Medida cero y contenido cero.

Se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene medida cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una coleccion contable (numerable o finita) de rectángulos $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, y $\sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \leq \varepsilon$.

Se dice que A tiene contenido cero (o volumen cero) si para cada $\varepsilon > 0$ existe una coleccion *finita* de rectángulos $Q_1, ..., Q_k$ tales que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} Q_j$, y $\sum_{j=1}^{k} v(Q_j) \leq \varepsilon$. Esto equivale a decir que A tiene volumen (i.e. 1_A es integrable) y $v(A) = 0$.

En estas definiciones pueden sustituirse los rectángulos cerrados por rectángulos cerrados, o por cubos (abiertos o cerrados), a discreción del usuario.

Propiedades

1. Si A tiene contenido cero entonces también tiene medida cero. El recíproco no es cierto en general. Sin embargo:
2. Si K es compacto entonces K tiene medida cero si y sólo si K tiene contenido cero. También:
3. Si A tiene volumen entonces A tiene medida cero si y sólo si A tiene contenido cero.
4. Si A tiene medida cero (resp. contenido cero) y $B \subseteq A$ entonces B también tiene medida cero (resp. contenido cero).
5. La unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.
6. La unión finita de conjuntos de contenido cero tiene contenido cero.
7. Si A tiene contenido cero entonces su adherencia $\overline{A}$ también tiene contenido cero. La propiedad análoga para medida cero no es cierta ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$).
8. Si A tiene volumen y $v(A) > 0$ entonces A tiene interior no vacío. O lo que es lo mismo: si A tiene volumen e interior vacío entonces $v(A) = 0$.
9. Si A tiene medida cero entonces A tiene interior vacío. El recíproco no es cierto en general: existen compactos con interior vacío que no tienen medida cero (y en particular tampoco tienen volumen).
10. Existen abiertos que no tienen volumen.
11. Existen conjuntos no numerables que tienen medida cero y contenido cero (conjunto de Cantor).
12. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitziana. Entonces, si $E \subseteq A$ tiene medida cero (resp. contenido cero) en $\mathbb{R}^n$, su imagen $f(E)$ también tiene medida cero (resp. contenido cero) en $\mathbb{R}^n$.
    Recuérdese que f es Lipschitziana en A si existe $M > 0$ tal que $\|f(x)-f(y)\| \leq M\|x-y\|$ para todos $x, y \in A$. Cuando f es diferenciable y A es *convexo* esto equivale a decir que f tiene derivada acotada en A.
13. Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Si $E \subset U$ tiene medida cero, entonces $f(E)$ también tiene medida cero.
    Es importante aquí que la dimensión del dominio de f sea la misma que la de su imagen. Por ejemplo, existen funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 que no transforman conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero (considérese $f(x, y) = x$; $E = \mathbb{R} \times \{0\}$ tiene

medida cero en $\mathbb{R}^2$, pero $f(E) = \mathbb{R}$ no tiene medida cero en $\mathbb{R}$). Cuando la dimensión del espacio de llegada es mayor que la del de salida, ocurre lo siguiente:

14. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^m$, y $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1, con $m < n$. Entonces $g(U)$ tiene siempre medida cero en $\mathbb{R}^n$. En particular:
15. Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva de clase C^1 entonces su traza tiene medida cero y contenido cero en $\mathbb{R}^2$. Esto no es cierto si sólo se pide que f sea continua (curvas de Peano...)
16. La gráfica de una función integrable $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$. En particular, si una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces su gráfica tiene medida cero en $\mathbb{R}^{n+1}$.
17. Una función es integrable si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad de su extensión canónica a un rectángulo tiene medida cero (teorema de Lebesgue).
18. Un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene volumen si y sólo si su frontera ∂A tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$.
19. Si f es integrable y A tiene medida cero, entonces $\int_A f = 0$.
20. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Supongamos que $\int_A |f - g| = 0$. Entonces $f(x) = g(x)$ para casi todo x, es decir, salvo quizás en un subconjunto de medida cero de A.