ÁLGEBRA LINEAL
MATERIAL COMPLEMENTARIO

(al libro de L. Merino y E. Santos, *Álgebra lineal con métodos elementales*, Thomson, 2006)

EDUARDO AGUIRRE

Curso 2016 - 17

Facultad de C.C. Matemáticas, U.C.M.

GRUPO DOBLES GRADOS en Informática-Matemáticas y en Matemáticas-Físicas

INTRODUCCIÓN AL CURSO

• Bibliografía BÁSICA:
[MS] L. Merino, E. Santos, 'Algebra lineal con métodos elementales', Thomson 2006
Se recomienda NUMERAR los resultados recuadrados en gris en este libro (p.ej., el primer Lema de la pág. 20 sería el Lema I.2.4.1, el Teorema de la pág. 21 sería el Teor. I.2.4.3)
Bibliografía COMPLEMENTARIA:
J. F. Fernando, J. M. Gamboa, J. M. Ruiz, 'Algebra lineal', Sanz y Torres 2010
M. Castellet, I. Llerena, 'Algebra lineal y Geometría', Reverté 2000
J. Rojo, I. Martín, 'Ejercicios y Problemas de Algebra lineal', Schaum's (McGraw-Hill) 2005

• Materiales en el Campus Virtual (también en www.ucm.es/UCM/Centros/Departamentos/Geometría y Topología/Personal/EA):
Fichero PLAN ≡ 'PLAN CURSO AL16' (pdf)
Fichero MATCOMPL ≡ 'MATERIAL COMPLEMENTARIO AL16' (pdf), este fichero

• Plan del curso: 1^o cuatrimestre: Caps. I y II de [MS]. 2^o cuatrimestre: Caps. III (excepto III.3.4), IV (excepto Sección IV.3), V y VI (excepto VI.1.6-VI.1.13 y VI.3.10-VI.3.11)

• Clases TEÓRICAS (41+41 horas). Asistencia? (no es necesario tomar apuntes, no se pasa lista). En el fichero PLAN se indica cuándo se va a ver cada apartado de [MS]

Clases PRÁCTICAS (26+29 horas, con DESDOBLE del grupo en dos subgrupos). Se trata de hacer unos 200 Ejercicios propuestos en [MS], más unos 100 Ejercicios Adicionales (propuestos en este fichero MATCOMPL, más adecuados al nivel exigido en el curso).

En el fichero PLAN se indica cuándo cada ejercicio resulta 'accesible'. En las clases prácticas se irán haciendo los ejercicios (con una semana de retraso respecto a cuando resulten 'accesibles'). No es lo mismo intentar hacer problemas que estudiar problemas resueltos!!

• Exámenes: Parcial 1 (febrero), Parcial 2 (junio) y Finales de junio y septiembre. Las fechas están ya fijadas (consultar calendario).

Cada examen constará de dos partes: Cuestiones (3 puntos, SIN libros) y Ejercicios (7 puntos, CON el libro [MS] y apuntes propios).

Para APROBAR UN EXAMEN habrá que sacar AL MENOS 0,6 puntos (1/5 de la nota máxima) en las Cuestiones y al menos 5 puntos en total.

Por tratarse de una asignatura anual, la aprobación del Parcial 1 no supone (en realidad) eliminar la materia correspondiente al mismo.

• Dos VÍAS para aprobar el curso:

(A) APROBAR POR PARCIALES / APROBAR UN FINAL:

Si $\boxed{P_1}$ y $\boxed{P_2}$ son las notas obtenidas en cada uno de los Parciales, la nota por Parciales $\boxed{P}$ será $P = P_2$ (si sólo el Parcial 2 está suspenso) o $P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ (en cualquier otro caso).

En el Final de junio, quien tenga sólo un Parcial suspenso podrá optar (sobre la marcha) por examinarse sólo de dicho Parcial (habrá preguntas específicas para ello). En tal caso, la nota por exámenes $\boxed{E}$ será $E = P$ (con P como antes, pero con la mejor nota de cada parcial).

Cualquier estudiante puede presentarse al Final de junio COMPLETO, en el que supongamos obtiene una nota $\boxed{F}$. Si ya había aprobado por Parciales, la nota por exámenes será: $E = \text{máx}\{F, P\}$. Así, el Final de junio completo permite SUBIR (PERO NO BAJAR) NOTA. Si no había aprobado por Parciales, $E = F$.

La calificación en junio $\boxed{J}$ será $J = E$. La calificación en septiembre vendrá dada por la nota del Final de septiembre.

(B) La misma (A) pero modulada por EVALUACIÓN CONTINUA (sólo en junio):

A lo largo del curso habrá $N =$?? (el valor de N está por determinar) CONTROLES SORPRESA (de 45 minutos de duración) a realizar durante N clases prácticas.

Se hará la media $\boxed{M}$ de las notas obtenidas en los controles (que serán 0 si no se entrega / no se asiste), desechando la peor de ellas y dividiendo la suma de las $N-1$ restantes por $N-1$.

La calificación en junio $\boxed{J}$ será: $J = \frac{1}{100}(35 \cdot M + 65 \cdot E)$ (si $M \geq E \geq 3,5$) o $J = E$ (en cualquier otro caso). Así, la evaluación continua NO PERJUDICA a la nota por exámenes. La calificación en septiembre vendrá dada como en (A) por la nota del Final de septiembre.

• TUTORÍAS: aparte del horario oficial, cita previa (día y hora a convenir) con pequeños grupos de 3 o 4 estudiantes.

Se garantiza que NADA (de las dudas o carencias que allí se pongan de manifiesto) será tenido en cuenta para la evaluación.

Al agruparse, atender a la compatibilidad horaria (listas de grupos cuanto antes!!)

Las Notas que siguen completan algunas demostraciones del libro [MS]

Los Ejercicios Adicionales, que siguen a cada capítulo, NO aparecen en [MS]. Los marcados con un asterisco * se apartan algo del objetivo central de la asignatura y NO serán resueltos (en principio) a lo largo del curso. Se incluyen por el interés de su enunciado y porque (estrictamente hablando) son accesibles con el material dado en el curso. Algunos de ellos (los marcados con ^{F}) pueden además resultar interesantes a los estudiantes del doble grado en Matemáticas y Física.

Las Excursiones del final NO constituyen material del curso y NO son objeto de evaluación.

NOTA PREVIA (Grupos, Anillos y Cuerpos)

A. Definiciones

Un conjunto $\mathbb{K}$ con dos operaciones internas, convencionalmente denotadas $+$ ('suma') y $\cdot$ ('producto'), es un cuerpo si cumple $(1) - (10)$:

En primer lugar, $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo conmutativo (o abeliano), esto es, verifica:
(1) Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$, para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$
(2) Existe elemento neutro, denotado $\boxed{0} \in \mathbb{K}$, tal que $a + 0 = a = 0 + a$, para todo $a \in \mathbb{K}$
(3) Conmutativa: $a + b = b + a$, para todos $a, b \in \mathbb{K}$
(4) Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe elemento opuesto, denotado $\boxed{-a} \in \mathbb{K}$, tal que $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

Además $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ verifica (se dice que $\cdot$ es distributiva respecto de $+$):
(5) Distributiva por la izquierda: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$
(6) Distributiva por la derecha: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$

Finalmente, $(\mathbb{K}, \cdot)$ verifica (NO es un grupo conmutativo!!):
(7) Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$
(si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ verifica $(1) - (7)$, se dice que es un anillo)
(8) Existe elemento unidad, denotado $\boxed{1}$ ($\neq 0$, ver luego) $\in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$, para todo $a \in \mathbb{K}$
(si un anillo verifica (8), se dice que es un anillo con unidad)
(9) Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$, para todos $a, b \in \mathbb{K}$
(si un anillo verifica (9), se dice que es un anillo conmutativo)
(10) Para cada a ($\neq 0$, ver luego) $\in \mathbb{K}$, existe elemento inverso, denotado $\boxed{a^{-1}} \in \mathbb{K}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$

(Ejemplos 1) Con la suma y producto usuales, los conjuntos $\mathbb{Q}$ (racionales), $\mathbb{R}$ (reales) y $\mathbb{C}$ (complejos) son cuerpos. El conjunto $\mathbb{Z}$ (enteros) es un anillo conmutativo con unidad (NO es un cuerpo, falla (10)) y el conjunto $\{\dot{2}\}$ (enteros pares) es un anillo conmutativo sin unidad (fallan (8) y (10)).

(Ejemplos 2) Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo, los conjuntos $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ (polinomios en una indeterminada con coeficientes en $\mathbb{K}$) y $\mathfrak{M}_{n>1}(\mathbb{K})$ (matrices cuadradas de orden $n > 1$ sobre $\mathbb{K}$) son (con las definiciones 'naturales' de suma y producto) anillos con unidad, conmutativo el primero y no conmutativo el segundo.

Ninguno de los dos es un cuerpo: polinomios (respectivamente, matrices cuadradas) no idénticamente nulos pueden anularse para algún valor de la indeterminada (respectivamente, tener alguna fila nula) y carecer de inverso.

B. Observaciones

(i) En un grupo el elemento neutro es único $[0' \overset{(2)}{=} 0' + 0 \overset{(2)}{=} 0]$ y el elemento opuesto de uno dado es único $[\sim a \overset{(2)}{=} (\sim a) + 0 \overset{(4)}{=} (\sim a) + (a + (-a)) \overset{(1)}{=} ((\sim a) + a) + (-a) \overset{(4)}{=} 0 + (-a) \overset{(2)}{=} -a]$.

Escribimos $\boxed{a - b} \equiv a + (-b)$ y se tiene: $a - b = 0 \Rightarrow a = b$. En efecto: $a \overset{(2)}{=} a + 0 \overset{(4)}{=} a + (-b + b) \overset{(1)}{=} (a - b) + b \overset{\text{Hip.}}{=} 0 + b \overset{(2)}{=} b$.

(ii) En un grupo se tiene la implicación: $\boxed{a + a = a \;\; \Rightarrow \;\; a = 0}$

En efecto: $a = a + a \;\Rightarrow\; 0 \overset{(4)}{=} a - a \overset{\text{Hip.}}{=} (a + a) - a \overset{(1)}{=} a + (a - a) \overset{(4)}{=} a + 0 \overset{(2)}{=} a$.

Sin embargo, en general: $a + a = 0 \;\not\Rightarrow\; a = 0$ (ver (ix) y Ejemplos 4).

(iii) En un anillo se verifica: $\boxed{0 \cdot a = a \cdot 0 = 0}$

En efecto: $0 \cdot a \overset{(2)}{=} (0 + 0) \cdot a \overset{(6)}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a \;,\; \overset{(ii)}{\Rightarrow} \; 0 \cdot a = 0$. Y análogamente para la otra.

En particular, en un anillo con unidad no existe 0^{-1} (esto ya se tuvo en cuenta en (10)). Si existiera, debería ser $0 \cdot 0^{-1} = 1 \overset{(8)}{\neq} 0$, lo que contradiría (iii). Y si se hubiera permitido $1 \overset{?}{=} 0$ en (8), el anillo tendría un único elemento y todo sería trivial $[a = a \cdot 1 \overset{?}{=} a \cdot 0 \overset{(iii)}{=} 0, \forall a]$.

En particular, un grupo para $+$ (propiedades 1, 2 y 4) con producto $\cdot$ no puede, si $\cdot$ es distributivo (propiedades 5 y 6) respecto de $+$, ser además grupo para $\cdot$ (propiedades 7, 8 y 10 sin exceptuar el 0). Que $+$ y $\cdot$ sean o no conmutativas (propiedades 3 y 9) es irrelevante.

(iv) En un anillo se verifica: $\boxed{-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)}$

En efecto: $a \cdot b + (-a) \cdot b \overset{(6)}{=} (a - a) \cdot b \overset{(4)}{=} 0 \cdot b \overset{(iii)}{=} 0, \overset{(i)}{\Rightarrow} -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$. Y análogamente para la otra.

En particular, en un anillo con unidad se tiene: $-a \overset{(8)}{=} -(a \cdot 1) = (-1) \cdot a$.

(v) En un anillo el elemento unidad (si existe) es único $[1' \overset{(8)}{=} 1' \cdot 1 \overset{(8)}{=} 1]$ y el elemento inverso de uno dado (si existe) es único $[a^{\sim 1} \overset{(8)}{=} a^{\sim 1} \cdot 1 \overset{(10)}{=} a^{\sim 1} \cdot (a \cdot a^{-1}) \overset{(7)}{=} (a^{\sim 1} \cdot a) \cdot a^{-1} \overset{(10)}{=} 1 \cdot a^{-1} \overset{(8)}{=} a^{-1}]$

(vi) Un anillo puede tener <u>divisores de cero</u> (esto es, elementos $a \neq 0$ tales que existe $b \neq 0$ con $a \cdot b = 0$), ver Ejemplos 3.

Pero ningún elemento que tenga inverso (lo que presupone que el anillo tiene unidad) puede ser divisor de cero. En efecto: si $\exists a^{-1}$ y $a \cdot b = 0$, entonces se tiene: $b \overset{(8)}{=} 1 \cdot b \overset{\text{Hip.}}{=} (a^{-1} \cdot a) \cdot b \overset{(7)}{=} a^{-1} \cdot (a \cdot b) \overset{\text{Hip.}}{=} a^{-1} \cdot 0 \overset{(iii)}{=} 0$.

En particular, un cuerpo no tiene divisores de cero

(Ejemplos 3) Los anillos conmutativos $\mathbb{Z}$ (con unidad) y $\{\dot{2}\}$ (sin unidad) no tienen divisores de cero ($\rightsquigarrow$ hay anillos sin divisores de cero que no son cuerpos).

En el anillo conmutativo (con unidad) $C^0(\mathbb{R})$ (funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$), el elemento (sin inverso) $f(x) := \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq 0 \\ x, \text{ si } x > 0 \end{cases}$ es divisor de cero y el elemento (también sin inverso) $g(x) := |x|$ no es divisor de cero (ver Ejerc. Adic. I.23).

Pero en el anillo no conmutativo (con unidad) $\mathfrak{M}_{n>1}(\mathbb{K})$, todo elemento que no es divisor de cero tiene inverso (Teor. I.4.2.4($b \Rightarrow a$) y ($b' \Rightarrow a$)).

Sea $m(>1) \in \mathbb{Z}$ y sea $\{\dot{m}\}$ el conjunto de los múltiplos de m. El conjunto $\mathbb{Z}/\{\dot{m}\}$ (de clases de equivalencia módulo m, $[a] := a + \{\dot{m}\}$) es (con las definiciones 'naturales' de suma y producto, $[a]+[b] := [a+b]$ y $[a]\cdot[b] := [a\cdot b]$) un anillo conmutativo con unidad (donde el 0 es la clase $[m]$ y el 1 es la clase $[m+1]$).

Además, $\mathbb{Z}/\{\dot{m}\}$ es un cuerpo si y sólo si m es primo (ver [Castellet-Llerena] Corolario I.5.2). En el cuerpo $\mathbb{Z}/\{\dot{7}\}$, la clase [2] es la inversa de la clase [4], la clase [3] es la inversa de la clase [5] y las clases [1] y [6] son sus propias inversas.

En $\mathbb{Z}/\{\dot{m}\}$, si m no es primo y a es divisor de m, la clase $[a]$ es divisor de cero. En el anillo $\mathbb{Z}/\{\dot{6}\}$, las clases [2], [3] y [4] son divisores de cero y las clases [1] y [5] son sus propias inversas.

(vii) En un anillo, si $a(\neq 0)$ no es divisor de cero, se tiene la implicación:

$$\boxed{a\cdot b = a\cdot c \quad (\text{ó} \quad b\cdot a = c\cdot a) \quad \Rightarrow \quad b = c}$$

En efecto: $0 \overset{\text{Hip. \& (4)}}{=} a\cdot b - a\cdot c \overset{(iv)}{=} a\cdot b + a\cdot(-c) \overset{(5)}{=} a\cdot(b-c)\ ,\ \overset{\text{Hip.}}{\Rightarrow}\ b-c=0\ ,\ \overset{(i)}{\Rightarrow}\ b=c.$ Y análogamente para la otra. Nótese que no se requiere que a tenga inverso, sólo que a no sea divisor de cero.

$(viii)$ En un anillo con unidad, si a y b poseen inversos, entonces $a\cdot b$ posee inverso y se verifica: $\boxed{(a\cdot b)^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1}}$. En efecto: $(a\cdot b)\cdot\big(b^{-1}\cdot a^{-1}\big) \overset{(7)}{=} a\cdot(b\cdot b^{-1})\cdot a^{-1} \overset{(10)}{=} a\cdot 1\cdot a^{-1} \overset{(8)}{=} a\cdot a^{-1} \overset{(10)}{=} 1.$ Y análogamente para la otra

(ix) Volvemos ahora al comentario: $a+a=0 \not\Rightarrow a=0$ de (ii).

En un anillo con unidad $\mathbb{A}$, se llama <u>característica del anillo</u> al mínimo $p\in\mathbb{Z}^+$ (necesariamente $p\neq 1$ por la definición de unidad en el anillo) tal que $\tilde{p} \equiv 1 + \overset{p\text{ veces}}{\cdots\cdots} + 1 = 0$ (escribir $\tilde{p} = p\cdot 1$ es un sinsentido, ya que $p\notin\mathbb{A}$).

El valor $p=0$ se adopta por convenio cuando $\tilde{p}\neq 0$ para todo $p>1$.

En un anillo con unidad de característica p $(=0$ ó $>1)$:

• si $p>1$ y no hay divisores de cero, entonces p es necesariamente un número primo.

En efecto: si fuera $p=rs$, con ambos $r,s(>1)\in\mathbb{Z}$, entonces sería

$\tilde{r}\cdot\tilde{s} \equiv (1+\overset{r\text{ veces}}{\cdots\cdots}+1)\cdot(1+\overset{s\text{ veces}}{\cdots\cdots}+1) \overset{(6)}{=} 1\cdot(1+\overset{s\text{ veces}}{\cdots\cdots}+1)+\overset{r\text{ veces}}{\cdots\cdots}+1\cdot(1+\overset{s\text{ veces}}{\cdots\cdots}+1) \overset{(5)}{=}$ $1\cdot 1+\overset{rs\text{ veces}}{\cdots\cdots}+1\cdot 1 \equiv \tilde{p} \overset{\text{Hip.}}{=} 0$, y por tanto $\tilde{r}(\neq 0)$ y $\tilde{s}(\neq 0)$ serían divisores de cero.

• si $p\neq 2$ y $\tilde{2}$ no es divisor de cero, entonces se tiene la implicación: $\boxed{a+a=0 \;\Rightarrow\; a=0}$

En efecto: $0 \overset{\text{Hip.}}{=} a+a \overset{(8)}{=} a\cdot 1 + a\cdot 1 \overset{(5)}{=} a\cdot(1+1) \equiv a\cdot\tilde{2}\ ,\ \overset{(0\neq)\tilde{2}\text{ no es divisor de cero}}{\Rightarrow}\ a=0.$

(Ejemplos 4) Con la suma y producto usuales, el anillo con unidad $\mathbb{Z}$ y los cuerpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ tienen característica cero.

El anillo conmutativo con unidad $\mathbb{Z}/\{\dot{m}\}$, con $m(>1)\in\mathbb{Z}$, tiene característica m (obvio). Así, $\mathbb{Z}/\{\dot{2}\}$ es un cuerpo de característica 2.

En $\mathbb{Z}/\{\dot{6}\}$, cuya característica es $\neq 2$ pero en el que $\tilde{2}\equiv[2]$ es divisor de cero, $[3]+[3]=[0]$

En un anillo con unidad de característica 2, el 'opuesto' de 1 es $-1=1$ (con lo que la 'suma' de dos elementos es igual a su 'diferencia' $[a-b \equiv a+(-b) \overset{(iv)}{=} a+(-1)\cdot b \overset{!}{=} a+1\cdot b \overset{(8)}{=} a+b]$. Además, el elemento $\tilde{2}\equiv 1+1=0$ carece de inverso (con lo que no es posible construir 'semisumas').

I. SISTEMAS DE ECUACIONES, MATRICES Y DETERMINANTES

Lema I.2.4.2 (Unicidad de la forma normal de Hermite)

Sean A y B dos matrices escalonadas reducidas por filas. Si A y B son equivalentes por filas, entonces $A = B$.

Demostración. Inducción sobre el número $\boxed{n}$ de columnas de A y B.

Para $n = 1$: Al ser A y B escalonadas reducidas por filas, sólo pueden ser $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, que no son equivalentes por filas.

Para $n > 1$ (supuesto cierto para $n-1$). Se tiene:

$$A \overset{\text{hipótesis}}{\sim_f} B \;,\; \Rightarrow \boxed{b_{ij} = k_{i1}a_{1j} + ... + k_{im}a_{mj} \;\; (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)} \quad (^*)$$

(el elemento b_{ij} es una 'combinación lineal' de los elementos de la columna j de A, con unos coeficientes $k_{i1}, ..., k_{im}$ que dependen de la fila i *pero no* de la columna j).

Por otra parte, escribiendo $A \equiv (\underbrace{A_1}_{m\times(n-1)} \mid \underbrace{A_2}_{m\times 1})$ y $B \equiv (\underbrace{B_1}_{m\times(n-1)} \mid \underbrace{B_2}_{m\times 1})$, se tiene:

$$A \overset{\text{hipótesis}}{\sim_f} B \;,\; \Rightarrow \; A_1 \sim_f B_1 \;,\; \underset{A_1 \text{ y } B_1 \text{ escalonadas reducidas}}{\overset{\text{hipótesis de inducción}}{\Rightarrow}} \boxed{A_1 = B_1} \quad (^{**}).$$

Queda por probar que $A_2 = B_2$ (nótese que A_2 y B_2 no tienen por qué ser escalonadas reducidas).

Pueden darse dos casos:

Caso (a): B_2 contiene un pivote de la fila (digamos) r de B, $\overset{B \text{ escalonada reducida}}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_{rn} = 1 \text{ y resto de } B_2 \text{ es } 0 \\ \text{resto de fila } r \text{ de } B \text{ es } 0\ , \overset{(**)}{\Rightarrow} \text{ resto de fila } r \text{ de } A \text{ es } 0\ , \overset{A \text{ escalonada reducida}}{\Rightarrow} \\ \qquad \Rightarrow \text{ bajo la fila } r \text{ es } A_2 = 0 \end{cases}$$

Así queda:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots & a_{ij_i} = 1 & \cdots * & a_{in} =? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots & 0 & \cdots 0 & a_{rn} =? \\ 0\cdots & 0 & \cdots 0 & a_{r+1n} = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots & 1 & \cdots * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots & 0 & \cdots 0 & 1 \\ 0\cdots & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Vamos primero a probar que $a_{rn} \neq 0$. Recordemos que:

$$\overbrace{b_{rn}}^{1} \overset{(*)}{=} k_{r1}a_{1n} + ... + k_{r,r-1}a_{r-1,n} + k_{rr}a_{rn} + k_{r,r+1}\overbrace{a_{r+1,n}}^{0} + ... + k_{rm}\overbrace{a_{mn}}^{0}$$

Pero $k_{r1} = ... = k_{r,r-1} = 0$. En efecto: dada una fila i $(1 \leq i < r)$, con pivote en la columna j_i, se tiene:

$$\overbrace{b_{rj_i}}^{0} \overset{(*)}{=} k_{r1}\overbrace{a_{1j_i}}^{0} + ... + k_{r,i-1}\overbrace{a_{i-1,j_i}}^{0} + k_{ri}\overbrace{a_{ij_i}}^{1} + k_{r,i+1}\overbrace{a_{i+1,j_i}}^{0} + ... + k_{rm}\overbrace{a_{mj_i}}^{0}\ , \Rightarrow\ k_{ri} = 0$$

De donde se sigue:

$$\overbrace{b_{rn}}^{1} \overset{(*)}{=} \overbrace{k_{r1}}^{0} a_{1n} + ... + \overbrace{k_{r,r-1}}^{0}a_{r-1,n} + k_{rr}a_{rn} + k_{r,r+1}\overbrace{a_{r+1,n}}^{0} + ... + k_{rm}\overbrace{a_{mn}}^{0}\ , \Rightarrow \boxed{a_{rn} \neq 0}$$

Entonces, (**) implica que a_{rn} es pivote de fila de A , $\overset{A \text{ escalonada reducida}}{\Rightarrow}$ $a_{rn} = 1$ y resto de A_2 es 0 , $\overset{\text{resto de } B_2 \text{ es } 0}{\Rightarrow}$ $\boxed{A_2 = B_2}$

Nota. Ver el siguiente Ejemplo, en el que $m = 4$, $n = 5$ y $r = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} =? \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} =? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} =? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Probemos que $a_{35} \neq 0$. Recordemos que: $\overbrace{b_{35}}^{1} \overset{(*)}{=} k_{31}a_{15} + k_{32}a_{25} + k_{33}a_{35} + k_{34}\overbrace{a_{45}}^{0}$

Pero $k_{31} = k_{32} = 0$. En efecto: dadas las filas $i = 1, 2$, con pivote en las columnas $j_1 = 1, j_2 = 2$ (respectivamente), se tiene:

$$\begin{cases} \overbrace{b_{3,j_1=1}}^{0} \overset{(*)}{=} k_{31}\overbrace{a_{11}}^{1} + k_{32}\overbrace{a_{21}}^{0} + k_{33}\overbrace{a_{31}}^{0} + k_{34}\overbrace{a_{41}}^{0}\ , \Rightarrow\ k_{31} = 0 \\ \overbrace{b_{3,j_2=2}}^{0} \overset{(*)}{=} k_{31}\overbrace{a_{12}}^{0} + k_{32}\overbrace{a_{22}}^{1} + k_{33}\overbrace{a_{32}}^{0} + k_{34}\overbrace{a_{42}}^{0}\ , \Rightarrow\ k_{32} = 0 \end{cases}$$

De donde se sigue: $\overbrace{b_{35}}^{1} \overset{(*)}{=} \overbrace{k_{31}}^{0} a_{15} + \overbrace{k_{32}}^{0} a_{25} + k_{33}a_{35} + k_{34}\overbrace{a_{45}}^{0}\ , \Rightarrow\ a_{35} \neq 0$

El resto es inmediato ■

<u>Caso (b)</u>: B_2 no tiene pivote de fila de B, $\overset{(a) \text{ y simetría } A\leftrightarrow B}{\Rightarrow}$ A_2 no tiene pivote de fila de A.

Así, $\boxed{r} \equiv$ (n^o filas $\neq 0$ de B) = (n^o filas $\neq 0$ de B_1) $\overset{(**)}{=}$ (n^o filas $\neq 0$ de A_1) = (n^o filas $\neq 0$ de A) :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots & a_{ij_i}=1 & \cdots 0 & \cdots * & a_{in} =? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots & 0 & \cdots a_{pj_p}=1 & \cdots * & a_{pn} =? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots & 0 & \cdots 0 & \cdots 0 & a_{r+1,n}=0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots & 1 & \cdots 0 & \cdots * & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots & 0 & \cdots 1 & \cdots * & b_{pn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots & 0 & \cdots 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Vamos a probar que, para cada $1 \leq i \leq r$, $a_{in} = b_{in}$. Recordemos que:

$$b_{in} \overset{(*)}{=} k_{i1}a_{1n} + ... + k_{i,i-1}a_{i-1,n} + k_{ii}a_{in} + k_{i,i+1}a_{i+1,n} + ... + k_{ir}a_{rn} + k_{i,r+1}\overbrace{a_{r+1,n}}^{0} + ... + k_{im}\overbrace{a_{mn}}^{0}$$

Pero $k_{i1} = ... = k_{i,i-1} = k_{i,i+1} = ... = k_{ir} = 0$ y $k_{ii} = 1$. En efecto: si la fila i tiene pivote en la columna j_i y cada una de las otras filas $p \neq i$ $(1 \leq p \leq r)$ tiene pivote en la columna j_p, se tiene:

$$\begin{cases} \overbrace{b_{ij_i}}^{1} \overset{(*)}{=} k_{i1}\overbrace{a_{1j_i}}^{0} + ... + k_{i,i-1}\overbrace{a_{i-1,j_i}}^{0} + k_{ii}\overbrace{a_{ij_i}}^{1} + k_{i,i+1}\overbrace{a_{i+1,j_i}}^{0} + ... + k_{im}\overbrace{a_{mj_i}}^{0}, \Rightarrow k_{ii} = 1 \\ \overbrace{b_{ij_p}}^{0} \overset{(*)}{=} k_{i1}\overbrace{a_{1j_p}}^{0} + ... + k_{i,p-1}\overbrace{a_{p-1,j_p}}^{0} + k_{ip}\overbrace{a_{pj_p}}^{1} + k_{i,p+1}\overbrace{a_{p+1,j_p}}^{0} + ... + k_{im}\overbrace{a_{mj_p}}^{0}, \Rightarrow k_{ip} = 0 \end{cases}$$

De donde se sigue:

$$b_{in} \overset{(*)}{=} \overbrace{k_{i1}}^{0} a_{1n} + ... + \overbrace{k_{i,i-1}}^{0} a_{i-1,n} + \overbrace{k_{ii}}^{1} a_{in} + \overbrace{k_{i,i+1}}^{0} a_{i+1,n} + ... + \overbrace{k_{ir}}^{0} a_{rn} + k_{i,r+1}\overbrace{a_{r+1,n}}^{0} + ... + k_{im}\overbrace{a_{mn}}^{0} = a_{in}$$

Al ser i arbitrario (entre 1 y r), se tiene: $\boxed{A_2 = B_2}$

Nota. Ver el siguiente Ejemplo, en el que $m = 4$, $n = 5$ y $r = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} =? \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & a_{25} =? \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} =? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 & b_{15} \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & b_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Probemos que $a_{35} = b_{35}$. Recordemos que: $b_{35} \overset{(*)}{=} k_{31}a_{15} + k_{32}a_{25} + k_{33}a_{35} + k_{34}\overbrace{a_{45}}^{0}$

Pero $k_{31} = k_{32} = 0$ y $k_{33} = 1$. En efecto: como la fila 3 tiene pivote en la col. $j_3 = 4$, y las filas $p = 1, 2$ tienen pivote en las cols. $j_1 = 1, j_2 = 2$ (respectivamente), se tiene:

$$\begin{cases} \overbrace{b_{3,j_3=4}}^{1} \overset{(*)}{=} k_{31}\overbrace{a_{14}}^{0} + k_{32}\overbrace{a_{24}}^{0} + k_{33}\overbrace{a_{34}}^{1} + k_{34}\overbrace{a_{44}}^{0}, \Rightarrow k_{33} = 1 \\ \begin{cases} \overbrace{b_{3,j_1=1}}^{0} \overset{(*)}{=} k_{31}\overbrace{a_{11}}^{1} + k_{32}\overbrace{a_{21}}^{0} + k_{33}\overbrace{a_{31}}^{0} + k_{34}\overbrace{a_{41}}^{0}, \Rightarrow k_{31} = 0 \\ \overbrace{b_{3,j_2=2}}^{0} \overset{(*)}{=} k_{31}\overbrace{a_{12}}^{0} + k_{32}\overbrace{a_{22}}^{1} + k_{33}\overbrace{a_{32}}^{0} + k_{34}\overbrace{a_{42}}^{0}, \Rightarrow k_{32} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

De donde se sigue: $b_{35} \overset{(*)}{=} \overbrace{k_{31}}^{0} a_{15} + \overbrace{k_{32}}^{0} a_{25} + \overbrace{k_{33}}^{1} a_{35} + k_{34}\overbrace{a_{45}}^{0} = a_{35}$

Análogamente se prueba que $a_{25} = b_{25}$, y también que $a_{15} = b_{15}$.

Con lo que se tiene: $A_2 = B_2$ ■

Proposición I.3.5.2 (Producto de matrices por bloques)

Sean A y B matrices que pueden multiplicarse y cuya división por bloques $(A_{IK})_{1\leq I\leq M, 1\leq K\leq P}$ y $B = (B_{KJ})_{1\leq K\leq P, 1\leq J\leq N}$ verifica la condición: "Una línea (imaginaria, divisora de bloques) separa las columnas $r, r+1$ de A si y sólo si una línea separa las filas $r, r+1$ de B".

Entonces:

$$AB = (C_{IJ})_{1\leq I\leq M, 1\leq J\leq N} \quad , \quad \textit{con} \quad C_{IJ} = \sum_{K=1}^{P} A_{IK}B_{KJ} \equiv A_{I1}B_{1J} + ... + A_{IP}B_{PJ}$$

Demostración. Escribiendo

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1P} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{M1} & \dots & A_{MP} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \dots \\ A_{M\bullet} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}m_1 \times p \\ \\ \}m_M \times p \end{matrix} \in \mathfrak{M}_{m\times p}(\mathbb{K}) \\ \\ B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{P1} & \dots & B_{PN} \end{pmatrix} \equiv (\underbrace{B_{\bullet 1}}_{p\times n_1} \; ... \; \underbrace{B_{\bullet N}}_{p\times n_N}) \in \mathfrak{M}_{p\times n}(\mathbb{K}) \quad , \end{cases}$$

se tiene:

$$AB \equiv \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \dots \\ A_{M\bullet} \end{pmatrix} B \underset{\substack{\text{cada fila de la } 1^a \text{ matriz se multiplica} \\ \text{por toda la } 2^a \text{ matriz}}}{\overset{\text{I.3.3}}{=}} \begin{pmatrix} A_{1\bullet}B \\ \dots \\ A_{M\bullet}B \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{toda la } 1^a \text{ matriz se multiplica por} \\ \text{cada columna de la } 2^a \text{ matriz}}}{\overset{\text{I.3.3}}{=}}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{1\bullet}B_{\bullet 1} & \dots & A_{1\bullet}B_{\bullet N} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{M\bullet}B_{\bullet 1} & \dots & A_{M\bullet}B_{\bullet N} \end{pmatrix} \overset{\text{Prop. I.3.5.1}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + ... + A_{1P}B_{P1} & \dots\dots & A_{11}B_{1N} + ... + A_{1P}B_{PN} \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ A_{M1}B_{11} + ... + A_{MP}B_{P1} & \dots\dots & A_{M1}B_{1N} + ... + A_{MP}B_{PN} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Proposición I.3.6.2 (Más propiedades matriz traspuesta)}}$

Sean $A, B \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces:

1. A es escalonada reducida por filas si y sólo si A^t es escalonada reducida por columnas (ver I.2.3)

2. A es equivalente por filas a B si y sólo si A^t es equivalente por columnas a B^t (ver I.2.4)

3. La traspuesta de la forma de Hermite por filas de A es la forma de Hermite por columnas de A^t

Demostración.

1 y 2. Consecuencia inmediata de que las filas de A son las columnas de A^t.

3. Se tiene:

$$H_A^f \overset{\text{Teor. I.2.4.3}}{\sim_f} A \ , \overset{2.}{\Rightarrow} (H_A^f)^t \sim_c A^t \left(\overset{\text{Teor. I.2.4.3bis}}{\sim_c} H_{A^t}^c\right) \ , \overset{1 \text{ y unicidad de } H_{A^t}^c}{\Rightarrow} (H_A^f)^t = H_{A^t}^c \ \blacksquare$$

Proposición I.4.1.1 (Matrices elementales)

Sea $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces:

1. Aplicar a A una (y sólo una) transformación elemental de filas <u>*equivale*</u> *a multiplicar A por la* <u>*izquierda*</u> *por una matriz elemental $E \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{K})$, precisamente la que resulta de aplicar a I_m la misma transformación elemental de filas*

2. Aplicar a A una (y sólo una) transformación elemental de columnas <u>*equivale*</u> *a multiplicar A por la* <u>*derecha*</u> *por una matriz elemental $E' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, precisamente la que resulta de aplicar a I_n la misma transformción elemental de columnas*

Demostración.

1. Cálculos rutinarios:

$$\left\{\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 0 & \cdots & 1 && \\ && \vdots && \vdots && \\ && 1 & \cdots & 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && k && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 & \cdots & k && \\ && \vdots && \vdots && \\ && 0 & \cdots & 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}\right.$$

2. Similar ■

Teorema I.4.2.4 (demostración completa)

Para una matriz cuadrada $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(a) A es invertible
(b) A es 'regular a derecha' (esto es, $BA = 0 \Rightarrow B = 0$)
(b') A es 'regular a izquierda' (esto es, $AB = 0 \Rightarrow B = 0$)
(c) $rg(A) = n$ / (c') $rg(A^t) = n$
(d) $H_A^f = I_n$ / (d') $H_A^c = I_n$
(e) A es un producto de matrices elementales.

Demostración. Denotemos $D \equiv (\delta_{in}\delta_{jn})_{i,j}$.

Probemos primero $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$:

$(a) \Rightarrow (b)$: $BA = 0 \overset{\exists A^{-1}}{\Rightarrow} 0 = BAA^{-1} = B$

$(b) \Rightarrow (c)$. Probamos la contrarrecíproca: $rg(A) < n \overset{\text{I.2.5}}{\Rightarrow} H_A^f$ tiene (al menos) 1 fila nula $\Rightarrow\ 0 = DH_A^f \overset{\text{Cor. I.4.1.2(1)}}{=} D(E_k ... E_1 A) \overset{\text{Prop.I.3.3.1(1)}}{=} (DE_k ... E_1)A$ y $DE_k ... E_1 \overset{!}{\neq} 0$ (esto último es una comprobación rutinaria)

$(c) \Rightarrow (d)$: $rg(A) = n \overset{\text{I.2.5}}{\Rightarrow} H_A^f$ tiene n filas no nulas $\overset{\text{I.2.4}}{\Rightarrow} H_A^f = I_n$

$(d) \Rightarrow (e)$: $I_n = H_A^f \overset{\text{Cor. I.4.1.2(1)}}{=} E_k ... E_1 A \overset{\text{Lema I.4.2.3}}{\Rightarrow} A = E_1^{-1} ... E_k^{-1} \overset{\text{Lema I.4.2.3}}{=} E_1' ... E_k'$

$(e) \Rightarrow (a)$: $A = E_1 ... E_k \overset{\text{Lema I.4.2.3 \& Prop. I.4.2.2(2)}}{\Rightarrow} \exists A^{-1}$

Y probemos ahora: $(a) \Rightarrow (b') \Rightarrow (c') \Rightarrow (d') \Rightarrow (e)$:

$(a) \Rightarrow (b')$: $AB = 0 \overset{\exists A^{-1}}{\Rightarrow} 0 = A^{-1}AB = B$

$(b') \Rightarrow (c')$. Probamos la contrarrecíproca: $rg(A^t) < n \overset{\text{I.2.5}}{\Rightarrow} H_{A^t}^f$ tiene (al menos) 1 fila nula $\Rightarrow\ 0 = (DH_{A^t}^f)^t \overset{\text{Prop.I.3.6.1(2)}}{=} (H_{A^t}^f)^t D \overset{\text{Prop.I.3.6.2(3)}}{=} H_A^c D \overset{\text{Cor. I.4.1.2(2)}}{=} (AE_1' ... E_l')D \overset{\text{Prop. I.3.3.1(1)}}{=} A(E_1' ... E_l' D)$ y $E_1' ... E_l' D \overset{!}{\neq} 0$ (esto último es una comprobación rutinaria)

$(c') \Rightarrow (d')$: $rg(A^t) = n \overset{\text{I.2.5}}{\Rightarrow} H_{A^t}^f$ tiene n filas no nulas $\overset{\text{Prop.I.3.6.2(3)}}{\Rightarrow} H_A^c$ tiene n columnas no nulas $\overset{\text{I.2.4}}{\Rightarrow} H_A^c = I_n$

$(d') \Rightarrow (e)$: $I_n = H_A^c \overset{\text{Cor. I.4.1.2(2)}}{=} AE_1 ... E_l \overset{\text{Lema I.4.2.3}}{\Rightarrow} A = E_l^{-1} ... E_1^{-1} \overset{\text{Lema I.4.2.3}}{=} E_1' ... E_l'$ ■

$\boxed{\text{Corolarios I.4.3.1 y I.4.3.1bis (las dos versiones)}}$

(Corol. I.4.3.1) Dada $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*, existe* $Q \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{K})$ *regular (en general no única!) tal que* $H_A^f = QA$

Demostración. Se tiene:

$$H_A^f \overset{\text{Cor. I.4.1.2(1)}}{=} E_k...E_1A \quad \text{y} \quad Q \equiv E_k...E_1 \text{ es (Teor. I.4.2.4}(e \Rightarrow a)\text{) regular} \ \blacksquare$$

<u>Consecuencias</u>:

(1) $Q \equiv E_k...E_1$ se obtiene (Prop. I.4.1.1(1)) aplicando a I_m las mismas transformaciones elementales de filas con las que H_A^f se obtiene de A, eso es:

$$\boxed{(A \mid I_m) \sim_f (H_A^f \mid Q)}$$

(2) <u>Cálculo</u> de la matriz inversa (caso particular de (1)):

$$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \text{ regular} \overset{\text{Teor. I.4.2.4}(a\Rightarrow d)}{\Rightarrow} I_n = H_A^f \overset{\text{Cor. I.4.3.1}}{=} QA \overset{\text{Cor. I.4.2.5}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \exists A^{-1} \text{ y } A^{-1} = Q \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{(A \mid I_n) \sim_f (I_n \mid A^{-1})}$$

(Corol. I.4.3.1bis) Dada $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*, existe* $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *regular (en general no única!) tal que* $H_A^c = AP$

Demostración. Se tiene:

$$H_A^c \overset{\text{Cor. I.4.1.2(2)}}{=} AE_1...E_l \quad \text{y} \quad P \equiv E_1...E_l \text{ es (Teor. I.4.2.4}(e \Rightarrow a)\text{) regular} \ \blacksquare$$

<u>Consecuencias</u>:

(1) $P \equiv E_1...E_l$ se obtiene (Prop. I.4.1.1(2)) aplicando a I_n las mismas transformaciones elementales de columnas con las que H_A^c se obtiene de A, eso es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} H_A^c \\ P \end{pmatrix}}$$

(2) <u>Cálculo</u> de la matriz inversa (caso particular de (1)):

$$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \text{ regular} \overset{\text{Teor. I.4.2.4}(a\Rightarrow d')}{\Rightarrow} I_n = H_A^c \overset{\text{Cor. I.4.3.1bis}}{=} AP \overset{\text{Cor. I.4.2.5}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \exists A^{-1} \text{ y } A^{-1} = P \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} I_n \\ A^{-1} \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{Proposición I.4.4.7 (Rango de un producto de matrices)}}$

Dadas matrices $A \in \mathfrak{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathfrak{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$, se tiene:

$$\boxed{rg(AB) \leq \text{mín}\{rg(A), rg(B)\}}$$

Demostración (esta Proposición se usa para demostrar I.5.2(P7)).

Teniendo en cuenta que (un momento de reflexión!!):

$$rg(A) := \underbrace{\text{n}^o \text{ de filas } \neq 0 \text{ de } H_A^f}_{\overset{!}{\leq} \text{ n}^o \text{ filas } \neq 0 \text{ de } A} \overset{!}{\leq} \underbrace{\text{n}^o \text{ de columnas } \neq 0 \text{ de } H_A^f}_{\overset{!}{=} \text{ n}^o \text{ columnas } \neq 0 \text{ de } A}. \quad (^*)$$

y que

$$\left\{\begin{array}{l} \text{filas nulas en la } 1^a \text{ dan (I.3.3) filas nulas en el producto} \\ \\ \text{columnas nulas en la } 2^a \text{ dan (I.3.3) columnas nulas en el producto} \end{array}\right. \qquad (^{**}) \ ,$$

se tiene:

$$H_A^f H_B^c \underset{\text{Cor. I.4.3.1bis}}{\overset{\text{Cor. I.4.3.1}}{=}} QABP \ , \ \overset{\text{Prop.I.4.4.3}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ AB \sim H_A^f H_B^c \ , \ \overset{\text{Teor. I.4.4.5}}{\Rightarrow} \ rg(AB) = rg(H_A^f H_B^c) \overset{(^*)}{\leq}$$

$$\leq \text{ mín}\{\text{n}^o \text{ filas} \neq 0 \text{ de } (H_A^f H_B^c) \ , \ \text{n}^o \text{ columnas} \neq 0 \text{ de } (H_A^f H_B^c)\} \overset{(^{**})}{\leq}$$

$$\leq \text{mín}\{ \underbrace{\text{n}^o \text{ de filas} \neq 0 \text{ de } H_A^f}_{=:rg(A)} \ , \ \underbrace{\text{n}^o \text{ de columnas} \neq 0 \text{ de } H_B^c}_{\overset{\text{Ejerc. Adic. I.6(1)}}{=} rg(B)} \} \quad \blacksquare$$

I.5.2 (Propiedades de los determinantes)

En este apartado, las igualdades marcadas con (!) se deben a la hipótesis de inducción.

(P1) Si $A, A', A'' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ son idénticas, salvo las filas i-ésimas que verifican: $a_{i\bullet} = a'_{i\bullet} + a''_{i\bullet}$, entonces: $|A| = |A'| + |A''|$

Demostración. Inducción sobre n. Para $n = 1$: $|A| := a_{11} = a'_{11} + a''_{11} =: |A'| + |A''|$
Y para $n > 1$ (supuesto cierto para $n-1$):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a'_{i1} + a''_{i1} & ... & a'_{in} + a''_{in} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} := \underbrace{a_{11}}_{a'_{11}=a''_{11}} \underbrace{\alpha_{11}}_{\alpha'_{11}+\alpha''_{11}\ (!)} + ... + \underbrace{a_{i1}}_{a'_{i1}+a''_{i1}} \underbrace{\alpha_{i1}}_{\alpha'_{i1}=\alpha''_{i1}} + ... + \underbrace{a_{n1}}_{a'_{n1}=a''_{n1}} \underbrace{\alpha_{n1}}_{\alpha'_{n1}+\alpha''_{n1}\ (!)} =$$

$$= \underbrace{(a'_{11}\alpha'_{11} + ... + a'_{i1}\alpha'_{i1} + ... + a'_{n1}\alpha'_{n1})}_{|A'|} + \underbrace{(a''_{11}\alpha''_{11} + ... + a''_{i1}\alpha''_{i1} + ... + a''_{n1}\alpha''_{n1})}_{|A''|} \quad \blacksquare$$

(P2) Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tiene dos filas iguales, entonces $|A| = 0$ y
(P3) Si se permutan dos filas de A, entonces $|A|$ cambia de signo (equivalentemente: $|E_{ij}A| = -|A|$, formulada con Prop. I.4.1.1)

Demostración. Probamos primero *(P2′): si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tiene dos filas consecutivas iguales, entonces* $\det(A) = 0$. Inducción sobre n:
Para $n = 2$, evidente ya que $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
Y para $n > 2$ (supuesto cierto para $n-1$):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{i1} & ... & a_{in} \\ a_{i1} & ... & a_{in} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} := a_{11}\underbrace{\alpha_{11}}_{0\ (!)} + ... + a_{i1} \underbrace{\alpha_{i1}}_{(-1)^{i+1}|A_{i1}|} + \underbrace{a_{i+1,1}}_{a_{i1}} \underbrace{\alpha_{i+1,1}}_{(-1)^{i+2}|A_{i+1,1}|} + ... + a_{n1}\underbrace{\alpha_{n1}}_{0\ (!)} \overset{A_{i+1,1}=A_{i1}}{=} 0$$

Probamos ahora *(P3′): si se permutan dos filas consecutivas de A, entonces* $\det(A)$ *cambia de signo*. En efecto (llamando $x_l \equiv a_{il}$, $y_l \equiv a_{i+1,l}$):

$$0 \overset{\text{(P2')}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ x_1 + y_1 & ... & x_n + y_n \\ x_1 + y_1 & ... & x_n + y_n \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{(P1)}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ x_1 & ... & x_n \\ x_1 + y_1 & ... & x_n + y_n \\ ... & & \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ y_1 & ... & y_n \\ x_1 + y_1 & ... & x_n + y_n \\ ... & & \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\text{(P2')}}{\overset{\text{(P1)}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ x_1 & ... & x_n \\ y_1 & ... & y_n \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ y_1 & ... & y_n \\ x_1 & ... & x_n \\ & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv |A| + |E_{i,i+1}A|$$

(P2) es consecuencia de que "dos filas iguales" puede reducirse (por (P3') salvo quizás un cambio de signo) a "dos filas consecutivas iguales", y allí (P2') conduce a $|A| = 0$.
Y (P3) es consecuencia de que la permuta de las filas $i(< j)$ y j equivale a $2(j-i)-1$ (un número <u>impar</u>) de permutas de dos filas consecutivas y de (P3'):

$$..., i, ..., j, ... \overset{(-1)^{j-i-1}}{\longmapsto} ..., i-1, i+1, ..., j-1, i, j, ... \overset{(-1)^{j-i}}{\longmapsto} ..., i-1, j, i+1, ..., j-1, i, j+1, ... \quad \blacksquare$$

(P4) Si se multiplica una fila de A por $k \in \mathbb{K}$, entonces $|A|$ queda multiplicado por k

Demostración. Inducción sobre n (llamemos A' a la matriz que se obtiene de A al multiplicar una fila, la i-ésima, por k)

Para $n = 1$, evidente: $|A'| := ka_{11} =: k\,|A|$.

Y para $n > 1$ (supuesto cierto para $n-1$), se tiene:

$$|A'| := \underbrace{a'_{11}}_{a_{11}} \underbrace{\alpha'_{11}}_{k\alpha_{11}\ (!)} + ... + \underbrace{a'_{i1}}_{ka_{i1}} \underbrace{\alpha'_{i1}}_{\alpha_{i1}} + ... + \underbrace{a'_{n1}}_{a_{n1}} \underbrace{\alpha'_{n1}}_{k\alpha_{n1}\ (!)} = k\,|A| \quad \blacksquare$$

(P5) Si se suma a una fila de A el producto de otra por $k \in \mathbb{K}$, entonces $|A|$ no varía (equivalentemente: $|E_{ij}(k)A| = |A|$, formulada con Prop. I.4.1.1)

Demostración. En efecto, se tiene (llamando $x_l \equiv a_{il}$, $y_l \equiv a_{jl}$):

$$|E_{ij}(k)A| = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ x_1 + ky_1 & ... & x_n + ky_n \\ ... & & ... \\ y_1 & ... & y_n \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(P1)}{=} |A| + \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ ky_1 & ... & ky_n \\ ... & & ... \\ y_1 & ... & y_n \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{(P2)}{\overset{(P4)}{=}} |A| \quad \blacksquare$$

(P6) A es regular si y sólo si $|A| \neq 0$

Demostración. Si E es una matriz elemental, $|E| \neq 0$ (*) y $|EA| = |E|\,|A|$ (**). En efecto:

$$\begin{cases} |E_{ij}| \overset{(P3)}{=} -|I| = -1 \ , \ \Rightarrow \ |E_{ij}A| \overset{(P3)}{=} -|A| = |E_{ij}|\,|A| \\ \underset{k\neq 0}{|E_i(k)|} \overset{(P4)}{=} k\,|I| = k \ , \ \Rightarrow \ |E_i(k)A| \overset{(P4)}{=} k\,|A| = |E_i(k)|\,|A| \\ |E_{ij}(k)| \overset{(P5)}{=} |I| = 1 \ , \ \Rightarrow \ |E_{ij}(k)A| \overset{(P5)}{=} |A| = |E_{ij}|\,|A| \end{cases}$$

(Sólo si): A regular $\overset{\text{Teor. I.4.2.4}(a\Rightarrow e)}{\Rightarrow}$ $A = E_1...E_k \Rightarrow |A| = |E_1...E_k| \overset{(**)}{=} |E_1|\,...\,|E_k| \overset{(*)}{\neq} 0$

(Si) Probamos la contrarrecíproca: A no regular $\overset{\text{Teor. I.4.2.4}(c\Rightarrow a)}{\Rightarrow}$ $rg(A) < n \overset{\text{I.2.5}}{\Rightarrow} H_A^f$ tiene (al menos) una fila nula $\overset{(P4)}{\Rightarrow} 0 = \left|H_A^f\right| \overset{\text{Cor. I.4.1.2(1)}}{=} |E_k...E_1A| \overset{(**)}{=} |E_k|\,...\,|E_1|\,|A| \overset{(*)}{\Rightarrow} |A| = 0$ $\blacksquare$

(P7) $|AB| = |A|\,|B|$

Demostración. Caso 1: un determinante (s.p.d.g. $|A|$) es nulo:

$$|A| = 0 \overset{(P6)}{\Rightarrow} A \text{ no regular} \overset{\text{Teor. I.4.2.4}(c\Rightarrow a)}{\Rightarrow} rg(A) < n \overset{\text{Prop. I.4.4.7}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ rg(AB) < n \overset{\text{Teor. I.4.2.4}(a\Rightarrow c)}{\Rightarrow} AB \text{ no regular} \overset{(P6)}{\Rightarrow} |AB| = 0$$

Caso 2 (ambos determinantes son no nulos):

$$|A| \neq 0 \text{ y } |B| \neq 0 \overset{(P6)}{\Rightarrow} A \text{ y } B \text{ regulares} \overset{\text{Teor. I.4.2.4}(a\Rightarrow e)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ |AB| = |E_1...E_kE'_1...E'_l| \overset{(**)}{=} |E_1|\,...\,|E_k|\,|E'_1...E'_l| \overset{(**)}{=} |E_1...E_k|\,|E'_1...E'_l| = |A|\,|B| \quad \blacksquare$$

(P8) $|A| = \left|A^t\right|$

Demostración. Si E es una matriz elemental, se tiene: $\left|E^t\right| = |E|$ (***). En efecto:

$$\begin{cases} (E_{ij})^t = E_{ij} \ , \ \Rightarrow \ \left|(E_{ij})^t\right| = |E_{ij}| \\ (E_i(k))^t \ E_i(k) \ , \ \Rightarrow \ \left|(E_i(k))^t\right| = |E_i(k)| \\ \quad {\scriptstyle k\neq 0} \\ (E_{ij}(k))^t = E_{ji}(k) \ , \ \Rightarrow \ \left|(E_{ij}(k))^t\right| = |E_{ji}(k)| = 1 = |E_{ij}(k)| \end{cases}$$

Caso 1 (si $|A| = 0$):

$$|A| = 0 \overset{\text{(P6)}}{\Rightarrow} A \text{ no regular} \overset{\text{Teor. I.4.2.4}(c\Rightarrow a)}{\Rightarrow} rg(A) < n \overset{\text{Teor. I.4.2.4}(c'\Rightarrow c)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow rg(A^t) < n \overset{\text{Teor. I.4.2.4}(a\Rightarrow c)}{\Rightarrow} A^t \text{ no regular} \overset{\text{(P6)}}{\Rightarrow} \left|A^t\right| = 0$$

Caso 2 (si $|A| \neq 0$):

$$|A| \neq 0 \overset{\text{(P6)}}{\Rightarrow} A \text{ regular} \overset{\text{Teor. I.4.2.4}(a\Rightarrow e)}{\Rightarrow} A = E_1...E_k \overset{\text{Prop. I.3.6.1(2)}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \left|A^t\right| = \left|E_k^t...E_1^t\right| \overset{\text{(P7)}}{=} \left|E_k^t\right|...\left|E_1^t\right| \overset{(***)}{=} |E_k|...|E_1| \overset{\text{(P7)}}{=} |E_1...E_k| = |A| \ \blacksquare$$

Nótese que de (P8) se siguen (P1), (P2), (P3), (P4) y (P5) también para columnas.

(P9) $|A| = \underbrace{a_{1j}\alpha_{1j} + ... + a_{nj}\alpha_{nj}}_{\text{desarrollo por la } j\text{-ésima columna}}$ ($\forall$ col. j) y $|A| = \underbrace{a_{i1}\alpha_{i1} + ... + a_{in}\alpha_{in}}_{\text{desarrollo por la } i\text{-ésima fila}}$ ($\forall$ fila i)

Demostración. Para cualquier columna j (con $A' \equiv AE_{1j}$):

$$|A| \overset{\text{(P3)}}{=} -\mid A' \mid := -\left(\underbrace{a'_{11}}_{a_{1j}} (-1)^{1+1} \underbrace{\left|A'_{11}\right|}_{(-1)^{j-2}|A_{1j}|} + ... + \underbrace{a'_{n1}}_{a_{nj}} (-1)^{n+1} \underbrace{\left|A'_{n1}\right|}_{(-1)^{j-2}|A_{nj}|} \right) =$$
$$= a_{1j} \underbrace{(-1)^{1+j}|A_{1j}|}_{\alpha_{1j}} + ... + a_{nj} \underbrace{(-1)^{n+j}|A_{nj}|}_{\alpha_{nj}}$$

Para la fila 1 (con $A' \equiv A^t$):

$$|A| \overset{\text{(P8)}}{=} \mid A' \mid := \underbrace{a'_{11}}_{a_{11}} (-1)^{1+1} \underbrace{\left|A'_{11}\right|}_{\left|(A_{11})^t\right|} + ... + \underbrace{a'_{n1}}_{a_{1n}} (-1)^{n+1} \underbrace{\left|A'_{n1}\right|}_{\left|(A_{1n})^t\right|} \overset{\text{(P8)}}{=}$$
$$= a_{11} \underbrace{|A_{11}|}_{\alpha_{11}} + ... + a_{1n} \underbrace{(-1)^{1+n}|A_{1n}|}_{\alpha_{1n}}$$

Una vez probado para la fila 1, la demostración para cualquier fila i es análoga a la hecha para cualquier columna j $\blacksquare$

Teorema I.5.4.1 (Rango y determinantes)

Dada $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (no necesariamente cuadrada!), el rango $rg(A)$ coincide con el mayor orden de una submatriz cuadrada regular de A

Demostración. Para empezar, se tiene:

$$\begin{cases} \underset{\forall C,D\in\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}{C \sim_f D} \overset{\text{Teor. I.2.4.3}}{\Rightarrow} H_C^f = H_D^f \overset{\text{I.2.5}}{\Rightarrow} rg(C) = rg(D) \quad (^*) \\ \underset{\forall E,F\in\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}{rg(E)} \overset{\text{I.2.5}}{=} rg(H_E^f) \overset{!}{\leq} rg\begin{pmatrix} H_E^f \\ H_F^f \end{pmatrix} \overset{(^*)}{=} rg\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \quad (^{**}) \end{cases}$$

Primera parte: A no contiene submatriz cuadrada regular de orden mayor que $rg(A)$.
En efecto:

$$B \in \mathfrak{M}_k(\mathbb{K}) \text{ es submatriz regular de } A \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overset{\text{Teor. I.4.2.4}(a\Rightarrow c)}{\Rightarrow} \quad rg(B) = k \quad (^{***}) \\ \Rightarrow A \sim_f \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \text{ con } B \text{ submatriz regular de } A_1 \in \mathfrak{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) \overset{\text{Teor. I.4.2.4}(a\Rightarrow d) \text{ y } (^{***})}{\Rightarrow} \\ \quad \Rightarrow I_k \text{ es submatriz de } H_{A_1}^f \in \mathfrak{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) \ \Rightarrow \ k = rg(A_1) \overset{(^{**})}{\leq} rg\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \overset{(^*)}{=} rg(A) \end{cases}$$

Segunda parte: A contiene de hecho una submatriz cuadrada regular de orden $\boxed{r} \equiv rg(A)$.
En efecto, se tiene (descomponiendo las matrices en dos bloques, con r filas el de arriba y $m-r$ filas el de abajo):

$$Q_{II,III}^{-1} Q_I A \overset{\text{Corol. I.4.3.1}}{=} H_A^f \overset{rg(A)\equiv r}{=} \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

con Q_I un producto de matrices elementales de tipo I (permutas de filas) y $Q_{II,III}$ un producto de matrices elementales de tipos II y III (siempre se pueden aplicar primero las transformaciones elementales de tipo I). De donde se sigue:

$$Q_I A = Q_{II,III} H_A^f = \underbrace{Q_{II,III}}_{\equiv\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}H_1 \\ Q_{21}H_1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ Q_{21} & I_{m-r} \end{pmatrix}}_{\equiv Q'_{II,III}} \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que $\begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ Q_{21} & I_{m-r} \end{pmatrix}$ <u>es de hecho</u> una transformación de filas de tipos II y III: si el 'bloque superior' $(Q_{11}\ Q_{12})$ de $Q_{II,III}$ lo era, también lo será el bloque $(Q_{11}\ 0)$; y si el 'bloque inferior' $(Q_{21}\ Q_{22})$ de $Q_{II,III}$ lo era, también lo será el bloque $(Q_{21}\ I_{m-r})$.
Pero I_r es (!) submatriz de H_1, con lo que $Q_{11} \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{K})$ es submatriz de $Q_{11}H_1$, por tanto submatriz de $Q_I A$, y por tanto (salvo quizás permutas de filas) submatriz de A.
Además,

$$0 \neq \det\left(Q'_{II,III}\right) \overset{\text{I.5.2(P9)}}{=} \det(Q_{11}) \ , \ \overset{\text{I.5.2(P6)}}{\Rightarrow} \ Q_{11} \text{ es regular} \ \blacksquare$$

Ejercicios adicionales Capítulo I

I.1 (Hierón y Arquímedes) Hierón, rey de Siracusa, había dado a un platero 7456 gramos de oro para hacer una corona que quería ofrecer a Júpiter. Para conocer si el orfebre había reemplazado oro por plata, le pidió a Arquímedes que lo averiguara sin estropear la corona. Arquímedes metió la corona en agua y al hacerlo la corona 'perdió 467 gramos de su peso' (es decir, el agua desalojada pesó 467 gramos). Se sabe que el oro pierde en el agua 52 milésimas de su peso y que la plata pierde 95 milésimas. Hallar los gramos de oro y plata de la corona real.

I.2 (Ajustar reacción química) Podemos mezclar, bajo condiciones controladas, tolueno C_7H_8 y ácido nítrico HNO_3 para producir trinitrotolueno (TNT) $C_7H_5O_6N_3$ y agua. Determinar en qué proporción deben mezclarse estos componentes, es decir, ajustar la correspondiente reacción química:

$$\alpha\, C_7H_8 + \beta\, HNO_3 \longrightarrow \gamma\, C_7H_5O_6N_3 + \delta\, H_2O$$

Indicar qué ocurre si reemplazamos el agua H_2O por agua oxigenada H_2O_2.

I.3 (Distancias y tiempos) Un excursionista comprueba, tras recorrer 7 km en la primera hora, que manteniendo ese ritmo llegaría con una hora de retraso al tren que pretende tomar. Acelera el paso y durante el resto del camino recorre 10 km cada hora, por lo que llega con media hora de adelanto a la estación. ¿Cuánto tiempo estuvo andando? ¿Qué distancia recorrió?

I.4 (Edades) Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán entonces y que, cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

I.5 (Discutir sistema con parámetros complejos) Indicar para qué valores del número complejo α el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{cccc} (\alpha+i)x & & +2z & = & 2\alpha \\ & -\alpha y & -2i\alpha z & = & \alpha^2+1 \\ x & & +(\alpha-2i)z & = & i\alpha \end{array}\right.$$

tiene una única solución.

I.6 (Rango y formas de Hermite por filas y por columnas) Dada $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, probar:

1. El rango de A es igual al número de columnas no nulas en la forma normal de Hermite por columnas H_A^c de A
2. Las formas normales de Hermite por filas H_A^f y por columnas H_A^c de A tienen el mismo rango.

I.7 (Tres números reales) Si la suma de tres números reales es el doble de la suma del primero y el tercero, y el primero menos el segundo es el triple del tercero, probar que alguno de los tres números tiene que ser cero. ¿Cuántas ternas de números hay que cumplan estas condiciones?

I.8 (Rouché-Frobenius, de todo un poco) Sea S un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas y m ecuaciones y con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$. Si A es la matriz de coeficientes y B es la matriz de términos independientes, indicar si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas, razonando la respuesta:

1. A es una matriz $m \times n$
2. $(A \mid B)$ es una matriz $m \times (n+1)$
3. Si $rg(A) = m$, entonces el sistema es compatible
4. Si $rg(A) = n$, entonces el sistema es compatible
5. Si $rg(A) = m = n$, entoncs el sistema es compatible determinado
6. Si S tiene infinitas soluciones, entonces S es homogéneo

I.9 (Discutir sistema con parámetros) Sea el sistema

$$\left\{ \begin{array}{cccc} & & az & = & b \\ & y & +z & = & 0 \\ x & +ay & +z & = & 0 \end{array} \right.$$

Indicar si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:
1. El sistema es compatible determinado si y sólo si $a \neq 0$
2. Si $b = 0$, el sistema es compatible indeterminado
3. Si el sistema es compatible indeterminado, entonces $a = b = 0$

I.10 (Producto de matrices) Consideramos la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguar si existe alguna matriz X no nula tal que $XA = BX^t$

I.11 (Matrices idempotentes) Una matriz (cuadrada) A se dice idempotente si $A^2 = A$. Razonar que una matriz idempotente que no sea la identidad no puede ser regular.

I.12 (Matrices antisimétricas y determinantes) Probar que el determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es cero.

I.13 (De todo un poco) Sea la matriz (con $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & ... & a^n \\ 0 & 1 & a & ... & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & ... & a^{n-2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

1. Indicar por qué A es invertible y calcular su inversa mediante transformaciones elementales.
2. Si $n = 4$ y $a \neq 0$, calcular las soluciones del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A - A^t$.
3. Si $n = 4$ y $a \neq 0$, hallar una matriz columna B tal que el sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes $A - A^t$ y matriz de términos independientes B sea incompatible.

I.14 (Discutir sistema con parámetros) Estudiar para qué valores del número complejo λ el sistema de ecuaciones lineales $\left\{ \begin{array}{cccc} \lambda x & +y & = & \lambda^3 \\ x & +\lambda y & = & 1 \end{array} \right\}$ carece de solución, para qué valores la solución es única y para qué valores existe más de una solución.

I.15 (Sistemas inhomogéneos asociados) Sean $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Demostrar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene alguna solución no trivial, entonces existe algún sistema no homogéneo $AX = B$ (con $B \in \mathfrak{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$) que es incompatible.

I.16 (Rouché-Frobenius para ecuaciones matriciales) 1. Dadas $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathfrak{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, hallar una condición necesaria y suficiente para que exista $X \in \mathfrak{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ tal que $AX = B$. ¿Cuándo es X única?

2. Dadas $A, B, C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, hallar una condición necesaria y suficiente para que existan $X, Y \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ que verifiquen

$$\left\{ \begin{array}{l} X + AY^t = B \\ Y - X^t A = C \end{array} \right.$$

¿Cuándo son X e Y únicas?

I.17 (Composición de rotaciones planas) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que, para cada entero $k \geq 1$, se cumple:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) \\ \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix}$$

I.18 (Matriz traspuesta) Sean a y b dos números reales e I_n la matriz identidad de orden n. Encontrar todas las matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $A = 2aI_n + bA^t$.

I.19 (Producto de matrices) Sea A una matriz cuadrada de números reales. Indicar razonadamente si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

1. Si A es antisimétrica, entonces A^2 y A^4 son antisimétricas.
2. A es diagonal si y sólo si A^2 es diagonal.
3. AA^t es simétrica.
4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Si $AB = AC$, con $A(\neq 0), B, C$ matrices cuadradas, entonces $B = C$.
6. Si $AB = 0$, entonces $A = 0$ ó $B = 0$.

I.20 (Producto de matrices) Para la matriz cuadrada de orden 3 de números complejos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2i \\ 2 & 1 & i \\ 2i & i & -1 \end{pmatrix}$$

pruébese por inducción que $A^k = 4^{k-1}A$.

I.21 (Producto de matrices por bloques) Considérese la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & -1 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

que depende del parámetro a. Se pide:

1. Hallar A^2 y dividirla en bloques para calcular A^4.
2. Hallar a para que A sea nilpotente, es decir, para que exista un número natural $p(\neq 0)$ tal que $A^p = 0$.
3. Hallar A^{4n} y A^{4n+2} para cualquier número natural n.

I.22 (Sistemas equivalentes) Determinar todas las parejas $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ para las que los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes:

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + bx_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad S_2 : \left\{ \begin{array}{l} bx_1 + 4x_3 = 0 \\ ax_1 - 2x_2 + (b-1)x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right.$$

I.23 (De todo un poco) Demostrar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
1. Todo sistema lineal homogéneo con coeficientes complejos compatible está asociado a infinitos sistemas lineales no homogéneos incompatibles.
2. Si A es una matriz por bloques de la forma

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

con B, D matrices cuadradas, entonces se verifica: $\det(A) = \det(B)\det(D)$.
3. En el anillo con unidad $\mathfrak{M}_{n>1}(\mathbb{K})$, toda matriz $A(\neq 0)$ que no es divisor de cero posee inversa.

I.24* (Transformaciones elementales de filas) 1. Calcular el determinante de las matrices elementales (de orden n) de tipos I, II y III (I.4.1) y comprobar que, aparte la matriz identidad, sólo las matrices de tipo III tienen determinante 1.

Dada $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, la unicidad (Teor. I.2.4.3) de su forma normal de Hermite H_A^f permite definir el rango de A (I.2.5) y las transformaciones elementales de filas no alteran el rango. Sean $E_1, ..., E_r$ matrices elementales tales que $H_A^f = E_r ... E_1 A$.

2. Calcular $\det(H_A^f)$.
3. Escribir $\det(A)$ en función de los determinantes de las transformaciones elementales E_i, $1 \leq i \leq r$.
4. ¿Es posible intercambiar dos filas (es decir, hacer una transformación elemental de tipo I) haciendo sucesivas transformaciones de tipo III?
5. Describir cómo intercambiar dos filas e invertir el signo de una de ellas haciendo sucesivas transformaciones de tipo III
6. Demostrar (por inducción sobre el orden n) que, dada $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, existen matrices elementales $F_1, ..., F_r$ tales que $T := F_r ... F_1 A$ es triangular superior.
7. Si $\psi(T)$ es el conjunto de los n números de la diagonal principal de la matriz T calculada en 6, ¿cuánto vale el producto de dichos números?
8. La matriz triangular superior T calculada en 6 ¿es única? Es decir: ¿existen matrices elementales $F'_1, ..., F'_s$ tales que $T' := F'_s ... F'_1 A$ es triangular superior y $T' \neq T$?
9. El conjunto $\psi(T)$ ¿es único? Es decir: si $F'_1, ..., F'_s$ son matrices elementales tales que $T' := F'_s ... F'_1 A$ es triangular superior, ¿es $\psi(T) = \psi(T')$?

I.25* (Determinante y permutaciones) El determinante de una matriz $A \equiv (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{M}_{n\geq 1}(\mathbb{K})$ se ha definido (I.5.1) por inducción sobre n. Para $n = 3$, es sencillo obtener (desarrollando por la primera fila) la "regla de Sarrus":

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Vamos a obtener una generalización de la regla de Sarrus.

1. Sean $N_n = (1, ..., n)$ la secuencia (ordenada) de los n primeros enteros positivos y S_n el conjunto de todas las biyecciones $\sigma : N_n \to N_n, (1, ..., n) \mapsto (\sigma 1, ..., \sigma n)$ (permutaciones de n elementos). Probar que $(S_n, \circ)$ (con $\circ$ la composición) es un grupo con $n!$ elementos, no conmutativo si $n > 2$.

Cualquier permutación $\sigma \in S_n$ puede escribirse (de manera no única) como composición de (un número no único de) trasposiciones (ij) (esto es, de permutaciones de sólo los elementos i y j; e.g. $\Big((12345678) \overset{\sigma}{\mapsto} (23154768)\Big) = (13) \circ (12) \circ (45) \circ (67) = (12) \circ (23) \circ (45) \circ (67) = (23) \circ (12) \circ (13) \circ (23) \circ (45) \circ (67))$.

Se define la signatura de σ como la paridad (que está bien definida!!) del número de trasposiciones que componen σ, en particular, de su número mínimo $N(\sigma)$:

$$\boxed{sgn(\sigma)} := (-1)^{N(\sigma)} \ , \ \text{ con } \ N(\sigma) \equiv \text{n}^o \text{ de elementos de } \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n \ , \ \sigma i > \sigma j\}$$

(así, $sgn(\sigma) = 1$ si σ es 'par' y $sgn(\sigma) = -1$ si σ es 'impar'; en el ejemplo anterior, $N(\sigma) = 4$ y $sgn(\sigma) = 1$).

2. Calcular las signaturas de todas las permutaciones de 3 elementos y buscar una similitud con los coeficientes de la regla de Sarrus.

3. Probar que la aplicación ('signatura') $sgn : S_n \to \{-1, 1\}, \sigma \mapsto sgn(\sigma)$ es un homomorfismo de grupos, esto es, verifica $(\forall \sigma, \sigma' \in S_n)$: $sign(\sigma' \circ \sigma) = sign(\sigma) sign(\sigma')$.

4. Probar que, si se desarrolla completamente $\det(A)$ en función de las entradas a_{ij} de A, se obtiene una suma en la que, para cada $\sigma \in S_n$, aparece una única vez el monomio $a_{1,\sigma 1} \cdot ... \cdot a_{n,\sigma n}$, con un signo $s(\sigma)$. Y queda:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) a_{1,\sigma 1} \cdot ... \cdot a_{n,\sigma n}$$

5. Probar que $s(\sigma) = sgn(\sigma)$, $\forall \sigma \in S_n$.

6. Probar que, si A posee una submatriz nula de orden $m \times p$ con $m + p > n$, entonces $\det(A) = 0$.

I.26 (Sistemas equivalentes) Hallar todos los pares $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ que hacen que los sistemas de ecuaciones

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{l} a + 2b + c + pd = 0 \\ 2a + 2b + 6c + 2d = 0 \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad S_2 : \left\{ \begin{array}{l} a + (p+1)b - c + 2qd = 0 \\ 2(q-2)a + 2(q-2)b - 3c - d = 0 \end{array} \right.$$

(en las incógnitas a, b, c, d) tengan las mismas soluciones.

I.27 (Descomposiciones de matrices) Dada $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, denotemos por $A_k \in \mathfrak{M}_k(\mathbb{K})$ (con $1 \leq k \leq n$) la submatriz formada por las k primeras filas y columnas de A.

1. Probar que, si $\det(A_k) \neq 0, 1 \leq k \leq n$, entonces existen $L, U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, con L triangular inferior y U triangular superior, tales que $A = LU$ ('descomposición LU')

2. Probar que, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y A es simétrica con $\det(A_k) > 0, 1 \leq k \leq n$, entonces existe $L' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ triangular inferior tal que $A = L'L'^t$ ('descomposición de Cholesky')

II. ESPACIOS VECTORIALES

Proposición II.1.7.1 (Coordenadas y cambio de base)

Sea V espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) de dimensión n.

Sean $B = \{e_1, ..., e_n\}$, $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ bases de V y sea P la matriz de cambio de base (cuyas columnas son las coordenadas en B de los elementos de B')

$$\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = a_{11}e_1 + ... + a_{n1}e_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + ... + a_{nn}e_n \end{array} \right\} \text{ ó } \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix}}_{B'} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{P}} \; (^1),$$

donde B' y B denotan aquí MATRICES-FILA DE VECTORES.

Sea $x \in V$, con coordenadas en B y B' (II.1.5):

$$\left\{ \begin{array}{lll} x = x_1e_1 + ... + x_ne_n & \text{ó} & x = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} \quad (^2) \\ x = x'_1e'_1 + ... + x'_ne'_n & \text{ó} & x = \underbrace{\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{X'} \quad (^{2'}) \end{array} \right.$$

Entonces, la relación entre sus coordenadas $(x_1, ..., x_n)_B$ y $(x'_1, ..., x'_n)_{B'}$ es:

Ecuaciones del cambio de base

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_{11}x'_1 + ... + a_{1n}x'_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = a_{n1}x'_1 + ... + a_{nn}x'_n \end{array} \right\} \quad \text{ó} \quad \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{X'}}$$

(con lo que $X' = P^{-1}X$)

Demostración. Inmediata. Matricialmente se tiene:

$$BX \stackrel{(2)}{=} x \stackrel{(2')}{=} B'X' \stackrel{(1)}{=} BPX' \quad , \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - a_{11}x'_1 - ... - a_{1n}x'_n \\ \dots \\ x_n - a_{n1}x'_1 - ... - a_{nn}x'_n \end{pmatrix}}_{X-PX'} = \underbrace{0}_{\text{el vector } 0} \quad , \stackrel{B \text{ es lin. indep.}}{\Rightarrow} \quad X = PX' \;\blacksquare$$

$\boxed{\text{II.2.4. Ecuaciones paramétricas y cartesianas de un subespacio}}$

(Ejemplo 29) El conjunto $\boxed{\mathcal{H}} := \{X \in \mathbb{K}^n : AX = 0\}$, con $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$. En efecto, $\forall X, X' \in \mathcal{H}$ y $\forall k \in \mathbb{K}$, se tiene:

$A(X + X') \overset{\text{Prop. I.3.3.1(3)}}{=} AX + AX' \overset{\text{Hip.}}{=} 0 \quad \text{y} \quad A(kX) \overset{\text{Prop. I.3.3.1(5)}}{=} kAX \overset{\text{Hip.}}{=} 0$

'Viceversa' (ver luego): todo subespacio vectorial puede verse como el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo $\rightsquigarrow$ *PARADIGMA*

Sean V esp.vect. (sobre $\mathbb{K}$) de dim. finita n, U subespacio de V y $B = \{e_1, ..., e_n\}$ base de V

$\boxed{\text{Bases de } U \to \text{Ecs. paramétricas de } U}$ Dada $B_U = \{u_1, ..., u_r\}$ base de U ($r \leq n$, II.2.2), es:

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = u_{11}e_1 + ... + u_{n1}e_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ u_r = u_{1r}e_1 + ... + u_{nr}e_n \end{array}\right\} \quad \text{ó} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_r \end{pmatrix}}_{B_U} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nr} \end{pmatrix}}_{P} (^*),$$

donde B_U y B denotan aquí MATRICES-FILA DE VECTORES (P no es en general cuadrada!).

Dado $x \in U$, la relación entre sus coordenadas (II.1.5) $(x_1, ..., x_n)_B$ y $(\lambda_1, ..., \lambda_r)_{B_U}$ es:

Ecs. paramétricas de U (resp. de B y B_U)

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = u_{11}\lambda_1 + ... + u_{1r}\lambda_r \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = u_{n1}\lambda_1 + ... + u_{nr}\lambda_r \end{array}\right\} \quad \text{ó} \quad \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{nr} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_r \end{pmatrix}}_{\Lambda}}$$

En efecto: $BX \overset{\text{II.1.5}}{=} x \overset{\text{II.1.5}}{=} B_U\Lambda \overset{(*)}{=} BP\Lambda$, $\Rightarrow$ $B(X - P\Lambda) = 0$, $\overset{B \text{ lin. indep.}}{\Rightarrow}$ $X = P\Lambda$

(Ejemplo) De $(\mathbb{R}^3 \supset) U$ y $\underbrace{B_U = \{(1, -1, 0), (-1, 1, 1)\}}_{B_{can} \text{ sobreentendida}}$ se obtiene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Ecs. paramétricas de } U \to \text{Bases de } U}$ Dadas $X = P\Lambda$ ecs. paramétricas de U, (los vectores de V cuyas coordenadas resp. de B son) las columnas de P forman un sistema de generadores de U. Si este conjunto es linealmente independiente, es base de U. Si no (ver [MS], Ejerc. Resuelto II.17, p.127), entonces una base de U la forman (los vectores cuyas coordenadas respecto de B son) las columnas no nulas de $H^c_{P'}$ (Corol. II.2.3.1bis).

(Ejem.) De $\underbrace{(\mathbb{R}^3 \supset) U}_{\text{el mismo!}}$ y $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \equiv P\Lambda$, se sigue: $\underbrace{\{(1, -1, 0), (-1, 1, 1), (0, 0, 1)\}}_{B_{can} \text{ sobreentendida}}$ es sist. de gener. de U y (al ser $H^c_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$) $\underbrace{B_U = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}}_{B_{can} \text{ sobreentendida}}$ es base de U.

$\boxed{\text{Ecs. cartesianas de } U \to \text{Ecs. paramétricas de } U}$ Dado vector arbitrario $x \in U$, sus coordenadas $(x_1, ..., x_n)_B$ pueden venir dadas (ver Ejemplo 29) como la solución general de un sistema lineal (necesariamente homogéneo, ya que $X = 0$ debe ser sol.) con ($m =$? ecs. y) n incógnitas:

Ecs. cartesianas de U (resp. de B)

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \quad \text{ó} \quad \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = 0}$$

Entonces se obtienen unas ecs. paramétricas de U resolviendo (Cap.I) el sistema $AX = 0$.

(Ejemplo) De $\underset{\text{el mismo!}}{(\mathbb{R}^3 \supset) U} : \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right\}$, esto es, $AX \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, se sigue (al ser $H_A^f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) la solución $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{smallmatrix}\right)$

Veamos ('viceversa' del Ejemplo 29 $\rightsquigarrow$ *PARADIGMA* de subespacio vectorial) que U es la 'solución general' de un sistema lineal homogéneo (sus ecuaciones cartesianas resp. de B):

$\boxed{\text{Ecs. paramétricas de } U \to \text{Ecs. cartesianas de } U}$ Dadas $X = P\Lambda$ ecs. paramétricas de U (con $P \in \mathfrak{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$ y $\Lambda \in \mathfrak{M}_{r\times 1}(\mathbb{K})$; $r \leq n$, ver II.2.2), entonces <u>un</u> sistema lineal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ \dots & .. & \dots \\ a_{m1} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(con $m \geq n - r$, ver II.2.5) de ecs. cartesianas de U se encuentra así:

(1) 1^o método: $\forall x \equiv BX \in U$, el sistema inhomogéneo $P\Lambda = X$ es compatible , $\overset{\text{Teor. I.2.6.2(1)}}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \; rg(P \mid X) = rg(P) \; , \; \underset{P\in\mathfrak{M}_{n\times r}(\mathbb{K})}{\overset{\text{Teor. I.5.4.1}}{\Rightarrow}} \; \underset{\forall Q\in\mathfrak{M}_{r+1}(\mathbb{K}) \text{ submatriz de } (P|X)}{Q \text{ no es regular}} \; , \; \overset{\text{I.5.2(P6)}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \; \underset{\forall Q\in\mathfrak{M}_{r+1}(\mathbb{K}) \text{ submatriz de } (P|X)}{\det(Q) = 0} \; , \quad \text{lo que proporciona } AX = 0 \; ,$$

que es un sistema con $m = \binom{n}{r+1}$ ecuaciones (cuando $r = n$, U no tiene ecuaciones ya que $U = V$), de las que sólo $n - r$ son 'esenciales' (II.2.5).

(Ejemplo) De $\underset{\text{el mismo!}}{(\mathbb{R}^3 \supset) U} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ se sigue (compatibilidad del sist. $P\Lambda = X$): $0 = \det(P \mid X) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = -(x_1 + x_2)$, esto es: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = 0$

(en este caso, $m \equiv \binom{n}{r+1} = 1 = n - r$).

(2) 2^o método: Por eliminación de parámetros

(Ejemplo) De $\underset{\text{el mismo!}}{(\mathbb{R}^3 \supset) U} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, se sigue: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ x_2 = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_2 \end{array} \right\}$, esto es: $x_1 + x_2 = 0$

Proposición II.2.8.2 (Subespacio complementario)

Sean V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) y U un subespacio de V. Si se amplía (Teor. II.1.4.3) una base $B_U = \{u_1, ..., u_r\}$ de U a una base $B = \{u_1, ..., u_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ de V, entonces $W := L(v_{r+1}, ..., v_n)$ es un subespacio complementario de U

Demostración. El conjunto $B_W := \{v_{r+1}, ..., v_n\}$ es (Prop. II.1.2.1(4)) linealmente independiente, $\overset{\dim(W)=n-r}{\Rightarrow}$ B_W es base de W. Y se tiene:

$$\left.\begin{cases} U+W \overset{\text{Prop. II.2.7.1(2)}}{=} L(B_U \cup B_W) = L(B) = V \\ v \in U \cap W \;\Rightarrow\; v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = \sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j v_j \overset{B \text{ es lin.indep.}}{\Rightarrow} v = 0 \end{cases}\right\} , \overset{\text{Prop. II.2.8.1}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\; V = U \oplus W \;\blacksquare$$

Proposición II.2.9.1 (Fórmula de las dimensiones) (o de Grassmann)

Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) de dimensión finita. Si U y W son subespacios de V, se tiene:

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$$

Demostración. Sea $B_{U\cap W} = \{v_1, ..., v_m\}$ base de $U \cap W$, que se amplía (Teor. II.1.4.3) a bases $B_U = \{v_1, ..., v_m, u_{m+1}, ..., u_r\}$ de U y $B_W = \{v_1, ..., v_m, w_{m+1}, ..., w_s\}$ de W.

Entonces $S \equiv \{v_1, ..., v_m, u_{m+1}, ., , , u_r, w_{m+1}, ..., w_s\}$ es (Prop. II.2.7.1(2)) un sistema de generadores de $U + W$.

Además S es linealmente independiente (y por tanto base de $U + W$), ya que se tiene:

$$0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_i v_i + \sum_{j=m+1}^{r} b_j u_j}_{\in U} + \underbrace{\sum_{k=r+1}^{s} c_k w_k}_{\in W} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_i v_i + \sum_{j=m+1}^{r} b_j u_j}_{\in U} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} d_i v_i}_{\in U\cap W} \overset{B_U \text{ es lin. indep.}}{\Rightarrow} \underset{m+1\le j\le r}{b_j = 0} \quad (*) \\ \overset{(*)}{\Rightarrow} 0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_i v_i + \sum_{k=m+1}^{s} c_k w_k}_{\in W} \overset{B_W \text{ es lin. indep.}}{\Rightarrow} \underset{1\le i\le m}{a_i = 0} \text{ y } \underset{m+1\le k\le s}{c_k = 0} \end{cases}$$

Se sigue:

$$\dim(U+W) = m + (r-m) + (s-m) = \underbrace{r}_{\dim(U)} + \underbrace{s}_{\dim(W)} - \underbrace{m}_{\dim(U\cap W)} \;\blacksquare$$

$\boxed{\text{Proposición II.3.3.1 (Matriz de Gram y cambio de base)}}$

Sea $(V, <, >)$ espacio vectorial euclídeo de dimensión finita n.

Sean $B = \{e_1, ..., e_n\}$, $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ bases de V y sea P la matriz de cambio de base (cuyas columnas son las coordenadas en B de los elementos de B')

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix}}_{B'} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{P},$$

donde B' y B denotan aquí MATRICES-FILA DE VECTORES.

Sean $x, y \in V$, con coordenadas en B

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} \quad , \quad y = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y}$$

(y análogamente en B'), de donde se sigue (Prop. II.1.7.1):

$$X = PX' \quad , \quad Y = PY' \quad (^1)$$

Sean $G \equiv (< e_i, e_j >)_{i,j}$, $G' \equiv (< e'_i, e'_j >)_{i,j}$ las matrices de Gram (II.3.2) de $<, >$ en B y B', que verifican:

$$\begin{cases} < x, y >= \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}}_{X^t} \underbrace{\begin{pmatrix} < e_1, e_1 > & \dots & < e_1, e_n > \\ \dots & \dots & \dots \\ < e_n, e_1 > & \dots & < e_n, e_n > \end{pmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} & (^2) \\ < x, y >= \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix}}_{X'^t} \underbrace{\begin{pmatrix} < e'_1, e'_1 > & \dots & < e'_1, e'_n > \\ \dots & \dots & \dots \\ < e'_n, e'_1 > & \dots & < e'_n, e'_n > \end{pmatrix}}_{G'} \underbrace{\begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}}_{Y'} & (^{2'}) \end{cases}$$

Entonces la relación entre G y G' es:

$$\boxed{G' = P^t G P} \ ,$$

esto es, G y G' son 'congruentes' (caso particular de 'equivalentes', Prop. I.4.4.3)

Demostración. Inmediata. Matricialmente se tiene:

$$X'^t G' Y' \overset{(2')}{=} < x, y > \overset{(2)}{=} X^t G Y \overset{(1)}{=} X'^t P^t G P Y' \quad , \quad \overset{\forall x,y}{\Rightarrow} \quad G' = P^t G P$$

En cuanto a la <u>última implicación</u>: eligiendo (para cada i, j) $X'^t \equiv$ (fila de ceros salvo un 1 en la columna i) y $Y' \equiv$ (columna de ceros salvo un 1 en la fila j) se obtiene inmediatamente: el elemento ij de G' es igual al elemento ij de $P^t G P$ ■

Proposición II.3.7.3 (Método de Gram-Schmidt)

Sea $(V,<,>)$ *espacio vectorial euclídeo de dimensión finita* n.

Sea $B=\{u_1,...,u_n\}$ *base de* V. *Entonces existe base ortogonal* $\{e_1,...,e_n\}$ *de* V *tal que* $L(e_1,...,e_k)=L(u_1,...,u_k)$, $1\le k\le n$.

Demostración. Definamos

$$\boxed{e_i := u_i - \lambda_{i1}e_1 - ... - \lambda_{i,i-1}e_{i-1}} \quad (^*) \quad , \text{con} \quad \boxed{\lambda_{ij} := \frac{\langle u_i, e_j\rangle}{\|e_j\|^2}} \quad (^{**}) \quad , \quad 1\le i,j\le n$$

Probemos primero, sin tener en cuenta (**), que $(\forall k)$ $L(e_1,...,e_k)=L(u_1,...,u_k)$.

Inducción sobre k. Para $k=1$, obvio.

Para $k>1$ (supuesto cierto para $k-1$):

$$L(e_1,...,e_k) \overset{(*)}{=} L(e_1,...,e_{k-1},u_k) \overset{\text{Prop. II.2.7.1(2)}}{=} L(e_1,...,e_{k-1})+L(u_k) \overset{\text{Hip. de inducción}}{=}$$
$$= L(u_1,...,u_{k-1})+L(u_k) \overset{\text{Prop. II.2.7.1(2)}}{=} L(u_1,...,u_k)$$

Se sigue: $(\forall k)$ $e_k\neq 0, \overset{\text{Prop. II.3.4.1(2)}}{\Rightarrow} \|e_k\|\neq 0, \Rightarrow$ la definición (**) de las λ_{ij} es 'legítima'.

Y probemos ahora que $(\forall k)$ $e_1,...,e_k$ son ortogonales dos a dos.

Inducción sobre k. Para $k=1$, nada que demostrar.

Para $k>1$ (supuesto cierto para $k-1$), bastará probar que $(\forall j<k)$ $\langle e_k,e_j\rangle=0$. Y en efecto, se tiene:

$$\underset{1\le j<k}{\langle e_k,e_j\rangle} \overset{(*)}{=} \langle u_k-\lambda_{k1}e_1-...-\lambda_{k,k-1}e_{k-1},e_j\rangle \overset{\text{(PE2,3)}}{=}$$
$$= \langle u_k,e_j\rangle - \lambda_{k1}\langle e_1,e_j\rangle - ... - \lambda_{k,k-1}\langle e_{k-1},e_j\rangle \overset{\text{Hip. de inducción}}{=} \langle u_k,e_j\rangle - \lambda_{kj}\langle e_j,e_j\rangle \overset{(**)}{=} 0$$

Se concluye (Lema II.3.7.1) que $\{e_1,...,e_n\}$ es una base ortogonal ■

II.3.10 (Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$)

Sean $V = \mathbb{R}^3$ con $\langle , \rangle$ el producto escalar usual y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica (que es ortonormal y está ordenada)

(Def.) Dados $x \equiv (x_1, x_2, x_3), y \equiv (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, el producto vectorial de x e y es el vector

$$\boxed{x \wedge y} := \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3 \boxed{\overset{\text{Notación}}{\equiv} \sum_{cicl(123)} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1} \in \mathbb{R}^3,$$ de

donde se sigue que: $\boxed{e_1 \wedge e_2 = e_3}$ (y $cicl(123)$)

(Teor. II.3.10.1) Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, el vector $x \wedge y \in \mathbb{R}^3$ es el único que verifica:
1. $(x \wedge y) \perp L(x, y)$
2. $\|x \wedge y\| = \|x\| \, \|y\| \sin\alpha$ (con α definido en II.3.5)
3. Si $(x \;\; y \;\; x \wedge y) \equiv BP$ (*), entonces: ($\{x, y\}$ es lin. indep. $\Rightarrow$ $\det(P) > 0$).

Dem. 1. $\underbrace{\langle x \wedge y, z \rangle}_{\text{prod. 'mixto'}} = \sum_{cicl(123)} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 \overset{\text{I.5.2(P9)}}{\underset{\text{fila 1}}{=}} \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \overset{(P2)}{\Rightarrow} \langle x \wedge y, L(x, y) \rangle = 0$

2. $\|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2\alpha \overset{\text{II.3.5}}{=} \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 \overset{!}{=} \sum_{cicl(123)} (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 = \|x \wedge y\|^2$

3. Si $\{x, y\}$ es lin. indep., se sigue de 2 que $x \wedge y \neq 0$ (**). Y se tiene:

$$\det(P) \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \overset{\text{I.5.2(P9)}}{\underset{\text{col. 3}}{=}} \sum_{cicl(123)} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 = \|x \wedge y\|^2 \overset{(**)}{>} 0$$

Además estas 3 propiedades caracterizan al vector $x \wedge y$. En efecto:

$\cdot$ $\{x, y\}$ lin. dep. $\overset{\text{Prop. II.1.2.2}}{\Rightarrow} x \sim y \overset{\text{II.3.5}}{\Rightarrow} \sin\alpha = 0 \overset{\text{Teor. II.3.10.1(2)}}{\Rightarrow} \|x \wedge y\| = 0 \overset{(PE4)}{\Rightarrow} x \wedge y = 0$

$\cdot$ $\{x, y\}$ lin. indep. $\overset{\text{II.1.4}}{\Rightarrow} \dim(L(x, y)) = 2 \overset{\text{Prop. II.3.8.2(2)}}{\Rightarrow} \dim(L(x, y)^\perp) = 1$. En tal caso, la propiedad 1 determina la dirección de $x \wedge y$, la 2 su norma y la 3 su sentido ■

Nota. Un 'producto vectorial' $\wedge$ en un espacio vectorial real V requiere (Teor. II.3.10.1): un producto escalar $\langle , \rangle$ en V, $\dim(V) = 3$ y una 'orientación' en V (i.e. elección de una clase, de las dos existentes, de bases de V cuyas matrices P de cambio verifican $\det(P) > 0$) ■

(Prop. II.3.10.2) Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, se verifica:
1. $x \wedge y = 0 \Leftrightarrow \{x, y\}$ es lin. dependiente
2. $(ax) \wedge y = x \wedge (ay) = a(x \wedge y), \forall a \in \mathbb{R}$
3. $y \wedge x = -x \wedge y$
4. $(x + y) \wedge z = (x \wedge z) + (y \wedge z)$

Dem. 1. $x \wedge y = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overset{cicl(123)}{= \cdots} = 0 \overset{\text{Teor. I.5.4.1}}{\Leftrightarrow} rg \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 1 \overset{\text{Prop. II.1.6.1}}{\Leftrightarrow}$
$\{x, y\}$ linealmente dependiente

2. $(ax) \wedge y = \sum_{cicl(123)} \begin{vmatrix} ax_2 & ax_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 \overset{\text{I.5.2(P4)}}{=} \sum_{cicl(123)} (a \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}) e_1 \overset{\text{Prop. II.1.5.2(2)}}{=} a(x \wedge y)$

3. $y \wedge x = \sum_{cicl(123)} \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} e_1 \overset{\text{I.5.2(P3)}}{=} \sum_{cicl(123)} (- \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}) e_1 \overset{\text{Prop. II.1.5.2(2)}}{=} -x \wedge y$

4. $(x+y) \wedge z = \sum_{cicl(123)} \begin{vmatrix} x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} e_1 \overset{\text{I.2.5(P1)}}{=} \sum_{cicl(123)} (\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}) e_1 =$
$(x \wedge z) + (y \wedge z)$ ■

Ejercicios adicionales Capítulo II

II.1 (Independencia lineal) Sean u_1, u_2, u_3 y u_4 cuatro vectores distintos de $\mathbb{K}^n$ tales que cada uno de los conjuntos

$$\{u_1, u_2, u_3\} \quad , \quad \{u_1, u_2, u_4\} \quad , \quad \{u_1, u_3, u_4\} \;\text{ y }\; \{u_2, u_3, u_4\}$$

es linealmente independiente. Razonar si se puede asegurar que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es linealmente independiente también.

II.2 (Independencia lineal con polinomios) Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{K})$ el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$ y grado menor o igual que 2. Para cada elección de $a, b, c \in \mathbb{K}$, indicar razonadamente si los polinomios

$$1 + ax + a^2x^2 \quad , \quad 1 + bx + b^2x^2 \;\text{ y }\; 1 + cx + c^2x^2$$

son o no linealmente independientes.

II.3 (Independencia lineal con funciones) En el espacio vectorial real de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, estudiar si las funciones $\cos x$, $\sin(x + \pi/4)$ y $\sin^2 x$ son linealmente independientes.

Lo mismo para las funciones $\sin x$, $\cos x$, $3 + \sin x$ y $2 + \cos x$.

II.4 (Espacio vectorial sobre cuerpo finito) Sea el espacio vectorial $\mathbb{K}^2$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/(2)$ y la suma y el producto por escalares son los habituales en $\mathbb{K}^n$. Determinar todas sus bases y todos sus subespacios vectoriales.

II.5 (Suma directa) Sea $\{u_1, ..., u_n\}$ una base de un espacio vectorial V. Probar que

$$V = L(u_1) \oplus ... \oplus L(u_n)$$

y que, para todo $r \leq n$, se verifica:

$$L(u_1, ..., u_r) \oplus L(u_{r+1}, ..., u_n) = V$$

II.6 (Espacio cociente con matrices 2x2) Sean el espacio vectorial $V = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, la base 'estándar'

$$B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

y un número real λ.

1. Considérense los subespacios vectoriales

$$\begin{cases} U := \{v \in V \mid vc = cv \;\;,\; tr(v) = 0\} \\ W := \{v \in V \mid vd = dv\} \end{cases}$$

donde $c = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $d = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar ecuaciones cartesianas de U (respecto de B) y una base de U

(b) Determinar los valores de λ para los que la suma $U + W$ es directa.

2. Considérese el espacio cociente V/U y las matrices

$$p = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 3\lambda & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad r = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar los valores de λ para los que el conjunto $\{[p],[q],[r]\} \subset V/U$ (donde $[v] \in V/U$ es la clase de $v \in V$) es una base de V/U

II.7 (Esp. vectorial matrices antisimétricas/simétricas) Sea U el subespacio vectorial de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ formado por las matrices antisimétricas. Hallar una base y la dimensión de U. Análogamente para W, el subespacio de las matrices simétricas.

II.8 (Subespacios de polinomios) En el espacio vectorial $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, considérese la base estándar $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Dados los subespacios $U_n := \{p \in V \mid (xp(x))' = np(x)\}$ (donde $'$ significa la derivada y $n = 1, 2, 3, 4, 5, ...$) y $W := \{p(x) \in V \mid p(-x) = p(x)\}$:

2.1. Hallar dimensiones y bases de U_n (en función del parámetro n) y de W.

2.2. Hallar los valores de n para los que la suma $U_n + W$ es directa y los valores de n para los que U_n y W son complementarios.

2.3. Con el producto escalar en V cuya matriz de Gram en la base B es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

hallar los valores de n para los que U_n es ortogonal a W.

II.9 (Espacio cociente, de todo un poco) Sean V un espacio vectorial, U un subespacio vectorial de V y v_1, v_2 dos vectores de V. Indicar si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas, razonando la respuesta:

1. Si v_1 y v_2 son linealmente dependientes, entonces sus clases $v_1 + U$ y $v_2 + U$ también lo son.
2. Si las clases $v_1 + U$ y $v_2 + U$ son linealmente dependientes, entonces v_1 y v_2 también lo son.

II.10 (Componentes de un vector) Dados cualquier vector (no nulo) de un espacio vectorial de dimensión n y cualquier conjunto (ordenado) de n elementos (no todos nulos) del cuerpo correspondiente, existe alguna base del espacio vectorial en la que dichos elementos son las coordenadas del vector.

II.11 (Espacio cociente con matrices antisimétricas) En el espacio vectorial V de las matrices reales antisimétricas de orden 3, considérese la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y el producto escalar $\langle , \rangle$ cuya matriz de Gram en la base B es $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Dado el subespacio $U := \{x \in V \mid sxs = x\}$, con $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar ecuaciones cartesianas (respecto de B) y bases de U y de su complemento ortogonal $U^{\perp}$.

2. Dadas las matrices antisimétricas

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -8 \\ 2 & 0 & -2 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

hallar una base ortonormal del subespacio $L(a, b) \subset V$.

3. Hallar una base del subespacio $L([a], [b], [c]) \subset V/U$, donde $[x]$ indica la clase de equivalencia de x en el espacio cociente.

II.12 (Desigualdad) Demostrar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: Dados números reales positivos $x_1, \ldots, x_n$, se cumple

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^2 \leq (x_1 + \cdots + x_n)(x_1^3 + \cdots + x_n^3)$$

II.13 (Rango de matriz por bloques) Sean m, n enteros positivos y sean las matrices $A \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ y $C \in \mathfrak{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Consideremos la matriz cuadrada (dada por bloques)

$$F = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{(m+n)\times(m+n)}(\mathbb{K})$$

1. Si $a_{j_1}, ..., a_{j_r}$ son columnas (linealmente) independientes de A y $b_{k_1}, ..., b_{k_s}$ son columnas independientes de B, demostrar que las columnas $f_{j_1}, ..., f_{j_r}, f_{m+k_1}, ..., f_{m+k_s}$ de F son independientes.

2. Demostrar que $rg(A) + rg(B) \leq rg(F)$. Encontrar un ejemplo en el que la desigualdad es estricta.

3. Demostrar que, si A o B son regulares, entonces la desigualdad anterior es una igualdad.

II.14 (Espacio cociente con polinomios) Sea $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios (en una variable) de grado menor o igual que 3 y con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base estándar de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y sean (a, b, c, d) las coordenadas en dicha base. Dados los subespacios de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

$$V : \begin{cases} b = 0 \\ \lambda a - c - \lambda\mu d = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad W = L(\lambda x + x^3, 1 + \mu x^2) ,$$

donde λ y μ son parámetros reales (ambos no nulos), se pide:

1. Calcular la dimensión y una base de la intersección $V \cap W$ y de la suma $V + W$. Hallar los valores de λ y μ para los que V y W son complementarios.

2. Sean los polinomios $p = x + 2x^2 - 2x^3$ y $q = 3x - x^2 + x^3$. Hallar una base del subespacio $L([p], [q]) \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})/V$, donde $[p]$ y $[q]$ son las clases de p y q en el espacio cociente

3. Sea $\langle , \rangle$ el producto escalar en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ cuya matriz de Gram (en la base estándar B) es la identidad. Hallar una base ortonormal del subespacio $V^\perp$ (complementario ortogonal de V). Hallar los valores de λ y μ para los que $V^\perp = W$.

II.15 (Volumen y determinante) Sean $(V, \langle , \rangle)$ esp. vectorial euclídeo y $B = \{e_1, ..., e_n\}$ base ortonormal.

Dados n vectores $u_1, ..., u_n \in V$, consideremos

$$\begin{cases} \text{la matriz } P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \text{ que verifica } \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} P \\ \text{los subespacios } U_k \equiv L(u_1, ..., u_k) \ \ (1 \leq k \leq n) \\ \text{los vectores } v_k := u_k - p_{U_{k-1}}(u_k) \ \ (1 \leq k \leq n, \text{ con } v_1 \equiv u_1) \end{cases}$$

(cada v_k es pues la proyección ortogonal de u_k sobre el subespacio $U_{k-1}^{\perp}$)

Definiendo el <u>volumen del paralelepípedo generado por $u_1, ..., u_n$</u> como el número (real, ≥ 0) $Vol(u_1, ..., u_n) := \|v_1\| ... \|v_n\|$, probar que $Vol(u_1, ..., u_n) = |\det(P)|$

II.16* (Espacios cociente) Consideremos en $\mathbb{R}^n$ el subespacio vectorial V dado por la ecuación $x_1 + ... + x_n = 0$.

1. Calcular la dimensión de $\mathbb{R}^n/V$.

2. Sean $v = (v_1, ..., v_n)$ y $w = (w_1, ..., w_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$ que no pertenecen a V. Probar que $B_v = \{[v]\}$ y $B_w = \{[w]\}$ son bases de $\mathbb{R}^n/V$.

3. Hallar la matriz de cambio de base de B_v a B_w.

Sea ahora U el subespacio de $\mathbb{R}^n$ engendrado por el vector $(1, ..., 1)$ y denotemos $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

4. Comprobar que, para cada $1 \leq i \leq n$, el conjunto $B_i = \{[e_1], ..., [e_{i-1}], [e_{i+1}], ..., [e_n]\}$ es base de $\mathbb{R}^n/U$.

5. Hallar la matriz de cambio de base de B_i a B_j, para $i \neq j$.

Sean $B_0 = \{u_1, ..., u_n\}$ y $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ dos bases de $\mathbb{R}^n$ tales que $W \equiv L(u_n) = L(v_n)$, es decir, $u_n = \lambda v_n$ para cierto $\lambda \neq 0$.

6. Demostrar que los conjuntos $B_0' = \{u_1 + W, ..., u_{n-1} + W\}$ y $B_1' = \{v_1 + W, ..., v_{n-1} + W\}$ son bases de $\mathbb{R}^n/W$.

7. Denotando P y P' a las matrices de cambio de base de B_0 a B_1 y de B_0' a B_1', respectivamente , probar que $\det(P) = \lambda \det(P')$.

II.17 (Espacio cociente con polinomios) Sea $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios (en una variable) de grado menor o igual que 3 y con coeficientes en $\mathbb{R}$.

1. Dados los polinomios $2 + x^2, 1 + 3x + x^3, -1 + x - x^2, 2x + x^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, determinar el número máximo de ellos que son linealmente independientes.

2. Obtener la dimensión y ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio vectorial U generado por los polinomios del apartado 1.

3. Determinar si la base $B' = \{2 + x^2, 1 + x, 2x + x^3, 1\}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ contiene un sistema de generadores de U y obtener la matriz de cambio de base entre B' y la base estándar $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.

4. Calcular las coordenadas del polinomio $p = -2 + 5x - 3x^2 + x^3$ en la base B'.

5. Obtener la dimensión y una base del espacio cociente $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})/U$ y determinar las coordenadas de la clase $[p]$ en dicha base.

6. Si $\langle , \rangle$ es el producto escalar en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ cuya matriz de Gram (respecto de B) es la identidad, hallar una base de $U^{\perp}$.

II.18 (Suma e intersección de subespacios) Sean $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ base de un espacio vectorial V (sobre $\mathbb{R}$), $a, b \in \mathbb{R}$ y U, W subespacios vectoriales de V con ecuaciones cartesianas (respecto de B)

$$U : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 + ax_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - bx_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right. \quad , \quad W : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ ax_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right.$$

1. Obtener, en función de los valores de a y b, bases y dimensiones de U y W.

2. Sea a partir de ahora $a = 1$. Obtener, en función de los valores de b, las dimensiones de $U \cap W$ y $U + W$. Hallar bases de estos dos subespacios cuando $\dim(U + W) = 4$. ¿Para qué valores de b existe un producto escalar en V tal que $W = U^{\perp}$?

II.19* (Productos hermíticos) Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y g un producto hermítico, esto es, una aplicación $g : V \times V \to \mathbb{C}$ que cumple:

PH1 y PH2. 'Semilineal' en la 1^a variable: $\left. \begin{cases} g(u+v,w) = g(u,w) + g(v,w) \\ g(au,v) = \bar{a}g(u,v) \end{cases} \right\}, \underset{\text{y } \forall a \in \mathbb{C}}{\forall u,v,w \in V}$

PH3. "Hermítica": $g(u,v) = \overline{g(v,u)}$ (con $\bar{a}$ el complejo conjugado de $a \in \mathbb{C}$), $\forall u,v \in V$

PH4. 'Definida positiva': $g(u,u) \geq 0, \forall u \in V$ *y* $g(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

1. Probar que g es lineal en la 2^a variable: $\left. \begin{cases} g(u,v+w) = g(u,v) + g(u,w) \\ g(u,av) = ag(u,v) \end{cases} \right\}, \underset{\text{y } \forall a \in \mathbb{C}}{\forall u,v,w \in V}$

2. Sean V de dimensión finita y $B \equiv \{e_1, ..., e_n\}$ una base de V. Probar que:

(a) la matriz de Gram (respecto de B) $\boxed{G} \equiv (g_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, con $g_{ij} := g(e_i, e_j)$ es 'hermítica', i.e. verifica $\boxed{G = G^\dagger}$ (con $G^\dagger \equiv (\overline{g_{ij}})_{ji}$)

(b) dados $x \equiv BX$ e $y \equiv BY$ (notaciones como en II.1.5), se tiene: $\boxed{g(x,y) = X^\dagger GY}$

3. Sean V de dimensión finita y $B, B' \equiv BP$ bases de V ($\rightsquigarrow$ matrices de Gram G, G'). Probar que $\boxed{G' = P^\dagger GP}$

4. Dado $u \in V$, se define la norma de u como: $\|u\| := \sqrt{g(u,u)}$ (determinación ≥ 0 de la raíz). Probar que se verifican las siguientes desigualdades:

(a) de Cauchy-Schwartz: $\boxed{|g(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|}$ ($\forall x, y \in V$)

(b) triangular o de Minkowski: $\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$ ($\forall x, y \in V$)

5. Sean V de dimensión finita y $B \equiv \{e_1, ..., e_n\}, B' \equiv BP$ bases ortonormales de V (i.e. tales que $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i,j \leq n$, y análogamente para B'). Probar que la matriz $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ es unitaria, i.e. verifica $\boxed{P^\dagger P = I_n}$

6. Sean V de dimensión finita y $B \equiv \{u_1, ..., u_n\}$ una base de V. Probar que existe una base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de V tal que (método de Gram-Schmidt) $L(e_1, ..., e_k) = L(u_1, ..., u_k)$, $1 \leq k \leq n$.

III. APLICACIONES LINEALES

Proposición III.2.1.1 (Matriz asociada a una aplicación lineal)

Sea $f : V \to V'$ aplicación lineal entre espacios vectoriales (sobre $\mathbb{K}$) de dimensiones (finitas) n y m (respectivamente).

Sean $B = \{e_1, ..., e_n\}$,$B' = \{e'_1, ..., e'_m\}$ bases de V, V' y sea $M_{BB'}(f) \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la matriz asociada a f respecto de B, B' (cuyas columnas son las coordenadas de $f(B)$ respecto de B')

$$\left\{\begin{array}{l} f(e_1) = a_{11}e'_1 + ... + a_{m1}e'_m \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f(e_n) = a_{1n}e'_1 + ... + a_{mn}e'_m \end{array}\right\} \quad \text{ó}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix}}_{\stackrel{\text{Notación}}{\equiv} f(B)} = \underbrace{\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_m \end{pmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{M_{BB'}(f)} \quad (^1) \ ,$$

donde $f(B)$ y B' denotan aquí MATRICES-FILA DE VECTORES.

Sea $x \in V$ (resp. $f(x) \in V'$), con coordenadas en B (resp. en B')

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_1e_1 + ... + x_ne_n \quad \text{ó} \quad x = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} \quad (^2) \\ \\ f(x) = y_1e'_1 + ... + y_me'_m \quad \text{ó} \quad f(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_m \end{pmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}}_{Y} \quad (^3) \end{array}\right.$$

Entonces, la relación entre $(x_1, ..., x_n)$ y $(y_1, ..., y_n)$ es:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \quad \text{ó} \quad \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{M_{BB'}(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}}$$

Demostración. Inmediata. Matricialmente se tiene:

$$B'Y \stackrel{(3)}{=} f(x) \stackrel{(2)}{=} f(BX) \stackrel{f \text{ lineal}}{=} f(B)X \stackrel{(1)}{=} B'M_{BB'}(f)X \ , \quad \stackrel{B' \text{ es lin. indep.}}{\Rightarrow} \quad Y = M_{BB'}(f)X$$

donde la 3^a igualdad se debe a que (lo hacemos explícito para $n = 2$):

$$f(\underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X}) = f(x_1e_1+x_2e_2) \stackrel{f \text{ lineal}}{=} x_1f(e_1)+x_2f(e_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \end{pmatrix}}_{\stackrel{\text{Notación}}{\equiv} f(B)}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X}) \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Proposición III.2.1.2 (Aplicación lineal asociada a una matriz)}}$

Toda matriz es la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de ciertas bases.

Demostración.
Sea $A \equiv (a_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
Sean V, V' espacios vectoriales (sobre $\mathbb{K}$) de dimensiones n, m y $B \equiv \{e_1, ..., e_m\}, B' \equiv \{e'_1, ..., e'_n\}$ bases de V, V' (respectivamente).
Entonces la aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que $f(e_j) := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$ $(1 \leq j \leq n)$, esto es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix}}_{\overset{\text{Notación}}{\equiv} f(B)} := \underbrace{\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_m \end{pmatrix}}_{B'} A\,,$$

verifica (trivialmente) $M_{BB'}(f) = A$ ■

$\boxed{\text{Proposición III.2.2.1 (Fórmula de las dimensiones)}}$

Sea $f : V \to V'$ aplicación lineal entre espacios vectoriales (sobre $\mathbb{K}$) de dimensiones n y m.
Sean $B = \{e_1, ..., e_n\}$, $B' = \{e'_1, ..., e'_m\}$ bases de V, V' y sea $A \equiv M_{BB'}(f) \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la matriz asociada a f respecto de B, B' (cuyas columnas son las coordenadas en B' de los elementos de $f(B)$)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix}}_{\overset{\text{Notación}}{\equiv} f(B)} = \underbrace{\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_m \end{pmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{M_{BB'}(f)},$$

donde $f(B)$ y B' denotan aquí MATRICES-FILA DE VECTORES. Entonces se tiene:
1. $\dim(\mathrm{Im}(f)) = rg(A)$ *($\rightsquigarrow$ el 'rango' como algo intrínseco!!!)*.
2. $\dim(\ker(f)) = n - rg(A)$. *De donde se concluye (<u>fórmula de las dimensiones</u>):*

$$\boxed{\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)}$$

Demostración.

1. Recordando que $\mathcal{C}(A)$ es el 'espacio de columnas de A', esto es (II.2.3) el subesp. de V' generado por (los n vectores cuyas coordenadas respecto de B' son) las columnas de A, se tiene:

$$\mathrm{Im}(f) \overset{\text{Lema III.1.2.2}}{=} L(f(e_1), ..., f(e_n)) \overset{\text{III.2.1}}{=} \mathcal{C}(A)\ , \overset{\text{Cor. II.2.3.1bis}}{\Rightarrow} \dim(\mathrm{Im}(f)) = rg(A)$$

2. Puesto que $AX = 0$ es (Prop. III.2.1.1) un sistema de ecuaciones cartesianas (resp. de B) de $\ker(f) \subset V$, se tiene:

$$\dim(\ker(f)) \overset{\text{II.2.5}}{=} n - rg(A)\ , \overset{1}{\Rightarrow} \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n \quad ■$$

$\boxed{\text{Proposición III.2.3.0 (Matriz asociada y cambio de bases)}}$

Sea $f : V \to V'$ aplicación lineal entre espacios vectoriales (sobre $\mathbb{K}$) de dimensiones n y m.

1. Sean $B, \bar{B}$ bases de V y sean $B', \bar{B}'$ bases de V'. Escribamos (II.1.7) $\bar{B} = BP$ y $\bar{B}' = B'Q$, con $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{K})$ regulares. Entonces, la relación entre las correspondientes matrices (III.2.1) $M_{BB'}(f)$ y $M_{\bar{B}\bar{B}'}(f)$ es:

$$\boxed{M_{\bar{B}\bar{B}'}(f) = Q^{-1} M_{BB'}(f) P} \ ,$$

lo que concreta cómo $M_{BB'}(f)$ y $M_{\bar{B}\bar{B}'}(f)$ son 'equivalentes' (Prop. III.2.2.1(1)).

2. Si $V' = V$ ($\Rightarrow f \in End(V)$ y $m = n$) y si $B' = B, \bar{B}' = \bar{B}$ ($\Rightarrow Q = P$), entonces:

$$\boxed{M_{\bar{B}}(f) = P^{-1} M_B(f) P} \ ,$$

con lo que $M_B(f)$ y $M_{\bar{B}}(f)$ son 'semejantes'.

Demostración. 1. Inmediata. Matricialmente se tiene:

$$B' M_{BB'}(f) P \overset{\text{III.2.1}}{:=} f(B)P \overset{f \text{ lineal}}{=} f(BP) = f(\bar{B}) \overset{\text{III.2.1}}{=:}$$

$$= \bar{B}' M_{\bar{B}\bar{B}'}(f) = B' Q M_{\bar{B}\bar{B}'}(f) \ , \quad \overset{B' \text{ lin. indep.}}{\Rightarrow} \quad M_{BB'}(f) P = Q M_{\bar{B}\bar{B}'}(f)$$

donde la 2^a igualdad se debe a que (lo hacemos explícito para $n = 2$):

$$f(\underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{P}) = f\begin{pmatrix} ae_1 + ce_2 & be_1 + de_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Notación}}{\equiv} \begin{pmatrix} f(ae_1 + ce_2) & f(be_1 + de_2) \end{pmatrix} \overset{f \text{ lineal}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} af(e_1) + cf(e_2) & bf(e_1) + df(e_2) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \end{pmatrix}}_{\overset{\text{Notación}}{\equiv} f(B)} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{P})$$

2. Se sigue de 1 ■

Nota. Antes de 1, $\boxed{rg(f)}$ ya estaba ya bien definido (Prop. III.2.2.1(1)), lo que permitía concluir (Teor. I.4.4.5) que $M_{BB'}(f)$ y $M_{\bar{B}\bar{B}'}(f)$ tenían que ser equivalentes. Y, si $V' = V$, a partir de 2 están bien definidos $\boxed{tr(f)}$ (por la Prop. I.3.7.3) y $\boxed{\det(f)}$ (por I.5.2(P7)) ■

Proposición III.2.4.1 (Matriz asociada y operaciones con aplicaciones lineales)

Sean V, V', V'' espacios vectoriales (sobre $\mathbb{K}$) de dimensiones finitas, $f, g : V \to V', h : V' \to V''$ aplicaciones lineales, y B, B', B'' *bases de* V,V', V''.
Entonces se tiene:
1. $M_{BB'}(f+g) = M_{BB'}(f) + M_{BB'}(g)$
2. $M_{BB'}(af) = aM_{BB'}(f)$ *(*$\forall a \in \mathbb{K}$*)*
3. $M_{BB''}(h \circ f) = M_{B'B''}(h)M_{BB'}(f)$

Demostración.

1. $B'M_{BB'}(f+g) \overset{\text{III.2.1}}{:=} (f+g)(B) \overset{\text{III.1.4}}{:=} f(B)+g(B) \overset{\text{III.2.1}}{=:} B'M_{BB'}(f)+B'M_{BB'}(g) \overset{\text{Prop. I.3.3.1(3)}}{=}$
$= B'(M_{BB'}(f) + M_{BB'}(g))$, $\overset{B' \text{ lin. indep.}}{\Rightarrow}$ el resultado se sigue

2. $B'M_{BB'}(af) \overset{\text{III.2.1}}{:=} (af)(B) \overset{\text{III.1.4}}{:=} af(B) \overset{\text{III.2.1}}{=:} a\,(B'M_{BB'}(f)) \overset{\text{Prop. I.3.3.1(5)}}{=}$
$= B'(aM_{BB'}(f))$, $\overset{B' \text{ lin. indep.}}{\Rightarrow}$ el resultado se sigue

3. $B''M_{BB''}(h\circ f) \overset{\text{III.2.1}}{:=} (h\circ f)(B) := h(f(B)) \overset{\text{III.2.1}}{=:} h\,(B'M_{BB'}(f)) \overset{h \text{ lineal}}{=} h(B')M_{BB'}(f) \overset{\text{III.2.1}}{=:}$
$= B''M_{B'B''}(h)M_{BB'}(f)$, $\overset{B'' \text{ lin. indep.}}{\Rightarrow}$ el resultado se sigue ■

Teorema III.2.4.2 (Dimensión de $Hom_{\mathbb{K}}(V, V')$)

Sean V, V' espacios vectoriales (sobre $\mathbb{K}$) de dimensiones n, m, y B, B' *bases de* V,V'. *La aplicación*

$$\phi : Hom_{\mathbb{K}}(V, V') \to \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \ , \ f \mapsto M_{BB'}(f)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Y se concluye:

$$\boxed{\dim\left(Hom_{\mathbb{K}}(V, V')\right) = mn}$$

Demostración.

$\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $Hom_{\mathbb{K}}(V, V')$ son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales (II.1.1 Ejemplo 1 y Prop. III.1.4.1).
La aplicación ϕ es lineal (Prop. III.2.4.1(1,2)), inyectiva [queda determinada por su matriz asociada, Prop. III.2.1.1] y sobreyectiva (Prop. III.2.1.2).
De lo anterior se sigue (III.1.3) que ϕ es un isomorfismo, $\overset{\text{Teor. III.2.2.3}}{\Rightarrow} \dim(Hom_{\mathbb{K}}(V, V')) = \dim\left(\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\right) \overset{\text{II.1.4}}{=} mn$ ■

$\boxed{\text{Proposición III.3.1.3 (Base dual y cambio de base)}}$

Sea V espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) de dimensión n.

Sean $B = \{e_1, ..., e_n\}, B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ bases de V y escribamos $B' = BP$ (II.1.7), con $P \equiv (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.regular. Entonces se tiene: $\boxed{B'^* = B^* \left(P^{-1}\right)^t}$.

Demostración. Sean $B^* = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, B'^* = \{\varphi'_1, ..., \varphi'_n\}$ las bases (de V^*) duales de B, B' (respectivamente) y escribamos $B'^* = B^*Q$ (II.1.7), con $Q \equiv (c_{ij})_{ij} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ regular. Entonces se tiene (para cada $1 \leq i, j \leq n$):

$$\delta_{ij} \overset{\text{Def. de } B'^*}{=} \varphi'_i(e'_j) \overset{B'^*=B^*Q \text{ y } B'=BP}{=} (c_{1i}\varphi_1 + ... + c_{ni}\varphi_n)(a_{1j}e_1 + ... + a_{nj}e_n) \overset{\text{Def. de } B^*}{=}$$

$$= c_{1i}a_{1j} + ... + c_{ni}a_{nj} \overset{\text{I.3.3}}{=} (\text{fila } i \text{ de } Q^t)\,(\text{columna } j \text{ de } P) \quad , \quad \overset{\text{I.3.3}}{\Rightarrow} \quad I_n = Q^tP \ \blacksquare$$

Nota. Se sigue: la columna i de Q (coordenadas de φ'_i en B^*) es la fila i de P^{-1} (así viene enunciada esta Proposición en [MS]) $\blacksquare$

$\boxed{\text{Proposición III.3.3.1 (Matriz asociada a la aplicación traspuesta)}}$

Sea $f : V \to V'$ aplicación lineal entre espacios vectoriales (sobre $\mathbb{K}$). Se tiene:

1. La aplicación traspuesta $f^t : V'^* \to V^*, \varphi \mapsto \varphi \circ f$ es lineal.

2. Sean V, V' de dimensiones finitas n, m (respectivamente), B, B' bases de V, V' (respectivamente) y $A \equiv M_{BB'}(f) \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (esto es, $f(B) =: B'A$, III.2.1). Entonces se tiene: $\boxed{M_{B'^*B^*}(f^t) = A^t}$ *(esto es, $f^t(B'^*) = B^*A^t$)*

Demostración. 1. Se tiene ($\forall \varphi, \psi \in V'^*$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$ y $\forall v \in V$):

$$\left(f^t(a\varphi + b\psi)\right)(v) := (a\varphi + b\psi)(f(v)) \overset{\text{III.1.4}}{:=} a\varphi(f(v)) + b\psi(f(v)) =:$$

$$=: a\left(f^t(\varphi)\right)(v) + b\left(f^t(\psi)\right)(v) \overset{\text{III.1.4}}{=:} \left(af^t(\varphi) + bf^t(\psi)\right)(v)$$

y se aplica el Lema III.1.1.1.

2. Sean $B^*, B'^* = \{\varphi'_1, ..., \varphi'_m\}$ las bases (de V^*, V'^*) duales de B, B' y sea $C \equiv M_{B'^*B^*}(f^t) \in \mathfrak{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *(esto es, $f^t(B'^*) =: B^*C$, III.2.1).* Entonces se tiene (para cada $1 \leq i \leq m$):

$$(\text{fila } i \text{ de } A) \equiv (0 \ldots \underbrace{1}_{i\text{-ésimo}} \ldots 0)\, M_{BB'}(f) \overset{\text{Def. de } B'^*}{=} M_{B'}(\varphi'_i) M_{BB'}(f) \overset{\text{Prop. III.2.4.1(3)}}{=}$$

$$= M_B(\underbrace{\varphi'_i \circ f}_{f^t(\varphi'_i)}) \overset{\text{Prop. III.3.1.1}}{=} \underbrace{\text{fila con las coord. de } f^t(\varphi'_i) \text{ en } B^*}_{(\text{columna } i \text{ de } C)^t} = \left(\text{fila } i \text{ de } C^t\right) \quad , \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C = A^t \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Proposición III.4.1.1 (Isometría equivale a preservar normas)}}$

Sea $f : (V, \langle , \rangle) \to (V', \langle , \rangle')$ *aplicación lineal entre espacios vectoriales euclídeos. Entonces:*
1. f *es una isometría* $\Leftrightarrow$ $\|f(v)\|' = \|v\|$, *para todo* $v \in V$
2. f *es una isometría* $\Rightarrow$ f *es inyectiva. Si además* $\dim(V) = \dim(V')$, *entonces* f *es (Cor. III.2.2.2) un isomorfismo*

Demostración.

1. $(\Rightarrow)$ Inmediata.
$(\Leftarrow)$ Dados $x, y \in V$, sea $v \equiv x + y$. Entonces se tiene:

$$\begin{cases} \|v\|^2 \overset{\text{II.3.4}}{:=} \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\ \|f(v)\|'^2 \overset{\text{II.3.4}}{:=} \langle f(x+y), f(x+y) \rangle' \overset{f \text{ lineal}}{=} \|f(x)\|'^2 + \|f(y)\|'^2 + 2\langle f(x), f(y) \rangle' \end{cases}$$

Al ser $(\forall v \in V)$ $\|f(v)\|' = \|v\|$, se sigue $(\forall x, y \in V)$: $\langle f(x), f(y) \rangle' = \langle x, y \rangle$.

2. Se tiene: $f(v) = 0 \Rightarrow \|v\| \overset{\text{Hipótesis y 1}}{=} \|f(v)\|' = 0 \overset{\text{Prop.II.3.4.1(2)}}{\Rightarrow} v = 0$.
Se sigue que f es (Prop. III.1.3.1(1)) inyectiva y que

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \overset{\text{Prop. III.2.2.1(2)}}{=} \dim(V)\ , \overset{\dim(V)=\dim(V') \text{ finita}}{\Rightarrow} f \text{ sobreyectiva} \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Proposición III.4.1.2 (Isometrías y matrices ortogonales)}}$

Sea $f : (V, \langle , \rangle) \to (V, \langle , \rangle)$ *un endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita* n. *Entonces:*
1. f *isometría* $\left\{\begin{smallmatrix}\Rightarrow \forall \\ \Leftarrow \exists\end{smallmatrix}\right\}$ B *base de* V *(*$\rightsquigarrow$*matriz de Gram* G*)* $\left\{\begin{smallmatrix}\text{se tiene} \\ \text{tal que}\end{smallmatrix}\right\}$ $\boxed{(M_B(f))^t G M_B(f) = G}$.
En particular: f *isometría* $\left\{\begin{smallmatrix}\Rightarrow \forall \\ \Leftarrow \exists\end{smallmatrix}\right\}$ B *base ortonormal de* V $\left\{\begin{smallmatrix}\text{se tiene} \\ \text{tal que}\end{smallmatrix}\right\}$ $M_B(f)$ es *ortogonal (II.3.6).*
2. f *es una isometría* $\Rightarrow$ *para toda base* B *de* V, $\det(M_B(f)) = \pm 1$

Demostración.

1. Sean B base de V y $A \equiv M_B(f)$, con lo que: $x \equiv BX \overset{\text{Prop. III.2.1.1}}{\Rightarrow} f(x) = BAX$ (y análogamente para y). Entonces: $\left\{\begin{array}{l} \langle f(x), f(y) \rangle \overset{\text{II.3.2}}{=} (AX)^t G (AY) \overset{\text{Prop. I.3.6.1(2)}}{=} X^t A^t G A Y \\ \langle x, y \rangle \overset{\text{II.3.2}}{=} X^t G Y \end{array}\right\}$ (*)
$(\Leftarrow)$ se sigue inmediatamente de (*).
$(\Rightarrow)$ Eligiendo en (*) $(\forall i, j)$ $X^t \equiv$ (fila de ceros salvo un 1 en la columna i) y $Y \equiv$ (columna de ceros salvo un 1 en la fila j) se obtiene inmediatamente: el elemento ij de $A^t G A$ es igual al elemento ij de G. Con lo que $A^t G A = G$.

2. Sea B base (arbitraria) de V. Escribamos $B \equiv \bar{B}P$, con $\bar{B}$ base ortonormal. Entonces:

$$\det(M_B(f)) \overset{\text{Prop. III.2.3.0(2)}}{=} \det(P^{-1} M_{\bar{B}}(f) P) \overset{\text{I.5.2(P7)}}{=} \det(M_{\bar{B}}(f)) \overset{\text{Hipótesis y 1}}{=} \pm 1 \ \blacksquare$$

$\boxed{\text{Apartado III.4.2 (Isometrías en dimensión 2)}}$

Sea $f : (V, \langle,\rangle) \to (V, \langle,\rangle)$ isometría de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2

Sea $B = \{e_1, e_2\}$ base ortonormal de V ($\overset{\text{Prop. III.4.1.1(2)}}{\Rightarrow}$ $f(B)$ es base ortonormal) y escribamos $A \equiv (a_{ij})_{ij} \equiv M_B(f)$ (esto es, $f(B) =: BA$, III.2.1), $\overset{\text{Prop. III.4.1.2(1)}}{\Rightarrow}$ $A^tA = I_2$, $\overset{\text{I.5.2(P7,P8)}}{\Rightarrow}$ $\det(A) = \pm 1$.

Entonces se tiene (con $x \equiv f(e_1) = (a_{11}, a_{21})_B \equiv BX$, $y \equiv f(e_2) = (a_{12}, a_{22})_B \equiv BY$):

$$\begin{cases} 1 \overset{\text{Hipótesis}}{=} \langle x, x\rangle \overset{\text{II.3.2}}{=} X^tGX \overset{G=I_2}{=} X^tX = a_{11}^2 + a_{21}^2 \ , \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow \ \exists! \alpha \in [0, 2\pi) \ \text{ tal que } \ a_{11} = \cos\alpha, a_{21} = \sin\alpha \quad (^1) \\ \\ 1 \overset{\text{Hipótesis}}{=} \langle y, y\rangle \overset{\text{II.3.2}}{=} Y^tGY \overset{G=I_2}{=} Y^tY = a_{12}^2 + a_{22}^2 \ , \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow \ \exists! \beta \in [0, 2\pi) \ \text{ tal que } \ a_{12} = \cos\beta, a_{22} = \sin\beta \quad (^2) \\ \\ 0 \overset{\text{Hipótesis}}{=} \langle x, y\rangle \overset{\text{II.3.2}}{=} X^tGY \overset{G=I_2}{=} X^tY = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \overset{(1,2)}{=} \\ \quad = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0 \ , \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos\beta = -\sin\alpha \\ \sin\beta = \cos\alpha \end{array} \right\} \ \text{ó} \ \left\{ \begin{array}{l} \cos\beta = \sin\alpha \\ \sin\beta = -\cos\alpha \end{array} \right\} \beta \ (^3) \end{cases}$$

<u>Clasificación según $\det(A)$</u> (y, más 'finamente', <u>según $rg(A - I_2)$</u>):

<u>Caso</u> $\boxed{1}$ $\cos\beta = -\sin\alpha$, $\sin\beta = \cos\alpha$:

$$A \overset{(1,2,3)}{=} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} , \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\det(A) = 1} \\ \\ \det(A - I_2) = (1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2(1 - \cos\alpha) \quad (^*) \end{cases}$$

$\boxed{1.1}$ $\alpha \neq 0, \overset{(*)}{\Rightarrow}$ $|A - I_2| \neq 0$, $\overset{\text{Teor. I.5.4.1}}{\Rightarrow}$ $\boxed{rg(A - I_2) = 2}$ ($\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow}$ $V_f = \{0\}$) $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ f es ROTACIÓN$_{(\alpha\neq 0)}$

$\boxed{1.2}$ $\alpha = 0$, $\Rightarrow$ $A = I_2$, $\Rightarrow$ $\boxed{rg(A - I_2) = 0}$ ($\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow}$ $V_f = V$) $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ f es IDENTIDAD ($= \text{lím}_{\alpha\to 0}\boxed{1.1}$)

<u>Caso</u> $\boxed{2}$ $\cos\beta = \sin\alpha$, $\sin\beta = -\cos\alpha$:

$$A \overset{(1,2,3)}{=} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} , \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\det(A) = -1} \\ \\ \det(A - I_2) \overset{!}{=} 0, \overset{\text{Te.I.5.4.1}}{\Rightarrow} \boxed{rg(A - I_2) = 1} \ (\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow} \dim(V_f) = 1) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ f es SIMETRÍA$_{(V_f)}$

Ecuación cartesiana de V_f (respecto de B):

$$0 = (A - I_2)X \equiv \begin{pmatrix} -(1-\cos\alpha) & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -(1+\cos\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Al ser

$$(A - I_2) = \begin{pmatrix} -2\sin^2\frac{\alpha}{2} & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} & -2\cos^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{ll} \underset{\text{si } \alpha\neq 0}{\overset{E_{21}(\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}})}{\sim_f}} & -2\sin\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} & -\cos\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underset{\text{si } \alpha=0}{=} & 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\},$$

resulta: $\boxed{V_f : \ (\sin\frac{\alpha}{2})\, x_1 - (\cos\frac{\alpha}{2})\, x_2 = 0}$ (ecuación válida para todo α).

Nota. El valor de $\alpha \in [0, 2\pi)$ depende de B. Basta elegir $B' = \{e_1' = -e_1, e_2' = e_2\}$ y escribir $f(e_1') \equiv (\cos\alpha', \sin\alpha')_{B'}$ para obtener: $\cos\alpha' = \cos\alpha$ y $\sin\alpha' = -\sin\alpha$, esto es: $\alpha' = 2\pi - \alpha$. En el Caso 1 sólo es posible este valor alternativo, en el Caso 2 cualquier otro valor es posible ■

(Ejemplo 21) En $V = \mathbb{R}^2$, con $\langle , \rangle$ el producto escalar usual y B la base canónica (ortonormal):

Sea la isometría (III.4.1, Ejemplo 19) $f \in End(V)$ tal que

$$A \equiv M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \Rightarrow \ \det(A) = 1 \ \text{ y } \ \alpha = \frac{3\pi}{2} \ ,$$

de donde se sigue que f es ROTACIÓN$_{(\alpha=3\pi/2)}$.

Sea la isometría (III.4.1, Ejemplo 20) $f \in End(V)$ tal que

$$A \equiv M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \Rightarrow \ \det(A) = -1 \ \text{ y } \ \alpha = \frac{\pi}{2} \ ,$$

de donde se sigue que f es SIMETRÍA$_{(V_f)}$ con $V_f : x_1 = x_2$.

$\boxed{\text{Apartado III.4.3 (Isometrías en dimensión 3)}}$

Sea $f : (V, \langle,\rangle) \to (V, \langle,\rangle)$ isometría de un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3

(Prop. III.4.3.1) Sea $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal (i.e. $A^tA = I_n$, II.3.6). Si n es impar, entonces: $\det(A - I_n) = 0$ *(* $\overset{\text{Teor. I.5.4.1}}{\Leftrightarrow}$ $rg(A - I_n) < n$*) ó* $\det(A + I_n) = 0$ *(* $\overset{\text{Teor. I.5.4.1}}{\Leftrightarrow}$ $rg(A + I_n) < n$*) ó ambos.*

Demostración. Se tiene: $\det(\underbrace{A - A^t}_{\text{antisimétrica}}) \underset{\text{Ejerc. Adic. I.14}}{\overset{n \text{ impar}}{=}} 0$ (*), de donde se sigue:

$$(A - I_n)(A + I_n) = A^2 - I_n \overset{A^tA=I_n}{=} (A - A^t)A \ , \overset{(*)}{\Rightarrow} \det(A - I_n) = 0 \ \text{ó} \ \det(A + I_n) = 0 \ \blacksquare$$

Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal de V ($\overset{\text{II.3.2}}{\Rightarrow}$ matriz de Gram $G = I_3$) y escribamos $A \equiv M_B(f)$ (esto es, $f(B) =: BA$, III.2.1). Entonces se tiene:

$$A^tA \overset{\text{Prop. III.4.1.2(1)}}{=} I_3 \ , \begin{cases} \overset{\text{I.5.2(P7,P8)}}{\Rightarrow} \det(A) = \pm 1 \\ \overset{\text{Prop. III.4.3.1}}{\Rightarrow} rg(A - I_3) < 3 \ \text{ó} \ rg(A + I_3) < 3 \ \text{ó ambos} \end{cases}$$

<u>Clasificación según</u> $rg(A \mp I_3)$ (elegimos base ortonormal $B' \equiv \{v_1, v_2, v_3\}$ de V "adaptada" a cada subcaso):

<u>Caso</u> $\boxed{1}$ $rg(A - I_3) < 3$ ($\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow}$ $V_f \neq \{0\}$)

$\boxed{1.1}\boxed{rg(A - I_3) = 2}$ ($\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow}$ $\dim(V_f) = 1$)

f es ROTACIÓN$_{(V_f,\alpha\neq 0)}$. En efecto (elegimos B' tal que $V_f = L(v_1)$):

$$\left.\begin{cases} f(v_1) = v_1 \quad (^1) & \text{Y para } i = 2,3: \\ \langle f(v_i), v_1\rangle \overset{(1)}{=} \langle f(v_i), f(v_1)\rangle \overset{f \text{ isometría}}{=} \langle v_i, v_1\rangle = 0 \ , & \overset{\text{Prop. II.3.6.3}}{\Rightarrow} f(v_i) \in L(v_2, v_3) \end{cases}\right\} , \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \ \text{y} \ f \mid L(v_2, v_3) \text{ es isometría} \ , \ \overset{V_f = L(v_1) \text{ y III.4.2}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \ , \ \overset{\text{Prop. III.4.1.2(2)}}{\Rightarrow} \ \boxed{\det(A) = 1}$$

$\boxed{1.2}\boxed{rg(A - I_3) = 1}$ ($\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow}$ $\dim(V_f) = 2$)

f es SIMETRÍA$_{(V_f)}$ (= $\lim_{\alpha\to 0}\boxed{2.1}$). En efecto (elegimos B' tal que $V_f = L(v_1, v_2)$):

$$\left.\begin{cases} f(v_i) = v_i \quad (^2) & \text{Y para } i = 1,2: \\ \langle f(v_3), v_i\rangle \overset{(2)}{=} \langle f(v_3), f(v_i)\rangle \overset{f \text{ isometría}}{=} \langle v_3, v_i\rangle = 0 \ , & \overset{\text{Prop. II.3.6.3}}{\Rightarrow} f(v_3) \in L(v_3) \end{cases}\right\} , \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \ \text{y} \ f \mid L(v_3) \text{ es isometría} \ , \ \overset{V_f = L(v_1,v_2) \text{ y III.4.2}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ c = -1 \ , \ \overset{\text{Prop. III.4.1.2(2)}}{\Rightarrow} \ \boxed{\det(A) = -1}$$

$\boxed{1.3}\boxed{rg(A - I_3) = 0}$ ($\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow}$ $V_f = V$)

f es IDENTIDAD (= $\lim_{\alpha\to 0}\boxed{1.1}$), $\Rightarrow$ $\boxed{\det(A) = 1}$

Caso $\boxed{2}$ $\boxed{rg(A-I_3)=3}$ $(\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow}\ V_f=\{0\})$, $\overset{\text{Prop. III.4.3.1}}{\Rightarrow}\ rg(A+I_3)<3$ $(\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow}\ V_{-f}\neq\{0\})$

$\boxed{2.1}$ $\boxed{rg(A+I_3)=2}$ $(\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow}\ \dim(V_{-f})=1)$
f es ROTACIÓN$_{(V_{-f},\alpha\neq 0,\pi)}$ + SIMETRÍA$_{(V_{-f}^{\perp})}$. En efecto (elegimos B' tal que $V_{-f}=L(v_1)$):

$$\left.\begin{cases} f(v_1)=-v_1 \quad (^3) \qquad \text{Y para } i=2,3: \\ \langle f(v_i),v_1\rangle \overset{(3)}{=} -\langle f(v_i),f(v_1)\rangle \overset{f\text{ isometría}}{=} -\langle v_i,v_1\rangle=0\ ,\ \overset{\text{Prop. II.3.6.3}}{\Rightarrow}\ f(v_i)\in L(v_2,v_3)\end{cases}\right\}\ ,\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ M_{B'}(f)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}\ \text{ y } f\mid L(v_2,v_3) \text{ es isometría },\ \overset{V_f=\{0\}\text{ y III.4.2}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\ C=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\ ,\ \overset{\text{Prop. III.4.1.2(2)}}{\Rightarrow}\ \boxed{\det(A)=-1}$$

$\boxed{\text{X}}$ $rg(A+I_3)=1$ $(\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow}\ \dim(V_{-f})=2)$
IMPOSIBLE. En efecto (elegimos B' tal que $V_{-f}=L(v_1,v_2)$):

$$\left.\begin{cases} f(v_i)=-v_i \quad (^4) \qquad \text{Y para } i=1,2: \\ \langle f(v_3),v_i\rangle \overset{(4)}{=} -\langle f(v_3),f(v_i)\rangle \overset{f\text{ isometría}}{=} -\langle v_3,v_i\rangle=0\ ,\ \overset{\text{Prop. II.3.6.3}}{\Rightarrow}\ f(v_3)\in L(v_3)\end{cases}\right\}\ ,\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ M_{B'}(f)=\begin{pmatrix}-I_2 & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}\ \text{ y } f\mid L(v_3) \text{ es isometría },\ \overset{V_{-f}=L(v_1,v_2)\text{ y III.4.2}}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow\ c=1\ ,\ \Rightarrow\ rg(A-I_3)=2$ (este es el subcaso $\boxed{1.1}$ con $\alpha=\pi$, NO es el caso $\boxed{2}$)

$\boxed{2.2}$ $\boxed{rg(A+I_3)=0}$ $(\overset{\text{III.4.1}}{\Rightarrow}\ V_{-f}=V)$
f es INVERSIÓN $(=\lim_{\alpha\to\pi}\boxed{2.1})$, $\Rightarrow$ $\boxed{\det(A)=-1}$

(Ejemplo 22) En $V=\mathbb{R}^3$, con $\langle,\rangle$ el prod. escalar usual y B la base canónica, sea $f\in End(V)$ tal que $A\equiv M_B(f)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$, $\overset{!}{\Rightarrow}\ A^tA=I_3$, $\overset{\text{Prop. III.4.1.2(1)}}{\Rightarrow}$ f es isometría con $\det(A)=-1$. Además: $rg(A-I_3)<3$, $\Rightarrow$ f es SIMETRÍA$_{(V_f)}$ con $V_f:(A-I_3)X=0$, i.e. $x_1+x_3=0$

Ejercicios adicionales Capítulo III

III.1 (Núcleo e imagen) Sean f y g dos endomorfismos de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ tales que $f \circ g = 0$

1. Probar que $\operatorname{Im}(g) \subset \ker(f)$.

2. Si además g es sobreyectiva, determinar f. Alternativamente: si además f es inyectiva, determinar g.

3. Dar un ejemplo en el que $f \circ g = 0$ e $\operatorname{Im}(g) \neq \ker(f)$.

Solución (al10, Ej. 137):

III.2 (Cambio de base con matrices) Sean $U \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ y $W \subset \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ los subespacios vectoriales formados por las matrices de la forma (respectivamente)

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Sean B_U y B'_U las dos bases de U siguientes:

$$B_U = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\} \ , \ B'_U = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

y sean B_W y B'_W las dos bases de W siguientes:

$$\begin{cases} B_W = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\} \\ B'_W = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\} \end{cases}$$

Dada la aplicación lineal $f : U \to W, \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x+z & -x+y \\ -x-z & 0 & y+z \\ x-y & -y-z & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

1. La matriz asociada a f respecto de las bases B_U y B_W.

2. La matriz asociada a f respecto de las bases B'_U y B'_W y las matrices regulares que relacionan la matriz del apartado anterior y ésta.

III.3 (Núcleo, imagen y dimensiones) Demostrar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. Existe alguna aplicación lineal $f : \mathbb{K}^{1957} \to \mathbb{K}^{1957}$ cuya imagen coincida con su núcleo.

2. Existen una aplicación lineal inyectiva $f : V \to V'$ y otra sobreyectiva $g : V' \to V$ tales que $\operatorname{Im}(f) = \ker(g)$, con $\dim(V') = 357$.

3. Dada una aplicación lineal $f : V \to V'$ entre espacios vectoriales de dimensión finita, se considera el subespacio vectorial $W = \{g \in V'^* \mid g\,|_{\operatorname{Im}(f)} = 0\}$. Entonces

$$\dim(V) + \dim(\ker f) = \dim(W) + \dim(V')$$

4. Dados un espacio vectorial V de dimensión finita y dos formas lineales no nulas $f, g \in V^*$, se cumple: $\ker(f) = \ker(g)$ si y sólo si la dimensión del subespacio vectorial de V^* generado por f y g es 1.

III.4 (Núcleo, imagen y dimensiones) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada, respecto de la base canónica, por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y consideremos el vector $u = (1 - b, b, 1 + b)$.

1. Determinar a y b para que $u \in \mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$. Obtener en tal caso una base y unas ecuaciones cartesianas y paramétricas de $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

2. Encontrar un subespacio $L \subset \mathbb{R}^3$ de dimensión mínima entre los que cumplen $f(L) = \mathrm{Im}(f)$.

III.5 (Bases duales) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean dos bases $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B_2 = \{u_1, u_2, u_1 + u_3\}$. Indicar razonadamente si sus bases duales tienen algún elemento en común.

III.6* (Espacio bidual) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se llama **espacio bidual de** V (denotado V^{**}) al espacio dual del espacio dual de V.

1. Si $\dim(V)$ es finita, indicar razonadamente qué dimensión tiene V^{**}.

2. Para cada $v \in V$, sea ϕ_v la aplicación de V^* en $\mathbb{K}$ dada por $\phi_v(f) = f(v)$. Probar que ϕ_v es lineal y calcular su núcleo e imagen.

3. Sea Φ la aplicación de V en V^{**} dada por $\Phi(v) = \phi_v$. Probar que Φ es lineal y además es (si $\dim(V)$ es finita) un isomorfismo (este isomorfismo se dice que es **canónico** pues puede definirse sin dar la imagen de los elementos de una base de V).

III.7 (Isometría en dimensión 2) Sean $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada, respecto de la base canónica, por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

1. Probar que es una isometría y clasificarla.

2. Calcular V_f.

3. Calcular las imágenes de los vectores $(1, 0), (0, 1), (\sqrt{3}, 1)$.

4. Determinar el complemento ortogonal de la recta $x - \sqrt{3}y = 0$ y probar que coincide con V_{-f}.

III.8 (Isometría en dimensión 3) Sean $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada, respecto de la base canónica, por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(-x - y + \sqrt{2}z, -x - y - \sqrt{2}z, -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y)$$

Probar que f es una isometría y hallar sus elementos característicos.

III.9 (Isometrías y linealidad) Sean V, V' espacios vectoriales euclídeos y $f : V \to V'$ aplicación cualquiera. Considérense las afirmaciones siguientes: (a) f es lineal, (b) f es inyectiva, (c) f preserva normas de vectores, y (d) f preserva productos escalares.

1. Probar las siguientes implicaciones:

$$(a) \Leftarrow (d) \overset{(a)}{\leftrightharpoons} (c) \overset{(a)}{\Rightarrow} (b)$$

2. Concluir que el que $f : V \to V'$ preserve productos escalares es suficiente para que f sea una isometría (la linealidad es una consecuencia de la hipótesis).

III.10 (Isometría en dimension 3?)

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar con matriz de Gram (en la base canónica)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar si el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que tiene por matriz (en la base canónica)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es o no una isometría y describir f en otros términos.

IV. DIAGONALIZACION Y FORMA DE JORDAN

Teor. IV.1.5.3 (Endomorfismos diagonalizables, unicidad de la forma diagonal)

(Def.) Se dice que f es diagonalizable si existe base B de V tal que $M_B(f)$ es diagonal (forma diagonal de f). Equivalentemente (Prop. III.2.3.0(2)), si la matriz asociada a f en una (y cualquiera) base es diagonalizable por semejanza (IV.1.1)

(Teorema) 1. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_r$ (todos) los distintos autovalores de f. Entonces: f es diagonalizable $\Leftrightarrow$ $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_r}$ $\Leftrightarrow$ $(\alpha_1 + ... + \alpha_r = n$ y $d_i = \alpha_i$, $1 \leq i \leq r)$

2. Si f es diagonalizable, los elementos en la diagonal principal de su forma diagonal son (todos) los autovalores de f y en número igual a su multiplicidad algebraica, con lo que dicha forma diagonal es única ('esencialmente', salvo permutas en la diagonal principal).

Demostración.

1. Se tiene:

$$f \text{ es diagonalizable} \overset{\text{Prop. IV.1.5.1(1)}}{\Leftrightarrow} \exists \text{ base (de } V) \text{ de autovectores de } f \overset{\text{Teor. II.2.7.1(2)}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_r} = V \overset{\text{Lema IV.1.5.2(2)}}{\rightleftharpoons} V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_r} \overset{\text{Prop. II.2.9.1}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow d_1 + ... + d_r = n \underset{\alpha_1+...+\alpha_r \leq n}{\overset{\text{Prop. IV.1.4.1}}{\Leftrightarrow}} \Leftrightarrow \alpha_1 + ... + \alpha_r = n \text{ y } d_i = \alpha_i \ (1 \leq i \leq r)$$

2. Es consecuencia inmediata de 1 ■

$\boxed{\text{Lema IV.2.3.0 (Subespacios propios generalizados)}}$

Sean V espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) de dim. finita, $f \in End(V)$ y $\boxed{a} \in \mathbb{K}$ autovalor de f. Considérense los subespacios propios generalizados de a, definidos como

$$E^i(a) := \ker(f - aId)^i \quad (i = 1, 2, ...) \qquad (\overset{\text{Prop. IV.1.2.1(1)}}{\Rightarrow} E^1(a) = V_a)$$

Entonces, para cada $i = 1, 2, ...$ (y añadiendo $E^0(a) := \ker(Id) = \{0\}$), se tiene:
1. $v \in E^i(a) \Rightarrow v \in E^{i+1}(a)$. Se sigue ('cadena'):

$$\boxed{E^1(a) \subseteq ... \subseteq E^i(a) \subseteq E^{i+1}(a) \subseteq ...}$$

2. $v \in E^i(a) \Leftrightarrow (f - aId)(v) \in E^{i-1}(a)$ ('contracción hacia atrás', vía $f - aId$, de la cadena). Se sigue ('cada $E^i(a)$ es invariante bajo f'):

$$\boxed{f(E^i(a)) \subseteq E^i(a)}$$

Demostración. 1. Se tiene:

$$(f - aId)^i(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad (f - aId)^{i+1}(v) = 0$$

2. Se tiene:

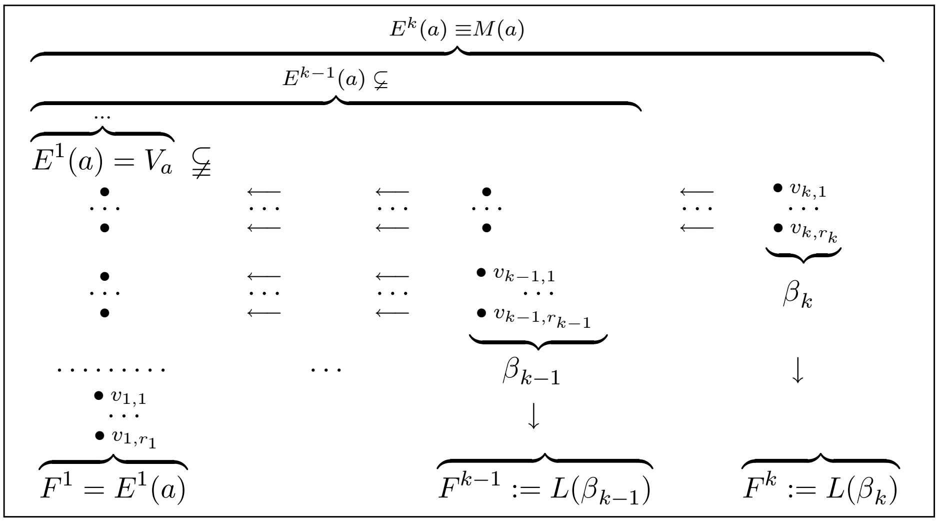
($\Rightarrow$) $v \in E^i(a) \Rightarrow (f - aId)(v) \in E^{i-1}(a)$ ('contracción hacia atrás'). Se sigue la invariancia bajo f: $v \in E^i(a) \Rightarrow f(v) \in av + E^{i-1}(a) \overset{1}{\subset} E^i(a)$

($\Leftarrow$) $0 \overset{\text{Hipótesis}}{=} (f - aId)^{i-1}((f - aId)(v)) = (f - aId)^i(v) \Rightarrow v \in E^i(a)$ ■

Proposición IV.2.4.1 (Existencia de una base de Jordan de M(a))

Sean V espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) de dim. finita, $f \in End(V)$ y $\boxed{a} \in \mathbb{K}$ autovalor de f.
Entonces existe una base B de $M(a)$ que es 'de Jordan' (esto es, tal que $M_B(f \mid M(a))$ es una matriz de Jordan).

Demostración. Sea el diagrama de vectores $\bullet$ de $M(a)$ (numeración 'antes de reordenar', ver luego):



Cada flecha $\leftarrow$ representa calcular la imagen por $f - aId$ (IV.2.3).

En la última columna de cada $E^i(a)$ $(1 \leq i \leq k)$ figura una base β_i de algún subespacio $F^i \subset M(a)$ complementario de $E^{i-1}(a)$ en $E^i(a)$, según el esquema (recordar que $E^0(a) = \{0\}$):

$$M(a) \equiv E^k(a) = E^{k-1}(a) \oplus F^k = ... = E^1(a) \oplus F^2 \oplus ... \oplus F^{k-1} \oplus F^k \qquad (^*)$$

La elección de la base $\beta_k \equiv \{v_1, ..., v_{r_k}\}$ (que determina F^k) es libre (ver sugerencia en IV.2.5)

Para cada $1 \leq i (< k)$, la elección de la base β_i (que para $i > 1$ determina F^i y para $i = 1$ es base de $F^1 = E^1(a) := V_a$) se hace en función de la base β_{i+1} como sigue:

(1) Si $S \equiv \{v_1, ..., v_r\}$ es lin. independiente en F^{i+1}, entonces $(\leftarrow S) \equiv \{(\leftarrow v_1), ..., (\leftarrow v_r)\}$ es lin. independiente en $E^i(a)$. En efecto:

$$0 = \mu_1(f - aId)(v_1) + ... + \mu_r(f - aId)(v_r) \; = \; (f - aId)\,(\mu_1 v_1 + ... + \mu_r v_r) \overset{\text{Prop. IV.1.2.1(4)}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \;\; \mu_1 v_1 + ... + \mu_r v_r \in E^1(a) \subset E^i(a) \overset{S \subset F^{i+1}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \;\; \mu_1 v_1 + ... + \mu_r v_r = 0 \overset{S \text{ lin. indep.}}{\Rightarrow} \;\; \mu_1 = ... = \mu_r = 0$$

Con lo que el conjunto $(\leftarrow \beta_{i+1})$ es linealmente independiente en $E^i(a)$.

(2) Pero $v \notin E^i(a) \overset{\text{Le.IV.2.3.0(2)}}{\Rightarrow} (\leftarrow v) \notin E^{i-1}(a)$, $\Rightarrow L(\leftarrow \beta_{i+1}) \cap E^{i-1}(a) = \{0\}$

(3) Se sigue de (1) y (2) que $(\leftarrow \beta_{i+1})$ puede ampliarse (Teor. II.1.4.3) con otros r_i vectores hasta formar una base β_i de algún complementario F^i de $E^{i-1}(a)$ en $E^i(a)$ $\big(\Rightarrow \dim(F^i) \geq \dim(F^{i+1})\big)$

El conjunto $\boxed{B'}$ de todos los vectores $\bullet$ del diagrama es lin. indep. (en cada columna por tratarse de una base de cierto subespacio, y entre unas y otras por (*)). Puesto que hay en total

$$\dim(E^1(a)) + \dim(F^2) + ... + \dim(F^{k-1}) + \dim(F^k) \overset{(*)}{=} \dim(M(a))$$

vectores, B' es base de $M(a)$.

Reordenamos B' "en el sentido habitual de lectura" (esto es, de izda. a dcha. y de arriba a abajo). Por ejemplo, para la 1^a fila:

$$v_1' \equiv (f - aId)^{k-1}(v_1) \ , \ v_2' \equiv (f - aId)^{k-2}(v_1) \ , \ \dots\dots\dots \ , \ v_k' \equiv v_1$$

Cada una de las $\dim(E^1(a) = V_a)$ filas da lugar en $M_{B'}(f \mid M(a))$ a un bloque de Jordan (IV.2.2), cuyo orden es el n^o de vectores de la fila:

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, para la 1^a fila:

$$\begin{cases} f(\ v_1' := (f - aId)^{k-1}(v_1)\ ) \overset{v_1' \in V_a}{=} av_1' \\ f(\ v_2'\ ) \overset{\text{identidad}}{\equiv} (f - aId)(v_2') \ + av_2' =: v_1' + av_2' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(\ v_k'\ ) \overset{\text{identidad}}{\equiv} (f - aId)(v_k') \ + av_k' =: v_{k-1}' + av_k' \end{cases}$$

Se sigue que $M_{B'}(f \mid M(a))$ es una matriz de Jordan $\blacksquare$

Proposición IV.2.6.1 (Dimensión del subespacio máximo)

Sean V espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) de dimensión finita y $f \in End(V)$.
Si $\lambda_i \in \mathbb{K}$ es autovalor de f con multiplicidad algebraica α_i entonces:

$$\dim(M(\lambda_i)) = \alpha_i$$

Demostración. Sean $n \equiv \dim(V)$ y $s \equiv \dim(M(\lambda_i))$.

Sea $\{v_1, ..., v_s\}$ base 'de Jordan' (IV.2.4) de $M(\lambda_i)$, que ampliamos (Teor. II.1.4.3) a base $B' \equiv \{v_1, ..., v_s, v_{s+1}, ..., v_n\}$ de V. Entonces se tiene:

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_i} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix} \ , \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \ p_f(\lambda) \overset{\text{Ej.Adic.I.23(2)}}{=} (\lambda_i - \lambda)^s \det(F_{22} - \lambda I_{n-s}) \overset{\text{Ej.Adic.IV.8(3)}}{=} (\lambda_i - \lambda)^s \, p_{\bar{f}}(\lambda) \ ,$$

donde la aplicación $\bar{f} : V/M(\lambda_i) \to V/M(\lambda_i)$ es la 'inducida' (Ej.Adic.IV.8(3)) en el espacio cociente $V/M(\lambda_i)$ (por ser $M(\lambda_i)$ invariante bajo f, Lema IV.2.3.1).

Se sigue que $\alpha_i \geq s$.

Supongamos que fuera $\alpha_i > s$. Entonces se tendría:

$$\exists [v] (\neq [0]) \in V/M(\lambda_i) \ \text{ tal que } \bar{f}[v] = \lambda_i [v] \ \ , \ \overset{\text{Def. de } \bar{f}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ \ (f - \lambda_i Id)(v) \in M(\lambda_i) \left(\equiv E^{k_i}(\lambda_i)\right) \ \ , \ \ \overset{\text{Lema IV.2.3.0(2}\Leftarrow)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ \ v \in E^{k_i+1}(\lambda_i) \overset{\text{IV.2.3}}{\equiv} M(\lambda_i) \ \ , \ \ \Rightarrow \ \ [v] = [0] \ \ \text{(contradicción)}$$

De donde se concluye que $\boxed{s = \alpha_i}$ ■

Teorema IV.2.6.3 (Existencia de forma de Jordan)

Sean V espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) de dimensión finita y $f \in End(V)$.

Si $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ son (todos) los autovalores distintos de f con multiplicidades algebraicas $\alpha_1, ..., \alpha_r$, entonces:

$$\exists \text{ base } B \text{ de } V \text{ 'de Jordan' (i.e. } M_B(f) \text{ es matriz de Jordan)} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 + ... + \alpha_r = n$$

Demostración.

1. En primer lugar, para cada $1 \leq i \leq r$, se verifica:

$$M(\lambda_i) \cap \sum_{j \neq i} M(\lambda_j) = \{0\} \quad \left(\overset{\text{Prop. II.2.8.1}}{\Rightarrow} \quad \sum_{j=1}^{r} M(\lambda_j) = M(\lambda_1) \oplus ... \oplus M(\lambda_r) \right)$$

En efecto: si (s.p.d.g.) existe $v(\neq 0) \in E^{k_1}(\lambda_1) \cap \sum_{j \neq 1} E^{k_j}(\lambda_j)$, se llega a la siguiente contradicción (denotando $\boxed{g} \equiv (f - \lambda_2 Id)^{k_2} \circ ... \circ (f - \lambda_r Id)^{k_r} \in End(V)$):

$$\begin{cases} v(\neq 0) \in E^{k_1}(\lambda_1) \overset{\text{IV.2.4}}{\Rightarrow} \exists (1 \leq) t \leq k_1 \text{ tal que } V_{\lambda_1} \ni \boxed{w} \equiv (f - \lambda_1 Id)^{t-1}(v) \neq 0 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow g(w) \overset{\text{Lema IV.2.6.2(1)}}{=} (\lambda_1 - \lambda_2)^{k_2} ... (\lambda_1 - \lambda_r)^{k_r} \, w \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2, ..., \lambda_r}{\neq} 0 \\ v \in \sum_{j=2}^{r} E^{k_j}(\lambda_j) \overset{\text{II.2.7}}{\Rightarrow} v = \underbrace{v_2}_{\in E^{k_2}(\lambda_2)} + ... + \underbrace{v_r}_{\in E^{k_r}(\lambda_r)} \Rightarrow g(v) \overset{\text{Lema IV.2.6.2(0)}}{=} 0 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow g(w) \overset{\text{Lema IV.2.6.2(0)}}{=} \left((f - \lambda_1 Id)^{t-1} \circ g \right)(v) = 0 \end{cases}$$

2. Ahora probemos el teorema:

$$\exists \bar{B} \text{ base de } V \text{ tal que } M_{\bar{B}}(f) \text{ es de Jordan} \quad \left\{ \begin{array}{c} \overset{\forall u \in \bar{B}, \, \exists \lambda_i \text{ tal que } u \in M(\lambda_i)}{\Rightarrow} \\ \overset{\text{Prop. IV.2.4.1}}{\Leftarrow} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \sum_{j=1}^{r} M(\lambda_j) \overset{1}{=} M(\lambda_1) \oplus ... \oplus M(\lambda_r) \quad \overset{\text{Prop. IV.2.6.1}}{\Leftrightarrow} \quad \alpha_1 + ... + \alpha_r = n \quad \blacksquare$$

Ejercicios adicionales Capítulo IV

IV.1 (Autovalores) Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión finita. Demostrar:

1. f es un isomorfismo si y sólo si 0 no es autovalor de f.
2. λ es autovalor de f si y sólo si $-\lambda$ lo es de $-f$.
3. Si λ es autovalor de f, entonces λ^2 lo es de f^2.
4. Si λ^2 es autovalor de f^2, entonces λ ó $-\lambda$ es autovalor de f.
5. Si $f^2 = f$, entonces los posibles autovalores de f son 0 y 1.
6. Si λ es un valor propio de f y f es isomorfismo, entonces λ^{-1} es valor propio de f^{-1}.
7. Si f es diagonalizable, entonces $f^k = 0$ si y sólo si $f = 0$.

IV.2 (Rectas y planos invariantes) Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Llamamos subespacio <u>invariante (por f)</u> a todo subespacio U de V tal que las imágenes por f de sus vectores son también vectores de U (esto es, $f(U) \subset U$). Probar:

1. Para cada autovalor λ de f, el subespacio propio V_λ es un subespacio invariante.
2. Toda recta (vectorial) invariante de V está contenida en V_λ para algún autovalor λ de f.
3. Todo plano (vectorial) de V generado por pares de rectas invariantes es invariante.
4. Si V es $\mathbb{R}^3$ y f tiene tres autovalores distintos, entonces hay exactamente tres rectas invariantes y podemos obtener una base de $\mathbb{R}^3$ tomando un vector director de cada una de dichas rectas.
5. Si V es $\mathbb{R}^3$ y f tiene tres autovalores distintos, entonces los únicos planos invariantes de V son los generados por pares de rectas invariantes.

IV.3 (Diagonalizabilidad de un endomorfismo con parámetros) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz asociada en la base canónica (ortonormal) es, para ciertos números reales a, b:

$$\begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & b^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Hallar los autovalores de f en función de a y b.
2. Estudiar si f es diagonalizable en función de a y b.
3. Hallar los valores de a y b para los que f es autoadjunto y, en uno de los casos, obtener la diagonalización por semejanza ortogonal.

IV.4 (Diagonalizabilidad por semejanza de una matriz con parámetros) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

donde a es un número real, se pide:

1. Estudiar si A es diagonalizable por semejanza en función de a y distinguiendo el caso real del complejo.
2. Para $a = 1$ diagonalizar por semejanza A como matriz compleja.

IV.5 (Subespacio máximo y forma de Jordan) De un endomorfismo f de $\mathbb{K}^8$ se sabe que el rango de $f - 2Id$ es mayor o igual que 6, el de $(f - 2Id)^4$ es 1 y el de $(f - 2Id)^5$ es 0.

Demostrar que $\lambda = 2$ es el único autovalor de f y que su subespacio máximo es todo $\mathbb{K}^8$. Calcular la forma de Jordan de f.

IV.6 (Forma de Jordan, de todo un poco) Indicar razonadamente si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

Si un endomorfismo $f : V \to V$ ($\dim V = 3$) tiene un único autovalor de multiplicidad algebraica 3, entonces:

1. Su forma de Jordan tiene un único bloque de Jordan.
2. Existen dos vectores propios linealmente independientes.
3. Hay una única recta invariante por f.

IV.7 (Diagonalizabilidad de endomorfismos, de todo un poco) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ tal que su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^a(\lambda - 4)^b$ $(a, b \geq 1)$ y sea A la matriz asociada a f respecto de cierta base de $\mathbb{R}^4$. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si $a = b = 2$, entonces f es diagonalizable.
2. f no es inyectiva.
3. $b = 3 \Rightarrow rg(A) = 3$.
4. Si A tiene rango 1, entonces A es diagonalizable por semejanza.

IV.8 (Subespacios invariantes y cocientes) Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita.

1. Probar que, si W_1 y W_2 son subespacios de V invariantes por f, entonces los subespacios $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ son también invariantes por f.

Sea W un subespacio de V invariante por f. Dada base B_W de W, sean B cualquier base de V que extiende a B_W y $\bar{B}$ la base de V/W inducida (Prop. II.2.10.4) por B_W y B.

2. Denotemos por $f_| : W \to W$ al endomorfismo restricción de f a W. Hallar la matriz $M_{B_W}(f_|)$ en función de la matriz $M_B(f)$.
3. Probar que existe un endomorfismo $\bar{f} : V/W \to V/W$ definido del modo siguiente: $\bar{f}[u] := [f(u)]$. Hallar la matriz $M_{\bar{B}}(\bar{f})$ en función de la matriz $M_B(f)$.
4. Probar que el polinomio característico de f es igual al producto de los polinomios característicos de $f_|$ y $\bar{f}$.

IV.9 (Forma de Jordan y subespacios invariantes en $\mathbb{C}^3$) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ que tiene exactamente una recta invariante. Demostrar que la recta está contenida en un plano invariante y que la matriz de Jordan de f es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

IV.10 (Formas de Jordan de endomorfismos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$) Indicar razonadamente cuáles son las posibles matrices de Jordan complejas para los endomorfismos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Indicar también cuántas rectas invariantes y cuántos planos invariantes hay en cada caso.

IV.11 (Teorema de Cayley-Hamilton) *Toda matriz cuadrada real o compleja A es anulada por su polinomio característico (es decir, $p_A(A)$ es la matriz nula).* También: *todo endomorfismo real o complejo f es anulado por su polinomio característico (es decir, $p_f(f)$ es el endomorfismo nulo).*

1. Probar el Teorema de Cayley-Hamilton
2. Calcular A^2, B^3 y C^{-1}, utilizando el Teorema de Cayley-Hamilton, cuando

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

IV.12 (Polinomio mínimo) De entre los polinomios que anulan a una matriz cuadrada A (real o compleja) hay un único polinomio mónico (i.e. con coeficiente 1 para el término de mayor grado), llamado polinomio mínimo, que tiene grado menor o igual que el resto. Análogamente se define el polinomio mínimo de un endomorfismo. Se puede demostrar que el polinomio mínimo es un divisor del polinomio característico y que los autovalores de A son también raíces del polinomio mínimo, aunque las multiplicidades de esas raíces puedan ser menores que las del polinomio característico.

Calcular el polinomio mínimo de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

IV.13 (Autovalores, de todo un poco) Demostrar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ existe un endomorfismo autoadjunto, no múltiplo de la identidad, que tiene por autovectores a $(1,1,0)$, $(1,-1,-1)$ y $(1,0,1)$
2. Los posibles autovalores (reales) de una matriz ortogonal son 1 y -1
3. Sean f y g endomorfismos de $\mathbb{C}^4$. Entonces ambos son isomorfismos si y sólo si 0 no es autovalor de su composición
4. Un endomorfismo f de un espacio vectorial V es diagonalizable si verifica $V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

IV.14 (Forma de Jordan en $\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$) Sea $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ un endomorfismo no diagonalizable cuya traza vale 2 y cuyo determinante vale 1.

1. Calcular la forma de Jordan del endomorfismo f
2. Lo mismo para el endomorfismo $\varphi : \mathrm{End}(\mathbb{C}^2) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$, $g \mapsto f \circ g$

IV.15 (Forma de Jordan en $\mathbb{C}^4$) Sean a y b dos enteros no negativos ($a \leq b$) y considérese la matriz

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 \\ -b & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Hallar todos los pares (a,b) que hacen que el endomorfismo $f_{a,b}$ de $\mathbb{C}^4$ con matriz (respecto de la base canónica) $A_{a,b}$ no sea diagonalizable.
2. Calcular la forma de Jordan de $f_{3,4}$ y hallar una base B de $\mathbb{C}^4$ que sea base de Jordan para $f_{3,4}$.
3. Hallar un plano y un hiperplano que sean invariantes bajo $f_{3,4}$.

IV.16* (Complexificación) Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita n.

1. Probar que el conjunto $V \times V := \{(u,v) \mid u,v \in V\}$, con las operaciones

$$\begin{cases} + : (V \times V) \times (V \times V) \to V \times V, ((u,v),(w,x)) \mapsto (u+w, v+x) \\ \quad \mathbb{C} \times (V \times V) \to (V \times V), ((a+ib),(u,v)) \mapsto (a+ib)(u,v) \equiv (au - bv, av + bu) \end{cases},$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (la complexificación de V), denotado $\boxed{V^{\mathbb{C}}}$.

Comprobar que $(u,v) = (u,0) + i(v,0)$, de donde se sigue la expresión: $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$.

Probar que $V^{\mathbb{C}} = L^{\mathbb{C}}(V)$ (donde $L^{\mathbb{C}}$ indica la envoltura lineal con coeficientes complejos) y concluir que $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$.

2. Probar que la inclusión $V \to V^{\mathbb{C}}, u \mapsto u + i0$ preserva la independencia lineal (nótese que V no es un subespacio vectorial de $V^{\mathbb{C}}$).

3. Probar que la operación (conjugación en $V^{\mathbb{C}}$)

$$\sigma : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}, u + iv \mapsto u - iv$$

preserva las sumas, es "compatible" con la conjugación en $\mathbb{C}$ [esto es: $\sigma((a+ib)(u+iv)) = \overline{(a+ib)}\, \sigma(u+iv)$] y preserva la independencia lineal.

4. Probar que cualquier base B de V es una base de $V^{\mathbb{C}}$, que $\dim_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ y que los vectores de V son precisamente aquellos vectores de $V^{\mathbb{C}}$ cuyas coordenadas respecto de B son todas reales.

5. Sean V' (otro) espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $f : V \to V'$ aplicación lineal. Probar que existe una única aplicación lineal $f^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V'^{\mathbb{C}}$ tal que que $f^{\mathbb{C}} \mid_V = f$. Probar que, si B, B' son bases de V, V' (y por tanto de $V^{\mathbb{C}}, V'^{\mathbb{C}}$), se verifica: $M_{BB'}(f^{\mathbb{C}}) = M_{BB'}(f)$.

6. Sea $f \in End(V)$. Probar que los autovalores de f son precisamente los autovalores reales de $f^{\mathbb{C}}$. Probar que los autovalores no-reales de $f^{\mathbb{C}}$ aparecen siempre "a pares" (mutuamente conjugados). Probar que los autovectores de f son precisamente aquellos autovectores de $f^{\mathbb{C}}$ que pertenecen a V (en cuyo caso, el autovalor es necesariamente real).

IV.17 (Isometrías, subespacios invariantes y autovalores) Sean $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y $f \in End(V)$ una isometría.

1. Probar que, si $U \subset V$ es subespacio invariante bajo f, entonces el endomorfismo restricción $f \mid U \in End(U)$ es una isometría y el complemento ortogonal $U^{\perp} (\subset V)$ es también invariante bajo f.

2. Probar que los posibles autovalores (reales) de f son 1 y -1.

IV.18 (Isometría) Sea $\langle , \rangle$ el producto escalar en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz de Gram en la base canónica $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y sea $f \in End(\mathbb{R}^3)$ una isometría de la que se sabe que tiene como autovector $e_1 + e_2 + e_3$ y que verifica: $tr(f) = \det(f) = 1$.

1. Clasificar f determinando sus elementos característicos.

2. Encontrar una base de un plano invariante bajo f.

IV.19 (Forma de Jordan con matrices antisimétricas) Sea V el espacio vectorial de las matrices reales antisimétricas de orden 3.

1. Comprobar que la aplicación f dada por:

$$f(X) := AXA \quad , \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

define un endomorfismo de V.

2. Comprobar que $f \in End(V)$ posee forma de Jordan. Hallar la forma de Jordan y una base de Jordan de f.

3. Si se define en V el producto escalar $\langle X, Y \rangle := tr(XY^t)$, determinar si f es o no autoadjunto.

IV.20* (Matrices conformes positivas de orden 2) Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2.

1. Probar que $f \in End(V)$ es conforme positivo (i.e. composición de una rotación y una homotecia) si y sólo si su matriz asociada, en alguna (y toda) base ortonormal B, es conforme positiva (i.e. $M_B(f) = C_{a,b} \equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, no ambos nulos).

2. Probar que el conjunto $CO^+(2, \mathbb{R}) \equiv \{C_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, \text{ no ambos nulos}\} \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ es (con el producto ordinario de matrices) un grupo, isomorfo al grupo multiplicativo $\mathbb{C} \backslash \{0\}$.

Sea ahora una matriz real $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, considerada como matriz compleja (se sobreentiende la inclusión $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, a \mapsto a + i0$)

3. Probar que, si $a + ib \in \mathbb{C}$ (con $b \neq 0$) es autovalor de A, entonces también $a - ib$ es autovalor de A.

4. Probar que, si $a + ib \in \mathbb{C}$ (con $b \neq 0$) es autovalor de A, entonces existe $P \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ regular tal que $A = PC_{a,b}P^{-1}$

5. Probar que se verifica: $\exp(C_{a,b}) = e^a C_{\cos b, \sin b}$

6. Si $a + ib \in \mathbb{C}$ (con $b \neq 0$) es autovalor de A, calcular $\exp(A)$.

IV.21* (Productos hermíticos) Sean $(V, \langle , \rangle)$ espacio vectorial euclídeo y $f \in End(V)$.

1. Probar que $\langle , \rangle$ induce en la complexificación $V^{\mathbb{C}}$ (de V, ver Ejerc.Adic. IV.16) un único producto hermítico (ver Ejerc.Adic. II.19) $g : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ tal que que $g\mid_{V \times V} = \langle , \rangle$.

Sea $f^{\mathbb{C}} \in End(V^{\mathbb{C}})$ el endomorfismo inducido (ver Ejerc.Adic. IV.16) en la complexificación $V^{\mathbb{C}}$.

2. Probar que f es una isometría de $(V, \langle , \rangle)$ si y sólo si $f^{\mathbb{C}}$ es una isometría de $(V^{\mathbb{C}}, g)$, esto es, si y sólo si $g(f^{\mathbb{C}}(x), f^{\mathbb{C}}(y)) = g(x, y)$, para todo $x, y \in V^{\mathbb{C}}$.

3. Probar que $f^{\mathbb{C}}$ es una isometría de $(V^{\mathbb{C}}, g)$ si y sólo si en una (y en cualquier) base ortonormal de $V^{\mathbb{C}}$ su matriz representativa $M_B(f^{\mathbb{C}})$ es unitaria, esto es, verifica $M_B(f^{\mathbb{C}})^\dagger M_B(f^{\mathbb{C}}) = I$.

4. Probar que f es autoadjunto en $(V, \langle , \rangle)$ si y sólo si $f^{\mathbb{C}}$ es autoadjunto en $(V^{\mathbb{C}}, g)$, esto es, si y sólo si $g(f^{\mathbb{C}}(x), y) = g(x, f^{\mathbb{C}}(y))$, para todo $x, y \in V^{\mathbb{C}}$.

5. Probar que $f^{\mathbb{C}}$ es autoadjunto en $(V^{\mathbb{C}}, g)$ si y sólo si en una (y en cualquier) base ortonormal de $V^{\mathbb{C}}$ su matriz representativa $M_B(f^{\mathbb{C}})$ es hermítica, esto es, verifica $M_B(f^{\mathbb{C}})^\dagger = M_B(f^{\mathbb{C}})$.

6. Probar que una matriz hermítica $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable por una semejanza unitaria, i.e existe $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ unitaria tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

IV.22* (Isometrías, clasificación) Sean $(V, \langle , \rangle)$ espacio vectorial euclídeo de dimensión finita n y $f \in End(V)$ isometría.

1. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ autovalor del endomorfismo $f^{\mathbb{C}} \in End(V^{\mathbb{C}})$ inducido (ver Ejerc.Adic. IV.16) en la complexificación $V^{\mathbb{C}}$. Probar que $|\alpha| = 1$.

2. Probar que $f^{\mathbb{C}}$ es diagonalizable. Concluir que, si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ es ortogonal, entonces $rg(A - I_n)^2 = rg(A - I_n)$

3. Sea $a + ib$ autovalor no-real (esto es, con $b \neq 0$) de $f^{\mathbb{C}} \in End(V^{\mathbb{C}})$. Probar que $a^2 + b^2 = 1$ y que existen $W \subset V$ plano invariante bajo f y B_W base $\langle , \rangle$-ortonormal de W tales que:

$$M_{B_W}(f \mid W) = C_{a,b} \equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

4. Probar que existe una base ortonormal B de V tal que $M_B(f)$ es una matriz 'diagonal por bloques' (de diversos órdenes), con los bloques de la diagonal principal (cuadrados!) iguales a ± 1 (de orden 1) o a matrices (de orden 2) de la forma $C_{a,b}$ (con $a^2 + b^2 = 1$), esto es (notación como en I.3.4, en particular $n_1 + ... + n_N = n$):

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix}, \text{ con } \underset{I=1,\dots,N}{A_{II}} = \pm 1 \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) \text{ ó } \underset{a_I^2+b_I^2=1}{= C_{a_I,b_I}} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

IV.23 (Forma de Jordan en dimensión par) Sean V un espacio vectorial complejo de dimensión $2n$ y $f \in End(V)$ tal que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

1. Determinar la forma de Jordan de f.
2. Construir una base de Jordan para f.

V. FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

Proposición V.1.2.1 (Forma bilineal asociada a una matriz)

Toda matriz cuadrada es la matriz asociada a una forma bilineal respecto de cierta base.

Demostración. (esta Prop. es similar a Prop. III.2.1.2)
Sea $A \equiv (a_{ij})_{i.j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
Sean V espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) de dimensión n y $B = \{e_1, ..., e_n\}$ base de V.
Entonces la forma bilineal $f : V \times V \mapsto \mathbb{K}$ determinada (V.1.2) por $f(e_i, e_j) := a_{ij}$ verifica (trivial)

$$M_B(f) = A \ \blacksquare$$

$\boxed{\text{Prop. V.1.3.1 (Matriz asociada a forma bilineal y cambio de base)}}$

Sean V espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) de dimensión n y $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal.

Sean $B = \{e_1, ..., e_n\}$, $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ bases de V y sea P la matriz de cambio de base (cuyas columnas son las coordenadas en B de los elementos de B')

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix}}_{B'} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{P},$$

donde B' y B denotan aquí MATRICES-FILA DE VECTORES.

Sean $x, y \in V$, con coordenadas en B

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} \quad , \quad y = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y}$$

(y análogamente en B'), de donde se sigue (Prop. II.1.7.1):

$$X = PX' \quad , \quad Y = PY' \quad (^1)$$

Sean $M_B(f) \equiv (f(e_i, e_j))_{i,j}$, $M_{B'}(f) \equiv (f(e'_i, e'_j))_{i,j}$ las matrices asociadas (V.1.2) a f en B y B', que verifican:

$$\begin{cases} f(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}}_{X^t} \underbrace{\begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & \dots & f(e_1,e_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(e_n,e_1) & \dots & f(e_n,e_n) \end{pmatrix}}_{M_B(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} & (^2) \\ f(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix}}_{X'^t} \underbrace{\begin{pmatrix} f(e'_1,e'_1) & \dots & f(e'_1,e'_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(e'_n,e'_1) & \dots & f(e'_n,e'_n) \end{pmatrix}}_{M_{B'}(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}}_{Y'} & (^{2'}) \end{cases}$$

Entonces la relación entre $M_B(f)$ y $M_{B'}(f)$ es:

$$\boxed{M_{B'}(f) = P^t M_B(f) P} \ ,$$

i.e. $M_B(f)$ y $M_{B'}(f)$ son 'congruentes' (II.3.3, caso particular de 'equivalentes', Prop. I.4.4.3)

Demostración. Inmediata. Matricialmente se tiene:

$$X'^t M_{B'}(f) Y' \overset{(2')}{=} f(x,y) \overset{(2)}{=} X^t M_B(f) Y \overset{(1)}{=} X'^t P^t M_B(f) P Y' \ , \ \overset{\forall x,y}{\Rightarrow} \ M_{B'}(f) = P^t M_B(f) P$$

En cuanto a la última implicación: eligiendo (para cada i, j) $X'^t \equiv$ (fila de ceros salvo un 1 en la columna i) y $Y' \equiv$ (columna de ceros salvo un 1 en la fila j) se obtiene inmediatamente: el elemento ij de $M_{B'}(f)$ es igual al elemento ij de $P^t M_B(f) P$ ■

Nota. Se sigue de la Prop. V.1.3.1: $\boxed{rg(f)}$ está bien definido (Prop. I.4.4.3 y Teor. I.4.4.5), pero no lo están $tr(f)$ (por la Prop. I.3.7.3) ni $\det(f)$ (por I.5.2(P7)) ■

Teorema V.2.6.1 (Diagonalizabilidad de formas cuadráticas reales)

Sean V espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) de dimensión finita n, $\Phi : V \to \mathbb{R}$ forma cuadrática y $f_p : V \times V \to \mathbb{R}$ su forma polar.

Entonces existe base de V tal que la matriz asociada a Φ en dicha base es diagonal.

Demostración. Sean B base de V y $A \equiv M_B(\Phi) := M_B(f_p)$ (V.2.3). Se tiene:

$$A^t \overset{\text{Prop. V.1.4.2}}{=} A \ , \overset{\text{Cor. IV.1.6.5}}{\Rightarrow} \exists P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \text{ ortogonal tal que } P^{-1}AP = D \text{ (diagonal)} \ , \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \text{ regular tal que } P^tAP = D \text{ (diagonal)} \ , \Rightarrow$$
$$\overset{\text{Prop. V.1.3.1}}{\Rightarrow} \exists \text{ base } B' := BP \text{ de } V \text{ tal que } M_{B'}(\Phi) = D \text{ (diagonal)} \quad \blacksquare$$

Teorema V.2.6.3 (Clasificación por signatura de formas cuadráticas reales)

Sean V espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) de dimensión finita n y $\Phi : V \to \mathbb{R}$ forma cuadrática de signatura $sg(\Phi) = (p, q)$.

Entonces Φ es: no degenerada $\Leftrightarrow$ $p + q = n$.

Y por otra parte Φ es (clasificación):

$$\begin{cases} \textit{1. definida positiva} \ \Leftrightarrow \ sg(\Phi) = (p = n, 0) \\ \textit{2. definida negativa} \ \Leftrightarrow \ sg(\Phi) = (0, q = n) \\ \textit{3. semidef. positiva} \ \Leftrightarrow \ sg(\Phi) = (p < n, 0) \\ \textit{4. semidef. negativa} \ \Leftrightarrow \ sg(\Phi) = (0, q < n) \\ \textit{5. indefinida} \ \Leftrightarrow \ sg(\Phi) = (p > 0, q > 0) \end{cases}$$

Demostr. Sea $B \equiv \{e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_{p+q}, e_{p+q+1}, ..., e_n\}$ base de V tal que (Teor. V.2.6.1)

$$A \equiv M_B(\Phi) \overset{\text{s.p.d.g.}}{=} diag(a_1, ..., a_p, b_{p+1}, ..., b_{p+q}, c_{p+q+1}, ..., c_n) \ ,$$

con los $a_i > 0$, los $b_j < 0$ y los $c_k = 0$.

Primero. Sea f_p la forma polar de Φ. Entonces se tiene:

$$Y^tAX \overset{\text{V.1.2}}{=} f_p(x, y) = 0, \forall y \in V \ \overset{!}{\Leftrightarrow} \ AX = 0 \ (*)$$

De donde se sigue:

$$(f_p(x, y) = 0, \ \forall y \in V \ \Rightarrow x = 0) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (AX = 0 \Rightarrow X = 0) \overset{\text{Teor. I.2.6.2(2)}}{\Leftrightarrow} n = rg(A) \ (\overset{!}{=} p + q)$$

Segundo. Se tiene: $\Phi(x) \overset{\text{V.1.2}}{=} X^tAX = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} |b_j| \, x_j^2$. De donde se sigue:

$$\begin{cases} 1. \ \Phi(x) > 0, \ \forall x (\neq 0) \ \Leftrightarrow \ p = n \\ 2. \ \Phi(x) < 0, \ \forall x (\neq 0) \ \Leftrightarrow \ q = n \\ 3. \ \exists y (\neq 0) \ \text{ tal que } \Phi(y) = 0 \ \text{ y } \Phi(x) \geq 0, \ \forall x \ \Leftrightarrow \ p < n \ \text{ y } q = 0 \\ 4. \ \exists y (\neq 0) \ \text{ tal que } \Phi(y) = 0 \ \text{ y } \Phi(x) \leq 0, \ \forall x \ \Leftrightarrow \ p = 0 \ \text{ y } q < n \\ 5. \ \exists x, y \ \text{ tales que } \Phi(x) > 0 > \Phi(y) \ \Leftrightarrow \ p > 0 \ \text{ y } q > 0 \quad \blacksquare \end{cases}$$

$\boxed{\text{Teorema V.2.8.1 (Criterio de Sylvester)}}$

Sean V espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) de dimensión finita n, $\Phi : V \to \mathbb{R}$ forma cuadrática, B base de V y $A \equiv M_B(\Phi)$. Entonces:
1. Φ es definida positiva (V.2.4) si y sólo si

$$\boxed{\det(A_k) > 0,\ 1 \le k \le n}$$

2. Φ es definida negativa (V.2.4) si y sólo si

$$\boxed{(-1)^k \det(A_k) > 0,\ 1 \le k \le n}\ ,$$

donde $\boxed{A_k}$ denota la submatriz formada por las k primeras filas y columnas de A, esto es: $A_k \equiv (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k} \in \mathfrak{M}_k(\mathbb{R})$

Demostración. 1. Escribiendo $B \equiv \{u_1, ..., u_n\}$, denotemos (para cada $1 \le k \le n$):

$$\begin{cases} U_k \equiv L(u_1,...,u_k), \text{ con lo que: } B_k \equiv \{u_1,...,u_k\} \text{ es base de } U_k \\ \Phi_k \equiv \Phi \mid U_k : U_k \to \mathbb{R}, \text{ con lo que: } M_{B_k}(\Phi_k) = A_k \ \text{ y } \ \Phi_n = \Phi \end{cases}$$

$(\Rightarrow)$ Φ def. positiva $\Rightarrow \Phi_k$ def. positiva $\overset{\text{Cor.V.2.7.3}}{\Rightarrow} \exists P_k \in \mathfrak{M}_k(\mathbb{R})\ \underset{1\le k\le n}{\text{reg.}}$ t.q. $A_k = P_k^t P_k \Rightarrow \underset{1\le k\le n}{\det(A_k) > 0}$

$(\Leftarrow)$ Inducción sobre n. Para $n = 1$, evidente. Y para $n > 1$ (supuesto cierto para $n-1$):

$$\underset{1\le k\le n-1}{\det(A_k) > 0} \text{ (hipótesis)} \overset{\text{Inducción}}{\Rightarrow} \Phi_{n-1} \text{ es definida positiva} \overset{\text{Cor. V.2.7.3}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ \exists B_{n-1} \equiv \{e_1, ..., e_{n-1}\} \text{ base de } U_{n-1} \text{ tal que } M_{B_{n-1}}(\Phi_{n-1}) = I_{n-1}$$

Completando B_{n-1} a una base $\{e_1, ..., e_{n-1}, v\}$ de V, se sigue (usando la notación $C \sim_{f+c} D$ para indicar, de acuerdo con la Prop. V.2.7.1(1), que C y D son congruentes):

$$A \equiv M_B(\Phi) \ \underset{\text{Prop. V.2.7.1(2)}}{\overset{\text{Prop. V.1.3.1}}{\sim_{f+c}}} \ \underbrace{\begin{pmatrix} I_{n-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}}_{M_{\{e_1,\dots,e_{n-1},v\}}(\Phi)} \ \overset{\text{Prop. V.2.7.1(2)}}{\sim_{f+c}} \ \underset{\text{para cierto } b\in\mathbb{R}}{\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}} \equiv M_{BP}(\Phi)\ ,$$

para cierta $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ regular. Con lo que $M_{BP}(\Phi) \overset{\text{Prop. V.1.3.1}}{=} P^t M_B(\Phi)$.

Puesto que $b = \det(M_{BP}(\Phi)) = \det(P)^2 \det(A) \overset{\det(A)>0 \text{ (hipótesis)}}{>} 0$, la matriz diagonal $M_{BP}(\Phi)$ tiene todos sus elementos diagonales > 0, lo que significa

$$sg(\Phi) = (n, 0)\ ,\ \overset{\text{Teor. V.2.6.3(1)}}{\Rightarrow} \ \Phi \text{ es definida positiva}$$

2. Es claro que: Φ es definida negativa $\Leftrightarrow -\Phi$ es definida positiva. Puesto que

$$M_B(-\Phi) = -M_B(\Phi) \quad \text{y} \quad (-A)_k = -A_k \ \left(\Rightarrow \ \det((-A)_k) = (-1)^k \det(A_k)\right)\ ,$$

basta aplicar 1 y el resultado se sigue ■

Sección V.2 (Resumen sobre formas cuadráticas reales)

(V.2.1) Forma cuadrática $\boxed{\Phi}$: $V \to \mathbb{R}$ sobre un esp. vect. V (sobre $\mathbb{R}$) de dimensión finita n

(V.2.2) Forma polar asociada a Φ: la (única, Prop. V.2.2.1) forma bilineal simétrica $\boxed{f_p}$: $V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $f_p(x,x) = \Phi(x)$

(V.2.3) Matriz asociada a Φ respecto de base $B \equiv \{e_1, ..., e_n\}$ de V: la matriz
$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \ni M_B(\Phi) \equiv A \equiv (a_{ij})_{i,j}$, con: $a_{ij} := f_p(e_i, e_j)$ ($\overset{\text{Prop.V.1.4.2}}{\Rightarrow} A^t = A$)

Dada otra base $B' \equiv BP$, es: $\boxed{M_{B'}(\Phi) \overset{\text{Prop.V.1.3.1}}{=} P^t M_B(\Phi) P}$. Se sigue (Prop. I.4.4.3 y Teor. I.4.4.5) que el rango de Φ $\boxed{rg(\Phi)}$ está bien definido)

(V.2.4) Se dice que Φ es <u>no degenerada</u> si: $f_p(x,y) = 0, \forall y \in V \;\Rightarrow\; x = 0$. Y se dice que Φ es <u>definida</u> si: $\Phi(x) \neq 0, \forall x (\neq 0) \in V$ ($\Rightarrow \Phi$ es no degenerada)

(V.2.5) Se dice que Φ es (clasificación exhaustiva y excluyente):

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} 1.\ \underline{\text{definida positiva}},\ \text{si:}\ \ \Phi(x) > 0\ ,\ \forall x(\neq 0) \in V \\ 2.\ \underline{\text{definida negativa}},\ \text{si:}\ \ \Phi(x) < 0\ ,\ \forall x(\neq 0) \in V \end{array}\right\} \overset{\text{Lema V.2.5.1}}{\Leftarrow} \text{definida} \\ \left.\begin{array}{l} 3.\ \underline{\text{semidefinida positiva}},\ \text{si: } \Phi \text{ no es definida y } \Phi(x) \geq 0\ ,\ \forall x \in V \\ 4.\ \underline{\text{semidefinida negativa}},\ \text{si: } \Phi \text{ no es definida y } \Phi(x) \leq 0\ ,\ \forall x \in V \end{array}\right\} \underline{\text{semidefinida}} \\ 5.\ \underline{\text{indefinida}},\ \text{si: } \Phi \text{ no es definida ni semidefinida},\ \overset{!}{\Leftrightarrow}\ \exists x, y \in V \text{ t.q. } \Phi(x) > 0 > \Phi(y) \end{cases}$$

(Teor. V.2.6.1, basado en Cor. IV.1.6.5): $\exists$ base $B' \equiv BP$ de V tal que $M_{B'}(\Phi) = D$ (diagonal). Pero una tal P no precisa (!) ser ortogonal y, si no lo es, la matriz diagonal D <u>depende de P</u>

(Teor. V.2.6.2, ley inercia Sylvester): el conjunto de <u>signos</u> (+, −, 0) de los elementos de la diagonal principal de D <u>no depende de P</u> $\rightsquigarrow$

$$\text{Signatura } \boxed{sg(\Phi)} := (p, q), \text{ con } \begin{cases} p \equiv \text{n}^o \text{ de signos } '+' \text{ en } D \\ q \equiv \text{n}^o \text{ de signos } '-' \text{ en } D \end{cases}$$

(Teor. V.2.6.3) Φ es no degenerada $\Leftrightarrow\ p + q = n$. Y por otra parte Φ es (clasificación):

$$\begin{cases} 1.\ \text{definida positiva} \ \Leftrightarrow\ sg(\Phi) = (p = n, 0) \\ 2.\ \text{definida negativa} \ \Leftrightarrow\ sg(\Phi) = (0, q = n) \\ 3.\ \text{semidef. positiva} \ \Leftrightarrow\ sg(\Phi) = (p < n, 0) \\ 4.\ \text{semidef. negativa} \ \Leftrightarrow\ sg(\Phi) = (0, q < n) \\ 5.\ \text{indefinida} \ \Leftrightarrow\ sg(\Phi) = (p > 0, q > 0) \end{cases}$$

(V.2.7) El cálculo de $sg(\Phi)$ puede hacerse:

• Habida cuenta que la semejanza del Cor. IV.1.6.5 es una congruencia. Basta por tanto calcular los autovalores de la matriz (simétrica) $M_B(\Phi)$ ($\forall$ base B de V), que dependerán de B [ya que $M_{BP}(\Phi) \overset{\text{Pr.V.1.3.1}}{=} P^t M_B(\Phi) P$] aunque no así el conjunto de sus signos (Teor. V.2.6.2). Puede ser penoso

• (alternativamente) Habida cuenta que cualquier congruencia es una 'equivalencia'. Basta por tanto (Prop. V.2.7.1) hacer <u>transformaciones elementales</u> en $M_B(\Phi)$, <u>las mismas</u> por filas que por columnas. Una <u>estrategia sencilla</u> para lograrlo es utilizar elementos no nulos sobre la diagonal principal (quizás antes hay que conseguirlos) para anular los no diagonales, esencialmente:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & * \end{pmatrix}_{a\neq 0} \overset{E_{21}(\frac{-b}{a})}{\sim_{f,c}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & ** \end{pmatrix} \quad \text{, quizás antes} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}_{b\neq 0} \overset{E_{12}(1)}{\sim_{f,c}} \begin{pmatrix} 2b & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

(Prop. V.2.7.2) $M_B(\Phi)$ es congruente con una matriz diagonal en la que sólo hay 1, -1 ó 0

(Corol. V.2.7.3) Φ es definida positiva (respect., definida negativa) si y sólo si $M_B(\Phi)$ es congruente con I_n (respect., con $-I_n$)

(Teor.V.2.8.1, crit. Sylvester): Φ es definida positiva (respect., definida negativa) si y sólo si

$$\boxed{\det(A_k) > 0,\ 1 \leq k \leq n} \qquad \text{(respect., } \boxed{(-1)^k \det(A_k) > 0,\ 1 \leq k \leq n}\text{)}\ ,$$

donde $\boxed{A_k}$ denota la submatriz formada por las k primeras filas y columnas de $A \equiv M_B(\Phi)$, esto es: $A_k \equiv (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k} \in \mathfrak{M}_k(\mathbb{R})$

Ejercicios adicionales Capítulo V

V.1 (Forma bilineal en dimensión 2) Sea V un espacio vectorial real bidimensional y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que (en cierta base B de V) $f(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_2$.

1. Probar que f es una forma bilineal. Escribir f como suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica.

2. Escribir la expresión analítica de la forma cuadrática asociada y clasificarla.

V.2 (Subespacio conjugado y subespacios complementarios) Sea $\phi : V \to \mathbb{K}$ una forma cuadrática sobre el $\mathbb{K}$-espacio vectorial V y sea x un vector que verifica $\phi(x) \neq 0$. Demostrar que el subespacio conjugado de x es un subespacio complementario de $L(x)$, es decir, $L(x) \oplus L(x)^c = V$.

V.3 (Familia de formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$) Para cada número real $a \in \mathbb{R}$ considérese la matriz

$$M_a = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ a & -3 & a \\ 0 & a & 2a \end{pmatrix}.$$

1. Considérese, en el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$, la forma cuadrática Φ_a cuya matriz (en la base estándar) es M_a. Determinar todos los valores de a para los que Φ_a es definida positiva o definida negativa.

2. Hagamos, en el apartado anterior, $a = 2$. Hallar una base de algún subespacio vectorial $U \subset \mathbb{R}^3$ que tenga dimensión máxima entre todos los que cumplen que la restricción $\Phi_2|U$ es definida negativa.

3. Denotando f_2 a la forma polar de Φ_2, hallar una base del subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^3$ conjugado respecto de f_2 del plano $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y + 2z = 0\}$.

V.4 (Forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$) Sea $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática cuya matriz respecto de cierta base $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ es

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y denotemos $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ su forma polar asociada.

1. Hallar una base del subespacio vectorial

$$V = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid f(u, v) = 0, \ \forall v \in \mathbb{R}^4\}$$

2. Hallar una base $\bar{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que la matriz $M_{\bar{B}}(f)$ sea diagonal.

3. Hallar una base de un subespacio W de $\mathbb{R}^4$ que tenga dimensión máxima entre todos los que cumplen que la restricción $\Phi|W$ sea semidefinida positiva.

4. ¿Es subespacio el conjunto M de vectores autoconjugados de f?

5. Hallar una base de un subespacio de $\mathbb{R}^4$ que tenga dimensión mínima entre todos los que contienen a M.

V.5 (Formas bilineales simétricas y endomorfismos autoadjuntos) Sean $(V, \langle, \rangle)$ un espacio (vectorial) euclídeo de dimensión n y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.

1. Probar que existe un único endomorfismo $\tilde{f} : V \to V$ dado por $\left\langle x, \tilde{f}(y) \right\rangle := f(x,y)$, $\forall x, y \in V$
2. Probar que f es simétrica si y sólo si $\tilde{f}$ es autoadjunto

V.6 (Endomorfismo autoadjunto y forma cuadrática) Sean $\mathbb{R}^3$ el espacio vectorial euclídeo ordinario y a y b dos parámetros reales.
1. Determinar b (quizás como función de a) para que un endomorfismo autoadjunto $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verifique:

$$f(1,0,0) = (3,b,2) \ , \ f(1,0,-1) = (1,b,-a-1) \ \text{y} \ f(0,1,2) = (2a+4, 2a, 2a+6)$$

Llamemos M_a a la matriz (respecto de la base canónica) de este endomorfismo.
2. Hallar la signatura de la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya matriz (resp. de la base canónica) es $A \equiv M_{a=1}$.
3. Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de Φ respecto de B sea diagonal.

V.7 (Subespacios conjugados) Sean V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) de dimensión n, $U \subset V$ un subespacio vectorial de dimensión r y $\Phi : V \to \mathbb{K}$ una forma cuadrática.
1. Probar que la dimensión del subespacio U^c conjugado de U (respecto de Φ) es $\geq n - r$.
2. Probar que, si Φ es no degenerada, entonces $\dim(U^c) = n - r$.
3. Poner ejemplos, para una Φ degenerada, de un subespacio $U \subset V$ con $\dim(U^c) > n - \dim(U)$ y de un subespacio $W \subset V$ con $\dim(W^c) = n - \dim(W)$.

V.8^{*F} (Productos hermíticos) Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $g : V \times V \to \mathbb{C}$ un producto hermítico, esto es (ver Ejerc.Adic. II.19), una aplicación $g : V \times V \to \mathbb{C}$ que cumple:

PH1 y PH2. 'Semilineal' en la 1^a variable: $\left\{ \begin{array}{l} g(u+v,w) = g(u,w) + g(v,w) \\ g(au,v) = \bar{a} g(u,v) \end{array} \right\}, \underset{\text{y } \forall a \in \mathbb{C}}{\forall u,v,w \in V}$

PH3. "Hermítica": $g(u,v) = \overline{g(v,u)}$ (con $\bar{a}$ el complejo conjugado de $a \in \mathbb{C}$), $\forall u, v \in V$

PH4. 'Definida positiva': $g(u,u) \geq 0, \forall u \in V$ *y* $g(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

1. Probar que la aplicación (g-norma) $\|\|_g : V \to \mathbb{R}, u \mapsto \sqrt{g(u,u)}$ (determinación positiva de la raíz) verifica de hecho las propiedades que caracterizan una 'norma', esto es ($\forall u, v \in V$ y $\forall a \in \mathbb{C}$): $(N1)$ $\|u\|_g \geq 0$, $(N2)$ $\|u\|_g = 0 \Leftrightarrow u = 0$, $(N3)$ $\|au\|_g = |a| \|u\|_g$ y $(N4)$ $\|u+v\|_g \leq \|u\|_g + \|v\|_g$. Se dice que $(V, \|\|_g)$ es un espacio normado.
2. Probar que la aplicación $d_g : V \times V \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto \|u - v\|_g$ verifica las propiedades de una 'distancia', esto es ($\forall u, v, w \in V$): $(D1)$ $d_g(u,v) \geq 0$, $(D2)$ $d_g(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$, $(D3)$ $d_g(u,v) = d_g(v,u)$ y $(D4)$ $d_g(u,w) \leq d_g(u,v) + d_g(v,w)$. Se dice que (V, d_g) es un espacio métrico.
3. (Este apartado requiere nociones elementales de topología en $\mathbb{R}^n$) Se dice que un espacio vectorial con un producto hermítico (V, g) es un espacio de Hilbert si el espacio métrico (V, d_g) es 'completo', esto es, si toda sucesión $\{a_n \in V\}_{n \in \mathbb{N}}$ que sea d_g-Cauchy (i.e. tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ verificando: $n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow d_g(a_n, a_m) < \varepsilon$) 'converge' (i.e. posee límite) en la topología inducida por d_g. Probar que, si V es de dimensión finita, entonces (V, g) es un espacio de Hilbert.

VI. ESPACIO AFÍN. CÓNICAS EUCLÍDEAS

Observ. VI.1.1.0 (Espacio afín. Enfoque alternativo)

Sean V espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$) y $\mathcal{A}$ conjunto no vacío (elementos: puntos $a, b, c, ...$).
(Def.) Se dice que $\mathcal{A}$, con una aplic. $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V, (a, b) \mapsto \boxed{\overrightarrow{ab}}$, es un esp. afín sobre V si:
(A1) $\forall a \in \mathcal{A}$, la aplicación $\mathcal{A} \to V, b \mapsto \overrightarrow{ab}$ es biyectiva
(A2) $\forall a, b, c \in \mathcal{A}$, se verifica (relación de Chasles): $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$.

(Def.') Se dice que $\mathcal{A}$, con una aplic. $\mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}, (a, v) \mapsto \boxed{a\zeta v}$ es un esp. afín sobre V si:
(A1') $\forall a \in \mathcal{A}$, la aplicación $V \to \mathcal{A}, v \mapsto a\zeta v$ es biyectiva.
(A2') $\forall a \in \mathcal{A}$ y $\forall v, w \in V$, se verifica: $(a\zeta v)\zeta w = a\zeta(v + w)$

La 'equivalencia' entre ambas definiciones de espacio afín es inmediata. En efecto:

Si $\mathcal{A}$ es un espacio afín sobre V según la primera definición, basta introducir la aplicación $\mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}, (a, v \overset{(A1)}{\equiv} \overrightarrow{ab}) \mapsto \boxed{a\zeta v := b}$, con la que se tiene:

• (A1') $\forall a \in \mathcal{A}$, la aplicación $V \to \mathcal{A}, v \mapsto a\zeta v$ es sobreyectiva $[\forall b \in \mathcal{A}$, basta elegir $v := \overrightarrow{ab}]$ e inyectiva [$\forall v \overset{(A1)}{\equiv} \overrightarrow{ab}$ y $\forall w \overset{(A1)}{\equiv} \overrightarrow{ac}$, se tiene: $(b =:)\ a\zeta v = a\zeta w\ (:= c) \ \Rightarrow\ \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac}$]

• (A2') $\forall a \in \mathcal{A}$ y $\forall v \overset{(A1)}{\equiv} \overrightarrow{ab}, w \overset{(A1)}{\equiv} \overrightarrow{bc} \in V$ $(\overset{(A2)}{\Rightarrow} v + w = \overrightarrow{ac})$, se verifica: $(a\zeta v)\zeta w := b\zeta w := c =: a\zeta(v + w)$

Y si $\mathcal{A}$ es un espacio afín sobre V según la segunda definición, basta introducir la aplicación $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V, (a, b \overset{(A1')}{\equiv} a\zeta v) \mapsto \boxed{\overrightarrow{ab} := v}$, con la que se tiene:

• (A1) $\forall a \in \mathcal{A}$, la aplicación $\mathcal{A} \to V, b \mapsto \overrightarrow{ab}$ es sobreyectiva $[\forall v \in V$, basta elegir $b := a\zeta v]$ e inyectiva [$\forall b \overset{(A1')}{\equiv} a\zeta v$ y $\forall c \overset{(A1')}{\equiv} a\zeta w$, se tiene: $(v =:)\ \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac}\ (:= w) \ \Rightarrow\ a\zeta v = a\zeta w$]

• (A2) $\forall a, b \overset{(A1')}{\equiv} a\zeta v, c \overset{(A1')}{\equiv} b\zeta w \in \mathcal{A}$ $(\overset{(A2')}{\Rightarrow} c = a\zeta(v+w))$, se verifica: $\overrightarrow{ac} := v + w =: \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}$

Lema VI.1.2.0 (Puntos y vectores)

Sea $\mathcal{A}$ espacio afín sobre un espacio vectorial V (sobre $\mathbb{K}$). Se tiene:
1. $\overrightarrow{(a + v)(a + w)} = w - v$
2. $\overrightarrow{(a + v)(b + v)} = \overrightarrow{ab}$

Demostración. Puesto que $a + v = b \overset{\text{Obs. VI.1.1.0}}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{ab} = v$, se tiene:
1. Sean $v \overset{(A1)}{\equiv} \overrightarrow{ab}, w \overset{(A1)}{\equiv} \overrightarrow{ac}$. Entonces:

$$\overrightarrow{(a + v)(a + w)} = \overrightarrow{bc} \overset{(A2)}{=} \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac} \overset{\text{Prop. VI.1.1.1(2)}}{=} w - v$$

2. Sean $\overrightarrow{ac} \overset{(A1)}{\equiv} v, \overrightarrow{bd} \overset{(A1)}{\equiv} v$. Entonces:

$$\overrightarrow{(a + v)(b + v)} = \overrightarrow{cd} \overset{(A2)}{=} \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bd} \overset{\text{Prop. VI.1.1.1(2)}}{=} \overrightarrow{ab} \ \blacksquare$$

Proposición VI.1.3.0 (Coordenadas y cambio de sistema de referencia)

Sea $\mathcal{A}$ espacio afín sobre espacio vectorial V de dimensión n.

Sean $R = \{o, B = \{e_1, ..., e_n\}\}$, $R' = \{o', B' = \{e'_1, ..., e'_n\}\}$ sistemas de referencia en $\mathcal{A}$, con lo que se tendrá:

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix}}_{B'} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{P} & (^1) \\ \overrightarrow{oo'} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}}_{C} & (^2) \end{cases}$$

donde B' y B denotan aquí MATRICES-FILA DE VECTORES.

Dado $x \in \mathcal{A}$, la relación entre sus coordenadas $(x_1, ..., x_n)_R$ y $(x'_1, ..., x'_n)_{R'}$ es:

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}}_{C} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{X'}}$$

(con lo que $X' = P^{-1}(X - C)$), o en notación más compacta (con matrices por bloques):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix}}_{(n+1)\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & P \end{pmatrix}}_{(n+1)\times(n+1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ X' \end{pmatrix}}_{(n+1)\times 1}$$

Demostración. Inmediata. Matricialmente se tiene:

$$BX \overset{\text{II.1.5}}{=} \overrightarrow{ox} \overset{\text{(A2)}}{=} \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'x} \overset{\text{II.1.5}}{=} \overrightarrow{oo'} + B'X' \overset{(1,2)}{=} BC + BPX' \ , \quad \overset{B \text{ lin. indep.}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \quad X = C + PX' \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Proposición VI.2.2.0 (Expresión matricial de una aplicación afín)}}$

Sean $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ aplicación afín entre espacios afines de dim. n y m, y $\overrightarrow{f} : V \to V'$ la aplicación lineal asociada.

Sean $R = \{o, B = \{e_1, ..., e_n\}\}$ y $R' = \{o', B' = \{e'_1, ..., e'_m\}\}$ sistemas de referencia en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, con lo que se tendrá:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{pmatrix} \overrightarrow{f}(e_1) & \dots & \overrightarrow{f}(e_n) \end{pmatrix}}_{\overset{\text{Notación}}{\equiv} \overrightarrow{f}(B)} = \underbrace{\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_m \end{pmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A \equiv M_{BB'}(\overrightarrow{f})} \qquad (^1) \\ \overrightarrow{o'f(o)} = \underbrace{\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_m \end{pmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}}_{D} \qquad (^2) \end{array} \right.$$

donde $\overrightarrow{f}(B)$ y B' denotan aquí MATRICES-FILA DE VECTORES.

Dado $x \in \mathcal{A}$, la relación entre sus coordenadas $x \equiv (x_1, ..., x_n)_R$ y las de $f(x) \equiv (y_1, ..., y_n)_{R'}$ es:

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}}$$

o en notación más compacta (con matrices por bloques):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix}}_{(m+1)\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & A \end{pmatrix}}_{(m+1)\times(n+1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix}}_{(n+1)\times 1}$$

Demostración. Inmediata. Matricialmente se tiene:

$$B'Y \overset{\text{II.1.5}}{=} \overrightarrow{o'f(x)} \overset{\text{(A2)}}{=} \overrightarrow{o'f(o)} + \overrightarrow{f(o)f(x)} =: \overrightarrow{o'f(o)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ox}) \overset{\text{II.1.5}}{=}$$

$$= \overrightarrow{o'f(o)} + \overrightarrow{f}(BX) \overset{\overrightarrow{f} \text{ lineal}}{=} \overrightarrow{o'f(o)} + \overrightarrow{f}(B)X \overset{(1,2)}{=} B'D + B'AX \ , \ \overset{B' \text{ lin. indep.}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ Y = D + AX \ \blacksquare$$

Apartado VI.2.4 (Puntos fijos y variedades invariantes de una aplicación afín)

Sean $\mathcal{A}$ espacio afín sobre esp. vectorial V (sobre $\mathbb{K}$) de dimensión n y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ aplicación afín con aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f} \in End(V)$

Sea $R = \{o, B\}$ sistema de referencia en $\mathcal{A}$ para el que la ecuación de f es (Prop. VI.2.2.0) $\boxed{Y = D + AX}$ (*) (con $\overrightarrow{ox} \equiv BX$, $\overrightarrow{of(x)} \equiv BY$, $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $\overrightarrow{f}(B) \equiv BA$ y $D \in \mathbb{K}^n$ tal que $\overrightarrow{of(o)} \equiv BD$).

(Def.) Se dice que $x \in \mathcal{A}$ es un <u>punto fijo de f</u> si $f(x) = x$

(Notaciones) Sea $\boxed{\mathcal{F}}$ el conjunto (vacío?) de puntos fijos de f.
Sean los sistemas (en general, inhomogéneos)

$$\begin{cases} \boxed{S_1} : (A - I_n)X = -D \\ \boxed{S_2} : (A - I_n)^2 X = -(A - I_n)D \end{cases}$$

Y sean, para cada $i = 1, 2$:

$$\begin{cases} \text{la variedad afín (si } \neq \emptyset) \ \boxed{\mathcal{I}_i} = \{x \equiv o + BX \in \mathcal{A} \mid X \text{ es solución de } S_i\} \\ \text{el subespacio vectorial } \boxed{\mathcal{H}_i} = \{x \equiv BX \in V \mid X \text{ es solución de } (S_i)_{\text{homogéneo}}\} \end{cases}$$

Se tiene (obvio): $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2$ (en general, $\mathcal{I}_1 \neq \mathcal{I}_2$) y $(V_{\overrightarrow{f}} \overset{\text{III.4.1}}{=})\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$ (en general, $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$).

(Prop. VI.2.4.1) 1. $\mathcal{F} = \mathcal{I}_1$
2. Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$, *entonces:* $\mathcal{F} = x_0 + V_{\overrightarrow{f}}$, $\forall x_0 \in \mathcal{F}$.

Demostración.

1. $f(x) = x \overset{\text{Prop. VI.1.1.1(1)}}{\Leftrightarrow} 0 = \overrightarrow{xf(x)} \overset{\text{VI.1.2}}{=} B(Y - X) \overset{B \text{ lin. indep.}}{\Leftrightarrow} 0 = Y - X \overset{(*)}{=} D + (A - I_n)X$

2. $x_0 \in \mathcal{I}_1 \overset{\text{VI.1.4, Ejemplo 5}}{\Rightarrow} (\mathcal{F} \overset{1}{=}) \ \mathcal{I}_1 = x_0 + \mathcal{H}_1 \overset{\text{III.4.1}}{=} x_0 + V_{\overrightarrow{f}}$ ■

(Ejemplo19) La traslación (VI.2.2, Ejemplo 16) $\tau_{t \equiv BT \neq 0}$ tiene $\mathcal{I}_1 = \emptyset$ [$(I_n - I_n)X = -T$ es incompatible] y $\mathcal{I}_2 = \mathcal{A}$ [$(I_n - I_n)^2 X = -(I_n - I_n)T$ es trivial]
La homotecia (Ejemplo 17) $h_{z \equiv o + BZ, \lambda \neq 1}$ tiene $\mathcal{I}_1 = \{z\}$ [$(\lambda I_n - I_n)X = -(1 - \lambda)Z$ es compatible determinado] y $\mathcal{I}_2 = \{z\}$.

(Def.) Se dice que una variedad afín $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ es <u>invariante por f</u> si $f(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$.

(Nota) La variedad afín (si $\neq \emptyset$) $\mathcal{F} = \mathcal{I}_1$ es invariante por f (Prop. VI.2.4.1(1)). Y también lo es (si $\neq \emptyset$) $\mathcal{I}_2$. En efecto, se tiene la implicación:

$$(A - I_n)^2 X = -(A - I_n)D \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (A - I_n)^2(D + AX) \equiv (A - I_n)^2 D + A(A - I_n)^2 X \overset{x \in \mathcal{I}_2}{=} (A - I_n)^2 D - A(A - I_n)D = -(A - I_n)D$$

y el resultado se sigue de (*).

(Prop. VI.2.4.2) Sea $x \in \mathcal{A}$ y denotemos (de ahora en adelante) $\boxed{\mathcal{L}_x} \equiv x + V_{\overrightarrow{f}}$ (III.4.1). *Entonces:*

1. $f(\mathcal{L}_x) \subseteq \mathcal{L}_x \Leftrightarrow f(x) \in \mathcal{L}_x \Leftrightarrow x \in \mathcal{I}_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_x \subseteq \mathcal{I}_2$. De donde se sigue: $\mathcal{I}_2$ es la unión de todas aquellas variedades afines $\mathcal{L}_x$ que son invariantes por f.

2. $\forall a \in \mathcal{L}_x$, $\overrightarrow{af(a)} = \overrightarrow{xf(x)}$. De donde se sigue: si $f(\mathcal{L}_x) \subseteq \mathcal{L}_x$ (en tal caso se habla de la "restricción" $f \mid \mathcal{L}_x$), entonces $f \mid \mathcal{L}_x$ es una traslación.

Demostración.

1. Primero, $f(\mathcal{L}_x) \subseteq \mathcal{L}_x \Leftrightarrow f(x) \in \mathcal{L}_x$. En efecto ($\Leftarrow$): $\forall a \in \mathcal{L}_x$,

$$f(a) \overset{\text{Obs. VI.1.1.0}}{=} f(x) + \overrightarrow{f(x)f(a)} =: f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xa}) \overset{\overrightarrow{xa} \in V_{\overrightarrow{f}}}{=}$$
$$= f(x) + \overrightarrow{xa} \in f(x) + V_{\overrightarrow{f}} \overset{\text{Hip. y Prop. VI.1.4.1(1)}}{=} \mathcal{L}_x$$

Segundo, $f(x) \in \mathcal{L}_x \Leftrightarrow x \in \mathcal{I}_2$. En efecto:

$$f(x) \in \mathcal{L}_x \overset{\text{VI.1.4}}{\Leftrightarrow} V_{\overrightarrow{f}} \ni \overrightarrow{xf(x)} \overset{\text{VI.1.2}}{=} B(Y - X) \overset{\text{III.4.1}}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \; 0 = (A - I_n)(Y - X) \overset{(*)}{=} (A - I_n)\left(D + (A - I_n)X\right) = (A - I_n)D + (A - I_n)^2 X \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} x \in \mathcal{I}_2$$

Tercero: $x \in \mathcal{I}_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_x \subseteq \mathcal{I}_2$. En efecto ($\Rightarrow$):

$$\mathcal{L}_x \equiv x + V_{\overrightarrow{f}} \overset{\text{III.4.1}}{=} x + \mathcal{H}_1 \subseteq x + \mathcal{H}_2 \overset{\text{Hip.}}{=} \mathcal{I}_2$$

2. Se tiene: $\forall a \in \mathcal{L}_x$,

$$\overrightarrow{af(a)} \overset{\text{(A2)}}{=} \overrightarrow{ax} + \overrightarrow{xf(x)} + \overrightarrow{f(x)f(a)} \overset{\text{Prop. VI.1.1.1(2)}}{=}$$
$$= -\overrightarrow{xa} + \overrightarrow{xf(x)} + \overrightarrow{f(x)f(a)} =: -\overrightarrow{xa} + \overrightarrow{xf(x)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xa}) \overset{\overrightarrow{xa} \in V_{\overrightarrow{f}}}{=} \overrightarrow{xf(x)} \; \blacksquare$$

Si A es ortogonal (p.ej. si A es la matriz de una isometría en base ortonormal), entonces se verifica (Ejerc.Adic. IV.22(2)): $rg(A - I_n)^2 = rg(A - I_n)$

(Lema VI.2.4.3) Si $rg(A - I_n)^2 = rg(A - I_n)$, entonces $\mathcal{I}_2 \neq \emptyset$ (siempre lo es si $D = 0$!!). Además existe una única variedad afín $\mathcal{L}_x$ invariante por f, a saber, la propia $\mathcal{I}_2$.

Demostración. Se tiene:

$$rg(A - I_n)^2 \leq rg\left((A - I_n)^2 \mid (A - I_n)D\right) \overset{\text{Prop. I.4.4.7}}{\leq}$$
$$\leq \; \min\{rg(A - I_n), rg(A - I_n \mid D)\} = rg(A - I_n) \;\; , \overset{\text{Hip. y Teor. I.2.6.2(1)}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \; \mathcal{I}_2 \neq \emptyset \; , \overset{\text{Prop. VI.2.4.2(1)}}{\Rightarrow} \; \forall x \in \mathcal{I}_2,\ \mathcal{L}_x \text{ es invariante por } f \; \text{ y } \mathcal{L}_x \subseteq \mathcal{I}_2 \; (^1)$$

Pero: $rg(A - I_n)^2 \overset{\text{Hip.}}{=} rg(A - I_n) \overset{\text{II.2.5}}{\Rightarrow} \dim(\mathcal{H}_1) = \dim(\mathcal{H}_2), \overset{\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2}{\Rightarrow} (V_{\overrightarrow{f}} \overset{\text{III.4.1}}{=})\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 \; (^2)$

De $(^1)$ y $(^2)$ se sigue: $\forall x \in \mathcal{I}_2,\ \mathcal{L}_x = \mathcal{I}_2, \overset{\text{Prop. VI.2.4.2(1)}}{\Rightarrow} \exists! \mathcal{L}_x (= \mathcal{I}_2)$ invariante por f $\blacksquare$

Apartado VI.2.5 (Clasificación de los movimientos rígidos en dimensión 2)

Sean $\mathcal{A}$ plano afín euclídeo sobre $(V, \langle , \rangle)$ y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ movimiento rígido (VI.2.3)

Sea $R = \{o, B\}$ sistema de referencia rectangular (VI.1.2) respecto del que la ecuación de f es: $Y \overset{\text{Prop. VI.2.2.0}}{=} D + AX$. Se tiene:

$$\begin{cases} rg(A - I_2)^2 \overset{\text{III.4.2}}{=} rg(A - I_2) \overset{\text{Lema VI.2.4.3 \& Prop. VI.2.4.2(2)}}{\Rightarrow} \\ \quad \Rightarrow \mathcal{I}_2 \neq \emptyset,\ \exists! \mathcal{L}_x (= \mathcal{I}_2) \text{ invariante por } f \text{ y } f \mid \mathcal{L}_x \text{ es traslación } (^1) \\ \\ x_0 \in \mathcal{F} \overset{\text{Prop. VI.2.4.1(2)}}{\Rightarrow} (\mathcal{I}_1 \overset{\text{Prop. VI.2.4.1(1)}}{=}) \mathcal{F} = \mathcal{L}_{x_0} \overset{(1)}{=} \mathcal{I}_2 \ (^2) \end{cases}$$

Clasificación según $rg(A - I_2)$ (que clasifica isometrías vectoriales, III.4.2) y el conjunto $\mathcal{F}$:

$\boxed{1.1}$ $\boxed{rg(A - I_2) = 2}$ $\left(\overset{\text{III.4.2}}{\Rightarrow} V_{\vec{f}} = \{0\} \text{ y } \vec{f} = Rot_{(\alpha \neq 0)},\ \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{I}_2 = \text{ punto } \{x_0\} \right), \overset{\text{Teor. I.2.6.2}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow S_1$ es compat. determ., $\overset{\text{Prop.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \mathcal{F} = \text{punto},\ \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \{x_0\}}$ / f es ROTACIÓN$_{(x_0, \alpha \neq 0)}$

$\boxed{1.2}$ $\boxed{rg(A - I_2) = 0}$ $\left(\overset{\text{III.4.2}}{\Rightarrow} V_{\vec{f}} = V \text{ y } \vec{f} = Id_V,\ \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{I}_2 = \mathcal{A} \right), \overset{\text{Teor. I.2.6.2}}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow S_1 \text{ es } \begin{cases} \text{trivial (I.1.3) (si } D = 0), \overset{\text{Prop.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \mathcal{A}} \ / \ f \text{ es IDENTIDAD } (= \text{lím}_{\alpha \to 0} \boxed{1.1}) \\ \qquad \text{ó bien} \\ \text{incompatible (si } D \neq 0), \overset{\text{Prop.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \emptyset} \ / \ f \text{ es TRASLACIÓN}_{(t \equiv BDC \neq 0)} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $\boxed{rg(A - I_2) = 1}$ $\left(\overset{\text{III.4.2}}{\Rightarrow} \dim(V_{\vec{f}}) = 1 \text{ y } \vec{f} = Sim_{(V_{\vec{f}})},\ \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{I}_2 = \text{ recta } \mathcal{R} \right), \overset{\text{Teor. I.2.6.2}}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow S_1 \text{ es } \begin{cases} \text{compatible indeterm.}, \overset{\text{Prop.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \mathcal{F} = \text{recta}, \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \mathcal{R}} \ / \ f \text{ es SIMETRÍA}_{(\mathcal{R})} \\ \qquad \text{ó bien} \\ \text{incompatible}, \overset{\text{Prop.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \emptyset} \ / \ f \text{ es SIMETRÍA DESLIZANTE}_{(\mathcal{R}, t \neq 0)} \end{cases}$$

(Ejemplo 20, VI.2.4) $A = -\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ $(\Rightarrow rg(A - I_2) = 1)$ y $D = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha \\ 2\sin\alpha \end{pmatrix}$.

Entonces: S_1 es (!) compatible indeterminado, $\mathcal{F}(= \mathcal{I}_1) \overset{!}{=} \mathcal{R}_{x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha = 1}$ y f es SIMETRÍA$_{(\mathcal{R})}$.

(Ejemplos 21-22, VI.2.4-VI.2.5) $A = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ $(\Rightarrow rg(A - I_2) = 1)$ y $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces: S_1 es (!) incompatible $(\Rightarrow \mathcal{F} = \emptyset), \mathcal{I}_2 \overset{!}{=} \mathcal{R}_{4x_1 + 2x_2 = 7}$ y f es SIMETRÍA DESLIZANTE$_{(\mathcal{R}, t \neq 0)}$ con $t \overset{!}{=} (1/5, -2/5)$.

Apartado VI.2.6 (Clasificación de los movimientos rígidos en dimensión 3)

Sean $\mathcal{A}$ esp. afín euclídeo de dim. 3 sobre $(V, \langle,\rangle)$ y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ movimiento rígido (VI.2.3)
Sea $R = \{o, B\}$ sistema de referencia rectangular (VI.1.2) respecto del que la ecuación de f es: $Y \overset{\text{Prop. VI.2.2.0}}{=} D + AX$. Se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} rg(A - I_3)^2 \overset{\text{III.4.3}}{=} rg(A - I_3) \ , \quad \overset{\text{Lema VI.2.4.3 \& Prop. VI.2.4.2(2)}}{\Rightarrow} \\ \quad \Rightarrow \mathcal{I}_2 \neq \emptyset,\ \exists! \mathcal{L}_x (= \mathcal{I}_2) \text{ invariante por } f \text{ y } \ f \mid \mathcal{L}_x \text{ es traslación } (^1) \\ x_0 \in \mathcal{F} \overset{\text{Prop. VI.2.4.1(2)}}{\Rightarrow} (\mathcal{I}_1 \overset{\text{Prop. VI.2.4.1(1)}}{=}) \ \mathcal{F} = \mathcal{L}_{x_0} \overset{(1)}{=} \mathcal{I}_2 \ (^2) \end{array}\right.$$

<u>Clasificación según $rg(A \mp I_3)$ (que clasifican isometrías vectoriales, III.4.3) y el conjunto $\mathcal{F}$:</u>

$\boxed{1.1}\ \boxed{rg(A - I_3) = 2}\ \left(\overset{\text{III.4.3}}{\Rightarrow} \dim(V_{\overrightarrow{f}}) = 1 \ \text{ y } \ \overrightarrow{f} = Rot_{(V_{\overrightarrow{f}}, \alpha\neq 0)} \ , \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{I}_2 = \text{ recta } \mathcal{R}\right), \overset{\text{Teor. I.2.6.2}}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow S_1 \text{ es } \left\{\begin{array}{l} \text{compat. indet.,} \overset{\text{Prop.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \mathcal{F} = \text{recta,} \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \mathcal{R}} \ \ / \ \ f \text{ es ROTACIÓN}_{(\mathcal{R}, \alpha\neq 0)} \\ \qquad \text{ó bien} \\ \text{incompatible,} \overset{\text{Prop.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \emptyset} \ \ / \ \ f \text{ es MOVIMIENTO HELICOIDAL}_{(\mathcal{R}, \alpha\neq 0, t\neq 0)} \end{array}\right.$$

$\boxed{1.2}\ \boxed{rg(A - I_3) = 1}\ \left(\overset{\text{III.4.3}}{\Rightarrow} \dim(V_{\overrightarrow{f}}) = 2 \ \text{ y } \ \overrightarrow{f} = Sim_{(V_{\overrightarrow{f}})} \ , \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{I}_2 = \text{ plano } \Pi\right), \overset{\text{Teor. I.2.6.2}}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow S_1 \text{ es } \left\{\begin{array}{l} \text{comp. indet.,} \overset{\text{Prop.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \mathcal{F} = \text{plano,} \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \Pi} \ / \ f \text{ es SIMETR.}_{(\Pi)} \ (= \text{lím}_{\alpha\to 0} \boxed{2.1}) \\ \qquad \text{ó bien} \\ \text{incompat.,} \overset{\text{Prop.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \emptyset} \ / \ f \text{ es SIMETRÍA DESLIZANTE}_{(\Pi, t\neq 0)} \end{array}\right.$$

$\boxed{1.3}\ \boxed{rg(A - I_3) = 0}\ \left(\overset{\text{III.4.3}}{\Rightarrow} V_{\overrightarrow{f}} = V \ \text{ y } \ \overrightarrow{f} = Id_V \ , \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{I}_2 = \mathcal{A}\right), \overset{\text{Teor. I.2.6.2}}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow S_1 \text{ es } \left\{\begin{array}{l} \text{trivial (I.1.3) (si } D = 0), \overset{\text{Prop.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \mathcal{A}} \ / \ f \text{ es IDENT.} \\ \qquad \text{ó bien} \\ \text{incompat. (si } D \neq 0), \overset{\text{Prop.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \emptyset} \ / \ f \text{ es TRASL.}_{(t\equiv BD\neq 0)} \end{array}\right\} \ (= \text{lím}_{\alpha\to 0} \boxed{1.1})$$

$$\boxed{2.1} \left\{\begin{array}{l} \boxed{rg(A - I_3) = 3} \ \left(\overset{\text{III.4.3}}{\Rightarrow} V_{\overrightarrow{f}} = \{0\}, \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{I}_2 = \text{ punto } \{x_0\}\right) \\ \boxed{rg(A + I_3) = 2} \ \left(\overset{\text{III.4.3}}{\Rightarrow} \dim (V_{-\overrightarrow{f}}) = 1 \ \text{ y } \overrightarrow{f} = \text{ Rot}_{(V_{-\overrightarrow{f}}, \alpha\neq 0, \pi)} + \text{Sim}_{(V^{\perp}_{-\overrightarrow{f}})}\right) \end{array}\right\}, \overset{\text{Teor. I.2.6.2}}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow S_1$ comp. det.,$\overset{\text{Pr.I.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \mathcal{F} = \text{pto.,} \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \{x_0\}} \ / \ f$ es $\text{ROT}_{(\mathcal{R}\equiv x_0 + V_{-\overrightarrow{f}}, \alpha\neq 0, \pi)} + \text{SIM}_{(\Pi\equiv x_0 + V^{\perp}_{-\overrightarrow{f}})}$

$$\boxed{X} \left\{\begin{array}{l} \boxed{rg(A - I_3) = 3} \\ \boxed{rg(A + I_3) = 1} \end{array}\right\} \text{ IMPOSIBLE (ver III.4.3)}$$

$$\boxed{2.2} \left\{\begin{array}{l} \boxed{rg(A - I_3) = 3} \ \left(\overset{\text{III.4.3}}{\Rightarrow} V_{\overrightarrow{f}} = \{0\}, \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{I}_2 = \text{ punto } \{x_0\}\right) \\ \boxed{rg(A + I_3) = 0} \ \left(\overset{\text{III.4.3}}{\Rightarrow} V_{-\overrightarrow{f}} = V \ \text{ y } \overrightarrow{f} = -Id_V\right) \end{array}\right\}, \overset{\text{Teor. I.2.6.2}}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow S_1$ comp. det.,$\overset{\text{Pr.VI.2.4.1(1)}}{\Rightarrow} \mathcal{F} = \text{pto.,} \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\mathcal{F} = \{x_0\}} \ / \ f$ es INVERSIÓN$_{(x_0)}$ $(= \text{lím}_{\alpha\to\pi} \boxed{2.1})$

(Ejemplo 23) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\Rightarrow rg(A - I_3) = 1)$ y $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces: S_1 es (!) incompatible $(\Rightarrow \mathcal{F} = \emptyset)$, $\mathcal{I}_2 \overset{!}{=} \Pi_{x_1 - x_2 = 1}$ y f es SIMETRÍA DESLIZANTE$_{(\Pi, t \neq 0)}$ con $t \overset{!}{=} (1,1,1)$.

(Ejemplo 24) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(\Rightarrow rg(A - I_3) = 2)$ y $D = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces: S_1 es (!) incompatible $(\Rightarrow \mathcal{F} = \emptyset)$, $\mathcal{I}_2 \overset{!}{=} \mathcal{R}_{x_1 = 1 = -x_2}$,y f es MOVIMIENTO HELICOIDAL$_{(\mathcal{R}, \alpha \neq 0, t \neq 0)}$ con $\alpha \overset{!}{=} \frac{\pi}{3}$ y $t \overset{!}{=} (0,0,1)$.

$\boxed{\text{Apartado VI.3.1 (Elipse euclídea)}}$

Sean $\mathcal{A}$ plano afín euclídeo, puntos $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \in \mathcal{A}$ (con $2\boxed{d} \equiv d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2) > 0$) y $\boxed{a} \in (d, \infty)$

(Notaciones) $\boxed{b} \equiv \sqrt{a^2 - d^2}$ $(\Rightarrow 0 < b < a)$ [$\rightsquigarrow$ 'excentricidad' $\boxed{e} \equiv d/a$ $(\Rightarrow 0 < e < 1)$]

(Def.) $\underline{\text{Elipse}_{(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{f}_2,a)}}$: $\boxed{E_{a,b}} := \{q \in \mathcal{A} \mid r_1 + r_2 = 2a\}$, con $r_{\{^1_2} \equiv d(q, \mathfrak{f}_{\{^1_2})$

Si $R = \{o, B\}$ es sist. de ref. rectangular (coord. x, y) tal que $\mathfrak{f}_1 = (-d, 0)_R$ y $\mathfrak{f}_2 = (d, 0)_R$:

$$q \equiv (x,y)_R \in E_{a,b} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(x+d)^2 + y^2} + \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = 2a \;,\; \overset{1^o \text{ term. al } 2^o \text{ miembro y cuadrando}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow\; (x-d)^2 + y^2 = (x+d)^2 + y^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{(x+d)^2 + y^2} \;,\; \overset{\text{simplificando}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow\; a^2 + dx = a\sqrt{(x+d)^2 + y^2} \;,\; \overset{\text{cuadrando}}{\Rightarrow} \; (a^2 + dx)^2 = a^2(x+d)^2 + a^2y^2 \;,\; \overset{\text{simplificando}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow\; a^2(\underbrace{a^2 - d^2}_{b^2}) = x^2(\underbrace{a^2 - d^2}_{b^2}) + y^2a^2 \;,\; \Rightarrow \; \boxed{\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1} \quad \textbf{(1A)}$$

• Pues bien: la ecuación (**1A**) identifica a la elipse $E_{a,b}$. En efecto:

$$r^2_{\{^1_2} \equiv (x \pm d)^2 + y^2 \overset{(1A)}{=} (x \pm d)^2 + (b^2 - \tfrac{b^2}{a^2}x^2) = (1 - \tfrac{b^2}{a^2})x^2 \pm 2xd + d^2 + b^2 =$$
$$= e^2x^2 \pm 2xae + a^2 = (a \pm ex)^2, \; \overset{|ex| = d|x|/a \overset{(1A)}{\le} d<a}{\Rightarrow} \; \boxed{r_{\{^1_2} = a \pm ex} \; (*), \; \Rightarrow \; r_1 + r_2 = 2a$$

En particular, en 'polares' (r_1, φ) desde $\mathfrak{f}_1$ con $\varphi_{x=-a} = 0$ $(\Leftrightarrow x =: -d - r_1 \cos\varphi)$ se tiene:

$$r_1 \overset{(*)}{=} a - e(d + r_1 \cos\varphi) \;,\; \Rightarrow \; \boxed{r_1 = \tfrac{p}{1 + e\cos\varphi}}, \; \text{con } \boxed{p} \equiv a(1 - e^2) \quad \textbf{(1B)}$$

• En un sist. de ref. rectangular $R' = \{o', B\}$ con origen o' en el vértice izquierdo de la elipse (esto es, $\overrightarrow{oo'} = B\binom{-a}{0}$, $\overset{\text{Prop. VI.1.3.0}}{\Leftrightarrow}$ $x' = x + a, y' = y$), se tiene:

$$y^2 \overset{(1A)}{=} b^2 - \frac{(x'-a)^2b^2}{a^2} = 2\frac{b^2}{a}x' - \frac{b^2x'^2}{a^2} = 2px' + (e^2 - 1)x'^2 < 2px' \quad \textbf{(1C)}$$

• Por último, límites:

$$\begin{cases} \boxed{C} \equiv \text{lím}_{b \to a} E_{a,b} : x^2 + y^2 = a^2 \;\; \text{(circunferencia)} \\[2ex] \boxed{E1} \equiv \text{lím}_{a \to 0} E_{a,b} : x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = 0 \;\; \text{(un punto)} \\[2ex] \boxed{E2} \equiv \text{lím}_{a \to \infty} E_{a,b} : \frac{y^2}{b^2} = 1 \; \text{(dos rectas paralelas)} \end{cases}$$

Apartado VI.3.2 (Hipèrbola euclídea)

Sean $\mathcal{A}$ plano afín euclídeo, puntos $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \in \mathcal{A}$ (con $2\boxed{d} \equiv d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2) > 0$) y $\boxed{a} \in (0, d)$

(Notaciones) $\boxed{b} \equiv \sqrt{d^2 - a^2}$ ($\Rightarrow 0 < b < d$) [$\rightsquigarrow$ 'excentricidad' $\boxed{e} \equiv d/a$ ($\Rightarrow e > 1$)]

(Def.) Hipérbola$_{(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, a)}$: $\boxed{H_{a,b}} := \{q \in \mathcal{A} \mid |r_1 - r_2| = 2a\}$, con $r_{\{^1_2} \equiv d(q, \mathfrak{f}_{\{^1_2})$

Si $R = \{o, B\}$ es sist. de ref. rectangular (coord. x, y) tal que $\mathfrak{f}_1 = (-d, 0)_R$ y $\mathfrak{f}_2 = (d, 0)_R$:

$$q \equiv (x,y)_R \in H_{a,b} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(x+d)^2 + y^2} - \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = \pm 2a \;,\; \overset{1^o \text{ term. al } 2^o \text{ miem. y cuadrando}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow\; (x-d)^2 + y^2 = (x+d)^2 + y^2 + 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x+d)^2 + y^2} \;,\; \overset{\text{simplificando}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow\; a^2 + dx = \pm a\sqrt{(x+d)^2 + y^2} \;,\; \overset{\text{cuadrando}}{\Rightarrow} \; (a^2 + dx)^2 = a^2(x+d)^2 + a^2 y^2 \;,\; \overset{\text{simplificando}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow\; a^2(\underbrace{a^2 - d^2}_{-b^2}) = x^2(\underbrace{a^2 - d^2}_{-b^2}) + y^2 a^2 \;,\; \Rightarrow\; \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (\mathbf{2A})$$

• Pues bien: la ecuación (**2A**) identifica a la hipérbola $H_{a,b}$. En efecto:

$$r^2_{\{^1_2} \equiv (x \pm d)^2 + y^2 \overset{(2A)}{=} (x \pm d)^2 + (-b^2 + \tfrac{b^2}{a^2}x^2) = (1 + \tfrac{b^2}{a^2})x^2 \pm 2xd + d^2 - b^2 =$$
$$= e^2x^2 \pm 2xae + a^2 = (a \pm ex)^2, \overset{|ex| = d|x|/a \overset{(2A)}{\geq} d > a}{\Rightarrow} \left\{ \boxed{\begin{array}{ll} r_{\{^1_2} = \pm a + ex & \text{si } x > 0 \\ r_{\{^1_2} = \mp a - ex & \text{si } x < 0 \end{array}} \right. (^{**}),\; \Rightarrow\; |r_1 - r_2| = 2a$$

En particular, en 'polares' (r_2, φ) desde $\mathfrak{f}_2$ con $\varphi_{x=-a} = 0$ ($\overset{\text{si } x>0}{\Leftrightarrow}$ $x =: d - r_2\cos\varphi$) se tiene:

$$r_2\,|_{x>0} \overset{(^{**})}{=} -a + e(d - r_2\cos\varphi) \;,\; \Rightarrow\; \boxed{r_2\,|_{x>0} = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}},\; \text{con } \boxed{p} \equiv a(e^2 - 1) \quad (\mathbf{2B})$$

• En un sist. de ref. rectangular $R'' = \{o'', B\}$ con origen o'' en el vértice derecho de la hipérbola (esto es,con $\overrightarrow{oo''} = B\binom{a}{0}$ ($\overset{\text{Prop. VI.1.3.0}}{\Leftrightarrow}$ $x'' = x - a, y'' = y$), se tiene:

$$y^2 \overset{(2A)}{=} -b^2 + \frac{(x'' + a)^2 b^2}{a^2} = 2\frac{b^2}{a}x'' + \frac{b^2 x''^2}{a^2} = 2px'' + (e^2 - 1)x''^2 > 2px'' \quad (\mathbf{2C})$$

• Por último, límites:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{H1} \equiv \text{lím}_{a \to 0} H_{a,b} : \; x^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = 0 \;\; \text{(dos rectas secantes)} \\ \\ \boxed{H2} \equiv \text{lím}_{b \to \infty} H_{a,b} : \; \frac{x^2}{a^2} = 1 \;\; \text{(dos rectas paralelas)} \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{Apartado VI.3.3 (Parábola euclídea)}}$

Sean $\mathcal{A}$ plano afín euclídeo, punto $\mathfrak{f} \in \mathcal{A}$ y recta $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ (con $\boxed{p} \equiv d(\mathfrak{f}, \mathcal{R}) > 0$)

(Def.) $\underline{\text{Parábola}_{(\mathfrak{f},\mathcal{R},p)}}$: $\boxed{P_p} := \{q \in \mathcal{A} \mid r = d(q, \mathcal{R})\}$, con $r \equiv d(q, \mathfrak{f})$

Si $R = \{o, B\}$ es sist. de ref. rectangular (coord. x, y) tal que $\mathfrak{f} = (p/2, 0)_R$ y $\mathcal{R} : x = -p/2$:

$$q \equiv (x,y)_R \in P_p \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(\tfrac{p}{2} - x)^2 + y^2} = x + \tfrac{p}{2} \;,\; \overset{\text{cuadrando}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \;\; (\tfrac{p}{2} - x)^2 + y^2 = \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 \;,\; \overset{\text{simplificando}}{\Rightarrow} \;\; \boxed{y^2 = 2px} \quad (\mathbf{3A}) \equiv (\mathbf{3C})$$

• Pues bien: la ecuación ($\mathbf{3A}$) identifica a la parábola P_p. En efecto:

$$r^2 \equiv (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 \overset{(3A)}{=} (x - \frac{p}{2})^2 + 2px = (x + \frac{p}{2})^2 \;,\; \overset{x \geq 0}{\Rightarrow} \;\boxed{r = x + \tfrac{p}{2}}\; (^{***}) \;,\; \Rightarrow \;\; r = d(q, \mathcal{R})$$

En particular, en 'polares' (r, φ) desde $\mathfrak{f}$ con $\varphi_{x=0} = 0$ ($\Leftrightarrow x =: \frac{p}{2} - r\cos\varphi$) se tiene:

$$r \overset{(^{***})}{=} (\frac{p}{2} - r\cos\varphi) + \frac{p}{2} \;,\; \Rightarrow \;\boxed{r = \tfrac{p}{1+\cos\varphi}} \quad (\mathbf{3B})$$

• Las ecuaciones ($\mathbf{1B}$) (elipse), ($\mathbf{3B}$) (parábola) y ($\mathbf{2B}$) (hipérbola) ponen de manifiesto la 'familia de cónicas':

$$\left\{\begin{array}{l} \text{elipses} \\ \text{parábolas} \\ \text{hipérbolas} \end{array}\right\} \text{ según se tenga } \left\{\begin{array}{l} r_1 = \frac{p}{1+e\cos\varphi}, \text{ con } \; p := a(1 - \frac{d^2}{a^2}) \text{ y } \; e := \frac{d}{a} < 1 \\ r = \frac{p}{1+\cos\varphi} \qquad (\rightsquigarrow \;\; e \equiv 1) \\ r_2 \mid_{x>0} = \frac{p}{1+e\cos\varphi} \;\;, \text{ con } p := a(\frac{d^2}{a^2} - 1) \text{ y } \; e := \frac{d}{a} > 1) \end{array}\right\}$$

También las ecuaciones ($\mathbf{1C}$) (elipse), ($\mathbf{3C}$) (parábola) y ($\mathbf{2C}$) (hipérbola) ponen de manifiesto la 'familia de cónicas':

$$\left\{\begin{array}{l} \text{elipses} \\ \text{parábolas} \\ \text{hipérbolas} \end{array}\right\} \text{ según se tenga } \left\{\begin{array}{l} y^2 < 2px' \;\;, \text{ con } p := a(1 - \frac{d^2}{a^2}) \\ y^2 = 2px \\ y^2 > 2px'' \;\;, \text{ con } p := a(\frac{d^2}{a^2} - 1) \end{array}\right\}$$

• Por último, límite:

$$\boxed{P1} \equiv \lim_{p \to 0} P_p : \; y^2 = 0 \;\; (1 \text{ semirecta doble})$$

Sección VI.3 (Resumen sobre cónicas euclídeas)

(VI.3.1-VI.3.3) Elipse, parábola e hipérbola euclídeas

(VI.3.5) Ecuación general de cónica en $\mathcal{A}$ (plano afín euclídeo): resp. de cualquier sistema de ref. rectangular $R = \{o, B\}$ (y con $a_{ij} \in \mathbb{R}$), es: $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{00}$,

o también: $$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}}_{X^t} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A(\neq 0)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \end{pmatrix}}_{A_0^t} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} + a_{00} = 0$$

(VI.3.6) Ec. reducida de cónica: resp. de cierto sist. de ref. rectangular $R'' = \{o'', B''\}$, y con λ_1, λ_2 autovalores de A, reales (Prop. IV.1.6.2) y no ambos cero:

$$\begin{cases} \text{Tipo I: } \lambda_1 x_1''^2 + \lambda_2 x_2''^2 + \mu = 0 \quad , \quad \text{si } \lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2 \text{ (ningún término cuadrático cero)} \\ \text{Tipo II: } \underset{(\text{con } \mu=0 \text{ si } \nu\neq 0)}{\lambda_2 x_2''^2 + 2\nu x_1'' + \mu = 0} \quad , \quad \text{si } \lambda_1 \overset{\text{s.p.d.g.}}{=} 0 \neq \lambda_2 \text{ (un término cuadrático cero)} \end{cases}$$

(Teor. VI.3.6.1) La ec. de una cónica euclídea puede transformarse en una ec. reducida por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(A) Un cambio positivo del sistema de referencia rectangular } R \to R'' \\ \quad \{o, B\} \mapsto \{o'' = o - BPC, B'' = BP\} \,, \overset{\text{Prop. VI.1.3.0}}{\Leftrightarrow} \; X = -PC + PX'' \; \Leftrightarrow X'' = C + P^t X \\ \text{(B) (equivalentemente) Un movimiento rígido positivo } f : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \text{ con} \\ \quad \text{expresión matricial (en } R\text{) } \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ C & P^t \end{smallmatrix}\right), \overset{\text{Prop. VI.2.2.0}}{\Leftrightarrow} \; Y = C + P^t X \end{array} \right\}$$

(VI.3.7) Cálculo de los elementos geométricos de una cónica

(Prop. VI.3.8.1) Dada la ecuación de una cónica euclídea, los tres números

$$I_3 := \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & A_0^t \\ A_0 & A \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \quad , \quad I_2 := \det(A) \; (= \lambda_1\lambda_2) \quad , \quad I_1 := tr(A) \; (= \lambda_1 + \lambda_2)$$

son <u>invariantes</u> bajo cambios del sistema de ref. rectangular (o equivalente, bajo mov. rígidos).

(VI.3.8) <u>Clasificación</u> de las cónicas euclídeas por sus invariantes:

	$I_2 > 0$ (Tipo I) $\lambda_1 x_1''^2 + \lambda_2 x_2''^2 + \mu = 0$	$I_2 < 0$ (Tipo I) $\lambda_1 x_1''^2 + \lambda_2 x_2''^2 + \mu = 0$	$I_2 = 0$ (Tipo II) $\lambda_2 x_2''^2 + 2\nu x_1'' + \mu = 0$ (con $\mu=0$ si $\nu\neq 0$)
$I_3 \neq 0$ (No degen.)	$\lambda_1\lambda_2 > 0$ y $\mu \neq 0$ (E) ELIPSE (re. o im.)	$\lambda_1\lambda_2 < 0$ y $\mu \neq 0$ (H) HIPÉRBOLA	$\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$ y $\nu \neq 0 = \mu$ (P) PARÁBOLA
$I_3 = 0$ (Degen.)	$\lambda_1\lambda_2 > 0$ y $\mu = 0$ ($E1$) 1 PUNTO	$\lambda_1\lambda_2 < 0$ y $\mu = 0$ ($H1$) 2 RECTAS SECANTES	$\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$ y $\nu = 0$ ($P1$) 1 RECTA DOBLE si $\mu=0$ ($E2/H2$) 2 REC. PAR. (re. o im.) si $\mu\neq 0$

(VI.3.9) El conjunto $\{I_1, I_2, I_3\}$ determina (esencialmente) la ecuación reducida. En efecto:

$$\begin{cases} I_2 \neq 0 \; (\Leftrightarrow \lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2)\text{: tipo I, con } \underline{\lambda_1, \lambda_2} \text{ raíces de } \lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0 \text{ y } \boxed{\mu = I_3/I_2} \\ I_2 = 0 \; (\Leftrightarrow \lambda_1 \overset{\text{s.p.d.g.}}{=} 0 \neq \lambda_2)\text{: tipo II, con } \boxed{\lambda_2 = I_1} \text{ y } \boxed{|\nu| = \sqrt{-I_3/I_1}} \text{ (y } \mu?) \\ \quad (\exists \text{ cambio positivo } R \to R'' \text{ / mov. rígido positivo. } f : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \text{ que cambia } signo(\nu)) \end{cases}$$

Ejercicios adicionales Capítulo VI

VI.1 (Puntos fijos y variedades invariantes) Sean $\mathcal{A}$ un plano afín sobre un espacio vectorial V (sobre $\mathbb{R}$), $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación afín con aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f} : V \to V$ y $V_{\overrightarrow{f}} \subset V$ el subesp. de vectores fijos de $\overrightarrow{f}$.

Sea $R = \{o, B\}$ un sistema de referencia de $\mathcal{A}$, respecto del cual la ecuación de f (Prop. VI.2.2.0) es $Y = D + AX$, con $D^t \equiv (d_1 \; d_2)$ dado.

Estudiar, dependiendo de A, si existen o no puntos fijos de f así como si existen o no variedades afines de la forma $\mathcal{L}_x \equiv x + V_{\overrightarrow{f}}$ de $\mathcal{A}$ que sean invariantes por f:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

VI.2 (Cónicas) Para cada número real $a \in \mathbb{R}$ considérese, en el plano afín (euclídeo) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, la cónica de ecuación:

$$-3x_1^2 + 2ax_2^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1 + (1 - a) = 0$$

Determinar el rango de valores de a para los que la cónica es una parábola y dar su ecuación reducida.

VI.3 (Cónicas) Para cada número real $a \in \mathbb{R}$ considérese, en el plano afín (euclídeo) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, la cónica de ecuación:

$$2ax_1^2 + (a + 3)x_2^2 + 4ax_1 + 4x_2 + 3 = 0$$

Determinar el rango de valores de a para los que la cónica es una elipse real y dar su ecuación reducida.

VI.4 (Cónicas) Considérese, en un plano afín euclídeo $\mathcal{A}$, la cónica de ecuación (en cierto sistema de referencia rectangular $R = \{o, B\}$)

$$(x_1 + sx_2)(x_1 + x_2) + 2x_1 - 2 = 0$$

1. Clasificar (en función del parámetro real s) dicha cónica.

2. Hallar los valores de s para los que la cónica es una hipérbola 'equilátera' (esto es, tal que $a = b$ cuando la ecuación reducida queda en la forma $\frac{x_1''^2}{a^2} - \frac{x_2''^2}{b^2} = 1$).

3. En el caso de que esta cónica sea una hipérbola equilátera, hallar un sistema de referencia rectangular en el que su ecuación tenga la forma reducida y calcular sus elementos geométricos (centro, ejes, asíntotas y focos).

VI.5 (Involuciones) En un espacio afín $\mathcal{A}$ de dimensión 2, clasificar y hallar los puntos fijos de las llamadas 'involuciones', esto es, de aquellas aplicaciones afines $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tales que

$$f^2 = Id_{\mathcal{A}}$$

[Indicación: dada una referencia $R = \{o, B\}$ en $\mathcal{A}$, la ecuación de una aplicación afín $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es $Y = D + AX$, siendo $\overrightarrow{ox} \equiv BX$, $\overrightarrow{of(x)} \equiv BY$, $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $\overrightarrow{f}(B) \equiv BA$ y $D \in \mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{of(o)} \equiv BD$]

VI.6 (Movimiento rígido en dimensión 3) Sean un espacio afín euclídeo $\mathcal{A}$ de dimensión 3, una referencia rectangular $R = \{o, B\}$ y el movimiento (rígido) $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ cuya expresión matricial (en R) es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$, con $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$.

1. Determinar qué isometría es $\overrightarrow{f}$, hallar los puntos fijos de f y clasificar f.

2. Clasificar el movimiento $f' = \tau_t \circ f$, donde τ_t es la traslación de vector $t = (1, -1, -4)_B$. Hallar la imagen por f' del punto $(7, 1, 1)_R$.

VI.7^{*F} (Formas cuadráticas e inercia rotacional) Este ejercicio destaca los aspectos algebraicos que subyacen al tratamiento de la 'inercia rotacional' de los 'sólidos rígidos'.

Sea $S = \{x^a(t) \mid 1 \leq a \leq N(\geq 2)\}$ un conjunto de 'partículas' (i.e. curvas diferenciables respecto del 'tiempo' t, derivadas $'$) en el espacio afín afín euclídeo ordinario $\mathcal{A}$ sobre $(V = \mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, con 'masas' $m^a (> 0)$

Supondremos ('sólido rígido'): $\boxed{\| \overrightarrow{x^a x^b} \| = cte.}$, $\forall a, b$ (**H1**)

1. Probar que se verifica: $< \overrightarrow{x^d x^a}, \overrightarrow{x^d x^b} >= cte.$, $\forall a, b, d$

2. Dada una curva $p(t)$ en $\mathcal{A}$, sea la curva $\boxed{c(t)}$ ('centro de masas' de S) dada por $m\, \overrightarrow{pc} := \sum_{a=1}^N m^a\, \overrightarrow{px^a}$, con $\boxed{m} \equiv \sum_{a=1}^N m^a$. Probar que $c(t)$ es <u>independiente</u> de cuál sea $p(t)$ y verifica:

$$\| \overrightarrow{cx^a} \| = cte. \quad , \quad < \overrightarrow{cx^a}, \overrightarrow{cx^b} >= cte. \quad y \quad \dim(L(\overrightarrow{cx^a}, \overrightarrow{cx^b})) = cte., \ \forall a, b$$

3. Probar que existe una base ('móvil') ortonormal $B(t) \equiv \{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ de V tal que (escribiendo $\overrightarrow{cx^a} \equiv \sum_{i=1}^3 x_i^a e_i$), se tiene: $x_i^a = cte.$, $\forall a$ y $\forall i$ (en el sistema de referencia $R(t) \equiv \{c(t), B(t)\}$, el sólido S 'está en reposo').

4. Probar que existe $\boxed{Q(t)} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ antisimétrica tal que $B' = BQ$.

5. Sea $\boxed{f(t)} \in End(V)$ definida por $M_{B(t)}(f(t)) := Q(t)$. Probar que existe $\boxed{\omega(t)} \in V$ tal que $f(u) = \omega \wedge u$, $\forall u \in V$, con $\wedge$ el producto vectorial en $(V = \mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$.

6. Probar que se verifica: $(\overrightarrow{cx^a})' = \omega \wedge \overrightarrow{cx^a}$ (respecto de $c(t)$, todas las partículas $x^a(t)$ de S efectúan un movimiento de rotación en torno a $L(\omega(t))$ con 'velocidad angular' $\|\omega(t)\|$)

7. Sea la forma cuadrática $\boxed{\Phi(t)}: V \to \mathbb{R}$ definida por la expresión $\Phi(u) := \sum_{a=1}^N m^a \| u \wedge \overrightarrow{cx^a} \|^2$. Probar que $\Phi(t)$ es no nula. Probar que: $\Phi(u) \overset{\text{si } \|u\|=1}{=} \sum_{a=1}^N m^a \| \overrightarrow{cx^a} - p_{L(u)} \overrightarrow{cx^a} \|^2$ ('momento de inercia' de S resp. de $c + L(u)$) y $\frac{1}{2}\Phi(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m^a \| \omega \wedge \overrightarrow{cx^a} \|^2 \overset{(6)}{=} \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m^a \| (\overrightarrow{cx^a})' \|^2$ ('energía cinética de rotación' de S). Hallar la signatura de $\Phi(t)$.

En lo sucesivo, supondremos (las N partículas no están 'alineadas'): $\boxed{\dim(L(\overrightarrow{cx^1}, ..., \overrightarrow{cx^N})) > 1}$ (**H2**).

8. Probar que la forma polar de Φ $\boxed{T(t)}: V \times V \to \mathbb{R}$ ('tensor de inercia' de S) verifica: $T(u, v) = \sum_{a=1}^N m^a \left(\| \overrightarrow{cx^a} \|^2 \langle u, v \rangle - \left\langle \overrightarrow{cx^a}, u \right\rangle \left\langle \overrightarrow{cx^a}, v \right\rangle \right)$.

9. Probar que el endomorfismo autoadjunto $\boxed{\tilde{T}(t)}: V \to V$ ('operador de inercia') asociado a $T(t)$ (esto es, $\left\langle u, \tilde{T}(v) \right\rangle := T(u, v)$, $\forall u, v \in V$, Ejerc. Adic. V.5) verifica: $M_{B(t)}(\tilde{T}(t)) = cte.$

10. Probar que los autovalores I_1, I_2, I_3 de $\tilde{T}(t)$ ('momentos principales de inercia' de S) son constantes, reales y positivos. Si $u(t)$ es autovector de $\tilde{T}(t)$, la recta $c(t) + L(u(t))$, 'en reposo' (como S) en el sistema de referencia $(c(t), B(t))$, se llama un 'eje principal de inercia' de S.

Sean $o \in \mathcal{A}$ y $F^a(t) \in V$ ('fuerza' sobre x^a), que verifica (2^a Ley de Newton): $F^a(t) = m^a(\overrightarrow{ox^a(t)})''$. Y sea $\boxed{F(t)} \equiv \sum_{a=1}^N F^a(t)$. De la definición de $c(t)$ se sigue trivialmente (INERCIA TRASLACIONAL): $\boxed{F(t) = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{oc(t)})' = cte.}$

11. Sea la curva $\boxed{L_c(t)} := \sum_{a=1}^N \overrightarrow{c(t)x^a(t)} \wedge m^a(\overrightarrow{c(t)x^a(t)})' \in V$ ('momento angular' de S resp. de $c(t)$). Probar que: $L_c = \tilde{T}(\omega)$

12. Sea la curva $\boxed{L_o(t)} := \sum_{a=1}^N \overrightarrow{ox^a(t)} \wedge m^a(\overrightarrow{ox^a(t)})'$ ('momento angular' de S resp. de o). Probar que: $L_o = L_c + \overrightarrow{oc} \wedge m(\overrightarrow{oc})'$

13. Sea la curva $\boxed{M_o(t)} := \sum_{a=1}^N \overrightarrow{ox^a(t)} \wedge F^a(t)$ ('torque' sobre S respecto de o). Probar que: $M_o = (L_o)'$

14. Sea la curva $\boxed{M_c(t)} := \sum_{a=1}^N \overrightarrow{c(t)x^a(t)} \wedge F^a(t)$ ('torque' sobre S respecto de $c(t)$), que verifica: $M_c(t) = M_o(t) + \overrightarrow{c(t)o} \wedge F(t)$. Probar que: $M_c = (L_c)'$

Supondremos finalmente ('giróscopo') que $\boxed{\omega(t) \text{ es autovector de } \tilde{T}(t)}$ (**H3**).

15. Probar (INERCIA ROTACIONAL): $\boxed{M_c(t) = 0 \Rightarrow \omega(t) = cte.}$ (si el torque sobre S respecto de $c(t)$ es cero, el eje de rotación de S se mantiene constante).

Este último resultado es el fundamento de los sistemas de piloto automático en vehículos (aviones, coches, barcos, cohetes, etc.). Un 'giróscopo' es un sólido rígido (H1 y H2), que 'rota siempre' (lo que se consigue con un motor) en torno a un eje principal de inercia (H3).

Si el giróscopo es 'pequeño' (con lo que la atracción gravitatoria es 'uniforme' sobre él), está 'protegido' frente a interacciones electromagnéticas y está 'anclado' a la cabina del vehículo exclusivamente por su centro de masas (lo que se consigue con una 'suspensión Cardan'), entonces el torque de las fuerzas respecto de $c(t)$ es cero. En tales condiciones, e independientemente de la aceleración que lleve el vehículo, el eje de simetría del giróscopo, que puede cambiar libremente de dirección, de hecho no lo hace. Si se observa un cambio aparente en dicha dirección, se concluye que es el vehículo el que está girando y se encarga al ordenador de a bordo que restablezca el rumbo.

Si se 'relaja' la hipótesis (H3), el eje de simetría del giróscopo gira ('precesión') en la dirección indicada por $M_c(t)$. Este es el caso cuando se fija un punto del giróscopo (precesión de la peonza apoyada en el suelo) o cuando la atracción gravitatoria no es uniforme sobre el giróscopo (precesión del eje de rotación de la Tierra).

VI.8^{*F} (Espacio afín euclídeo, enteros y redes cristalinas) Este ejercicio destaca los aspectos algebraicos que subyacen al estudio de los planos de las redes cristalinas, en particular, al uso de los llamados 'índices deMiller'.

Sean $\mathcal{A}$ el espacio afín euclídeo ordinario sobre $(V = \mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ y $o \in \mathcal{A}$.

Definamos una 'red' (cristalina) como el conjunto de puntos $\boxed{\mathcal{R}} := o + \{\sum_{i=1}^3 l_i e_i \mid l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}\}$, para cierta base (llamada 'primitiva', no necesariamente ortogonal!) $\boxed{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de V.

Un plano afín $\Pi \subset \mathcal{A}$ se dice 'plano de $\mathcal{R}$' si contiene 3 puntos de $\mathcal{R}$ no alineados ($\equiv$ 'afínmente independientes', VI.1.6). Denotando esos puntos como $a \equiv o + \sum_{i=1}^3 a_i e_i$, $b \equiv o + \sum_{i=1}^3 b_i e_i$ y $c \equiv o + \sum_{i=1}^3 c_i e_i$ (con $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq 3$), se tiene:

$$\Pi \overset{\text{Prop. VI.1.6.1}}{=} a + L(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) =$$
$$= (o + \textstyle\sum_{i=1}^3 a_i e_i) + \{\lambda_2 \sum_{i=1}^3 (b_i - a_i) e_i + \lambda_3 \sum_{i=1}^3 (c_i - a_i) e_i \mid \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \quad (*)$$

Probar que, si Π es un plano de $\mathcal{R}$, entonces:

1. Su intersección con el eje $i \in \{1,2,3\}$ (si no contiene a dicho eje ni a o) es $o + e_i/r_i$, donde $r_i \in \mathbb{Q}$ (no necesariamente $r_i \in \mathbb{Z}$) y donde $r_i = 0$ si Π es paralelo a el eje i.

2. Tiene por ecuación cartesiana (en el sistema de referencia $\{o, B\}$ de $\mathcal{A}$) $\sum_{i=1}^{3} n_i x_i = n$, donde $n_1, n_2, n_3, n \in \mathbb{Z}$

3. Contiene infinitos (más concretamente, una infinidad doble de) puntos de $\mathcal{R}$

VII. EXCURSIONES

$\boxed{1}$ Sistemas incompatibles y Mínimos cuadrados

En 1920's, E. Hubble observó (Mt. Wilson, California) una relación curiosa entre los 'desplaz. al rojo' $z_1, ..., z_m$ de (una muestra de) galaxias lejanas y sus 'distancias' $\delta_1, ..., \delta_m$ a la Tierra.

Se sabía que las frecuencias de todas las 'rayas espectrales' de la radiación recibida de cada galaxia presentaban un desplazamiento relativo uniforme (y hacia menores frecuencias) respecto de las 'mismas' rayas de la radiación emitida en la Tierra, lo que permitía definir (con gran precisión) el parámetro adimensional $z_i := (f^i_{em}/f^i_{rec}) - 1 > 0$, con f^i_{em} y f^i_{rec} las frecuencias de emisión de la galaxia (supuesta como en la Tierra!) y de recepción (respectivamente).

Hubble estimó δ_i (via 'cefeidas', y con 'incertidumbre' $\pm(E_i > 0)$) comparando luminosidad aparente l_i (potencia recibida por u. de área) y lumin. absoluta L_i (potencia emitida, supuesta conocida!), según: $L_i \overset{!}{=} 4\pi\delta_i^2 l_i, \Rightarrow \delta_i = \sqrt{L_i/4\pi l_i}$ ($\rightsquigarrow \delta_i$ distorsiona la distancia 'propia' actual).

La 'Ley empírica de Hubble' (LEH) afirma que existe una constante cH_0^{-1} ($\approx 13,8{\cdot}10^9$ *añosluz*, estim. actual) t.q. $\boxed{\delta_i \approx cH_0^{-1} z_i \ (1 \leq i \leq m)}$, con $\left|\delta_i - cH_0^{-1} z_i\right| \leq E_i$ si $z_i \lesssim 0,1$ $(1 \leq i \leq m)$.

La LEH es una estupenda ley de la naturaleza. Precisémosla algo más $\rightsquigarrow$

Sean un conjunto $\mathcal{C}$, dos 'variables' $x, y : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ y una 'muestra' $M \equiv \{(x_1, y_1), ..., (x_m, y_m)\}$.

(Teor. VII.2.1.1) Si (al menos) $k+1 (\leq m)$ de los x_i son distintos, entonces existe un único polinomio (de grado $\leq k$) $p^M(x) \equiv a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k$ que 'ajusta M por mínimos cuadrados', esto es, que minimiza (frente a otros polinomios de grado $\leq k$) la suma de cuadrados $\epsilon_1^2 + ... + \epsilon_m^2$ de los 'residuos' $\epsilon_i := y_i - p^M(x_i)$ $(1 \leq i \leq m)$.

Demostr. Sean $A \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_1 & ... & x_1^k \\ 1 & x_2 & ... & x_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & ... & x_m^k \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{m\times(k+1)}(\mathbb{R})$, $X \equiv \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ y $C \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$.

La hip. equivale a que $rg(A) \overset{\text{Teor. I.5.4.1 \& Ej.ResueltoI.8}}{=} k+1$ (A es 'de rango pleno por cols.').

Sea el sist. ('función de regresión muestral', con y 'regresando' y x 'regresor') $S : AX = C$ (en gen., *incompatible*) y busquemos columnas $\bar{X}$ (llamadas 'soluciones mínimo-cuadráticas') que minimizan la norma $\left\|A\bar{X} - C\right\| := \sqrt{\epsilon_1^2 + ... + \epsilon_m^2}$ ($\overset{\text{Teor. II.3.9.3}}{\Leftrightarrow}$ tales que $A\bar{X} = p_{\mathrm{Im}(A)}(C)$).

Pues bien, resulta que dichas $\bar{X}$ son precisamente (Teor.VII.2.1.1(1)) las soluciones del sist. $S' : A^tAX = A^tC$ (siempre! *compatible*). Ahora bien, $rg(A^tA) \overset{\text{Lema VII.1.2.2(2), en } \mathbb{R}}{=} rg(A) \overset{\text{antes}}{=} k+1$, $\overset{\text{Teor. I.4.2.4}(c\Rightarrow a)}{\Rightarrow} A^tA$ ($\in \mathfrak{M}_{k+1}(\mathbb{R})$) es regular, $\overset{\text{I.5.5}}{\Rightarrow} S'$ tiene sol. única $\boxed{\bar{X} = (A^tA)^{-1}A^tC}$ ■

Ocurre que, si M es 'ajustable por mínimos cuadrados' por un polinomio de grado $\leq k$, también lo es (mismo Teorema) por un polinomio de grado $\leq k-1$. Pero al disminuir k, crece (mismo Teorema) el valor de $\epsilon_1^2 + ... + \epsilon_m^2$ (en el otro extremo, si $k+1 = m$, entonces $AX = C$ es compatible y $\epsilon_1 = ... = \epsilon_m = 0$, ver Interpolación de Lagrange, [MS] III.3.4).

Supongamos que cada valor y_i $(1 \leq i \leq m)$ viene dado con una 'incertidumbre' $\pm(E_i > 0)$. ¿Cuál es el mínimo grado del polinomio de ajuste $p^M(x)$ de forma que $\boxed{|\epsilon_i| \leq E_i \ (1 \leq i \leq m)}$?

En la LEH, dicho mínimo es 1: el único pol. (de grado ≤ 1) $p^M(z) \equiv a_0 + a_1 z$ que minimiza (frente a otros pols. de grado ≤ 1) la suma de cuadr. $\epsilon_1^2 + ... + \epsilon_m^2$ de los residuos $\epsilon_i := \delta_i - p^M(z_i)$ tiene por coeficientes $a_0 = 0$, $a_1 = cH_0^{-1}$ y cumple (clave!): $|\epsilon_i| \leq E_i$ si $z_i \lesssim 0,1$ $(1 \leq i \leq m)$.

No siempre es así: en una empresa, intentar ajustar (por mínimos cuadrados) las variables 'producción' x y 'costes' y por un polinomio (de grado ≤ 2) $p^M(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ daría lugar a un 'coste marginal' (lo que cuesta producir una unidad más) $y_{marg} := \frac{dp^M}{dx} = a_1 + 2a_2 x$, que carecería de un mínimo estricto (para algún valor de x positivo), lo que se considera absurdo.

$\boxed{2}$ Orientación en espacios vectoriales y Orientabilidad del 'espacio'

Entre las bases (ordenadas!) de cualquier esp. vect. V sobre $\mathbb{R}$ puede definirse la relación binaria: ($B \sim B' \overset{\text{II.1.7}}{\equiv} BP \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \det(P) > 0$), que es (!) de equivalencia. Pero $\det(P) > 0$ ó $\det(P) < 0$, con lo que sólo hay dos clases de equivalencia ($\equiv$ orientaciones de V): O^+ y O^-. En $V = \mathbb{R}^n$, la base canónica $B_{can} = \{e_1, ..., e_n\}$ se asigna (por definición) a la orientación O^+.

En el esp. vect. euclídeo ($\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_{\text{usual}}$), hay un prod. vectorial $\wedge$ (definido en II.3.10) basado en la orientación O^+ [si $\{x, y\}$ es lin. independiente, entonces $\{x, y, x \wedge y\} \in O^+$, Teor. II.3.10.1(3)] y otro prod. vectorial (cuyo resultado es el opuesto al anterior) basado en la orientación O^-.

Nuestra representación de O^+: 'sentido antihorario' (para la $Rot_{\pi/2}$ que lleva e_1 sobre e_2) en $\mathbb{R}^2$ y (tres primeros dedos de la) 'mano derecha' (para e_1, e_2, e_3, respectivamente) en $\mathbb{R}^3$

En el 'mundo físico', el 'espacio' (sin incluir al 'tiempo') se modela (localmente, en primera aprox.) como un espacio afín (de 'puntos', VI.1.1) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$, equipado con un espacio vect. (de 'velocidades') ($\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_{\text{usual}}$) 'tangente' en cada punto $\rightsquigarrow$ En $\mathcal{A}$ hay dos tipos de hélices: 'dextro' (si se enrollan según la $Rot_{\pi/2}$ que lleva e_1 sobre e_2, avanzan en el sentido de e_3: tornillos, sacacorchos,...) y 'levo' (al revés: artículos de broma, bombillas metro NY hasta 1960's,...).

Si el 'espacio' fuera (globalmente) un espacio afín, cualquier curva (continua) cerrada que 'arrastrara' consigo una base del espacio vect. tangente la devolvería (a la llegada) a su orientación de partida (todo espacio afín es 'orientable'). Pero si el 'espacio' tuviera (!?) una 'dirección compacta' y (en el símil de 'Planilandia', usado para visualizar las cosas en dimensión 2) no fuera un cilindro (también orientable) sino una banda de Moebius (no orientable), cualquier curva cerrada 'no contractible' cambiaría de orientación a la base tangente arrastrada.

Pregunta: ¿hay alguna propiedad fundamental (i.e. no-convencional) del mundo físico que discrimine entre las orientaciones O^+ y O^- de cada esp. vectorial tangente? (el 'problema Ozma', ver [M. Gardner], *The ambidextrous universe*, Basic Books Inc., New York 1964 / trad. en Alianza). Si la hubiera y el 'espacio' tuviera alguna 'dirección compacta', sería más adecuado modelarlo por un cilindro (en el símil de Planilandia) que por una banda de Moebius.

• ¿Biología terrestre?: Los aminoácidos (que constituyen las proteínas) y las 4 bases nucleótidas G, A, T, C (que constituyen los ácidos nucleicos) forman casi siempre (aunque no siempre, ver *Moléculas especulares*, IC Enero 2014) hélices levo. Pero ello se cree debido a las 'condiciones iniciales' $\rightsquigarrow$ la Biología terrestre no discrimina entre las orientaciones O^+ y O^-.

• ¿Magnetismo?: Una corriente eléctrica $I = qv_q$ (carga q con signo $+$) crea un campo magnético $\mathfrak{B}_I(x) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \wedge u_x$ (Ley de Biot-Savart), con $\wedge$ el prod. vectorial basado en O^+

Pero el sentido de $\mathfrak{B}$ es por definición el sentido Polo $N \mapsto$ Polo S (magnéticos) y la distinción entre Polo N y Polo S es convencional: en un cuerpo, es su 'momento magnético' (suma vectorial de los momentos magnéticos originados por el 'movimiento orbital' y por el 'spin' de sus electrones y núcleos) el que hace de él un imán, y se llama (por convenio) Polo N al extremo señalado por dicho momento magnético $\rightsquigarrow$ el Magnetismo no discrimina (contra lo que pensaba E. Mach, finales s.XIX) entre O^+ y O^-.

• Pues bien, las 'Interacciones débiles' (ID) discriminan entre las orientaciones O^+ y O^-:

En la 'desintegración beta' del cobalto (${}^{60}_{27}Co \mapsto {}^{60}_{28}Ni + e + \bar{\nu}$) a temperatura $\simeq 0^o K$ y bajo un potente $\mathfrak{B}$, los electrones se emiten (paralelamente a $\mathfrak{B}$ pero) con mayor probabilidad (!!!) en el sentido que nuestro convenio asigna a $\mathfrak{B}$ (Ch.S. Wu, U. Columbia, 1956, sugerido por T.D. Lee y Ch.N. Yang, premios Nobel 1957). Así, las ID permiten 'identificar experimentalmente' el sentido que nuestro convenio asigna a $\mathfrak{B}$, por tanto el producto vectorial $\wedge$ como aquél que cumple $\mathfrak{B}_I(x) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \wedge u_x$, por tanto la orientación O^+ ('mano derecha') como aquélla que cumple $\{I, u_x, \mathfrak{B}_I(x)\} \in O^+ \rightsquigarrow$ las ID orientan (físicamente) el 'espacio'.

$\boxed{3}$ Espacio dual e Interpolación de Lagrange

Sean un conjunto $\mathcal{C}$, dos 'variables' $x, y : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ y una 'muestra' $M \equiv \{(x_1, y_1), ..., (x_m, y_m)\}$.

Se trata de encontrar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya 'gráfica' (i.e. el conjunto $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 'interpole' la muestra M (i.e. aventure un valor de y para valores de x no incluidos en M)

Se requiere interpolar (frente a ajustar por mínimos cuadrados, [MS] VII.2.3 / Excursión 1) siempre que los valores y_i $(1 \le i \le m)$ vienen dados 'sin incertidumbre'. P.ej. cuando, en el perfil de un automóvil (o viga, o ala de avión) a diseñar, ciertos puntos con 'abscisa' dada deben 'estar a un altura' (o 'soportar una fuerza', o 'tener una inclinación') prescrita de antemano.

Las funciones de interpolación más sencillas (para evaluar, derivar e integrar) son los polinomios. El siguiente resultado (que refina un caso particular de la Excursión 1) es fundamental:

(Teor. III.3.4.4) Si $x_1, ..., x_m$ son todos distintos, entonces existe un único polinomio (de grado $\le m-1$) $p^M(x) \equiv a_0 + a_1 x + ... + a_{m-1}x^{m-1}$ que 'interpola M', esto es, que verifica: $p^M(x_i) = y_i$ $(1 \le i \le m)$. A saber: $\boxed{p^M(x) = \sum_{j=1}^m y_j L_j^M(x)}$ **(1)**, *con ('polinomios básicos de interpolación de Lagrange')* $\boxed{L_1^M}(x) := \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdots \frac{x-x_m}{x_1-x_m}, \ . \ . \ . \ , \boxed{L_m^M}(x) := \frac{x-x_1}{x_m-x_1} \cdots \frac{x-x_{m-1}}{x_m-x_{m-1}}$.

Dem. Sean $\boxed{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^{m-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{R})$, $X \equiv \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix}$ y $C \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$.

Los coeficientes a_{i-1} $(1 \le i \le m)$ del polinomio buscado son precisamente (inmediato) las soluciones (si las hay) del sistema de ecs. lineales $AX = C$. Pero $\det(A) \overset{\text{[MS] Ej.ResueltoI.8}}{=} \Pi_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0$ ($m(m-1)/2$ factores), $\overset{\text{I.5.5}}{\Rightarrow}$ el sistema tiene solución única $\boxed{X = A^{-1}C}$ **(2)**.

Puesto que se ofrece un candidato a solución, lo más cómodo es comprobar que de hecho lo es. Y en efecto se tiene: $L_j^M(x_i) = \Pi_{k(\neq j)=1}^m \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \overset{!}{=} \delta_{ij}$ $(\forall i, j)$ **(3)** , $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $p^M(x_i) = y_i$ $(\forall i)$ ■

Esta expresión de $p^M(x)$ es 'incómoda' de manejar (p.ej. si se añade un par (x_{m+1}, y_{m+1}) a M, hay que recalcular los L_j^M) $\rightsquigarrow$ se usan otros métodos más eficientes para calcular p^M (p.ej. la fórmula de Newton, [IR] J. A. Infante, J. M. Rey, *Métodos numéricos*, Pirámide 2007, 6.2.2). De hecho, para interpolar se usan más bien los 'splines' (i.e. 'polinomios a trozos', [IR] 6.3).

Y sin embargo, esta expresión de p^M se relaciona directamente con el espacio dual $(\mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{R}))^*$:

(Pr. III.3.4.1) $\forall a \in \mathbb{R}$, la 'evaluación en a' $\boxed{E_a}$: $\mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, p \mapsto p(a)$ *es una forma lineal*

Dem. $E_a(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) := (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(a) = \lambda_1 E_a(p_1) + \lambda_2 E_a(p_2)$ [+ Lema III.1.1.1] ■

(Pr. III.3.4.2) Si los x_i son todos distintos, entonces $\{E_{x_1}, .., E_{x_m}\}$ es base de $(\mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{R}))^*$

Dem. En las bases $\beta \equiv \{1, x, ..., x^{m-1}\}$ y $\beta^* = \{(p(x) \mapsto a_0), ..., (p(x) \mapsto a_{m-1})\}$, es $(\forall i)$: $M_\beta(E_{x_i}) \overset{\text{III.2.1}}{:=} (E_{x_i}(1)\ E_{x_i}(x) \ ...\ E_{x_i}(x^{m-1})) = (1\ x_i\ ...\ x_i^{m-1})$, $\overset{\text{Pr.III.3.1.1}}{\Rightarrow} E_{x_i} = (1, x_i, ..., x_i^{m-1})_{\beta^*}$. Se sigue: $(E_{x_1}\ ...\ E_{x_m}) \overset{\text{II.1.7}}{=} \beta^* A^t$, $\overset{rg(A^t)=m}{\Rightarrow}$ $\{E_{x_1}, ..., E_{x_m}\}$ es (Prop. II.1.6.1) lin. indep. ■

(Pr. III.3.4.3) Si los x_i son todos distintos, $B \equiv \{L_1^M, .., L_m^M\}$ es base y $B^* = \{E_{x_1}, .., E_{x_m}\}$

Dem. $E_{x_i}(L_j^M) := L_j^M(x_i) \overset{(3)}{=} \delta_{ij}$ $(\forall i, j)$, $\Rightarrow B$ es b. de $\mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{R})$ $[\lambda_1 L_1^M + ... + \lambda_m L_m^M = 0 \Rightarrow 0 \overset{\text{III.1.4}}{=} \lambda_1 E_{x_j}(L_1^M) + ... + \lambda_m E_{x_j}(L_m^M) = \lambda_j\ (\forall j)]$, $\overset{\text{Prop. III.3.1.2}}{\Rightarrow}$ $B^* = \{E_{x_1}, .., E_{x_m}\}$ ■

(Obs.1) Denotando $A^{-1} \equiv (q_{ij})_{i,j}$, se tiene: $p^M(x) \equiv \sum_{i=1}^m a_{i-1}x^{i-1} \overset{(2)}{=} \sum_{i,j=1}^m q_{ij} y_j x^{i-1}$, $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $L_j^M = \sum_{i=1}^m q_{ij}x^{i-1}$ $(\forall j)$, $\Rightarrow$ $B \overset{\text{II.1.7}}{=} \beta A^{-1}$, como debe ser ya que $B^* = \beta^* A^t$ (Prop. III.3.1.3)

(Obs.2) $\forall p (\neq \lambda x) \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, la 'evaluación de p' $\boxed{E_p}$: $\mathbb{K} \to \mathbb{K}, a \mapsto p(a)$ no es lineal!

$\boxed{4}$ Autovalores y Algoritmo de ordenación de Google

En 1998, S. Brin y L. Page idearon (Stanford, California) el algoritmo PageRank, que es el que (en primera aproximación) utiliza Google para ordenar 'por su importancia' los resultados de una búsqueda de páginas web.

Los dos <u>axiomas del modelo</u> son (lo que sigue está libremente tomado de [I] J.A. Infante, *Algoritmo de ordenación de Google. PageRank y Algebra lineal numérica*):

1. La red es un grafo orientado, con N ($> 10^9$, en la actualidad) vértices ($\equiv$ páginas web) P_i ($1 \leq i \leq N$) entre los que hay enlaces 'dirigidos'. Definiendo $\boxed{m_{ij}} := 1$ ó 0 según que haya o no enlaces que lleven de P_j a P_i ($\forall i, j$ con $i \neq j$) y $\boxed{m_{ii}} :\overset{!}{=} 1$ ($\forall i$), se obtiene una matriz $M \equiv (m_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$, cuya fila i (respectivamente, columna j) contabiliza, según procedencia (respectivamente, según destino) los enlaces que llegan a P_i (respectivamente, que salen de P_j).

2. La 'importancia' $\boxed{x_i}$ de P_i ($\equiv$ 'probabilidad de llegar a P_i') es la suma de un término fijo ($\equiv$ 'aleatoriedad') y de otro que a su vez depende de la importancia x_j de los P_j que llevan a P_i:

$$\boxed{x_i = (1-d)\tfrac{1}{N} + d\textstyle\sum_{j=1}^N \tilde{m}_{ij} x_j} \ , \text{ con } \boxed{\tilde{m}_{ij}} \equiv \frac{m_{ij}}{\sum_{i=1}^N m_{ij}} (\geq 0) \ , \ \Rightarrow \ \boxed{x_i > 0} \quad \mathbf{(1)}$$

(para cierto $0 < \boxed{d} < 1$, Google toma $d = 0,85$). El producto $\tilde{m}_{ij} x_j$ representa la 'importancia relativa del vértice P_j para el P_i' (tanto mayor cuanto menor es la 'promiscuidad' $\sum_{i=1}^N m_{ij}$ del vértice P_j). Por construcción, $\sum_{i=1}^N \tilde{m}_{ij} = 1$ (*), con lo que también $\sum_{i=1}^N x_i = 1$ (lo que resulta esencial para interpretar los x_i's como 'probabilidades'):

$$\textstyle\sum_{i=1}^N x_i \overset{(1)}{=} (1-d) + d\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{m}_{ij} x_j \overset{(*)}{=} (1-d) + d\sum_{j=1}^N x_j \ , \ \Rightarrow \ \boxed{\sum_{i=1}^N x_i = 1} \quad \mathbf{(2)}$$

Sean las matrices $\boxed{\ell} \equiv (1)_{i,j} \in \mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$ (no es la identidad!!) y $\boxed{\tilde{M}} \equiv (\tilde{m}_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$.

Y sea la matriz $\boxed{A} \equiv (a_{ij})_{i,j} := \underline{(1-d)\tfrac{1}{N}\ell + d\,\tilde{M}} \in \mathfrak{M}_N(\mathbb{R}) \quad \mathbf{(3)}$

Se sigue: $x_i \overset{(1,2)}{=} (1-d)\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N x_j + d\sum_{j=1}^N \tilde{m}_{ij} x_j \overset{(3)}{=} \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j$ ($\forall i$).

Con lo que el modelo 'podrá funcionar' sólo si $\exists! x \equiv (x_1, ..., x_N)_B \in V$, verificando $x_i > 0$ ($\forall i$) y $\sum_{i=1}^N x_i = 1$, tal que $X = AX$. Sólo en tal caso, las coordenadas $x_1, ..., x_N$ de x podrán interpretarse como las 'importancias' de los vértices $P_1, ..., P_N$.

Pues bien, se tiene el siguiente

(Teorema) (Perron 1907, ver [R. Varga] Matrix iterative analysis, Prentice Hall 1962, p. 30) Toda matriz $A \in \mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$ con coeficientes positivos posee un único autovalor μ tal que:

(a) $\mu > 0$ y tiene multiplicidad algebraica 1 (con lo que $\dim(V_\mu) = 1$, Prop. IV.1.4.1)

(b) cualquier autovalor ν de A verifica $|\nu| \leq \mu$ (se dice que μ es 'dominante')

(c) $\exists x \equiv (x_1, ..., x_N)_B$ que genera el subespacio propio V_μ y verifica $x_i > 0$ ($\forall i$)

En nuestro caso: al ser $(1-d)\frac{1}{N} > 0$, la matriz $A \equiv (a_{ij})_{i,j}$ en $\mathbf{(3)}$ tiene coefs. positivos. Y

(i) Se tiene: $\boxed{\sum_{i=1}^N a_{ij} \overset{(3)}{=} (1-d) + d\sum_{i=1}^N \tilde{m}_{ij} \overset{!}{=} 1 \ (\forall j)}$ $\mathbf{(4)}$, $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^N (a_{ij} - \delta_{ij}) = 0$ ($\forall j$), $\overset{\text{Prop.II.1.6.1}}{\Rightarrow}$ $rg(A - I_N) < N$, $\overset{\text{Prop. IV.1.2.1(3)}}{\Rightarrow}$ $\dim(V_1) \geq 1$, $\overset{\text{IV.1.2}}{\Rightarrow}$ 1 es autovalor de A

(ii) Si $AY = \nu Y$ con $y (\neq 0) \equiv (y_1, ..., y_N)_B \in V$, se tiene: $|\nu| \left(\sum_{i=1}^N |y_i|\right) = \sum_{i=1}^N |\nu y_i| = \sum_{i=1}^N \left|\sum_{j=1}^N a_{ij} y_j\right| \leq \sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|\,|y_j| \overset{a_{ij}>0}{=} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N a_{ij}\right) |y_j| \overset{(4)}{=} \sum_{j=1}^N |y_j|$, $\overset{y \neq 0}{\Rightarrow}$ $|\nu| \leq 1$

Se sigue de (i), (ii) y del Teorema que 1 es <u>el</u> autovalor dominante de A y que $\exists x \equiv (x_1, ..., x_N)_B$ que genera V_1 y verifica $x_i > 0$ ($\forall i$). Este x es único (para cada d) si se exige $\mathbf{(2)}$.

Puede encontrarse x (en tiempo suficient. pequeño) por el 'método de la potencia' (ver [I]).

$\boxed{5}$ Formas cuadráticas y Relatividad especial

A fines del s.XIX la luz se consideraba ya (J.C. Maxwell) una 'onda', a saber, la que propaga, en el esp. afín euclídeo ordinario $\mathcal{A}$ sobre $(V=\mathbb{R}^3,\langle,\rangle)$ y con (norma de la) velocidad (respecto del 'tiempo universal?' $\boxed{t}$ y respecto de un sist. de ref. rectangular ligado al 'éter?') $\boxed{c}\equiv v^{luz}_{éter}\simeq 3\cdot 10^{10}\,cm/seg$, las variaciones del campo electromagnético [análogo a como el sonido es la 'onda' que propaga, con velocidad $v^{sonido}_{aire}\simeq 3\cdot 10^4\,cm/seg$, las variaciones de la presión del aire].

En 1887, A. Michelson y E. Morley intentaron medir (Cleveland, Ohio) la velocidad $\boxed{v_e}$ del éter resp. de la Tierra, que se mueve con $v_\oplus\simeq 3\cdot 10^6\,cm/seg$ resp. del Sol ($\simeq$ resp. del éter?).

El 'interferómetro' de MM no podía medir con precisión v^{luz}_{Tierra}, pero sí apreciar retrasos relativos en la llegada de dos ondas-luz en trayectos de ida/vuelta de igual longitud ($2d$) en direcciones $\|$ y $\perp$ a la del mov. de la Tierra. La 'composición vect. de velocidades' (CVV) da:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{trayecto } \| \ (pqp): \left\{\begin{array}{l} v^{luz}_{pq}=c+v_e \\ v^{luz}_{qp}=c-v_e\end{array}\right\} \Rightarrow t_{pqp}(v_e)=\frac{d}{c+v_e}+\frac{d}{c-v_e}=\frac{2cd}{c^2-v_e^2}=(1-\frac{v_e^2}{c^2})^{-1}\,\frac{2d}{c} \\ \text{trayecto } \perp \ (prp): \left\{\begin{array}{l} v^{luz}_{pr}=(c^2-v_e^2)^{1/2} \\ v^{luz}_{rp}=(c^2-v_e^2)^{1/2}\end{array}\right\} \Rightarrow t_{prp}(v_e)=\frac{2d}{(c^2-v_e^2)^{1/2}}=(1-\frac{v_e^2}{c^2})^{-1/2}\,\frac{2d}{c}\end{array}\right\},\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{pqp}(v_e)-t_{prp}(v_e)=[(1-\frac{v_e^2}{c^2})^{-1}-(1-\frac{v_e^2}{c^2})^{-1/2}]\,\frac{2d}{c}\overset{\text{si } v_e<<c}{\simeq}[(1+\frac{v_e^2}{c^2})-(1+\frac{v_e^2}{2c^2})]\,\frac{2d}{c}=\frac{v_e^2 d}{c^3}.$$

Valor experimental: $t_{pqp}(v_e)-t_{prp}(v_e)\overset{!}{\simeq}0,\Rightarrow v_e\simeq 0$ (lo esperado era $v_e\simeq v_\oplus$), $\Rightarrow v^{luz}_{Tierra}=c$ (en todas! las direcciones, 'isotropía') $\rightsquigarrow$ MM (tras muchas polémicas por su interpretación!) cuestiona la CVV $\rightsquigarrow$ ver [TW] E.F.Taylor, J.A.Wheeler, *Spacetime Physics*, 1.5, Freeman, 1966

Un sist. de ref. rectangular (VI.1.2) $\kappa=(o\equiv o(\tau),B\equiv B(\tau))$ en $\mathcal{A}$ se dice 'inercial' (SRI) si cumple: $\frac{d}{d\tau}\overrightarrow{o(\tau_{inicial})o(\tau)}=cte.$ y $B(\tau)=cte.\equiv\{e_1,e_2,e_3\}$ (los cuatro son vectores en V).

El (supuesto) tiempo universal t, ¿es realmente el tiempo medido por todos los SRI?

Sean $\kappa=\{o,B\}$ y $\kappa'=\{o',B\}$ [$\rightsquigarrow$ coorden. $(x,y,z,\tau\overset{?}{=}t)$ y $\kappa'\rightsquigarrow(x',y'=y,z'=z,\tau'\overset{?}{=}t)$] dos SRI con velocidad relativa (cte.) $\boxed{v}:=\|\frac{d}{d\tau}\overrightarrow{o(\tau)o'(\tau)}\|\geq 0$ a lo largo del eje (común) $e_1=e_1'$.

Sean 'sucesos' $\boxed{P}:=$ emisión de luz en $o'(\tau'_P)\equiv o(\tau_P)$ y $\boxed{Q}:=$ recepción en $o'(\tau'_Q)$ de la luz reflejada en un espejo fijo en κ', perpendicular al eje e_2' y a distancia $\boxed{d}$ del origen o'. Con lo que Q ocurre (para κ') 'donde' P (aunque 'más tarde') $\rightsquigarrow$ el SRI κ' es 'comóvil' con P y Q.

Así, $\underline{x'_Q-x'_P\overset{\text{obvio}}{=}0\ ,\ \tau'_Q-\tau'_P\overset{\text{MM}}{=}\frac{2d}{c}}$ $(\mathbf{1})$ y $\underline{x_Q-x_P\equiv 2\Delta x\ ,\ \tau_Q-\tau_P\overset{\text{MM}}{=}\frac{2(d^2+\Delta x^2)^{1/2}}{c}}$ $(\mathbf{2})$.

Se sigue: $(x'_Q-x'_P)^2-c^2(\tau'_Q-\tau'_P)^2=-4d^2=(x_Q-x_P)^2-c^2(\tau_Q-\tau_P)^2$ (!!!) $\rightsquigarrow$ en el espacio vectorial $V\times\mathbb{R}$ asociado al 'espacio-tiempo' (afín) $\mathcal{A}\times\mathbb{R}$, MM sugiere una forma cuadrática $\boxed{\Phi}$: $V\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con signatura $(3,1)$ dada por (c 'homogeneiza' espacio y tiempo): $\Phi(\overrightarrow{PQ}):=(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2+(z_Q-z_P)^2-c^2(\tau_Q-\tau_P)^2$, $\forall$ SRI κ con coord. (x,y,z,τ)

Postular tal Φ ('Relatividad especial') con $sg(\Phi)=(3,1)$ lleva a predicciones (no intuitivas!) confirmadas por experimentos a 'altas velocidades', p.ej. a abolir el papel privilegiado de $t\rightsquigarrow$

Dilatación del tiempo entre P y Q (medido por un SRI κ no-comóvil con P y Q, respecto del medido por un SRI κ' comóvil): $v\equiv\frac{x_Q-x_P}{\tau_Q-\tau_P}\overset{(2)}{=}\frac{\Delta x}{(d^2+\Delta x^2)^{1/2}}c,\overset{!}{\Rightarrow}\ \Delta x=d\,\frac{v}{c}\,(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2},\Rightarrow$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{\tau_Q-\tau_P}{\tau'_Q-\tau'_P}\overset{(1,2)}{=}\frac{(d^2+\Delta x^2)^{1/2}}{d}=\left(1+\frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2}\right)^{1/2}=(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2}}\ (\mathbf{3})\ \left(\overset{\text{si } v\neq 0}{>}1\ \text{ y }\ \overset{\text{si } v<<c}{\simeq}1\right)$$

Experim. (Rossi-Hall 1941, ver [TW] Exerc. 42): 'muones' ($\rightsquigarrow$ 'semivida' comóvil $T\simeq 1,5\cdot 10^{-6}\,seg$, donde $T:=\frac{\ln 2}{a}$ y $N(\tau')=N(0)e^{-a\tau'}$) producidos a altura $h_\oplus=6\cdot 10^6\,cm$ en dirección a tierra con $|v|=0,99975c$ llegan (?) en $\Delta\tau\simeq 2\cdot 10^{-4}\,seg$. Aunque $\Delta\tau\simeq 133T$, los detectados en tierra son, no $\frac{1}{2^{133}}\simeq 10^{-40}$, sino $\frac{1}{8}$ del total. Explicación: $\Delta\tau'\overset{(3)}{=}(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}\Delta\tau\simeq\frac{3}{133}\Delta\tau=3T$.

$\boxed{6}$ Cónicas euclídeas y Leyes de Kepler

En 1609-18, J. Kepler formuló (Praga) las tres Leyes (♠) que llevan su nombre, a saber, las órbitas de planetas: (1^a) son elipses con el sol en uno de sus focos, (2^a) barren áreas iguales en tiempos iguales y (3^a) se recorren con períodos cuyos cuadrados son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores. En 1687, I. Newton (Cambridge) las dedujo analíticamente $\rightsquigarrow$ Relación entre las ctes. de integración ('del movimiento') y los 'parámetros' de la órbita, ver (10) y (13).

Sean 'partícula' (puntual) con 'masa' $M(>0)$ situada ('reposo') en un punto o ('origen') del espacio afín euclídeo ordinario $\mathcal{A}$ sobre $(V=\mathbb{R}^3,\langle,\rangle)$ y partícula $\alpha\equiv\alpha(t)(\neq o,\forall t)$ (curva diferenc. resp. del tiempo t, derivadas $'$ / $\alpha',\alpha'',..\in V$) con masa $m(<<M)$. Lo que sigue está libremente tomado de B. O'Neill, *Semiriemannian geometry*, Academic Press 1983, p. 453.

Hipótesis: sobre α actúa 'fuerza gravitatoria' $F_\alpha=\frac{-GMm}{\|\overrightarrow{o\alpha}\|^2}\frac{\overrightarrow{o\alpha}}{\|\overrightarrow{o\alpha}\|}$, con $\|\overrightarrow{o\alpha}\|>0$ y $G>0$ ('cte. de Newton'), que la acelera: $F_\alpha=m\alpha''$ (2^a ley de Newton). Se sigue ('universalidad' de la gravitación): $\boxed{\alpha''=-GM\,\overrightarrow{o\alpha}/\,\|\overrightarrow{o\alpha}\|^3}$ **(1)** ($\rightsquigarrow$ 3 edifs. 2^o orden en $t\rightsquigarrow$ 6 ctes. ($^\bullet$) del movimiento).

<u>Mom. Angular$_o$</u> (por u.masa) $\mathcal{L}:=\overrightarrow{o\alpha}\wedge\alpha',\Rightarrow\mathcal{L}'\overset{\text{Pr.II.3.10.2(1)}}{=}\overrightarrow{o\alpha}\wedge\alpha''\overset{(1)}{=}0,\Rightarrow\boxed{\|\mathcal{L}\|=cte.^\bullet}$ **(2)** y s.p.d.g. <u>$\mathcal{L}=\|\mathcal{L}\|\,e_3{}^{\bullet\bullet}$</u>, $\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{o\alpha(t)}\in L(e_1,e_2),\forall t}$ (órbita plana!) $\rightsquigarrow$ en 'polares' $\underset{\text{(no afines!!)}}{(r,\varphi)}$ con <u>$r(o)\equiv 0^\bullet$</u>:

$$\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{array}\right.,\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l}x'=r'\cos\varphi-r\varphi'\sin\varphi\\ y'=r'\sin\varphi+r\varphi'\cos\varphi\end{array}\right.,\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l}x''=r''\cos\varphi-2r'\varphi'\sin\varphi-r\varphi'^2\cos\varphi-r\varphi''\sin\varphi\\ y''=r''\sin\varphi+2r'\varphi'\cos\varphi-r\varphi'^2\sin\varphi+r\varphi''\cos\varphi\end{array}\right.$$

$$\text{Se tiene:}\left\{\begin{array}{l}\mathcal{L}\overset{\text{II.3.10}}{:=}(yz'-zy')e_1+(zx'-xz')e_2+(xy'-yx')e_3\overset{z=0=z'}{=}(xy'-yx')e_3=r^2\varphi'e_3,\ \Rightarrow\\ \overset{\text{s.p.d.g. }\varphi'\geq 0}{\Rightarrow}\boxed{\|\mathcal{L}\|=r^2\varphi'}\ \mathbf{(3)}\ ,\ \overset{(2)}{\Rightarrow}\ 2rr'\varphi'+r^2\varphi''=0\ ,\ \overset{r>0}{\Rightarrow}\ 2r'\varphi'+r\varphi''=0\ \mathbf{(4)}\\ \left\{\begin{array}{l}\text{ó bien }\ r''-2r'\varphi'\tan\varphi-r\varphi'^2-r\varphi''\tan\varphi\\ \text{ó bien }\ r''+2r'\varphi'\cot\varphi-r\varphi'^2+r\varphi''\cot\varphi\end{array}\right\}\overset{(1)}{=}\frac{-GM}{r^2}\ ,\ \overset{(4)}{\Rightarrow}\ r''-r\varphi'^2=\frac{-GM}{r^2}\ \mathbf{(5)}\end{array}\right.$$

<u>Si $\mathcal{L}\neq 0$</u> ($\overset{(2,3)}{\Rightarrow}r=r(\varphi)$), el <u>Area barrida$_o$</u> es: $A:=\int\int dxdy\overset{\text{camb. var.}}{=}\int\int drd\varphi\mid\det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)})\mid=$
$=\int\int rdrd\varphi=\frac{1}{2}\int r^2(\varphi)d\varphi,\Rightarrow\boxed{A'=\frac{1}{2}r^2(\varphi(t))\varphi'(t)\overset{(3)}{=}\frac{\|\mathcal{L}\|}{2}\overset{(2)}{=}cte.}$ **(6)** (2^a ♠)

$$\text{Ec. órbita. Se tiene: }r'\overset{r=r(\varphi)}{=}\frac{dr}{d\varphi}\varphi'\ ,\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\varphi''\overset{(4)}{=}\frac{-2r'\varphi'}{r}=\frac{-2}{r}\varphi'^2\frac{dr}{d\varphi}\quad\mathbf{(7)}\\ r''=\frac{d^2r}{d\varphi^2}\varphi'^2+\frac{dr}{d\varphi}\varphi''\overset{(7)}{=}\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}-\frac{2}{r}(\frac{dr}{d\varphi})^2\right)\varphi'^2\ ,\ \overset{(5)}{\Rightarrow}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}-\frac{2}{r}(\frac{dr}{d\varphi})^2\right)\varphi'^2-r\varphi'^2=\frac{-GM}{r^2}\ ,\ \overset{(3)}{\Rightarrow}\ \frac{-1}{r^2}\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}-\frac{2}{r}(\frac{dr}{d\varphi})^2\right)+\frac{1}{r}=\frac{GM}{\|\mathcal{L}\|^2}\ ,\ \overset{u\equiv 1/r}{\Rightarrow}\ \boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{GM}{\|\mathcal{L}\|^2}}\ \mathbf{(8)}$$

Sol. general: $u(\varphi)=\frac{GM}{\|\mathcal{L}\|^2}(1+e\cos(\varphi-\varphi(r_{\text{mín}}))$, para cierta cte. (adimens.!) $\boxed{e}\geq 0,\overset{M>0}{\Rightarrow}$ (s.p.d.g. <u>$\varphi(r_{\text{mín}})\equiv 0^\bullet$</u>) $\boxed{r(\varphi)=\frac{p}{1+e\cos\varphi}}$ **(9)**, con (longitud!) $\boxed{p\equiv\frac{\|\mathcal{L}\|^2}{GM}>0}$ **(10)**, $\Rightarrow r_{\text{mín}}=\frac{p}{1+e}$ **(11)**

Pero la ecuación (9) describe una cónica (VI.3.1-VI.3.3) de excentricidad e, a saber: elipse si $e<1$ (con $p\equiv a(1-e^2)=\frac{b^2}{a}$, VI.3.1), parábola si $e=1$, hipérbola si $e>1$ (con $p\equiv a(e^2-1)=\frac{b^2}{a}$, VI.3.3) $\rightsquigarrow$ Si la órbita es acotada, será una elipse (1^a ♠).

<u>Energía</u> (por u.masa) $\mathcal{E}:=\frac{1}{2}\|\alpha'\|^2-\frac{GM}{r},\Rightarrow\mathcal{E}'=\langle\alpha',\alpha''\rangle+\langle\frac{GM}{r^3}\overrightarrow{o\alpha},\alpha'\rangle\overset{(1)}{=}0,\Rightarrow\boxed{\mathcal{E}=cte.^\bullet}$ **(12)**.
Y $\mathcal{E}\overset{\text{pol.}}{=}\frac{1}{2}(r'^2+r^2\varphi'^2)-\frac{GM}{r}\overset{(3)}{=}\frac{1}{2}\left(r'^2+\frac{\|\mathcal{L}\|^2}{r^2}-\frac{2GM}{r}\right)\overset{(12)}{=}\frac{1}{2}\left(\frac{\|\mathcal{L}\|^2}{r^2_{\text{mín}}}-\frac{2GM}{r_{\text{mín}}}\right)\overset{(10)}{=}\frac{GM}{2r_{\text{mín}}}\left(\frac{p}{r_{\text{mín}}}-2\right),\overset{(11)}{\Rightarrow}$
$\boxed{e^2-1=\frac{2p\mathcal{E}}{GM}}$ **(13)** $\rightsquigarrow$ La órbita es: elipse si $\mathcal{E}<0$, parábola si $\mathcal{E}=0$, hipérbola si $\mathcal{E}>0$.

Si la órbita es elipse, se tiene ($T\equiv$ período, $A_T\equiv$ área total): $T\frac{\|\mathcal{L}\|}{2}\overset{(6)}{=}A_T\overset{\text{antes}}{=}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2(\varphi)d\varphi\overset{(9)}{=}$
$\frac{p^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}\underset{!}{\overset{e\leq 1}{=}}\frac{\pi p^2}{(1-e^2)^{3/2}}\ ,\ \Rightarrow\ T^2=\frac{4\pi^2p^4}{\|\mathcal{L}\|^2(1-e^2)^3}\overset{(10)}{=}\frac{4\pi^2p^3}{GM(1-e^2)^3}\overset{p\equiv a(1-e^2)}{=}\frac{4\pi^2a^3}{GM}$ (3^a ♠)

$\boxed{7}$ Formas cuadráticas e Inercia rotacional / Giróscopos

Los 'giróscopos' (sólidos rígidos que rotan en torno a un 'eje pincipal de inercia') son el fundamento de los sistemas de piloto automático: si el 'torque' de las fuerzas resp. del centro de masas (c.d.m.) es cero, el eje de giro 'mantiene dirección' (independ. del mov. del c.d.m.).

Sea $S = \{x^a(t) \mid 1 \leq a \leq N(\geq 2)\}$ conjunto de 'partículas' (i.e. curvas difer. resp. del 'tiempo' t, derivadas $'$) en el esp. afín eucl. ordin. $\mathcal{A}$ sobre $(V = \mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$, con 'masas' $m^a (> 0)$ y supondremos ('sólido rígido'): $\underline{\| \overrightarrow{x^a x^b} \| = cte.}$ $(\overset{\text{Prop. V.2.2.2(1)}}{\Rightarrow} < \overrightarrow{x^d x^a}, \overrightarrow{x^d x^b} >= cte.)$, $\forall a, b, d$ (**H1**)

Dada curva $p(t)$ en $\mathcal{A}$, la curva $\boxed{c(t)}$ ('centro de masas' de S) dada por $m\ \overrightarrow{pc} := \sum_{a=1}^N m^a\ \overrightarrow{px^a}$ (**1**), con $\boxed{m} \equiv \sum_{a=1}^N m^a$, es (VI.1.1(A2)) independiente (!) de $p(t)$ y verifica (!):
$\| \overrightarrow{cx^a} \| \overset{\text{(H1)}}{=} cte.$ y $< \overrightarrow{cx^a}, \overrightarrow{cx^b} > \overset{\text{(H1)}}{=} cte.$ $(\overset{\text{Teor. II.3.4.2}}{\Rightarrow} \dim(L(\overrightarrow{cx^a}, \overrightarrow{cx^b})) = cte.)$, $\forall a, b$ (**2**)

Resulta que existe (!) base ('móvil') $\boxed{B(t)} \equiv \{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\} = B_{can}P(t)$ de V ortonormal $(\overset{\text{Pr.II.3.6.2}}{\Rightarrow} P^tP = I_3)$ tal que (escribiendo $\overrightarrow{cx^a} \equiv \sum x_i^a e_i$): $x_i^a \overset{\text{Pr.II.3.6.3}}{=} < \overrightarrow{cx^a}, e_i > \overset{!}{=} cte.$ (**3**)

Además: $B' = B_{can}P' = B(P^tP')$ (**4**), con $(P^tP')^t \overset{P^tP=I_3}{=} -P^tP', \overset{!}{\Rightarrow} \det(P^tP') = 0, \overset{\text{Pr.III.2.2.1(2)}}{\Rightarrow}$ definiendo $f(t) \in End(V)$ por $M_B(f) := P^tP'$, existe $\bar{e}_3(t) \in V$ unitario tal que $f(\bar{e}_3) = 0$, $\Rightarrow$ $\forall$ base $\bar{B}(t) = \{\_,\_,\bar{e}_3(t)\}$ ortonormal, es $M_{\bar{B}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, para cierto $a(t) \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow$ $\forall u \equiv (u_1, u_2, u_3)_{\bar{B}} \in V$, $f(u) \overset{\text{Prop. III.2.1.1}}{=} (-au_2, au_1, 0)_{\bar{B}} \overset{\text{II.3.10}}{=} \omega \wedge u$, con $\boxed{\omega(t)} \equiv a(t)\bar{e}_3(t)$ (**5**).

En particular: $(\overrightarrow{cx^a})' \overset{\text{II.1.5}}{\equiv} (BX^a)' \overset{(3)}{=} B'X^a \overset{(4)}{=} B(P^tP')X^a \overset{\text{Prop. III.2.1.1}}{=} f(\overrightarrow{cx^a}) \overset{(5)}{=} \omega \wedge \overrightarrow{cx^a}$ (**6**): resp. de $c(t)$, todas las partículas $x^a(t)$ de S efectúan un mov. de rotación con vel. angular $\omega(t)$.

Sea la forma cuadr. $\boxed{\Phi(t)}(\overset{N\geq 2}{\neq} 0) : V \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(u) := \sum_{a=1}^N m^a \| u \wedge \overrightarrow{cx^a} \|^2 \overset{\text{Te.II.3.10.1(2)}}{=}$ $\|u\|^2 \sum_{a=1}^N m^a \| \overrightarrow{cx^a} - p_{L(u)}\overrightarrow{cx^a} \|^2$ (**7**) ($\equiv \|u\|^2 \cdot$ 'mom. de inercia' de S resp. de $c + L(u)$) y $\frac{1}{2}\Phi(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m^a \| \omega \wedge \overrightarrow{cx^a} \|^2 \overset{(6)}{=} \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m^a \| (\overrightarrow{cx^a})' \|^2$ ('energía cinética de rotación' de S).

Supondremos ('sólido físico'): $x^1(t), ..., x^N(t)$ <u>no</u> están alineadas $\rightsquigarrow$ $\Phi(t)$ es <u>definida positiva</u> (**H2**)

La corresp. forma polar ('tensor de inercia' de S) $\boxed{T(t)} : V \times V \to \mathbb{R}$ verifica: $T(u, v) \overset{\text{(7) \& Te.II.3.9.2}}{=}$ $\sum_{a=1}^N m^a \left(\| \overrightarrow{cx^a} \|^2 \langle u, v \rangle - \left\langle \overrightarrow{cx^a}, u \right\rangle \left\langle \overrightarrow{cx^a}, v \right\rangle \right)$ (**8**), $\Rightarrow$ el corresp. $\boxed{\tilde{T}(t)} \in End(V)$ autoadj. (Ej.Adic.V.5) verifica: $\tilde{T}(u) = \sum_{a=1}^N m^a \left(\| \overrightarrow{cx^a} \|^2 u - \left\langle \overrightarrow{cx^a}, u \right\rangle \overrightarrow{cx^a} \right)$, $\Rightarrow M_B(\tilde{T}) \overset{(2,3)}{=} cte.$ (**9**), $\Rightarrow$ los autovalores I_1, I_2, I_3 de $\tilde{T}(t)$ ('momentos principales de inercia' de S) son constantes (**10**), reales (Pr. IV.1.6.2) y positivos (H2). Si $u(t)$ es autovector de $\tilde{T}(t)$, la recta $c(t) + L(u(t))$, 'en reposo' (como S) en el sist. de ref. $(c(t), B(t))$, se llama un 'eje principal de inercia' de S.

Sean $o \in \mathcal{A}$, $F^a(t) \in V$ ('fuerza' sobre x^a) y $\boxed{F(t)} \equiv \sum_{a=1}^N F^a(t)$. Entonces (Inercia trasl.):
$0 \overset{\text{Hip.?}}{=} F(t) \overset{2^a \text{ Ley Newton}}{=} \sum_{a=1}^N m^a (\overrightarrow{ox^a(t)})'' \overset{(1)}{=} m(\overrightarrow{oc(t)})'' \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{oc(t)})' = cte.}$

$$\text{Sean} \begin{cases} \boxed{L_c(t)} := \sum_{a=1}^N \overrightarrow{cx^a} \wedge m^a (\overrightarrow{cx^a})' \overset{(6)}{=} \sum_{a=1}^N \overrightarrow{cx^a} \wedge m^a (\omega \wedge \overrightarrow{cx^a}) \overset{(8)}{=} \tilde{T}(\omega) \quad (\mathbf{11}) \\ L_o(t) := \sum_{a=1}^N \overrightarrow{ox^a} \wedge m^a (\overrightarrow{ox^a})' \overset{\text{VI.1.1(A2) \& } \sum m^a \overrightarrow{cx^a} = 0}{=} L_c + \overrightarrow{oc} \wedge m(\overrightarrow{oc})' \quad (\mathbf{12}) \\ M_o(t) := \sum_{a=1}^N \overrightarrow{ox^a} \wedge F^a \overset{2^a \text{ Ley \& (3)}}{=} (\sum_{a=1}^N \overrightarrow{ox^a} \wedge m^a (\overrightarrow{ox^a})')' = (L_o)' \quad (\mathbf{13}) \\ \boxed{M_c(t)} := \sum_{a=1}^N \overrightarrow{cx^a} \wedge F^a \overset{\text{(A2)}}{=} M_o - \overrightarrow{oc} \wedge \sum_{a=1}^N F^a \overset{2^a \text{ Ley \& (13)}}{=} (L_o - \overrightarrow{oc} \wedge m(\overrightarrow{oc})')' \overset{(12)}{=} (L_c)' \quad (\mathbf{14}) \end{cases}$$

y supondremos ('giróscopo') $\boxed{\omega(t) \text{ es autovector de } \tilde{T}(t)}$ (**H3**). Entonces (Inercia rotacional):
$0 \overset{\text{Hip.?}}{=} M_c(t) \overset{(14)}{=} (L_c(t))' \overset{(11)}{=} (\tilde{T}(t)(\omega(t)))' \overset{\text{(H3)/spdg}}{=} (I_3(t)\omega(t))' \overset{(10)}{=} I_3(\omega(t))' \overset{I_3 > 0}{\Rightarrow} \boxed{\omega(t) = cte.}$

$\boxed{8}$ Esp. afín euclídeo, Enteros y Redes cristalinas / Índices de Miller

Sean $\mathcal{A}$ el espacio afín euclídeo ordinario sobre $(V = \mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$.

Una 'red (cristalina)' $\boxed{\mathcal{R}}$ (abstracción de un 'cristal', i.e. de una disposición periódica de átomos/moléculas en el 'espacio') es un conjunto de puntos de $\mathcal{A}$ invariante por un grupo discreto de movimientos rígidos (VI.2.3) que incluye las traslaciones por tres vectores de V lin. indep.

Fijados red $\mathcal{R}$ y 'origen' (arbitrario) $o \in \mathcal{R}$, se tiene: $\boxed{\mathcal{R} = o + \{\sum_{i=1}^3 l_i e_i \mid l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}\}}$ **(1)**, para cierta base $\boxed{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ('primitiva'/no única/no necesariamente ortonormal!) de V.

Un plano afín $\Pi \subset \mathcal{A}$ se dice 'de $\mathcal{R}$' si contiene 3 puntos de $\mathcal{R}$ no alineados. En tal caso: (a) su intersección con el eje $i \in \{1,2,3\}$ (si no contiene a dicho eje ni a o) es (!) $o + e_i/r_i$, con $r_i \in \mathbb{Q}$ (no neces. $\in \mathbb{Z}$ / $= 0$ si $\Pi \parallel e_i$), (b) tiene (!) por ec. cartesiana (en el sist. de ref. $\{o, B\}$ de $\mathcal{A}$) $\sum_{i=1}^3 n_i x_i = n$ (para ciertos $n_1, n_2, n_3, n \in \mathbb{Z}$) y (c) contiene infinitos (!) puntos de $\mathcal{R}$.

En 1839, W.H. Miller (Cambridge) introdujo los <u>índices de Miller</u> (IM) de (el conjunto de planos de $\mathcal{R}$ paralelos a) un plano Π de $\mathcal{R}$ de ecuación $\sum_{i=1}^3 r_i x_i = 1$ como la terna de enteros $\boxed{(M_1, M_2, M_3)}$ con máximo común divisor 1 y múltiplo de la terna (r_1, r_2, r_3).

Los IM (M_1, M_2, M_3) de un plano Π de $\mathcal{R}$ tienen 'ventajas'? (son enteros) e inconvenientes (si B no es ortonormal, el vector $\sum_{k=1}^3 M_k e_k$ <u>no es</u> ortogonal a Π). ¿Por qué usarlos?

Se llama 'base recíproca' de B a la b. de V (no neces. ortonormal! / con $\wedge$ el prod. vectorial)

$\boxed{\hat{B}} := \{\hat{e}_1 := \frac{e_2 \wedge e_3}{\langle e_1, e_2 \wedge e_3 \rangle}, \hat{e}_2 := \frac{e_3 \wedge e_1}{\langle e_1, e_2 \wedge e_3 \rangle}, \hat{e}_3 := \frac{e_1 \wedge e_2}{\langle e_1, e_2 \wedge e_3 \rangle}\}$, $\overset{\text{II.3.10}}{\Rightarrow}$ $\boxed{\langle \hat{e}_i, e_j \rangle = \delta_{ij}}$ $(\forall i, j)$ **(2)**

[Nota: $\hat{e}_i = \mathfrak{I}^{-1}(\varphi_i)$ $(1 \le i, j \le 3)$, donde $B^* \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es la base de V^* dual de B (III.3.1) y $\mathfrak{I} : V \to V^*$ es el isomorfismo definido por $\mathfrak{I}(x) := \langle x, . \rangle$, Obs.1 en III.3.2]. Entonces:

- $\forall v \equiv \sum_{k=1}^3 n_k \hat{e}_k$ $(n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z})$ y $\forall p \in \mathcal{R}$, <u>existe</u> un plano de $\mathcal{R}$ por p ortogonal a v **(3)**

En efecto: el conjunto $\{p + l_1 n_3 e_1 + l_2 n_3 e_2 - (l_1 n_1 + l_2 n_2) e_3 \mid l_1, l_2 \in \mathbb{Z}\}$ es un plano de $\mathcal{R}$ por p y verifica: $< v, l_1 n_3 e_1 + l_2 n_3 e_2 - (l_1 n_1 + l_2 n_2) e_3 > \overset{(2)}{=} 0$.

- $\forall \Pi : \sum_{i=1}^3 r_i x_i = 1$ plano de $\mathcal{R}$ con IM (M_1, M_2, M_3), se tiene $\boxed{\mu_\Pi} \equiv \sum_{k=1}^3 M_k \hat{e}_k \perp \Pi$ **(4)**

En efecto: $< \mu_\Pi, e_i/r_i - e_j/r_j > \overset{(2)}{=} M_i/r_i - M_j/r_j = 0$ $(1 \le i, j \le 3)$. Pero ¿por qué usar $\hat{B}$?

En 1912 M. von Laue (Munich, pr. Nobel 1914) presentó (buen acuerdo con experimentos!) una teoría de la dispersión 'elástica' ($\equiv$ sin cambio en la 'longitud de onda' λ) de luz por cristales. Si $u, u' \in V$ son unit. en las direcciones 'incidente' y 'dispersada' ($\rightsquigarrow$ 'ángulo de desviación' $\boxed{\phi}$) la onda dispersada tiene intensidad máxima allí donde $\exists n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ que cumplen (!):

$< e_i, \frac{u'-u}{\lambda} >= n_i$ $(1 \le i \le 3)$, $\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ $\frac{u'-u}{\lambda} = \sum_{k=1}^3 n_k \hat{e}_k$, $\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$ $\frac{u'-u}{\lambda} \perp \Pi$ (para cierto plano Π de $\mathcal{R}$) , $\overset{(4)\ \&\ n_1,n_2,n_3,M_1,M_2,M_3 \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}$ $\left(2\sin(\frac{\phi}{2})\frac{\mu_\Pi}{\lambda\|\mu_\Pi\|} \overset{!}{=}\right)$ $\boxed{\frac{u'-u}{\lambda} = N_\Pi\, \mu_\Pi}$ (para cierto $N_\Pi \in \mathbb{Z}$) **(5)**

($\rightsquigarrow$ la dispersión de luz por cristales muestra la 'utilidad' de $\hat{B}$ y de los índices de Miller).

En 1913 W.H. Bragg y W.L. Bragg (Leeds y Cambridge, premios Nobel 1915) imaginaron esta dispersión elástica como una 'reflexión' de la luz en planos de $\mathcal{R}$ paralelos ($\rightsquigarrow$ ángulo de 'incidencia' igual al de 'reflexión' $\boxed{\theta}$). La onda reflejada 'interfiere constructivamente' allí donde el 'espaciado' $\boxed{d}$ entre planos paralelos consecutivos cumple (!): $\boxed{2d\sin\theta = n\lambda}$ (con $n \in \mathbb{Z}$) **(6)**

Pero si Π es un plano de $\mathcal{R}$, el 'espaciado' d entre planos de $\mathcal{R}$ paralelos a Π consecutivos es igual a $1/\|\mu_\Pi\|$. En efecto (recordando **(3)**): $\forall p \equiv o + \sum_{i=1}^3 p_i e_i \in \mathcal{R}$ y variando $q \in \mathcal{R}$, se tiene:

$$d \overset{\text{Prop. VI.1.10.1}}{=} \min_{\neq 0} \left\| p_{L(\mu_\Pi)} \overrightarrow{pq} \right\| \overset{\text{Prop. II.3.9.1}}{=} \min_{\neq 0} \frac{|<\overrightarrow{pq}, \mu_\Pi>|}{\|\mu_\Pi\|} \overset{(2)}{=} \min_{\neq 0} \frac{|\sum_{i=1}^3 (q_i - p_i) M_i|}{\|\mu_\Pi\|}$$

Y puesto que el numerador es un entero positivo y $\exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$ (identidad de Bezout) tales que $\sum_{i=1}^3 a_i M_i = 1$, basta elegir $q = o + \sum_{i=1}^3 (p_i + a_i) e_i \in \mathcal{R}$ para concluir que $\underline{d = 1/\|\mu_\Pi\|}$ **(7)**

Se sigue que **(5)** $\Leftrightarrow$ **(6)**. En efecto: $2\sin(\frac{\phi}{2})\frac{1}{\lambda\|\mu_\Pi\|} \overset{(5)}{=} N_\Pi \overset{(7)\ \&\ \phi \overset{!}{=} 2\theta}{\Leftrightarrow} 2d\sin\theta \overset{(6)}{=} N_\Pi \lambda$