcular el volumen de los cuerpos siguientes:

(a) El cuerpo limitado por los cilindros $x^2+y^2=1$ y $x^2+z^2=1$.
(b) El cuerpo limitado por la superficie $z = x^2+y^2$ y los planos $z=2$ y $z=4$.
(c) El cuerpo limitado por una esfera de radio R y un cono de ángulo en el origen 2α, si el vértice del cono está en el centro de la esfera.
(d) El cuerpo limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el cilindro $(x-a/2)^2+y^2=a^2/4$.
(e) El cuerpo limitado por las superficies $x+y=z$; $xy=1$, $y=x$, $y=2x$, $z=0$.

13. Calcular, mediante una transformación previa de coordenadas, las integrales:

(a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2} dzdydx$ (a cilíndricas).
(b) $\int_0^{2R} \int_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) dzdydx$ (a esféricas).

14. Hacer un cambio de variables a coordenadas polares y usar los teoremas sobre integrales impropias para calcular $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$. Después, utilizar el teorema de Fubini para probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

15. Enunciar y probar una versión del teorema del cambio de variables para difeomorfismos C^1 entre abiertos posiblemente no acotados e integrales impropias.

16. ¿Para qué valores de p es la función

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^p$$

integrable sobre B, donde B es la bola unidad euclidea de $\mathbb{R}^3$? ¿Para cuáles lo es sobre $\mathbb{R}^3 \setminus B$?

17. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ la bola unidad abierta en el plano. Hallar el valor de las siguientes integrales impropias:

(a) $\int_A \left[1-\sqrt{x^2+y^2}\right]^p dxdy$, para $p < -1$.
(b) $\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$.

18. Deducir fórmulas para el volumen de cuerpos de revolución en $\mathbb{R}^3$. Después calcular el volumen del toro engendrado al girar una circunferencia de radio r y centro $(a,0,0)$ situada en el plano $y=0$ alrededor del eje z (se supone $0 < r < a$).