GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

Eduardo Aguirre*

Curso 2006 - 2007 / GRUPO E

Índice

*Estos apuntes son reelaboración de unas notas de Javier Lafuente

1. TEORÍA LOCAL DE CURVAS EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

Prerrequisitos académicos del curso:

Algebra lineal. Cálculo diferencial en varias variables reales, incluyendo los teoremas de la función inversa e implícita. Cálculo integral en varias variables, incluyendo el teorema del cambio de variable.

1.1. PRELIMINARES DE ÁLGEBRA LINEAL

1.1.1. Estructura vectorial de $\mathbb{R}^n$

La matriz de una aplicación lineal cambia con la inversa de la matriz del cambio de base, la de una forma bilineal con la traspuesta.

Como es habitual, $\mathbb{R}$ representa el cuerpo de los números reales. Los elementos del conjunto $\mathbb{R}^n$ de n-tuplas ordenadas de números reales pueden ser considerados como vectores de un espacio vectorial o como puntos de un espacio afín. Trataremos de precisar aquí este asunto.

$\mathbb{R}^n$ tiene estructura natural de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Denotamos por $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ a la base ordenada natural o **canónica**, es decir, $\vec{e}_i := (0, ..., 1^{(i}, ..., 0)$, con $i = 1, ..., n$, de forma que se tiene la identidad:

$$\vec{\xi} \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{e}_i \ , \ \text{ para todo } \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n \ .$$

Observación 1.1 *También podría pensarse que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial abstracto de dimensión n, en donde se ha destacado una base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ que permite identificar cada vector $\vec{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{e}_i$ con sus coordenadas $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.*

Es bien conocido el isomorfismo canónico que existe entre el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}(m, n)$ de las matrices de m filas y n columnas con coeficientes reales. La composición de aplicaciones lineales corresponde al producto de matrices. Una matriz $A \in \mathbb{R}(m, n)$ puede escribirse como el conjunto de sus vectores columna:

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \quad , \quad \text{con } \vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \quad (i = 1, ..., n) \ .$$

Interpretada ahora como aplicación lineal, la matriz A representa la única aplicación lineal $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que transforma la base canónica $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$

de $\mathbb{R}^n$ en el conjunto ordenado $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ de vectores de $\mathbb{R}^m$. Todo ello nos permite escribir: $A = (A\vec{e}_1, ..., A\vec{e}_n)$. Si $A' \in \mathbb{R}(p,m)$, se tiene: $A'A = (A'\vec{a}_1, ..., A'\vec{a}_n) \in \mathbb{R}(p,n)$.

Dada una matriz $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \in \mathbb{R}(n,n)$, la condición para que el conjunto $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ constituya una base de $\mathbb{R}^n$ es que $\det(A) \neq 0$ (esto es, que la aplicación lineal A sea un isomorfismo). Si $\det(A) > 0$, se dice que la base $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ es(tá) **positiva(mente orientada)**, o también que $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **preserva la orientación**. En particular, *la base canónica* $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ *es positiva.*

Observación 1.2 *Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una aplicación lineal y $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal.*

Dada una base $b \equiv (\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$ de $\mathbb{V}$, escribamos

$$\begin{cases} \vec{\xi} = b\xi_b \qquad (\xi_b, \text{ vector columna de } \vec{\xi} \text{ en } b) \\ L(b) = bL_b \ , \ \Rightarrow \ (L\vec{\xi})_b = L_b\xi_b \qquad (L_b, \text{ matriz de } L \text{ en } b) \\ B(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \xi_b^T B_b \eta_b \qquad (B_b, \text{ matriz de } B \text{ en } b) \end{cases}$$

(siendo ξ_b^T la traspuesta de ξ_b) para simbolizar

$$\begin{cases} \vec{\xi} = \sum_{i=1}^n \xi_i \vec{a}_i \\ L\vec{a}_j = \sum_{i=1}^n L_{ij}\vec{a}_i \ \ (j = 1, ..., n) \ \ , \ \ \Rightarrow \ \ (L\vec{\xi})_i = \sum_{j=1}^n L_{ij}\xi_j \ \ (i = 1, ..., n) \\ B(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i B_{ij} \eta_j \end{cases} .$$

Sea $b' \equiv (\vec{a}'_1, ..., \vec{a}'_n)$ otra base de $\mathbb{V}$ y escribamos $b = b'A$ (con A una matriz $n \times n$ invertible) para simbolizar $\vec{a}_j = \sum_{i=1}^n A_{ij}\vec{a}'_i$.

Entonces se tiene:

$$\begin{cases} b\xi_b = \vec{\xi} = b'\xi_{b'} = bA^{-1}\xi_{b'} \ \ , \ \ \Rightarrow \ \ \xi_b = A^{-1}\xi_{b'} \\ bL_b\xi_b = L\vec{\xi} = b'L_{b'}\xi_{b'} = bA^{-1}L_{b'}A\xi_b \ \ (\forall\vec{\xi}) \ \ , \ \ \Rightarrow \ \ L_b = A^{-1}L_{b'}A \\ \xi_b^T B_b \eta_b = B(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \xi_{b'}^T B_{b'} \eta_{b'} = \xi_b^T A^T B_{b'} A \eta_b \ \ (\forall\vec{\xi}, \vec{\eta}) \ \ , \ \ \Rightarrow \ \ B_b = A^T B_{b'} A \ . \end{cases}$$

1.1.2. Estructura afín de $\mathbb{R}^n$

> En un espacio afín no está definida la "suma" de dos puntos, pero sí el "vector diferencia".

Los elementos $p = (p_1, ..., p_n)$ de $\mathbb{R}^n$ también pueden pensarse como puntos de un espacio afín sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, se llama **traslación de vector** $\vec{\xi}$ a la aplicación $p \mapsto p + \vec{\xi}$. Si $p, q \in \mathbb{R}^n$, se llama **diferencia entre** p **y** q al vector $q - p \in \mathbb{R}^n$ definido por la condición $q =: p + (q - p)$. Denotaremos $o \equiv (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. Obsérvese que, si $p = (p_1, ..., p_n)$ es un punto de $\mathbb{R}^n$, entonces $p - o = (p_1, ..., p_n)$ es un vector de $\mathbb{R}^n$.

Observación 1.3 *También podría pensarse que* $\mathbb{R}^n$ *es un espacio afín abstracto (sobre un espacio vectorial de dimensión* n*), en donde se ha destacado una referencia afín* $(o; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ *que permite identificar cada punto* $p = o + \sum_{i=1}^n p_i \vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ *con sus coordenadas* $(p_1, ..., p_n)$.

1.1.3. Espacio vectorial tangente en un punto de $\mathbb{R}^n$

Los vectores tangentes se reinterpretarán más adelante (2.1.2) como operadores de derivación direccional en el punto de apoyo.

Si $p \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, denominaremos **vector tangente en** p **correspondiente a** $\vec{\xi}$ al par $(p, \vec{\xi})$. Emplearemos la notación

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \vec{\xi}_p \equiv (p, \vec{\xi})$$

(el uso de la negrita $\boldsymbol{\xi}$ irá aumentando a medida que nos vayamos familiarizando con el concepto de vector tangente). Geométricamente, $\vec{\xi}_p$ se representa por el vector $\vec{\xi}$ "apoyado" en el punto p. Se denomina a $\vec{\xi}$ la **parte vectorial de** $\vec{\xi}_p$.

El conjunto $T_p\mathbb{R}^n := \{\vec{\xi}_p \mid \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n\}$ tiene estructura natural de espacio vectorial; para ello, basta con declarar que la biyección natural $\mathbb{R}^n \ni \vec{\xi} \mapsto \vec{\xi}_p \in T_p\mathbb{R}^n$ sea un isomorfismo lineal, es decir:

$$(\lambda\vec{\xi} + \mu\vec{\eta})_p = \lambda\vec{\xi}_p + \mu\vec{\eta}_p \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ , \ \vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n \ .$$

El conjunto $((\vec{e}_1)_p, ..., (\vec{e}_n)_p)$ constituye una base de $T_p\mathbb{R}^n$, que denominaremos **canónica** y que declaramos **positiva** (con ello orientamos $T_p\mathbb{R}^n$). Obviamente se tiene:

$$\vec{\xi}_p = \sum_{i=1}^n \xi_i (\vec{e}_i)_p \ .$$

El espacio $T_p\mathbb{R}^n$ se denomina **espacio (vectorial) tangente en** $p \in \mathbb{R}^n$.

1.1.4. Estructura euclídea de $\mathbb{R}^n$

Recordamos la estructura euclídea canónica de $\mathbb{R}^n$, primero como espacio vectorial y luego como espacio afín. Resultan particularmente importantes, de entre las aplicaciones lineales, las ortogonales (que preservan productos escalares) y las autoadjuntas (clave para analizar la curvatura de superficies, 3.3.1); y, de entre las afines, los movimientos.

(A) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se define el **producto escalar (euclídeo) canónico** $<,>$ por:

$$< \vec{\xi}, \vec{\eta} > := \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \quad , \quad \vec{\xi}, \, \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n \quad ;$$

además de *no-degenerado* (el único vector con producto nulo con todos los vectores es el cero), este producto escalar es *definido-positivo* (todo vector distinto de cero tiene producto positivo consigo mismo).

En $(\mathbb{R}^n, <,>)$ existen bases ortonormales. Puesto que $<,>$ es definido-positivo, la Observación 1.2 conduce a que, *para cualquier base b de cualquier subespacio de R^n*, se verifica:

$$\det\left(<,>_b\right) \; > 0 \quad . \tag{1}$$

Sea $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$. Dada una base *ortonormal* $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$, se verifica: $\vec{\xi} = \sum_{i=1}^{n} < \vec{a}_i, \vec{\xi} > \vec{a}_i$.

Observación 1.4 *Sea $(\mathbb{E}, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Dada una aplicación lineal $l : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, existe un único vector $\vec{\eta} \in \mathbb{E}$ que verifica (para todo $\vec{\xi} \in \mathbb{E}$): $l(\vec{\xi}) =< \vec{\eta}, \vec{\xi} >$. En efecto: para la existencia, tómese $\vec{\eta} := \sum_{i=1}^{n} l(\vec{a}_i)\vec{a}_i$ (para alguna base ortonormal $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$); para la unicidad, téngase en cuenta que el producto escalar es no-degenerado. Esta observación será relevante para la definición de gradiente (3.1.1).*

Se define la **norma de** $\vec{\xi}$ como $| \vec{\xi} | := \sqrt{< \vec{\xi}, \vec{\xi} >}$ (determinación positiva). Si $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ son ambos no nulos, se define el **coseno del ángulo** (no orientado) $\measuredangle(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \in [0, \pi]$ como:

$$\cos \measuredangle(\vec{\xi}, \vec{\eta}) := \frac{< \vec{\xi}, \vec{\eta} >}{| \vec{\xi} || \vec{\eta} |} \quad . \tag{2}$$

Cuando consideramos $\mathbb{R}^n$ con esta estructura natural de espacio vectorial euclídeo, lo denotaremos por $\mathbb{E}^n$. En el caso particular de $\mathbb{E}^3$, se define el **producto vectorial** como (recordar que la base canónica $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ es positiva y ortonormal):

$$\vec{\xi} \times \vec{\eta} := \quad \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix} \; , \; \vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{E}^3 \; .$$

Observación 1.5 *1. El módulo $\left|\vec{\xi} \times \vec{\eta}\right|$ representa el área del paralelogramo determinado por $\vec{\xi}$ y $\vec{\eta}$, esto es:*

$$\left|\vec{\xi} \times \vec{\eta}\right| = \sqrt{\det \begin{pmatrix} < \vec{\xi}, \vec{\xi} > & < \vec{\xi}, \vec{\eta} > \\ < \vec{\eta}, \vec{\xi} > & < \vec{\eta}, \vec{\eta} > \end{pmatrix}} \stackrel{(2)}{=} \underbrace{| \vec{\xi} |}_{base} \underbrace{| \vec{\eta} | \, | \, sen\measuredangle \, (\vec{\xi}, \vec{\eta}) \, |}_{altura} \quad . \tag{3}$$

En efecto *(ver [5], 1.4): Introduciendo el símbolo (con $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$)*

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} +1 & \text{, si } \{ijk\} \text{ es una permutación par de } \{123\} \\ -1 & \text{, si } \{ijk\} \text{ es una permutación impar de } \{123\} \\ 0 & \text{, si dos índices son iguales} \end{cases} ,$$

es inmediato comprobar que: $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{m=1}^{3} \varepsilon_{ijm} \vec{e}_m$. *De donde se sigue:*

$$<\vec{e}_i \times \vec{e}_j, \vec{e}_k \times \vec{e}_l> = \sum_{m=1}^{3} \varepsilon_{ijm}\varepsilon_{mkl} \stackrel{!}{=} \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} = \det \begin{pmatrix} <\vec{e}_i, \vec{e}_k> & <\vec{e}_i, \vec{e}_l> \\ <\vec{e}_j, \vec{e}_k> & <\vec{e}_j, \vec{e}_l> \end{pmatrix}$$

y, por la (cuatri)linealidad de ambos miembros, se obtiene:

$$<\vec{\xi} \times \vec{\eta}, \vec{\xi} \times \vec{\eta}> = \det \begin{pmatrix} <\vec{\xi}, \vec{\xi}> & <\vec{\xi}, \vec{\eta}> \\ <\vec{\eta}, \vec{\xi}> & <\vec{\eta}, \vec{\eta}> \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

2. *Sean* $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\chi} \in \mathbb{E}^3$. *Entonces se verifica:*

$$<\vec{\xi} \times \vec{\eta}, \vec{\chi}> = \det(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\chi}) \quad y \quad (\vec{\xi} \times \vec{\eta}) \times \vec{\chi} = <\vec{\xi}, \vec{\chi}> \vec{\eta} - <\vec{\eta}, \vec{\chi}> \vec{\xi} \tag{4}$$

En efecto *(ver [5], 1.4): La primera expresión se deduce inmediatamente de la definición de producto vectorial (de hecho, por la Observación 1.4 puede tomarse alternativamente como definición, más elegante, de producto vectorial). Para la segunda expresión (que pone de manifiesto que el producto vectorial no es asociativo), basta tener en cuenta que:*

$$(\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \times \vec{e}_k = \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{ijm}\varepsilon_{mkl}\vec{e}_l \stackrel{!}{=} \sum_{l=1}^{3} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})\vec{e}_l = <\vec{e}_i, \vec{e}_k> \vec{e}_j - <\vec{e}_j, \vec{e}_k> \vec{e}_i$$

y, por la (tri)linealidad de ambos miembros, se obtiene el resultado deseado $\blacksquare$

3. *Sean* $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\xi}', \vec{\eta}' \in \mathbb{E}^3$ *tales que* $\vec{\xi}$ *y* $\vec{\eta}$ *son linealmente dependientes de* $\vec{\xi}'$ *y* $\vec{\eta}'$, *esto es,* $(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = (\vec{\xi}', \vec{\eta}')A$, *con* A *una matriz* 2×2. *Entonces se verifica:*

$$\vec{\xi} \times \vec{\eta} = \det A \, (\vec{\xi}' \times \vec{\eta}') \tag{5}$$

En efecto: *Para todo* $\vec{\chi}$, *se tiene:*

$$<\vec{\xi} \times \vec{\eta}, \vec{\chi}> \stackrel{(4)}{=} \det(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\chi}) = \det \left((\vec{\xi}', \vec{\eta}', \vec{\chi}) \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det A \cdot \det(\vec{\xi}', \vec{\eta}', \vec{\chi}) \stackrel{(4)}{=} \det A \cdot <\vec{\xi}' \times \vec{\eta}', \vec{\chi}> \ ;$$

y, al ser el producto escalar no degenerado, el resultado se sigue $\blacksquare$

(B) Dada una matriz $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbb{R}(n,n)$, la condición para que el conjunto $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ constituya una base ortonormal de $\mathbb{E}^n$ es que $A^T A = I_n$ (basta comprobar que $A^T A$ no es sino la matriz de productos escalares de los elementos de $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$). En este caso la aplicación lineal (o la matriz) A se dice **ortogonal** (también se dice que A es una **isometría lineal**). El conjunto $O(n)$ de transformaciones ortogonales tiene estructura natural de grupo. Se sigue de la Observación 1.2 que $A \in O(n)$ *si y sólo si* A preserva el producto escalar, es decir:

$$< A\vec{\xi}, A\vec{\eta} >=< \vec{\xi}, \vec{\eta} > \ , \ \vec{\xi}, \ \vec{\eta} \ \in \mathbb{E}^n \ .$$

Si $A \in O(n)$, es $1 = det(I) = det(A^T A) = (detA)^2$, con lo que $detA = \pm 1$.

Si $A \in O(n)$ y $\det A = 1$, se dice que A es **ortogonal positiva**, o también que la base $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ es **ortonormal positiva**. El conjunto $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ es un subgrupo de $O(n)$ cuyos elementos se llaman **rotaciones**. En el caso de $\mathbb{E}^3$, es inmediato ver que $A \in SO(3)$ *si y sólo si* A preserva el producto escalar y el vectorial, es decir:

$$< A\vec{\xi}, A\vec{\eta} >=< \vec{\xi}, \vec{\eta} > \quad \text{y} \quad A\vec{\xi} \times A\vec{\eta} = A(\vec{\xi} \times \vec{\eta}) \quad , \ \forall \vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{E}^3$$

En efecto: Condición necesaria: suponiendo (i) $A \in O(3)$ y (ii) $\det A = 1$, se tiene:

$$< A\vec{\xi} \times A\vec{\eta}, \vec{\chi} > \overset{(4)}{=} \det(A\vec{\xi}, A\vec{\eta}, \vec{\chi}) \overset{(ii)}{=} \det(\vec{\xi}, \vec{\eta}, A^{-1}\vec{\chi}) \overset{(4)}{=}$$

$$=< \vec{\xi} \times \vec{\eta}, A^{-1}\vec{\chi} >) \overset{(i)}{=} < \vec{\xi} \times \vec{\eta}, A^T\vec{\chi} >=< A(\vec{\xi} \times \vec{\eta}), \vec{\chi} > \ .$$

Condición suficiente: suponiendo (i) $A \in O(3)$ y (iii) $A\vec{\xi} \times A\vec{\eta} = A(\vec{\xi} \times \vec{\eta})$, $\forall \vec{\xi}, \vec{\eta}$, se tiene:

$$\det A \cdot < \vec{\xi} \times \vec{\eta}, \vec{\chi} > \overset{(4)}{=} \det(A\vec{\xi}, A\vec{\eta}, A\vec{\chi}) \overset{(4)}{=} < A\vec{\xi} \times A\vec{\eta}, A\vec{\chi} > \overset{(iii)}{=}$$

$$=< A(\vec{\xi} \times \vec{\eta}), A\vec{\chi} > \overset{(i)}{=} < \vec{\xi} \times \vec{\eta}, \vec{\chi} > \quad \blacksquare$$

Observación 1.6 *También podría pensarse que $\mathbb{E}^n$ es un espacio vectorial euclídeo abstracto de dimensión n, en donde se ha destacado una base ortonormal positiva $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ que permite identificar los vectores con sus coordenadas. El producto escalar quedaría definido como antes, independientemente de la base ortonormal elegida; y lo propio ocurriría, si $n = 3$, con el producto vectorial, independientemente de la base ortonormal positiva elegida.*

(C) La siguiente proposición contiene resultados bien conocidos sobre aplicaciones lineales autoadjuntas, que necesitaremos más adelante (ver 3.3.2). Sea $(\mathbb{E}, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Dada una aplicación lineal $L : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, se define la **forma bilineal** B **asociada a** L por

$$B(\vec{\xi}, \vec{\eta}) :=< L\vec{\xi}, \vec{\eta} > \quad , \quad \vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{E}.$$

Se dice que L es **autoadjunta** si $< L\vec{\xi}, \vec{\eta} >=< \vec{\xi}, L\vec{\eta}>$, para todo $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{E}$. Se sigue que L *es autoadjunta si y sólo si* B *es simétrica.*

Proposición 1.7 *Sean $\mathbb{E}$ un espacio vectorial euclídeo, $L : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ una aplicación lineal y $B : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ su forma bilineal asociada. Para cada base b de $\mathbb{E}$, consideremos las matrices L_b, $<,>_b$ y B_b, representativas de L, $<,>$ y B en b (Observación 1.2). Entonces:*

1. *L es autoadjunta si y sólo si L_b es simétrica, en alguna (y toda) base b ortonormal.*
2. *L es autoadjunta si y sólo si $L_b =<,>_b^{-1} B_b$, en alguna (y toda) base b. En particular, si y sólo si $L_b = B_b$, en alguna (y toda) base b ortonormal.*
3. *L es autoadjunta si y sólo si existe una base ortonormal b formada por autovectores de L (las direcciones de esta base son únicas si y sólo si los autovalores son todos distintos). Lo que significa que $L_b(= B_b)$ es una matriz diagonal.*
4. *Si $B' : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, existe una única aplicación lineal $L' : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ que tiene a B' por forma bilineal asociada*

Demostración: Ver Apéndice 5.1.1 ■

(D) Por lo visto en 1.1.2, $\mathbb{E}^n$ posee una estructura canónica de espacio afín euclídeo. Si $p, q \in \mathbb{E}^n$, la **distancia** entre p y q es $d(p, q) :=| p - q |$.

Proposición 1.8 *Sean $\mathbb{E}$ un espacio afín euclídeo y $\psi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ una aplicación. La elección de un punto $o \in \mathbb{E}$ como origen permite identificar $\mathbb{E}$ con el espacio vectorial euclídeo asociado ($\vec{\xi} \equiv \xi - o$) y ψ con una aplicación en dicho espacio vectorial ($\psi(\vec{\xi}) \equiv \psi(\xi) - o$). Considérense las siguientes afirmaciones: (i) ψ es lineal, (ii) ψ es inyectiva, (iii) ψ preserva normas de vectores, (iv) ψ preserva distancias entre puntos, (v) ψ preserva productos escalares de vectores. Entonces se tienen las siguientes implicaciones:*

1. *$(i) + (iii) \Leftrightarrow (v)$*

2. *(i) + (iii) ⇒ (iv)*

3. *(i) + (iv) ⇒ (iii)*

4. *(iv) ⇒ (ii)*

5. *(iii) + (iv) ⇒ (v)*

Demostración. Ver Apéndice 5.1.2 ■

Observación 1.9 *Se sigue de lo anterior:*

1. *(v) ⇒ (i) + (ii) + (iii) + (iv). En particular, si ψ preserva productos escalares, ψ resulta lineal y además un isomorfismo.*

2. *No existen más implicaciones (no deducibles de las anteriores). Para cualquier presunta implicación adicional, buscar un contraejemplo entre las aplicaciones siguientes:* $\psi(\vec{\xi}) = \vec{\xi} + \overrightarrow{cte.}$, $\psi(\vec{\xi}) = (\left|\vec{\xi}\right|, 0, ..., 0)$, $\psi(\vec{\xi}) = 3\vec{\xi}$ *y finalmente* $\psi(\vec{\xi}) = (\xi_1, 0, ..., 0)$.

Un **movimiento** en $\mathbb{E}^n$ es una aplicación $\mathcal{A} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ que preserva distancias entre puntos, es decir, $d(\mathcal{A}(p), \mathcal{A}(q)) = d(p, q)$, $\forall p, q \in \mathbb{E}^n$. Se sigue de la Proposición 1.8(4) que los movimientos son inyectivos. Por otra parte, se prueba fácilmente que $\mathcal{A} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ es un movimiento *si y sólo si* puede expresarse en la forma:

$$\mathcal{A}(p) - o = A(p - o) + \vec{\xi} \tag{6}$$

($\mathcal{A}$ es por tanto una aplicación afín), donde $o \equiv (0, ..., 0)$, $A \in O(n)$ y $\vec{\xi} = \mathcal{A}(o) - o \in \mathbb{E}^n$ (obsérvese que, si se elige otro punto $\bar{o} \in \mathbb{E}^n$ como origen, se sigue: $\mathcal{A}(p) - \bar{o} = A(p - \bar{o}) + \vec{\eta}$, con *la misma* A y con $\vec{\eta} = \mathcal{A}(\bar{o}) - \bar{o}$).

En efecto (ver por ejemplo [9], Cap. 22, Teorema 1): La condición suficiente es inmediata, puesto que tanto las traslaciones (obvio) como las isometrías lineales (Proposición 1.8(2)) preservan distancias. Probemos la condición necesaria. Sea $\vec{\xi} \equiv \mathcal{A}(o) - o$. La aplicación $\mathcal{B} : \mathbb{E}^n \ni p \mapsto \mathcal{A}(p) - \vec{\xi} \in \mathbb{E}^n$ preserva obviamente distancias entre puntos; además, preserva normas de vectores, ya que se tiene

$$|\mathcal{B}(p) - o| \overset{\mathcal{B}(o)=o}{=} |\mathcal{B}(p) - \mathcal{B}(o)| =: d(\mathcal{B}(p), \mathcal{B}(o)) = d(p, o) := |p - o| \ .$$

Por la Proposición 1.8(5), $\mathcal{B}$ preserva productos escalares; y, por la Proposición 1.8(1), $\mathcal{B}$ es lineal. De donde se sigue: $\mathcal{B}(p) - o = A(p - o)$, con $A \in O(n)$, y se concluye: $\mathcal{A}(p) - o = A(p - o) + \vec{\xi}$ ■

De lo anterior se concluye que: (i) los movimientos son biyectivos, donde la inversa $\mathcal{A}^{-1}$ de $\mathcal{A}$ viene dada por: $\mathcal{A}^{-1}(p) - o = A^{-1}(p - o) - A^{-1}\vec{\xi}$; y (ii) se verifica

$$\mathcal{A}(q) - \mathcal{A}(p) = A(q - p) \quad , \quad p, q \in \mathbb{E}^n \ . \tag{7}$$

Un movimiento se dice **directo** si la parte ortogonal A del mismo es una rotación, esto es, si $A \in SO(n)$.

Para cada $p \in \mathbb{E}^n$, el espacio $T_p\mathbb{E}^n$ tiene estructura natural (o *canónica*) de espacio vectorial euclídeo, definiendo, para todo $\vec{\xi}_p, \vec{\eta}_p \in T_p\mathbb{E}^n$,

$$< \vec{\xi}_p, \vec{\eta}_p > := < \vec{\xi}, \vec{\eta} > \ ; \tag{8}$$

si, además, $n = 3$, se define:

$$\vec{\xi}_p \times \vec{\eta}_p \ := (\vec{\xi} \times \vec{\eta})_p \ . \tag{9}$$

Observación 1.10 *A partir de aquí, se puede trabajar en el nivel de abstracción sugerido en las observaciones 1.1, 1.3 y 1.6, y suponer que $\mathbb{E}^n$ es un espacio afin euclídeo abstracto (sobre un espacio vectorial euclídeo de dimensión n), en donde se ha destacado una referencia afín euclídea positiva $(o\,; \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ que permite identificar los puntos y vectores con sus coordenadas.*

1.2. CURVAS Y CAMPOS A LO LARGO DE CURVAS

1.2.1. Funciones diferenciables de variable real. Curvas

> Nuestras curvas no son subconjuntos sino aplicaciones. La relación entre las derivadas de orden k de dos curvas congruentes es independiente de k.

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dirá **diferenciable** si posee derivadas continuas de todos los órdenes (esto es, si es de clase C^∞). Se denotarán por $\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \ldots, \frac{d^kf}{dt^k}, \ldots$ sus derivadas sucesivas. Si el intervalo I no es abierto, se dirá que $f : I \to \mathbb{R}$ es **diferenciable** si existen un intervalo abierto $\tilde{I} \supset I$ y una **extensión** $\tilde{f}$ de f a $\tilde{I}$ (esto es, una función $\tilde{f} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}\mid_I = f$) diferenciable.

El conjunto $\mathfrak{F}(I)$ de funciones diferenciables $f : I \to \mathbb{R}$ tiene estructura natural de anillo (pero no de cuerpo: las funciones que se anulan en algún punto no poseen inversa).

Una aplicación $\alpha : I \ni t \mapsto (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ se dirá **diferenciable** si cada componente $\alpha_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$ es una función diferenciable. En tal caso, la **derivada de** α es la aplicación $\frac{d\alpha}{dt} : I \ni t \mapsto (\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t)) \in \mathbb{R}^n$. Se denotarán por $\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \ldots, \frac{d^k\alpha}{dt^k}, \ldots$ las derivadas sucesivas de α.

Cuando una aplicación diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ se considera aplicación sobre $\mathbb{R}^n$ como espacio afín se llama **curva**. Cuando se considera aplicación sobre $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial, la denotaremos por $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^n$ y se denomina **curva vectorial**. La variable en I se denomina **parámetro de la curva**. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva, su derivada $\frac{d\alpha}{dt} : I \to \mathbb{R}^n$ es de manera natural una curva vectorial.

Ejemplo 1.11 *Curvas:* (a) $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t, 0) \in \mathbb{R}^2$ *(imagen, recta);* (b) $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto (p_1 + r\cos t, p_2 + r sen t) \in \mathbb{R}^2$ *(no inyectiva; imagen, circunferencia de centro p y radio r);* (c) $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t^3, t^2) \in \mathbb{R}^2$ *(imagen con "pico");* (d) $\alpha : [-2\pi, 2\pi] \ni t \mapsto (p_1 + t\cos t, p_2 + t sen t) \in \mathbb{R}^2$ *(no inyectiva; imagen, "cardioide");* (e) *la aplicación* $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t, |t|) \in \mathbb{R}^2$ *no es una curva;* (f) $\alpha : (-\pi, \pi) \ni t \mapsto (sen t, sen 2t) \in \mathbb{R}^2$ *(inyectiva; imagen, "el ocho").*

Observación 1.12 *Definimos pues las curvas como aplicaciones; la imagen de una curva (subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*) es sólo uno de los "ingredientes" de ésta. Así, cuando a veces denotemos a una curva por su imagen (recta, circunferencia, catenaria, cicloide,...), se tratará de un abuso de lenguaje.*

En el Ejercicio 6.1.21d se propone una definición alternativa de curva plana, a saber: subconjunto de $\mathbb{R}^2$ *que admite una "parametrizacón (local, 1-dimensional)" en torno a cada uno de sus puntos. Esta definición sería análoga a la que más adelante (2.2.1) daremos para superficies de* $\mathbb{R}^3$*. Sin embargo, adoptar aquí esta definición de curva supondría dejar fuera de consideración subconjuntos con "picos", o con "autointersecciones", o del tipo "el ocho" (Ejercicio 6.1.22), lo que no parece razonable. Después de todo, el estudio de muchas curvas tiene su origen en la mecánica, donde el parámetro es el tiempo, las curvas están "para ser recorridas" (Ejercicios 6.1.18 y 6.1.19) y las citadas peculiaridades no son en absoluto rechazables.*

Proposición 1.13 *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *una curva y sea* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación afín (en particular, un movimiento si consideramos* $\mathbb{R}^n$ *como espacio euclídeo, en cuyo caso la curva* $\mathcal{A} \circ \alpha$ *se denomina* ***congruente con*** α*) con parte lineal* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*. Entonces se verifica:*

$$\frac{d^k(\mathcal{A} \circ \alpha)}{dt^k} = A\left(\frac{d^k\alpha}{dt^k}\right) \quad , \; k = 1, 2, ...$$

Demostración. De $\mathcal{A} \circ \alpha - o = A(\alpha - o) + \vec{\xi}$, con $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, se sigue:

$$\frac{d(\mathcal{A} \circ \alpha)}{dt}(t) = \frac{d(A(\alpha - o))}{dt}(t) = A(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}) = A(\frac{d\alpha}{dt}(t)) \; .$$

Y así sucesivamente ■

El conjunto de curvas vectoriales $I \to \mathbb{R}^n$ definidas en un intervalo I dado tiene estructura natural de $\mathbb{R}$-espacio vectorial y de $\mathfrak{F}(I)$-módulo.

Sean $\vec{V}, \vec{W} : I \to \mathbb{R}^n$ dos curvas vectoriales y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces se verifica:

$$\frac{d(\vec{V}+\vec{W})}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{W}}{dt} \quad , \quad \frac{d(f\vec{V})}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{V} + f\frac{d\vec{V}}{dt} \ .$$

Si consideramos $\mathbb{R}^n$ como espacio euclídeo (esto es, $\mathbb{E}^n$), se verifica también:

$$\frac{d < \vec{V}, \vec{W} >}{dt} =< \frac{d\vec{V}}{dt}, \vec{W} > + < \vec{V}, \frac{d\vec{W}}{dt} > ;$$

y si, además, $n = 3$, se tiene:

$$\frac{d(\vec{V} \times \vec{W})}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} \times \vec{W} + \vec{V} \times \frac{d\vec{W}}{dt} \ .$$

1.2.2. Campos a lo largo de una curva. Velocidad y aceleraciones

Los campos de vectores a lo largo de una curva resultarán (1.4.4) herramientas utilísimas en el estudio de ésta.

(A) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva. Un **campo (diferenciable de vectores) V a lo largo de** α viene determinado por una curva vectorial (con el mismo parámetro) $\vec{V} : I \to \mathbb{R}^n$ y se define como la aplicación:

$$\mathbf{V} := \vec{V}_\alpha : I \ni t \mapsto \left(\vec{V}(t)\right)_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^{n} V_i(t)(\vec{e}_i)_{\alpha(t)} \ \in T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n \ .$$

Se denomina a $\vec{V}$ la **parte vectorial de V**. Las funciones diferenciables $V_i : I \to \mathbb{R}$ reciben el nombre de **componentes de** $\vec{V}$ *(*y **de V***)*.

Ejemplo 1.14 *(conviene hacer un dibujo) (a) Sobre una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ arbitraria, se da el campo $\mathbf{V}(t) = (0,1)_{\alpha(t)}$ (campo "constante", "vertical" y unitario), con parte vectorial $\vec{V}(t) = (0,1)$. (b) Sobre la curva $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto (0,t) \in \mathbb{R}^2$, se da el campo $\mathbf{V}(t) = (1,t)_{\alpha(t)}$, con parte vectorial $\vec{V}(t) = (1,t)$. (c) Sobre la curva $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto (p_1 + \cos t, p_2 + sent) \in \mathbb{R}^2$, se da el campo $\mathbf{V}(t) = (\alpha(t) - p)_{\alpha(t)}$ (normal unitaria "exterior" a la circunferencia* $\operatorname{Im}\alpha$*), con parte vectorial $\vec{V}(t) = \alpha(t) - p$.*

El conjunto $\mathfrak{X}_\alpha$ de campos a lo largo de α constituye un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y un $\mathfrak{F}(I)$-módulo.

Considerando $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial euclídeo (esto es, $\mathbb{E}^n$) y dados $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}_\alpha$, se define $< \mathbf{V}, \mathbf{W} > \in \mathfrak{F}(I)$ por:

$$< \mathbf{V}, \mathbf{W} > (t) := < \mathbf{V}(t), \mathbf{W}(t) > \stackrel{(8)}{=} < \vec{V}(t), \vec{W}(t) > \quad ;$$

y si, además, $n = 3$, se define $\mathbf{V} \times \mathbf{W} \in \mathfrak{X}_\alpha$ por:

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{W})(t) := \mathbf{V}(t) \times \mathbf{W}(t) \stackrel{(9)}{=} (\vec{V}(t) \times \vec{W}(t))_{\alpha(t)} \ .$$

Dado un campo $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha$, definimos la **derivada de V** como el campo

$$\frac{D\mathbf{V}}{dt} := \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{dV_i}{dt} (\vec{e}_i)_\alpha \in \mathfrak{X}_\alpha \quad ;$$

lo que implica, en particular, que los campos $t \mapsto (\vec{e}_i)_{\alpha(t)}$ $(i = 1, ..., n)$ poseen derivada nula (volveremos sobre esta cuestión en la Observación 2.35*).

Resulta entonces inmediato ver que las reglas formales establecidas en 1.2.1 para $\vec{V}$ y $\vec{W}$ siguen siendo válidas ahora cuando $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ son campos (a lo largo de α)

$$\frac{D(\mathbf{V} + \mathbf{W})}{dt} = \frac{D\mathbf{V}}{dt} + \frac{D\mathbf{W}}{dt} \quad , \quad \frac{D(f\mathbf{V})}{dt} = \frac{df}{dt}\mathbf{V} + f\frac{D\mathbf{V}}{dt} \ , \tag{10}$$

así como (si consideramos $\mathbb{R}^n$ como espacio euclídeo, esto es, $\mathbb{E}^n$)

$$\frac{d < \mathbf{V}, \mathbf{W} >}{dt} = < \frac{D\mathbf{V}}{dt}, \mathbf{W} > + < \mathbf{V}, \frac{D\mathbf{W}}{dt} > \ , \tag{11}$$

y también (si $n = 3$)

$$\frac{D(\mathbf{V} \times \mathbf{W})}{dt} = \frac{D\mathbf{V}}{dt} \times \mathbf{W} + \mathbf{V} \times \frac{D\mathbf{W}}{dt} \quad . \tag{12}$$

(B) Se define la **velocidad de una curva** $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ como el campo

$$\alpha' := \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_i}{dt} (\vec{e}_i)_\alpha \ \in \mathfrak{X}_\alpha \ .$$

Y se define la **aceleración de** α como el campo

$$\alpha'' := \frac{D\alpha'}{dt} = \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} \right)_\alpha \in \mathfrak{X}_\alpha \ ;$$

en general, el campo $\alpha^{(k)} := \frac{D\alpha^{(k-1)}}{dt} = \left(\frac{d^k\alpha}{dt^k} \right)_\alpha \in \mathfrak{X}_\alpha$ $(k \geq 2)$ se denomina **$(k-1)$-ésima aceleración de la curva** α.

Ejemplo 1.15 *(conviene hacer un dibujo)* (*a*) *Sea la curva* $\alpha(t) := (t^3, t^2) \in \mathbb{R}^2$*; su velocidad es* $\alpha'(t) = (3t^2, 2t)_{\alpha(t)}$*, con parte vectorial* $\frac{d\alpha}{dt}(t) = (3t^2, 2t)$*; y su aceleración es* $\alpha''(t) = (6t, 2)_{\alpha(t)}$*, con parte vectorial* $\frac{d^2\alpha}{dt^2}(t) = (6t, 2)$*.* (*b*) *Sea la curva* $\alpha(t) := (p_1 + \cos t, p_2 + sent) \in \mathbb{R}^2$*; su velocidad es* $\alpha'(t) = (-sent, \cos t)_{\alpha(t)}$*, con parte vectorial* $\frac{d\alpha}{dt}(t) = (-sent, \cos t)$*; y su aceleración es* $\alpha''(t) = -(\cos t, sent)_{\alpha(t)}$ *(normal unitaria "interior" a la circunferencia* $\mathrm{Im}\,\alpha$*), con parte vectorial* $\frac{d^2\alpha}{dt^2}(t) = -(\cos t, sent)$*.*

1.2.3. Vectores tangentes y velocidades de curvas

> Interpretar los vectores tangentes como velocidades de curvas por el punto de apoyo es el primer paso para hacer de éstos algo "analíticamente útil" (ver más adelante, 2.1.2).

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva tal que $0 \in I$ y $\alpha(0) = p$. Se dice entonces que α es una **curva por (el punto)** $p \in \mathbb{R}^n$.

Si S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que $p \in S$, una **curva por** p **en** S es una curva por p cuya imagen (y la de alguna extensión diferenciable a un intervalo abierto, si el dominio de la curva no lo es) está contenida en S. Denotaremos por $C(p, S)$ a la familia de dichas curvas.

Fijemos $p \in \mathbb{R}^n$. Si $\alpha \in C(p, \mathbb{R}^n)$, el vector $\alpha'(0)$ pertenece a $T_p\mathbb{R}^n$. Además, para cada $\vec{\xi}_p \in T_p\mathbb{R}^n$, la curva $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto p + t\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ verifica $\alpha'(0) = \vec{\xi}_p$. De donde se concluye:

$$T_p\mathbb{R}^n = \{\alpha'(0) \mid \alpha \in C(p, \mathbb{R}^n)\} .$$

1.3. PARAMETRIZACIONES DE CURVAS REGULARES

1.3.1. Parámetro de una curva

> La regla de la cadena proporciona la relación entre la derivada de un campo reparametrizado y la reparametrización de la derivada del campo.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva. Como ya dijimos antes, la variable en I se denomina parámetro de α.

Se dice que un difeomorfismo $f : J \ni s \mapsto t = f(s) \in I$ entre intervalos de $\mathbb{R}$ (necesariamente es $\frac{df}{ds} \neq 0$ siempre, ver 2.1.4) **preserva la orientación** si $\frac{df}{ds} > 0$. Si $\frac{df}{ds} < 0$, se dice que **invierte la orientación**. Por ejemplo, el difeomorfismo $f : (-b, -a) \ni s \mapsto t = -s \in (a, b)$ invierte la orientación.

Aplicando la bien conocida regla de la cadena (2.1.3) a la composición de funciones de la forma $J \xrightarrow{f} I \to \mathbb{R}^n$, resulta:

Proposición 1.16 *Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva y $f : J \to I$ un difeomorfismo entre intervalos. Entonces:*

1. *Se verifica:*
$$(\alpha \circ f)' = \frac{df}{ds}(\alpha' \circ f) \ .$$

2. *Dado $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha$, se verifica:*
$$\frac{D(\mathbf{V} \circ f)}{ds} = \frac{df}{ds}(\frac{D\mathbf{V}}{dt} \circ f) \ .$$

3. *Se verifica:*
$$(\alpha \circ f)'' = \frac{d^2 f}{ds^2}\ (\alpha' \circ f) + (\frac{df}{ds})^2\ (\alpha'' \circ f)$$

Demostración. Probemos 1 y 2. Se tiene:

$$(\alpha \circ f)' := \left(\frac{d(\alpha \circ f)}{ds}\right)_{\alpha \circ f} \overset{cadena}{=} \left(\frac{df}{ds}(\frac{d\alpha}{dt} \circ f)\right)_{\alpha \circ f} =: \frac{df}{ds}(\alpha' \circ f)$$

y también

$$\frac{D(\mathbf{V} \circ f)}{ds} := \left(\frac{d(\vec{V} \circ f)}{ds}\right)_{\alpha \circ f} \overset{cadena}{=} \left(\frac{df}{ds}(\frac{d\vec{V}}{dt} \circ f)\right)_{\alpha \circ f} =: \frac{df}{ds}(\frac{D\mathbf{V}}{dt} \circ f) \ .$$

Y probemos 3. Se tiene:

$$(\alpha \circ f)'' \overset{Aptdo.\ 1}{=} \frac{D\left(\frac{df}{ds}\ (\alpha' \circ f)\right)}{ds} \overset{(10)}{=} \frac{d^2 f}{ds^2}\ (\alpha' \circ f) + \frac{df}{ds}\ \frac{D(\alpha' \circ f)}{ds} \overset{Aptdo.\ 2}{=}$$
$$= \frac{d^2 f}{ds^2}\ (\alpha' \circ f) + (\frac{df}{ds})^2\ (\alpha'' \circ f) \quad \blacksquare$$

Un difeomorfismo $f : J \to I$, que permite pasar de α a $\alpha \circ f$, se denomina un **cambio de parámetro de** α; la nueva curva $\alpha \circ f : J \to \mathbb{R}^n$ se denomina una **reparametrización de** α. Tanto la relación de "ser reparametrización" como la de "ser reparametrización con la misma orientación" son de equivalencia sobre la familia de curvas y definen, por paso al cociente, los conceptos de **trayectoria** (imagen de la curva) y de **trayectoria orientada** (imagen dotada de un sentido de recorrido).

Ejemplo 1.17 *Las curvas $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t, 0) \in \mathbb{R}^2$ y $\beta : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t^3, 0) \in \mathbb{R}^2$ poseen la misma trayectoria pero no son reparametrización una de la otra (sí lo serían si el dominio de ambas fuera $\mathbb{R}^+$).*

1.3.2. Longitud de una curva

Nuestras curvas resultan (si están definidas en intervalos cerrados) rectificables y poseen, por tanto, longitud.

Consideremos $\mathbb{R}^n$ como espacio euclídeo (esto es, $\mathbb{E}^n$). Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ una curva. Suponiendo que $\mid \alpha' \mid : I \to \mathbb{R}$ sea integrable(-Riemann) (ver 2.1.5), se llama **longitud de** α a la integral

$$L(\alpha) := \int_I \mid \alpha' \mid$$

Observación 1.18 *1. Si $I = [a,b]$, siempre es $\mid \alpha' \mid$ integrable (Observación 2.7(3)). Si $I = [a,b)$, resulta que $\mid \alpha' \mid$ es integrable si y sólo si existe el límite (finito) $\lim_{x\to b^-} \int_{[a,x]} \mid \alpha' \mid$, en cuyo caso la integral coincide con dicho límite (ver 2.1.5). Obsérvese que las curvas $\alpha : (0,1] \ni t \mapsto \ln t \in \mathbb{E}^1$ y $\beta : (-\infty, 3) \ni t \mapsto \frac{1}{3-t} \in \mathbb{E}^1$ no poseen longitud.*

*2. Una aplicación continua $\alpha : I = [a,b] \to \mathbb{E}^n$ se dice **rectificable** si existe un número $a > 0$ que acota superiormente la longitud de cualquier poligonal inscrita en la imagen $\operatorname{Im}\alpha$ (ver [2], Definición 8.24). Condición necesaria y suficiente para que α sea rectificable es ([2], Teorema 8.25) que cada componente $\alpha_i : I = [a,b] \to \mathbb{E}^1$ $(i = 1, ..., n)$ sea de variación acotada. Para ello es a su vez suficiente ([2], Teorema 8.6) que cada $\frac{d\alpha_i}{dt}$ exista y esté acotada en (a,b). Así pues, si nuestras curvas (diferenciables) están definidas en intervalos cerrados, son rectificables. Para convencerse de que (en tal caso) nuestra definición de longitud coincide con la habitual para aplicaciones rectificables (esto es, el supremo de las longitudes de las poligonales inscritas), ver [5], 1.3, Ejercicio 8 y [1], 2.3, Teorema 13.*

Proposición 1.19 *Sean $\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}^n$ una curva y $f : J = [c,d] \to [a,b]$ un cambio de parámetro de α. Entonces*

$$L(\alpha \circ f) = L(\alpha) .$$

Demostración. Es consecuencia directa de la Proposición 1.16(1) y de la fórmula del cambio de variable en integrales de Riemann (Teorema 2.11):

$$\int_{[c,d]} \mid (\alpha \circ f)' \mid \overset{\text{Prop. 1.16(1)}}{=} \int_{[c,d]} \mid \alpha' \circ f \mid \mid \frac{df}{ds} \mid \overset{\text{Teor. 2.11}}{=} \int_{[a,b]} \mid \alpha' \mid \quad \blacksquare$$

1.3.3. Curva regular. Parametrización por la longitud de arco

> Toda curva regular es reparametrizable por la longitud de arco. En general, la dificultad en encontrar una tal reparametrización no está tanto en hallar el nuevo intervalo, o en encontrar la función que pasa del antiguo intervalo al nuevo (lo que supone calcular una integral), sino en invertir esta función.

Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ se dice **regular en** $t_0 \in I$ si $\alpha'(t_0) \neq \vec{0}_{\alpha(t_0)}$; en tal caso, t_0 posee un entorno en el que α es regular. Se dice que α es **regular** si es regular en todo $t \in I$. Se sigue de la Proposición 1.16(1) que, si $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es regular y $f : J \to I$ es un cambio de parámetro de α, entonces $\alpha \circ f$ es también regular.

Conviene distinguir, de entre los objetos matemáticos asociados a una curva regular, los que dependen sólo de la trayectoria y los que dependen de la parametrización regular concreta. Así, por ejemplo, el campo α' depende obviamente de la parametrización, mientras que el campo $\alpha'/\mid \alpha' \mid$ depende sólo de la trayectoria orientada, y el conjunto de rectas afines tangentes a α depende sólo de la trayectoria.

Se dice que una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ está **parametrizada por la longitud de arco** si verifica la condición $\mid \alpha' \mid = 1$. En tal caso se tiene (y ello es la razón del nombre): $L(\alpha \mid_{[a,b]}) = b - a,\ \forall a, b \in I\ (a < b)$. Además se verifica: $< \alpha', \alpha'' > \overset{(11)}{=} 0$ (esto es, velocidad y aceleración son mutuamente ortogonales).

Proposición 1.20 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ una curva regular y sea $t_0 \in I$. La aplicación diferenciable $g : I \ni t \mapsto \int_{[t_0,t]} \mid \alpha' \mid \in \mathbb{R}$ verifica $\frac{dg}{dt} = \mid \alpha' \mid > 0$ (con lo que posee inversa sobre su imagen $J \equiv g(I)$) y la aplicación inversa $g^{-1} : J \to I$ es un cambio de parámetro de α. Además, la curva $\alpha \circ g^{-1} : J \to \mathbb{E}^n$ está parametrizada por la longitud de arco.*

Demostración: Llamando s a la variable en J, se tiene:

$$\mid (\alpha \circ g^{-1})'(s) \mid \overset{\text{Prop. } 1.16(1)}{=} \mid \frac{dg^{-1}}{ds}(s) \mid \mid \alpha'(g^{-1}(s)) \mid = \frac{1}{\mid \alpha'(t) \mid} \mid \alpha'(t) \mid = 1 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 1.21 *La curva $\alpha : (0,1) \ni t \mapsto (3\cos(\frac{t}{2}), 3sen(\frac{t}{2}), 5t) \in \mathbb{E}^3$ (cuya imagen es una hélice) verifica $|\alpha'(t)| = \frac{\sqrt{109}}{2}$. Haciendo $s \equiv g(t) := \int_{[1/2,t]} \mid \alpha' \mid = \frac{\sqrt{109}}{2}(t - \frac{1}{2})$, se obtiene: $t = \frac{2s}{\sqrt{109}} + \frac{1}{2}$. La curva $\alpha \circ g^{-1} : (\frac{-\sqrt{109}}{4}, \frac{\sqrt{109}}{4}) \ni s \mapsto (3\cos(\frac{s}{\sqrt{109}} + \frac{1}{4}), 3sen(\frac{s}{\sqrt{109}} + \frac{1}{4}), \frac{10s}{\sqrt{109}} + \frac{1}{4}) \in \mathbb{E}^3$ es una reparametrización de α por la longitud de arco.*

1.4. REFERENCIA MOVIL DE FRENET

1.4.1. Referencia móvil. Curva alabeada

> Toda curva admite referencias móviles. Si sus $n-1$ primeras derivadas (curvas vectoriales) son linealmente independientes, la curva se dice alabeada, propiedad que sobrevive a las reparametrizaciones.

Una **referencia móvil (a lo largo) de una curva** $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ es un conjunto ordenado $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_n)$ de campos a lo largo de α que, para cada $t \in I$, da lugar a una base de $T_{\alpha(t)}\mathbb{E}^n$. Y se dice que $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_n)$ es una **referencia móvil euclídea de** α si, para cada $t \in I$, esta base es *ortonormal positiva.*

Obsérvese que, de acuerdo con lo dicho en 1.2.2, se tiene: $\mathbf{E}_i = (\vec{E}_i)_\alpha$, donde $\vec{E}_i : I \to \mathbb{E}^n$ es cierta curva vectorial ($i = 1, ..., n$). El que la base $(\mathbf{E}_1(t), ..., \mathbf{E}_n(t))$ de $T_{\alpha(t)}\mathbb{E}^n$ sea ortonormal positiva equivale (recordar 1.1.4) a que, escribiendo los $\vec{E}_i(t)$ en la base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$, la matriz $A(t) \equiv (\vec{E}_1(t)\ , ...,\ \vec{E}_n(t))$ verifique: $A^T(t)A(t) = I_n$ y $\det A(t) = 1$.

Una curva $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ $(n \geq 2)$ se dice **alabeada en** $t_0 \in I$ si el conjunto de $n-1$ vectores $(\alpha'(t_0), \ldots, \alpha^{(n-1)}(t_0))$ de $T_{\alpha(t_0)}\mathbb{E}^n$ es linealmente independiente; en tal caso, t_0 posee un entorno de valores en I en los que α es alabeada. Se dice que α es **alabeada** si es alabeada en todo $t \in I$. Toda curva alabeada es regular. Aplicando repetidamente la regla de la cadena se comprueba que, para una curva, *la propiedad de ser alabeada se mantiene bajo reparametrizaciones.*

> **En efecto:** Sea $f : J \to I$ un cambio de parámetro de α (por tanto $\frac{df}{ds}$ no se anula nunca). De la Proposición 1.16(1,3) se sigue que $((\alpha \circ f)', (\alpha \circ f)'')$ son linealmente independientes si y sólo si lo son (α', α''). Y así sucesivamente ■

1.4.2. Referencia de Frenet

> Condición necesaria y suficiente para que una curva sea alabeada es que admita referencias de Frenet.

Una **referencia de Frenet de una curva** $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ $(n \geq 2)$ es una referencia móvil euclídea $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_n)$ de α que verifica:

$$Sub(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_k) = Sub(\alpha', ..., \alpha^{(k)}) \quad , \quad k = 1, \ldots n-1 \quad .$$

El resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 1.22 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ una curva. Entonces se tiene:*

1. *Si α admite una referencia de Frenet, entonces necesariamente α es alabeada.*

2. *Si α es alabeada, entonces α admite una referencia de Frenet, que puede definirse inductivamente de la siguiente forma:*

   a) *Se define el campo $\mathbf{E}_1 \in \mathfrak{X}_\alpha$ como*

   $$\mathbf{E}_1 := \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{\mid \boldsymbol{\varepsilon}_1 \mid} \ , \ con\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 := \alpha' \quad .$$

   b) *Supuesto que se han definido $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_{k-1})$, con $k = 2, ..., n-1$, se define*

   $$\mathbf{E}_k := \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_k}{\mid \boldsymbol{\varepsilon}_k \mid} \ , \ con\ \boldsymbol{\varepsilon}_k := \alpha^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} < \mathbf{E}_i, \alpha^{(k)} > \mathbf{E}_i \quad .$$

   c) *Supuesto que se han definido $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_{n-1})$, queda determinado un único $\mathbf{E}_n$ tal que $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_n)$ es una referencia de Frenet de α.*

3. *La referencia de Frenet de α construída en el apartado 2 es la única que verifica además la siguiente propiedad:*

$$< \mathbf{E}_k, \alpha^{(k)} > \, > 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, n-1 \ . \tag{13}$$

Demostración. Los apartados 1 y 2 son inmediatos. Probemos 3:

Obviamente la referencia $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_n)$ de Frenet de α construída en 2 verifica (13), ya que, para $k = 1, \ldots, n-1$, se tiene:

$$< \mathbf{E}_k, \alpha^{(k)} > = < \mathbf{E}_k, \left(\mid \boldsymbol{\varepsilon}_k \mid \mathbf{E}_k + \sum_{i=1}^{k-1} < \mathbf{E}_i, \alpha^{(k)} > \mathbf{E}_i \right) > = \mid \boldsymbol{\varepsilon}_k \mid > 0 \, .$$

Sea $(\mathbf{F}_1, ..., \mathbf{F}_n)$ otra referencia de Frenet de α que verifica (13). Entonces necesariamente $\mathbf{E}_1 = \mathbf{F}_1$. Fijemos $k = 2, ..., n-1$ y supongamos que $\mathbf{E}_i = \mathbf{F}_i$, para $i = 1, \ldots k-1$; de la definición de referencia de Frenet se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} < \mathbf{E}_i, \alpha^{(k)} > \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{k-1} < \mathbf{E}_i, \alpha^{(k)} > \mathbf{E}_i + < \mathbf{E}_k, \alpha^{(k)} > \mathbf{E}_k \\ \alpha^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} < \mathbf{F}_i, \alpha^{(k)} > \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{k-1} < \mathbf{E}_i, \alpha^{(k)} > \mathbf{E}_i + < \mathbf{F}_k, \alpha^{(k)} > \mathbf{F}_k \end{array} \right. \ , \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ < \mathbf{E}_k, \alpha^{(k)} > \mathbf{E}_k = < \mathbf{F}_k, \alpha^{(k)} > \mathbf{F}_k \ ;$$

al ser $\mathbf{E}_k$ y $\mathbf{F}_k$ unitarios y (por (13)) $< \mathbf{E}_k, \alpha^{(k)} >$ y $< \mathbf{F}_k, \alpha^{(k)} >$ positivos, se deduce que $\mathbf{E}_k = \mathbf{F}_k$. Finalmente, supongamos que $\mathbf{E}_i = \mathbf{F}_i$, para $i = 1, \ldots n-1$; se concluye que $\mathbf{E}_n = \mathbf{F}_n$ $\blacksquare$

Observación 1.23 *1. Por lo que respecta al subconjunto $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_{n-1})$, el método de construcción dado en el apartado 2 no es sino el método de ortonormalización de Schmidt aplicado a $(\alpha', \ldots, \alpha^{(n-1)})$.*

2. Denominaremos a la única referencia de Frenet de α que verifica la propiedad (13) ***la referencia de Frenet de*** *α. En lo sucesivo, no se considerarán otras referencias de Frenet (hay en total 2^{n-1}) de α.*

1.4.3. Fórmulas de Frenet. Curvaturas

El interés de las referencias de Frenet estriba en que las derivadas de sus campos se expresan con ayuda, no de n^2 funciones, sino tan sólo de $n-1$ funciones, las curvaturas.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ una curva alabeada y sea $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_n)$ *su* referencia de Frenet. Si $\mathbf{V}$ es un campo a lo largo de α, se tiene: $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n < \mathbf{E}_i, \mathbf{V} > \mathbf{E}_i$; en particular $(\forall j = 1, ..., n)$:

$$\frac{D\mathbf{E}_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}\mathbf{E}_i \quad , \quad \text{con } \omega_{ij} :=< \mathbf{E}_i, \frac{D\mathbf{E}_j}{dt} > \ .$$

Ahora bien, se tiene $(\forall j = 1, ..., n-1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_j \in Sub(\alpha', \ldots, \alpha^{(j)}) \ ; \ \Rightarrow \ \frac{D\mathbf{E}_j}{dt} \in Sub(\alpha', \ldots, \alpha^{(j+1)}) \ ; \ \Rightarrow \ \omega_{ij} = 0, \text{ si } i > j+1 \\ < \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j >= cte, \ \ \forall i \ \ ; \ \ \Rightarrow \ \ 0 = \frac{d< \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j >}{dt} \stackrel{(11)}{=} \omega_{ji} + \omega_{ij}, \ \forall i \end{array} \right.$$

Se deduce que las anteriores expresiones para las $\frac{D\mathbf{E}_j}{dt}$ pueden escribirse en la forma matricial:

$$\left(\frac{D\mathbf{E}_1}{dt}, ..., \frac{D\mathbf{E}_n}{dt}\right) = (\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_n) \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{21} & \cdots & 0 \\ \omega_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -\omega_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & \omega_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (14)$$

y se conocen por el nombre de **fórmulas de Frenet**.

Observación 1.24 *Se verifica: $\omega_{i+1,i} > 0, \ \ i = 1, ..., n-2$. Unicamente $\omega_{n,n-1}$ puede tener cualquier signo.*

En efecto: por definición, cualquier referencia de Frenet $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_n)$ de α verifica $(\forall i = 1, ..., n)$:

$$\alpha^{(i)} = \sum_{j=1}^{i-1} < \mathbf{E}_j, \alpha^{(i)} > \mathbf{E}_j + < \mathbf{E}_i, \alpha^{(i)} > \mathbf{E}_i \equiv \mathbf{V}_{i-1} + \varphi_i \mathbf{E}_i \qquad (*) \ ,$$

con $\mathbf{V}_{i-1} \in Sub(\alpha', \ldots, \alpha^{(i-1)})$ *y* $\varphi_i \in \mathfrak{F}(I)$*; de donde se deduce que*

$$\alpha^{(i+1)} = \frac{D\mathbf{V}_{i-1}}{dt} + \frac{d\varphi_i}{dt}\mathbf{E}_i + \varphi_i \frac{D\mathbf{E}_i}{dt} \equiv \mathbf{W}_i + \varphi_i \frac{D\mathbf{E}_i}{dt} \qquad (^{**}) \ ,$$

con $\mathbf{W}_i \in Sub(\alpha', \ldots, \alpha^{(i)})$.

Sea ahora $i = 1, ..., n-1$*. De (13) se deduce entonces que* $\varphi_i > 0$ *y se tiene:*

$$\omega_{i+1,i} :=< \mathbf{E}_{i+1}, \frac{D\mathbf{E}_i}{dt} > \overset{(**)}{=} < \mathbf{E}_{i+1}, \frac{1}{\varphi_i}\alpha^{(i+1)} > \overset{(*)}{=} \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i} \ ;$$

y de ahí se sigue que: $\omega_{i+1,i} > 0, \ i = 1, ..., n-2.$

Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ una curva alabeada y sea $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_n)$ su referencia de Frenet. Con las notaciones del apartado anterior, se denomina **curvatura** i**-ésima** a la función diferenciable

$$\kappa_i := \frac{\omega_{i+1,i}}{|\alpha'|} \ \in \mathfrak{F}(I) \ \ , \ \ i = 1, ..., n-1 \ \ ;$$

se sigue de la Observación 1.24 que: $\kappa_i > 0, \ i = 1, ..., n-2.$

1.4.4. Teorema fundamental de la teoría de curvas

El interés de las curvaturas (de una curva alabeada) está en que son objetos invariantes, tanto bajo reparametrizaciones que preservan la orientación como bajo movimientos directos (Proposición 1.25), y en que determinan, salvo reparametrizaciones y movimientos, la curva (Teorema 1.27).

Proposición 1.25 *(Invariancia de las curvaturas) Sea* $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ $(n \geq 2)$ *una curva alabeada con referencia de Frenet* $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_n)$ *y curvaturas* $\kappa_i \in \mathfrak{F}(I)$ $(i = 1, ..., n-1)$.

1. *Sea* $f : J \to I$ *un cambio de parámetro de* α *que preserva orientación y consideremos la curva* $\tilde{\alpha} := \alpha \circ f : J \to \mathbb{E}^n$*. Entonces la referencia de Frenet* $(\widetilde{\mathbf{E}}_1, ..., \widetilde{\mathbf{E}}_n)$ *de* $\tilde{\alpha}$ *verifica:*

$$\widetilde{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_i \circ f \quad (i = 1, ..., n) \ .$$

Además, si $\tilde{\kappa}_i \in \mathfrak{F}(J)$ *es la curvatura i-ésima de* $\tilde{\alpha}$*, se tiene*

$$\tilde{\kappa}_i = \kappa_i \ \circ f \quad (i = 1, ..., n-1) \ .$$

2. *Sea $\mathcal{A} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ un movimiento directo y consideremos la curva $\tilde{\alpha} := \mathcal{A} \circ \alpha \ : I \to \mathbb{E}^n$. Entonces la referencia de Frenet $(\widetilde{\mathbf{E}}_1, ..., \widetilde{\mathbf{E}}_n)$ de $\tilde{\alpha}$ verifica:*
$$\widetilde{\mathbf{E}}_i = (A\vec{E}_i)_{\tilde{\alpha}} \quad (i = 1, ..., n) \ .$$
(siendo A la rotación de $\mathcal{A}$). Además, si $\tilde{\kappa}_i \in \mathfrak{F}(I)$ es la curvatura i-ésima de $\tilde{\alpha}$, se tiene
$$\tilde{\kappa}_i = \kappa_i \quad (i = 1, ..., n-1) \ .$$

Demostración. Ver Apéndice 5.1.3 ∎

Observación 1.26 *Si el cambio de parámetro en el apartado 1 no preservara orientación, se tendría (ver Ejercicio 6.1.20a)*

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_1 = -\mathbf{E}_1 \circ f \ \ y \ \widetilde{\mathbf{E}}_2 = -\mathbf{E}_2 \circ f \ \ (para \ \ n = 2) \\ \widetilde{\mathbf{E}}_1 = -\mathbf{E}_1 \circ f \ \ , \ \widetilde{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{E}_2 \circ f \ \ y \ \widetilde{\mathbf{E}}_3 = -\mathbf{E}_3 \circ f \ \ (para \ \ n = 3) \end{cases}$$

y, en cuanto a las curvaturas,

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = -\kappa_1 \ \circ f \ \ (para \ \ n = 2) \\ \tilde{\kappa}_1 = \kappa_1 \ \circ f \ \ y \ \tilde{\kappa}_2 = \kappa_2 \ \circ f \ \ (para \ \ n = 3) \end{cases} .$$

Por otra parte, si el movimiento en el apartado 2 no fuera directo, se tendría (ver Ejercicio 6.1.20b)

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_1 = (A\vec{E}_1)_{\tilde{\alpha}} \ \ y \ \widetilde{\mathbf{E}}_2 = -(A\vec{E}_2)_{\tilde{\alpha}} \ \ (para \ \ n = 2) \\ \widetilde{\mathbf{E}}_1 = (A\vec{E}_1)_{\tilde{\alpha}} \ \ , \ \widetilde{\mathbf{E}}_2 = (A\vec{E}_2)_{\tilde{\alpha}} \ \ y \ \widetilde{\mathbf{E}}_3 = -(A\vec{E}_3)_{\tilde{\alpha}} \ \ (para \ \ n = 3) \end{cases}$$

y, en cuanto a las curvaturas,

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_1 = -\kappa_1 \ \ \ (para \ \ n = 2) \\ \tilde{\kappa}_1 = \kappa_1 \ \ \ y \ \tilde{\kappa}_2 = -\kappa_2 \ \ (para \ \ n = 3) \end{cases} .$$

Teorema 1.27 *(Teorema fundamental de la teoría de curvas) Dadas funciones diferenciables $\kappa_i \in \mathfrak{F}(I)$ $(i = 1, ..., n-1)$, con $\kappa_i > 0$ para $i = 1, ..., n-2$, existe una única (salvo movimientos directos) curva alabeada $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ parametrizada por la longitud de arco y con curvaturas κ_i $(i = 1, ..., n-1)$.*

Demostración. La versión bidimensional de este teorema es fácil (Ejercicio 6.1.8) de demostrar. La demostración de la versión general exige ciertas nociones de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales (ver Apéndice 5.1.4*) y puede verse en el Apéndice 5.1.5* ∎

1.5. CURVAS ALABEADAS PLANAS

1.5.1. Diedro de Frenet

> Una curva alabeada en el plano queda determinada, salvo reparametrizaciones que preservan la orientación y salvo movimientos directos, por su curvatura.

En el caso de una curva plana $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$, resulta lo mismo decir regular que decir alabeada. Si α es regular, su única curvatura $\kappa_1 := \frac{\omega_{21}}{|\alpha'|}$ se denota por κ y se denomina **curvatura de** α. Si $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ es la referencia de Frenet (o **diedro de Frenet**) de α, es habitual llamar:

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{E}_1 \text{ campo } \textbf{tangente} \text{ y } \mathbf{N} \equiv \mathbf{E}_2 \text{ campo } \textbf{normal} \ .$$

Las fórmulas de Frenet (14) se reducen entonces a:

$$(\frac{D\mathbf{T}}{dt}, \frac{D\mathbf{N}}{dt}) = (\mathbf{T}, \mathbf{N}) \begin{pmatrix} 0 & -|\alpha'|\,\kappa \\ |\alpha'|\,\kappa & 0 \end{pmatrix} , \tag{15}$$

con

$$\kappa := \frac{1}{|\alpha'|} < \mathbf{N}, \frac{D\mathbf{T}}{dt} > .$$

Observación 1.28 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ una curva regular.*

1. *Nótese que, si bien α proporciona la tangente $\mathbf{T}$ de Frenet, es el espacio euclídeo $\mathbb{E}^2$ el que "induce" la normal $\mathbf{N}$. Escribiendo para la parte vectorial de la tangente $\vec{T} \equiv (T_1, T_2)$, la parte vectorial de la normal resulta ser $\vec{N} = (-T_2, T_1)$.*

2. *En realidad, existe (pero esto es algo que hay que demostrar, ver Ejercicio 6.1.3a) una función diferenciable $\theta : I \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{T} = (\cos\theta, sen\ \theta)$. Además esta función θ verifica (Ejercicio 6.1.3b): $\frac{d\theta}{dt} =\mid \alpha' \mid \kappa$.*

3. *Consideremos la curva vectorial $\vec{N} : I \to \mathbb{E}^2$ que asocia, a cada punto de I, la parte vectorial de la normal de Frenet. Nótese que $\vec{N}$ (que no tiene por qué ser regular) toma sus valores en la circunferencia unidad centrada en el origen. Sea un subintervalo $\mathcal{I} \subset I$ y sea $t \in \mathcal{I}$. Entonces se tiene:*

$$\lim_{\mathcal{I} \to \{t\}} \frac{L(\vec{N}\mid_{\mathcal{I}})}{L(\alpha \mid_{\mathcal{I}})} = \lim_{\mathcal{I} \to \{t\}} \frac{\int_{\mathcal{I}} \left| \frac{d\vec{N}}{dt} \right|}{\int_{\mathcal{I}} \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|} \overset{(15)}{=} \lim_{\mathcal{I} \to \{t\}} \frac{\int_{\mathcal{I}} \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| |\kappa|}{\int_{\mathcal{I}} \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \mid \kappa(t) \mid \ .$$

Cotéjese esta expresión en los casos sencillos (Ejercicio 6.1.1) de la curva (de curvatura $\kappa = 0$ y con imagen una recta)

$$\alpha(t) = p + t\vec{\xi} \ , \Rightarrow \ \vec{T}(t) = \frac{\vec{\xi}}{\left|\vec{\xi}\right|} \ , \Rightarrow \ \vec{N}(t) = \overrightarrow{cte} \ , \Rightarrow \ L(\vec{N}\mid_{\mathcal{I}}) = 0$$

y de la curva (de curvatura $\kappa = \frac{1}{r}$ y con imagen una circunferencia)

$$\alpha(t) = p + r(\cos t, sen\ t)\ ,\ \Rightarrow\ \vec{T}(t) = (-sen\ t, \cos t)\ ,\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \vec{N}(t) = (-\cos t, -sen\ t)\ ,\ \Rightarrow\ L(\vec{N}\ |_{\mathcal{I}}) = \tfrac{1}{r}L(\alpha\ |_{\mathcal{I}})\ .$$

Las fórmulas (15) son especialmente significativas cuando α está parametrizada por la longitud de arco s (es decir, cuando $|\ \alpha'\ |= 1$). Si tomamos una referencia afín euclídea con origen el punto $\alpha\,(0)$ y con base ortonormal la dada por $(\vec{T}(0), \vec{N}(0))$, la curva tiene unas coordenadas $\alpha\,(s) \equiv (x\,(s)\,, y\,(s))$ cuyo desarrollo en serie de Taylor en torno a $s = 0$ resulta determinado por los valores de la curvatura y sus sucesivas derivadas en el 0. En efecto, escribiendo

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \underbrace{\frac{d\alpha}{ds}}_{\vec{T}(0)}(0)\ s + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{d^2\alpha}{ds^2}(0)}_{\frac{d\vec{T}}{ds}(0)}\ s^2 + \frac{1}{3!}\underbrace{\frac{d^3\alpha}{ds^3}(0)}_{\frac{d^2\vec{T}}{ds^2}(0)}\ s^3 + \bigcirc(s^4)\ ,$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{T}}{ds} \overset{(15)}{=} \kappa\vec{N}\ , \\ \dfrac{d^2\vec{T}}{ds^2} = \dfrac{d\kappa}{ds}\vec{N} + \kappa\dfrac{d\vec{N}}{ds} \overset{(15)}{=} -\kappa^2\vec{T} + \dfrac{d\kappa}{ds}\vec{N}\ , \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

obtenemos finalmente:

$$\begin{cases} x\,(s) = s - \dfrac{1}{3!}\kappa^2\,(0)\,s^3 + \bigcirc(s^4) \\ y\,(s) = \dfrac{1}{2}\kappa\,(0)\,s^2 + \dfrac{1}{3!}\dfrac{d\kappa}{ds}\,(0)\,s^3 + \bigcirc(s^4)\ . \end{cases}$$

En el caso de que la curva plana (y parametrizada por la longitud de arco) sea analítica, las expresiones anteriores son válidas para todo $s \in I$ y constituyen la expresión explícita de lo predicho por el Teorema 1.27 para esta clase de curvas, a saber, que quedan determinadas, salvo movimientos directos, por los valores de la curvatura y sus sucesivas derivadas en un punto.

Observación 1.29 *De lo anterior se desprenden muchas otras propiedades geométricas interesantes. Por ejemplo, se ve que*

$$\kappa\,(0) = \lim_{s\to 0}\frac{2y\,(s)}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{2y\,(s)}{L(\alpha\ |_{[0,s]})^2}\ .$$

Esta expresión permite intuir:

(i) el signo de κ (positivo, si la curva "se dobla" en el sentido indicado por la normal);

(ii) el hecho de que la curvatura cambia de signo (Observación 1.26) cuando cambia el sentido de recorrido (la normal se invierte, pero el contacto de la curva con el eje x en el punto es de orden 2); y

(iii) el hecho de que el módulo de la curvatura no depende (Proposición 1.25(1)) de la parametrización (a igual trayectoria orientada, la igualdad de longitudes se traduce en igualdad de ordenadas).

Sean $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ una curva regular y $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$ su diedro de Frenet. Para cada $t \in I$, las rectas afines que pasan por $\alpha(t)$ y tiene por direcciones $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$ se denominan **recta tangente** y **recta normal de** α **en** t, respectivamente. Intuitivamente, la curvatura mide cuánto se desvía la imagen de la curva de estar contenida en su recta tangente (Ejercicio 6.1.1a).

Ejemplo 1.30 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ una curva regular. Vamos a probar que la trayectoria de α es un segmento de recta si y sólo si las rectas (afines) tangentes de α pasan todas por un mismo punto. Convencerse primero de que lo que debemos probar es la equivalencia entre la afirmación*

$$\text{existen } p \in \mathbb{E}^2, \vec{\xi}(\neq \vec{0}) \in \mathbb{E}^2 \text{ y } f \in \mathfrak{F}(I) \text{ tales que } \alpha = p + f\vec{\xi} \qquad (^*)$$

y la afirmación

$$\text{existen } q \in \mathbb{E}^2 \text{ y } g \in \mathfrak{F}(I) \text{ tales que } \alpha + g\vec{T} = q \qquad (^{**}) \ .$$

Condición necesaria: $(^*) \ \Rightarrow \ \frac{d\alpha}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{\xi} \ \Rightarrow \ \vec{T} = \frac{\pm\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|} \overset{(^*)}{\Rightarrow} (^{**})$.

Condición suficiente: $(^{**}) \ \Rightarrow \ \vec{0} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{dg}{dt}\vec{T} + g\frac{d\vec{T}}{dt}$. *Teniendo en cuenta que* $< \vec{T}, \frac{d\vec{T}}{dt} >= 0$ *(no hace falta para ello hablar de curvatura), se concluye que:* $\frac{dg}{dt} = - \mid \alpha' \mid < 0$ *y también* $g\frac{d\vec{T}}{dt} = 0$*. Así pues,* $\frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{0}$ *salvo a lo más en un punto; al ser* $\frac{d\vec{T}}{dt}$ *continua, resulta*

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{0}, \ \Rightarrow \ \vec{T} = \vec{T}(0) \ (cte.), \ \Rightarrow \ \alpha(t) = \alpha(0) + \left(\int_0^t \mid \alpha'(t) \mid dt \right) \vec{T}(0) \ \ ,$$

que es precisamente $(^*)$.

Obsérvese que, si α dejara de ser regular en sólo un valor $t_0 \in I$, la tangente $\vec{T}(t_0)$ dejaría de estar definida, con lo que la implicación ($\frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \vec{T} = cte.$), y con ella la condición suficiente, dejarían de ser ciertas. Como ejemplo, considérese la curva

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2 \ , \ t \mapsto \begin{cases} (e^{-1/t^2}, 0) & , \ si \ t \leq 0 \\ (0, e^{-1/t^2}) & , \ si \ t > 0 \end{cases}$$

(la función $g(t) := e^{-1/t^2}$ es C^∞). Al ser $\frac{dg}{dt}(t) = 2t^{-3}e^{-1/t^2}$, y debido a que (para todo $n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{t\to 0^\pm} t^{-n}e^{-1/t^2} \overset{u\equiv 1/t}{=} \lim_{u\to\pm\infty} \frac{u^n}{e^{u^2}} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{u\to\pm\infty} \frac{n!}{e^{u^2}P(u)} = 0$$

(con $P(u)$ cierto polinomio en u), resulta: $\mid \alpha'(t) \mid\neq 0$ excepto en $t = 0$. Y aunque verifica (**) salvo en $t = 0$, la curva α "aprovecha" $t = 0$ (donde la velocidad se anula) para cambiar de dirección y no verificar (*).

1.5.2. Algoritmo para el cálculo de la curvatura

Proposición 1.31 *Sean $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ una curva regular y $\kappa \in \mathfrak{F}(I)$ su curvatura. Entonces se verifica:*

$$\kappa = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3} \tag{16}$$

y también:

$$signo(\kappa) = signo(< \alpha'', \mathbf{N} >) \ .$$

Además, si $|\alpha'| = 1$, se deduce: $|\kappa| = |\alpha''|$.

Demostración. Recordar que, por ser $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$ una referencia móvil euclídea, es $\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}) = 1$. Se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' =: |\alpha'| \, \mathbf{T} \\ \frac{D\mathbf{T}}{dt} \overset{(15)}{=} |\alpha'| \, \kappa \mathbf{N} \end{array} \right. ; \Rightarrow \ (\alpha', \alpha'') = (\mathbf{T}, \mathbf{N}) \begin{pmatrix} |\alpha'| & \frac{d|\alpha'|}{dt} \\ 0 & |\alpha'|^2 \kappa \end{pmatrix} ; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \det(\alpha', \alpha'') = \underbrace{\det(\mathbf{T}, \mathbf{N})}_{1} \det \begin{pmatrix} |\alpha'| & \frac{d|\alpha'|}{dt} \\ 0 & |\alpha'|^2 \kappa \end{pmatrix} = |\alpha'|^3 \kappa \ .$$

La afirmación sobre $signo(\kappa)$ es consecuencia de que $\alpha'' = \frac{d|\alpha'|}{dt}\mathbf{T} + |\alpha'|^2 \kappa \mathbf{N}$. Finalmente, si $|\alpha'| = 1$, es $\alpha'' = \kappa \mathbf{N}$; de donde se sigue $|\kappa| = |\alpha''|$ ■

1.6. CURVAS ALABEADAS EN EL ESPACIO

1.6.1. Triedro de Frenet

Una curva alabeada en el espacio queda determinada, salvo reparametrizaciones que preservan la orientación y salvo movimientos directos, por su curvatura y su torsión.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ una curva alabeada. Sus curvaturas $\kappa_1 := \frac{\omega_{21}}{|\alpha'|} > 0$ y $\kappa_2 := \frac{\omega_{32}}{|\alpha'|}$ reciben ahora los nombres de **curvatura** κ y **torsión** τ **de** α, respectivamente. Si $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ es la referencia de Frenet (o **triedro de Frenet**) de α, es habitual llamar

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{E}_1 \text{ **tangente** } , \quad \mathbf{N} \equiv \mathbf{E}_2 \text{ **normal principal** } \text{ y } \mathbf{B} \equiv \mathbf{E}_3 \text{ **binormal** } ;$$

al ser $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ referencia ortonormal positiva, resulta de (4): $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$.

Las fórmulas de Frenet (14) se reducen entonces a:

$$\left(\frac{D\mathbf{T}}{dt}, \frac{D\mathbf{N}}{dt}, \frac{D\mathbf{B}}{dt}\right) = (\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) \begin{pmatrix} 0 & -|\alpha'|\,\kappa & 0 \\ |\alpha'|\,\kappa & 0 & -|\alpha'|\,\tau \\ 0 & |\alpha'|\,\tau & 0 \end{pmatrix} , \qquad (17)$$

con

$$\kappa := \frac{1}{|\alpha'|} < \mathbf{N}, \frac{D\mathbf{T}}{dt} > \ (> 0) \quad \text{y} \quad \tau := \frac{1}{|\alpha'|} < \mathbf{B}, \frac{D\mathbf{N}}{dt} > .$$

De forma análoga a como se hizo en el caso de las curvas planas, se puede calcular a partir de (17) el desarrollo de Taylor (en el parámetro) de la curva, expresada ésta en la referencia afín euclídea con origen el punto $\alpha(0)$ y con base ortonormal la dada por $(\vec{T}(0), \vec{N}(0), \vec{B}(0))$. Los primeros términos de dicho desarrollo, cuando α está parametrizada por la longitud de arco s (es decir, cuando $\mid \alpha' \mid = 1$), son

$$\begin{cases} x(s) = s - \dfrac{1}{3!}\kappa^2(0)\, s^3 + \bigcirc(s^4) \\ y(s) = \dfrac{1}{2}\kappa(0)\, s^2 + \dfrac{1}{3!}\dfrac{d\kappa}{ds}(0)\, s^3 + \bigcirc(s^4) \\ z(s) = \dfrac{1}{3!}\kappa(0)\,\tau(0)\, s^3 + \bigcirc(s^4) \ . \end{cases}$$

Observación 1.32 *De nuevo se deducen de lo anterior propiedades de la geometría de la curva. Por ejemplo, se ve que*

$$\tau(0) = \lim_{s\to 0} \frac{3!z(s)}{\kappa(0)s^3} = \lim_{s\to 0} \frac{3!z(s)}{\kappa(0)L(\alpha\mid_{[0,s]})^3} .$$

Esta expresión permite intuir (recordar que la curvatura κ es siempre positiva):

(i) el signo de τ (positivo, si la curva "se levanta" en el sentido indicado por la binormal);

(ii) el hecho de que la torsión no cambia de signo (Observación 1.26) cuando cambia el sentido de recorrido (la binormal se invierte, pero el contacto de la curva con el plano xy en el punto es de orden 3); y

(iii) el hecho de que el módulo de la torsión no depende (Proposición 1.25(1)) de la parametrización (a igual trayectoria orientada, la igualdad de longitudes se traduce en igualdad de alturas).

Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ una curva alabeada y sea $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ su triedro de Frenet. Para cada $t \in I$, las rectas afines que pasan por $\alpha(t)$ y tienen por direcciones $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$ y $\vec{B}(t)$ se denominan **recta tangente**, **recta normal principal** y **recta binormal de** α **en** t, respectivamente. Y los planos afines que pasan por $\alpha(t)$ y tienen por vectores directores $\vec{B}(t)$, $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$ se denominan **plano osculador**, **plano normal** y **plano rectificante de** α **en** t, respectivamente. Intuitivamente, la curvatura mide cuánto se desvía la imagen de la curva de estar contenida en su recta tangente y la torsión mide cuánto se desvía de estar contenida en su plano osculador (Ejercicio 6.1.4a).

Ejemplo 1.33 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ una curva alabeada parametrizada por la longitud de arco. Vamos a probar que, si Π es un plano afín que satisface las condiciones: (1) existe $s_0 \in I$ tal que Π contiene a la recta (afín) tangente de α en s_0, y (2) para cualquier entorno $J \subset I$ de s_0 existen puntos de $\alpha(J)$ a ambos lados de Π, entonces Π es necesariamente el plano osculador de α en s_0 (que el plano osculador de α en s_0 verifica (1) y (2) es inmediata consecuencia de que, como ya sabemos, el contacto de la curva con dicho plano es de orden 3).*

En efecto: sin pérdida de generalidad, podemos tomar $s_0 = 0$. Escribiendo las ecuaciones de la curva α en la referencia cartesiana $\left(\alpha(0); \vec{T}(0), \vec{N}(0), \vec{B}(0)\right)$ se tiene, por lo dicho antes (y al ser $|\alpha'| = 1$):

$$\begin{cases} x(s) = s - \bigcirc(s^3) \\ y(s) = \dfrac{1}{2}\kappa(0)\, s^2 + \bigcirc(s^3) \\ z(s) = \bigcirc(s^3) \end{cases} .$$

Cualquier plano afín que verifique (1) tendrá por vector director $\lambda\vec{N}(0) + \mu\vec{B}(0)$, para ciertos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (no ambos nulos). Con lo que se tendrá:

$$signo\left(< \alpha(s) - \alpha(0), \lambda\vec{N}(0) + \mu\vec{B}(0) >\right) = signo\,(\lambda y(s) + \mu z(s)) =$$

$$= signo\left(\lambda\frac{1}{2}\kappa(0)\, s^2 + \bigcirc(s^3)\right) \overset{\kappa>0}{=} \text{(para } s \text{ pequeño)} \begin{cases} signo\,(\lambda) & , \ si\ \lambda \neq 0 \\ indefinido & , \ si\ \lambda = 0 \end{cases} .$$

Ahora bien, el que un plano afín por $\alpha(0)$ y con vector director $\lambda\vec{N}(0)+\mu\vec{B}(0)$ verifique (2) implica que la función

$$signo\left(< \alpha - \alpha(0), \lambda\vec{N}(0) + \mu\vec{B}(0) >\right)$$

no puede ser localmente constante en la vecindad de 0. Ello implica que debe ser $\lambda = 0$, con lo que el plano afín Π en cuestión tendrá por vector director $\vec{B}(0)$ y será el plano osculador de α en 0.

1.6.2. Algoritmo para el cálculo de la curvatura y la torsión

Proposición 1.34 *Sean $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ una curva alabeada y $\kappa(>0), \tau \in \mathfrak{F}(I)$ su curvatura y torsión, respectivamente. Entonces se verifica:*

$$\kappa = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} \qquad y \qquad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2} \ . \tag{18}$$

Además, si $|\alpha'| = 1$, se deduce:

$$\kappa = |\alpha''| \quad y \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha''|^2} \ .$$

Demostración. Recordar que, por ser $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ una referencia móvil euclídea, es $\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) = 1$. Se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' =: |\alpha'|\,\mathbf{T} \\ \frac{D\mathbf{T}}{dt} \overset{(17)}{=} |\alpha'|\,\kappa \mathbf{N} \\ \frac{D\mathbf{N}}{dt} \overset{(17)}{=} -\,|\alpha'|\,\kappa \mathbf{T} + |\alpha'|\,\tau \mathbf{B} \end{array} \right. \quad ; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha', \alpha'', \alpha''') = (\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) \begin{pmatrix} |\alpha'| & \frac{d|\alpha'|}{dt} & * \\ 0 & |\alpha'|^2 \kappa & * \\ 0 & 0 & |\alpha'|^3 \kappa\tau \end{pmatrix} \quad ; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\alpha' \times \alpha''| \overset{(5)}{=} \left| \det \begin{pmatrix} |\alpha'| & \frac{d|\alpha'|}{dt} \\ 0 & |\alpha'|^2 \kappa \end{pmatrix} \right| \underbrace{|\mathbf{T} \times \mathbf{N}|}_{1} = |\alpha'|^3 \kappa \\ \\ \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \underbrace{\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})}_{1} \det \begin{pmatrix} |\alpha'| & \frac{d|\alpha'|}{dt} & * \\ 0 & |\alpha'|^2 \kappa & * \\ 0 & 0 & |\alpha'|^3 \kappa\tau \end{pmatrix} = |\alpha'|^6 \kappa^2 \tau \end{array} \right. .$$

Finalmente, si $|\alpha'| = 1$, se tiene: $< \alpha', \alpha'' >= 0$, $\Rightarrow$ $|\alpha' \times \alpha''| = |\alpha''|$, y el resultado se sigue ■

2. SUPERFICIES EN EL ESPACIO AFIN

Estudiamos en este capítulo las superficies del espacio afín $\mathbb{R}^3$, sin usar aún la estructura euclídea. Conviene recordar lo dicho en los apartados 1.1.1 al 1.1.3. Comenzamos reinterpretando algunas nociones preliminares y resultados del análisis de funciones de varias variables.

2.1. PRELIMINARES DE ANÁLISIS

En lo que sigue, consideraremos el espacio afín $\mathbb{R}^n$ con su topología usual. Hay que advertir que, aunque dicha topología es la inducida por la distancia euclídea estándar (1.1.4), todas las nociones de distancia en $\mathbb{R}^n$ que provienen de una norma inducen la misma topología, por lo que ésta no presupone una norma concreta. Hasta el apartado 2.1.5 no será necesario por tanto considerar un producto escalar concreto en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

2.1.1. Aplicaciones diferenciables entre abiertos de $\mathbb{R}^n$

Sean $(x_1, ..., x_n)$ las coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^n$, esto es, las proyecciones

$$x_i \equiv \pi_i : \mathbb{R}^n \ni (a_1, ..., a_n) \mapsto a_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, ..., n) \ .$$

Si S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, una aplicación $F : S \to \mathbb{R}^m$ (denotaremos por $(y_1, ..., y_m)$ las coordenadas análogas en $\mathbb{R}^m$) queda determinada por sus **componentes** $F_j \equiv y_j \circ F : S \to \mathbb{R}$. Diremos entonces que $y_j = F_j(x_1, ..., x_n)$, $j = 1, ..., m$, son las **ecuaciones de** F.

Sea $\mathbb{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ se dirá **diferenciable** si posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes (esto es, si es de clase C^∞). Recordemos que se define la **derivada parcial (de 1er orden) de f con respecto a x_i en** $p \in \mathbb{R}^n$ como el número real

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0) \ ,$$

siendo $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ la curva $\alpha(t) = p + t\vec{e}_i$ (en la Observación 2.2(2) veremos que, de hecho, podríamos tomar aquí como curva α *cualquiera* que verificara $\alpha'(0) = (\vec{e}_i)_p$). Una aplicación $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ se dirá **diferenciable** si sus componentes $F_j : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., m)$ son funciones diferenciables. En tal caso, se llama **jacobiana de F en** $p \in \mathbb{U}$ a la matriz $m \times n$

$$J_F(p) := \left(\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, ..., x_n)}\right)(p) \equiv \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_1(p) & \cdots & \partial F_1/\partial x_n(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial F_m/\partial x_1(p) & \cdots & \partial F_m/\partial x_n(p) \end{pmatrix} .$$

2.1.2. Vectores tangentes y derivaciones

Los vectores tangentes se reinterpretan como operadores de derivación direccional en el punto de apoyo.

Sean $p \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{\xi}_p \in T_p\mathbb{R}^n$. Resulta útil considerar el vector tangente $\vec{\xi}_p$ bajo el punto de vista de una "derivación de funciones": dados un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$ que contiene a p y una función diferenciable $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$, se define la **derivada direccional de f según $\vec{\xi}_p$** como el número real

$$\vec{\xi}_p(f) := J_f(p)\vec{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\xi_i \ ;$$

en particular, $(\vec{e}_i)_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, lo que justifica introducir la notación (para $i = 1, ..., n$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \overset{Not.}{\equiv} (\vec{e}_i)_p \ .$$

Así, la base canónica de $T_p\mathbb{R}^n$ se escribirá $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right)$ y la velocidad de una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ tendrá la expresión:

$$\alpha'(t) \overset{1.2.2}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_i}{dt}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\alpha(t)} \ .$$

2.1.3. Diferencial y regla de la cadena

La diferencial en un punto es una aplicación lineal que lleva velocidades de curvas por dicho punto en velocidades de las curvas imagen por el punto imagen.

Sea $F : (\mathbb{R}^n \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. Se llama **diferencial de F en** $p \in \mathbb{U}$ a la aplicación lineal

$$d_pF : T_p\mathbb{R}^n \ni \vec{\xi}_p \mapsto (J_F(p)\vec{\xi})_{F(p)} \in T_{F(p)}\mathbb{R}^m \ ;$$

es decir, se trata de la aplicación lineal que tiene por matriz, respecto de las bases canónicas de $T_p\mathbb{R}^n$ y de $T_{F(p)}\mathbb{R}^m$, la jacobiana $J_F(p)$. Se tiene así:

$$d_pF \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_i(p) \\ \vdots \\ \partial F_m/\partial x_i(p) \end{pmatrix}_{F(p)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{F(p)} \quad (i = 1, ..., n) \tag{19}$$

Observación 2.1 *En particular, se tiene:*

1. *Si* $\alpha : (\mathbb{R} \supset) I \to \mathbb{R}^n$ *es una curva y* $\tau \in I$*:*

$$d_\tau \alpha \left(\frac{d}{dt} \right)_\tau \overset{(19)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_i}{dt}(\tau) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\alpha(\tau)} \overset{2.1.2}{=} \alpha'(\tau) \ .$$

2. *Si* $f : (\mathbb{R}^n \supset) \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ *es una función diferenciable,* $p \in \mathbb{U}$ *y* $\vec{\xi}_p \in T_p\mathbb{R}^n$*:*

$$d_p f \ (\vec{\xi}_p) := (J_f(p)\vec{\xi})_{f(p)} \overset{2.1.2}{=} \left(\vec{\xi}_p(f) \right)_{f(p)} \ .$$

Sean $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y F, G aplicaciones diferenciables: $\mathbb{U} \xrightarrow{F} \mathbb{V} \xrightarrow{G} \mathbb{R}^l$. Entonces $G \circ F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^l$ es una aplicación diferenciable, y se verifica para todo $p \in \mathbb{U}$:

$$d_p(G \circ F) = d_{F(p)}G \circ d_p F \ ; \tag{20}$$

la parte vectorial de (20) es precisamente la clásica regla de la cadena, que establece en términos de matrices jacobianas la igualdad: $J_{G \circ F}(p) = J_G(F(p)) \ J_F(p)$, y que en coordenadas se escribe:

$$\frac{\partial(z_k \circ G \circ F)}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(z_k \circ G)}{\partial y_j}(F(p)) \ \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}(p) \quad (i = 1, ..., n \ ; \ k = 1, ..., l) \ ,$$

donde se han tomado coordenadas (x_i) en $\mathbb{R}^n$, (y_j) en $\mathbb{R}^m$, (z_k) en $\mathbb{R}^l$.

Observación 2.2 *:*

1. *Sean* $F : (\mathbb{R}^n \supset) \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ *una aplicación diferenciable,* $\alpha : I \to \mathbb{U}$ *una curva y* $\tau \in I$*. Se tiene:*

$$\begin{aligned} (F \circ \alpha)'(\tau) &\overset{Obs.2.1(1)}{=} d_\tau(F \circ \alpha) \ \left(\tfrac{d}{dt}\right)_\tau \overset{(20)}{=} \\ &= (d_{\alpha(\tau)}F \circ d_\tau \alpha) \ \left(\tfrac{d}{dt}\right)_\tau \overset{Obs.2.1(1)}{=} d_{\alpha(\tau)}F \ (\alpha'(\tau)) \ . \end{aligned} \tag{21}$$

Surge así la siguiente interpretación geométrica de la diferencial: Dados $p \in \mathbb{U}$, $\vec{\xi}_p \in T_p\mathbb{R}^n$ *y una curva diferenciable* α *por* p *(1.2.3) con* $\alpha'(0) = \vec{\xi}_p$*, se tiene:* $d_p F \ (\vec{\xi}_p) = (F \circ \alpha)'(0)$.

2. Sean $f : (\mathbb{R}^n \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, $p \in \mathbb{U}$ y $\alpha : I \to \mathbb{U}$ una curva por p (esto es, tal que $\alpha(0) = p$). Se tiene:

$$\alpha'(0)(f) \stackrel{2.1.2}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\frac{d\alpha_i}{dt}(t) \stackrel{(20)}{=} \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0) \ . \qquad (22)$$

Se deduce que $\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}(0)$ depende de la curva α sólo a través de $\alpha'(0)$. En particular, la curva α por p utilizada para definir (2.1.1) la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ podría haber sido cualquiera que verificara $\alpha'(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$.

2.1.4. Difeomorfosmos. Teoremas de la función inversa e implícita. Cambios de coordenadas

Los Teoremas de la función inversa e implícita resultan clave para analizar la estructura diferenciable local de las superficies (2.2.1). Las habituales notaciones usadas en los cambios de coordenadas en $\mathbb{R}^n$ prefiguran las que se introducirán (2.3.2) al hablar de parametrizaciones en superficies.

(A) Sean $\mathbb{U}$ y $\mathbb{V}$ abiertos de $\mathbb{R}^n$. Una aplicación diferenciable $F : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ se llama **difeomorfismo** si es biyectiva y si su inversa $F^{-1} : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ es también diferenciable. La composición de difeomorfismos es un difeomorfismo.

Si $F : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ es un difeomorfismo, se tiene ($\forall p \in \mathbb{U}$):

$$Id_{T_p\mathbb{R}^n} = d_p(Id_{\mathbb{U}}) = d_p(F^{-1} \circ F) \stackrel{(20)}{=} d_{F(p)}F^{-1} \circ d_pF \ ;$$

se concluye que $d_pF : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^n$ *es un isomorfismo* (en particular, si $f : (\mathbb{R} \supset)J \to I(\subset \mathbb{R})$ es difeomorfismo, $\frac{df}{ds} \neq 0$ siempre) y que $(d_pF)^{-1} = d_{F(p)}F^{-1}$. El recíproco es también (localmente) cierto y constituye el

Teorema 2.3 (función inversa) *Sean $F : (\mathbb{R}^n \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable y $p \in \mathbb{U}$. Si la jacobiana $J_F(p)$ es no singular, existen entornos $\mathbb{A}(\subset \mathbb{U})$ de p y $\mathbb{B}(\subset \mathbb{R}^n)$ de $F(p)$ tales que $F(\mathbb{A}) = \mathbb{B}$ y $F\mid_{\mathbb{A}}: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Ver [2], Teorema 7.5 y [6], Teorema 7.1 ∎

Sea $F : (\mathbb{R}^n \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ (con $n > m$) una aplicación (a la imagen inversa de cada valor de F se le llama un **conjunto de nivel para** F) *diferenciable*. Se dice que $p \in \mathbb{U}$ es un **punto regular para** F si la jacobiana $J_F(p)$ es de rango (máximo) m; en tal caso, p posee un entorno en $\mathbb{U}$ de puntos regulares para F. Se dice que $S(\subset \mathbb{U})$ es un **conjunto regular para** F si todos los puntos de S son puntos regulares para F. El teorema general de la función implícita afirma que: si $p \in \mathbb{U}$ es un punto regular para F, entonces el conjunto de nivel $F^{-1}(F(p))$ correspondiente al valor $F(p)$ puede expresarse, *localmente en torno a* p, como la gráfica de una cierta función diferenciable $\varsigma : (\mathbb{R}^{n-m} \supset)\Omega \to \mathbb{R}^m$. Vamos a ver la demostración de este teorema en el caso particular $n = 3, m = 1$, que aplicaremos a superficies de $\mathbb{R}^3$ (el caso $n = 2, m = 1$, aplicable a curvas planas y que se usa en el Ejercicio 6.1.21, es similar y más sencillo).

Teorema 2.4 (función implícita) *Sea* $f : (\mathbb{R}^3 \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable (sin pérdida de generalidad,* $0 \in f(\mathbb{U})$*). Supongamos que* $p \in f^{-1}(0)$ *es un punto regular para* f *(s.p.d.g. y eligiendo adecuadamente las coordenadas cartesianas* (x, y, z) *en* $\mathbb{R}^3$*, se tendrá* $(\partial f/\partial z)(p) \neq 0$*). Escribiremos* $p \equiv (a, b, c)$*. Entonces existen:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \text{un entorno } \Omega(\subset \mathbb{R}^2_{xy}) \text{ de } (a,b) \\ \text{un entorno } J(\subset \mathbb{R}_z) \text{ de } c \end{array} \right\} \text{con } \Omega \times J \subset \mathbb{U} \\ \text{una función diferenciable } \varsigma : \Omega \to J \end{array} \right.$$

tales que

$$\{(x, y, z) \in \Omega \times J \mid f(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, \varsigma(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\} \quad ,$$

esto es, tales que

$$f^{-1}(0) \cap (\Omega \times J) = \ \textit{gráfica de } \varsigma \quad .$$

Demostración (ver [2], Teorema 7.6, [5], 2.2, Proposición 2, [6], Teorema 7.2 y [9], Cap. 15, Teorema 1). Sea la aplicación diferenciable $\Phi : (\mathbb{R}^3 \supset)\mathbb{U} \ni (x, y, z) \mapsto (x, y, t = f(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3$, que verifica: $\det J_\Phi(p) = (\partial f/\partial z)(p) \neq 0$. Por el Teorema 2.3 existen entornos $\mathbb{A}(\subset \mathbb{U})$ de p y $\mathbb{B}(\subset \mathbb{R}^3)$ de $\Phi(p)$ tales que $\Phi(\mathbb{A}) = \mathbb{B}$ y $\Phi|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un difeomorfismo. Y se tiene: $\mathbb{A} \cap f^{-1}(0) = (\Phi|_{\mathbb{A}})^{-1}(\mathbb{B} \cap \{t = 0\})$.

Consideremos los entornos $\Omega := \pi_{12}(\mathbb{A})(\subset \mathbb{R}^2_{xy})$ de (a, b) y $J := \pi_3(\mathbb{A})(\subset \mathbb{R}_z)$ de c. Tomando (s.p.d.g.) $\mathbb{A} = \Omega \times J$, podemos identificar (por la definición de Φ) Ω con $\mathbb{B} \cap \{t = 0\}$. Entonces la función diferenciable $\varsigma := \pi_3 \circ (\Phi|_{\mathbb{A}})^{-1}|_\Omega : \Omega \to J$ verifica:

$$f^{-1}(0) \cap (\Omega \times J) = (\Phi|_{\mathbb{A}})^{-1}(\mathbb{B} \cap \{t = 0\}) = \{(x, y, \varsigma(x, y) \mid (x, y) \in \Omega\} \ \blacksquare$$

Observación 2.5 *1. El teorema de la función implícita responde a la siguiente idea intuitiva: de la ecuación* $f(x, y, z) = 0$ *puede despejarse localmente* z *en torno a cualquier punto* p *en el que* $(\partial f/\partial z)(p) \neq 0$*. Hay expresiones análogas si se supone que es* $(\partial f/\partial x)(p) \neq 0$ *o* $(\partial f/\partial y)(p) \neq 0$*.*

2. *("recíproco global" del teorema de la función implícita) La gráfica de una función diferenciable* $\varsigma : (\mathbb{R}^2 \supset)\Omega \to \mathbb{R}$ *es globalmente el conjunto de nivel* $f^{-1}(0)$ *para la función diferenciable* $f : (\mathbb{R}^3 \supset)\Omega \times \mathbb{R} \ni (x, y, z) \mapsto \varsigma(x, y) - z \in \mathbb{R}$*; y este conjunto es además regular para* f*, ya que* $J_f(p)$ *es de rango* 1 *en todo* $p \in \Omega \times \mathbb{R}$*.*

(B) Sea $\mathbb{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Un **cambio de coordenadas en** $\mathbb{U}$ es un difeomorfismo $\psi : (\mathbb{R}^n \supset)\overline{\mathbb{U}} \to \mathbb{U}$. Sean $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ las coordenadas canónicas en $\overline{\mathbb{U}}$, con lo que $(\forall p \in \mathbb{U})$:

$$\psi^{-1}(p) = ((\bar{x}_1 \circ \psi^{-1})(p), ..., (\bar{x}_n \circ \psi^{-1})(p)) .$$

Pues bien, presuponiendo que se ha fijado de antemano el difeomorfismo ψ*, las funciones* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *se considerarán indistintamente funciones definidas sobre* $\overline{\mathbb{U}} = \psi^{-1}(\mathbb{U})$ *o sobre el propio* $\mathbb{U}$*; por lo que valdrán las identificaciones* $\bar{x}_i \equiv \bar{x}_i \circ \psi^{-1}$ $(i = 1, ..., n)$*, escribiremos*

$$p = (\bar{x}_1(p), ..., \bar{x}_n(p)) \equiv (\ (\bar{x}_1 \circ \psi^{-1})(p), ..., (\bar{x}_n \circ \psi^{-1})(p)\ )$$

y diremos que $(\bar{x}_1(p), ..., \bar{x}_n(p))$ *son las* **nuevas coordenadas de** p. Diremos además que $x_i = x_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) \equiv (x_i \circ \psi)(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$, $i = 1, ..., n$, son las **ecuaciones del cambio de coordenadas**.

Sea $\psi : \overline{\mathbb{U}} \to \mathbb{U}$ un cambio de coordenadas. Para todo $p \in \mathbb{U}$, el conjunto

$$\left(d_{\psi^{-1}(p)}\psi \ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}\right)_{\psi^{-1}(p)}, ..., d_{\psi^{-1}(p)}\psi \ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_n}\right)_{\psi^{-1}(p)} \right)$$

constituye (puesto que $\det J_\psi(\psi^{-1}(p)) \neq 0$) una base del espacio vectorial tangente $T_p\mathbb{R}^n$, lo que lleva a introducir la notación (para $i = 1, ..., n$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\right)_p \overset{Not.}{\equiv} d_{\psi^{-1}(p)}\psi \ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\right)_{\psi^{-1}(p)} \overset{(19)}{=} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{x}_i}(\psi^{-1}(p))}_{\equiv \partial x_j/\partial \bar{x}_i(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p . \qquad (23)$$

Ejemplo 2.6 *Considérese el cambio* $\psi : \overline{\mathbb{U}} \to \mathbb{U}$ *de cartesianas a polares en* $\mathbb{R}^3$*, definido por*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{U} = \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0, y = 0\} \\ \overline{\mathbb{U}} = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \\ \psi(\rho \equiv \bar{x}, \vartheta \equiv \bar{y}, \phi \equiv \bar{z}) := (x = \rho sen\vartheta \cos\phi, y = \rho sen\vartheta sen\phi, z = \rho\cos\vartheta) \ , \ \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow \ \psi^{-1}(x, y, z) = (\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ , \ \vartheta = \arccos_{(0,\pi)} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ , \\ \qquad\qquad \phi = \left\{ \begin{array}{l} \arccos_{(-\pi,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ si\ y < 0 \\ 0 \ , \ si\ y = 0 \\ \arccos_{(0,\pi)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ si\ y > 0 \end{array} \right. \ ) . \end{array} \right.$$

Es inmediato comprobar que se tiene:

$$J_\psi \equiv \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\vartheta,\phi)}\right) = \begin{pmatrix} sen\vartheta\cos\phi & \rho\cos\vartheta\cos\phi & -\rho sen\vartheta sen\phi \\ sen\vartheta sen\phi & \rho\cos\vartheta sen\phi & \rho sen\vartheta\cos\phi \\ \cos\vartheta & -\rho sen\vartheta & 0 \end{pmatrix},$$

con lo que $\det J_\psi = \rho^2 sen\vartheta$*, y también:*

$$J_{\psi^{-1}} \equiv \left(\frac{\partial(\rho,\vartheta,\phi)}{\partial(x,y,z)}\right) = \begin{pmatrix} sen\vartheta\cos\phi & sen\vartheta sen\phi & \cos\vartheta \\ \frac{\cos\vartheta\cos\phi}{\rho} & \frac{\cos\vartheta sen\phi}{\rho} & \frac{-sen\vartheta}{\rho} \\ \frac{-sen\phi}{\rho sen\vartheta} & \frac{\cos\phi}{\rho sen\vartheta} & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, la expresión (23) queda ($\forall p \in \mathbb{U}$)*:*

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)_p = (sen\vartheta\cos\phi)(p)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + (sen\vartheta sen\phi)(p)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \cos\vartheta(p)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\ \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)_p = (\rho\cos\vartheta\cos\phi)(p)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + (\rho\cos\vartheta sen\phi)(p)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p - (\rho sen\vartheta)(p)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \\ \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)_p = -(\rho sen\vartheta sen\phi)(p)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + (\rho sen\vartheta\cos\phi)(p)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \end{cases}.$$

2.1.5. Integración. Teoremas de Fubini y del cambio de variable

> Una vez que una función es integrable (lo que viene determinado en última instancia por el Teorema de Lebesgue), los Teoremas de Fubini y del cambio de variable facilitan el cálculo de la integral.

(A) Consideremos $\mathbb{R}^n$ como espacio euclídeo (esto es, $\mathbb{E}^n$). Dados dos subconjuntos $A, B \subset \mathbb{E}^n$ y una función $f : A \to \mathbb{R}$, denotaremos $f^B : B \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x)\ ,\ si\ x \in A \cap B \\ 0\ ,\ si\ x \in B\backslash A \end{cases}$. Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{E}^n$, se llama **función característica de** A a la función $1_A : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1\ ,\ si\ x \in A \\ 0\ ,\ si\ x \notin A \end{cases}$.

Sean $A = [\vec{a}, \vec{b}] \equiv [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{E}^n$ (intervalo n-dimensional cerrado) y $f : A \to \mathbb{R}$ acotada. Se dice que f es **integrable(-Riemann)** si los números

$$\begin{cases} \inf\{U(P,f) \mid P \text{ partición de } [\vec{a},\vec{b}]\} \\ \sup\{L(P,f) \mid P \text{ partición de } [\vec{a},\vec{b}]\} \end{cases}$$

(que están bien definidos, son finitos, el primero es mayor o igual que el segundo, y donde $U(P,f)$ y $L(P,f)$ son, respectivamente, las sumas de Riemann superior e inferior correspondientes a P) toman el mismo valor. En tal caso, se llama **integral** $\int_{[\vec{a},\vec{b}]} f$ **de** f a dicho valor común.

Sean $A \subset \mathbb{E}^n$ acotado y $f : A \to \mathbb{R}$ acotada. Se dice que f es **integrable(-Riemann)** si lo es $f^{[\vec{a},\vec{b}]}$, siendo $[\vec{a},\vec{b}] (\subset \mathbb{E}^n)$ algún (y, por tanto, cualquier) intervalo n-dimensional cerrado *que contenga a* A. En tal caso, se llama **integral** $\int_A f$ **de** f a la integral $\int_{[\vec{a},\vec{b}]} f^{[\vec{a},\vec{b}]}$ (para cualquier tal $[\vec{a},\vec{b}]$). El tratamiento de esta cuestión es delicado y se lleva a cabo a través del concepto de "medida cero", que se recuerda en la observación siguiente.

Observación 2.7 *Sea* A *un subconjunto de* $\mathbb{E}^n$.

1. *Suponiendo que la función característica* $1_A : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ *sea integrable (se dice entonces que* A *tiene volumen, o también que "es medible-Jordan"), se llama* ***volumen*** *(o "contenido-Jordan n-dimensional")* $Vol(A)$ *de* A *a la integral* $\int_{\mathbb{E}^n} 1_A$ (≥ 0). *El volumen de* A *se llama* ***longitud*** *si* $n = 1$ *y* ***área*** *si* $n = 2$. *Cualquier intervalo (n-dimensional) cerrado* $[\vec{a},\vec{b}]$ *(o abierto* $(\vec{a},\vec{b})$*) tiene volumen igual a* $(b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n)$. *Si* $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ $(n \geq 2)$ *es una curva,* $\mathrm{Im}\,\alpha$ *tiene volumen cero (ver [2], Teorema 10.18).*

2. *Se dice que* A *tiene* ***medida cero****, y escribimos* $m_A = 0$, *si se verifica:*

$$\inf\{\sum_{k=1}^{\infty} Vol(R_k) \mid \{R_k\} \textit{ recubrimiento numerable de } A\} = 0$$

   (donde los R_k *son intervalos n-dimensionales, pueden tomarse cerrados o abiertos). Se sigue que, si* A *tiene volumen cero, tiene medida cero (si* A *es compacto y tiene medida cero, tiene volumen cero). La principal ventaja de la noción de medida cero frente a la de volumen cero es que una unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero (ver [2], Teorema 10.18 y [6], Teorema 8.2), mientras que una unión numerable de conjuntos de volumen cero no tiene por qué tener volumen (así ocure con el conjunto* $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{E}^1$*).*

3. *Sean* A *acotado y* $f : A \to \mathbb{R}$ *acotada. El* ***Teorema de Lebesgue*** *(ver [2], Teorema 10.19 y [6], Teorema 8.3) asegura entonces que* f *es integrable si y sólo si el conjunto (acotado)* $Disc(f^{\mathbb{E}^n})$ *de discontinuidades de* $f^{\mathbb{E}^n}$ *tiene medida cero. En particular:* (i) A *tiene volumen si y sólo si su frontera topológica* ∂A *(en* $\mathbb{E}^n$*) tiene medida cero (ver [6], Corolario 8.1);* (ii) *si* A *tiene volumen y* f *es continua (además de acotada),* f *es integrable (ver [6], Corolario 8.2); y* (iii) *si* A *tiene medida cero y* f *es integrable,* $\int_A f = 0$ *(ver [6], Teorema 8.4).*

La anterior definición de integrabilidad se extiende sin dificultad, sucesivamente (ver [6], 8.7, "integrales impropias"), a los casos:

(a) A arbitrario y $f(\geq 0)$ acotada: f se dice **integrable** si existe el límite (finito) $\lim_{a\to\infty} \int_{[-a,a]^n} f^{[-a,a]^n}$, siendo $[-a,a]^n \equiv [-a,a] \times ... \times [-a,a]$;

lo que obviamente requiere que exista la integral $\int_{[-a,a]^n} f^{[-a,a]^n}$ para cualquier intervalo de la forma $[-a,a]^n$. En tal caso, se llama **integral** $\int_A f$ **de** f al citado límite.

(b) A arbitrario y $f \geq 0$: f se dice **integrable** si existe el límite (finito) $\lim_{c\to\infty} \int_A f_c$, siendo $f_c : A \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x) \ , \ si\ f(x) \leq c \\ 0 \ , \ si\ f(x) > c \end{cases}$; lo que obviamente requiere que exista la integral $\int_A f_c$ para cualquier $c > 0$. En tal caso, se llama **integral** $\int_A f$ **de** f al citado límite. Para $n = 1$, interesa señalar que, si $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ es (≥ 0 y) continua, entonces f es integrable si y sólo si existe el límite (finito) $\lim_{x\to b^-} \int_{[a,x]} f$, en cuyo caso la integral coincide con dicho límite (ver p.ej. [6], Teorema 8.8).

(c) A arbitrario y f arbitraria: f se dice **integrable** (o "absolutamente convergente") si existen $\int_A f^+$ y $\int_A f^-$, siendo $f^+ : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x) \ , \ si\ f(x) \geq 0 \\ 0 \ , \ si\ f(x) < 0 \end{cases}$ y $f^- : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -f(x) \ , \ si\ f(x) \leq 0 \\ 0 \ , \ si\ f(x) > 0 \end{cases}$. En tal caso, se llama **integral** $\int_A f$ **de** f a la diferencia $\int_A f^+ - \int_A f^-$. Dados $A, B \subset \mathbb{E}^n$ y $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ tales que $f\ |_A, f\ |_B$ y $f\ |_{A\cap B}$ son integrables, también lo es f y se verifica: $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$ (ver p.ej. [6], Teorema 8.5 y Ejercicio 8.9).

Ejemplo 2.8 (a) *La función característica* $1_{(0,\infty)} : \mathbb{E}^1 \to \mathbb{R}$ *no es integrable. La función característica* $1_{(0,\infty)\times\{0\}} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$ *es integrable y su integral vale cero.* (b) *La función* $f : [0,1] \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ *no es integrable.* (c) *La función* $f : [1,\infty) \ni x \mapsto \frac{senx}{x} \in \mathbb{R}$ *no es integrable, y ello a pesar de que existe el límite (finito)* $\lim_{b\to\infty} \int_{[1,b]} \frac{senx}{x}$ *(ver [6], 8.7, Ejemplo 1).*

(B) Es importante disponer de métodos de evaluación de integrales que eviten tener que aplicar la definición de integral como límite de una suma. En el caso $n = 1$, un tal método lo proporciona el Teorema fundamental del cálculo (ver [2], Teorema 9.32 y [6], Teorema 8.6), que afirma que, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua (por tanto, integrable), entonces f posee una **primitiva** g (esto es, una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, diferenciable en (a,b) y con derivada primera igual a $f\ |_{(a,b)}$) y se tiene: $\int_a^b f(x)dx \equiv \int_{[a,b]} f = g(b) - g(a)$ (para cualquier tal g). El análogo para $n = 2$ (el caso n arbitrario es similar) lo constituye el teorema de Fubini, que reduce la integral a dos integraciones sucesivas en dimensión 1:

Teorema 2.9 (Fubini) *Sea* $[\vec{a},\vec{b}] \equiv [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \subset \mathbb{E}^2$ *un intervalo* 2*-dimensional cerrado y sea* $f : [\vec{a},\vec{b}] \to \mathbb{R}$ *una función continua (por tanto, integrable). Entonces se tiene:*

$$\int_{[\vec{a},\vec{b}]} f \ = \int_{a_2}^{b_2} (\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx)dy = \int_{a_1}^{b_1} (\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy)dx \ ,$$

donde la variable y se mantiene constante en el integrando de $\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx$ y la x en el de $\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy$.

Demostración. Ver [2], Teorema 10.20 y [6], Teorema 9.1 ■

Una aplicación del Teorema de Fubini la constituye el Teorema de Green, que se usará en el Teorema 4.21. El teorema de Green tiene una primera versión para rectángulos (o para discos), que es fácil de demostrar. Necesitaremos una versión algo más general (Corolario 2.10).

Llamaremos **camino en** $\mathbb{E}^n$ $(n \geq 2)$ a una aplicación continua $\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}^n$ que verifica la siguiente propiedad (diferenciabilidad a trozos): existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ de $[a,b]$ de forma que cada $\alpha_i \equiv \alpha \mid_{[t_{i-1},t_i]}$ $(i = 1, ..., k)$ es una curva (diferenciable). El camino α se dice **cerrado** si $\alpha(a) = \alpha(b)$; y se dice **simple** si la aplicación $\alpha \mid_{[a,b)}$ es inyectiva.

Si $\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}^2$ es un camino cerrado y simple, se demuestra que el conjunto $\mathbb{E}^2 - \operatorname{Im}\alpha$ está constituido por dos abiertos conexos disjuntos, uno de ellos acotado, con $\operatorname{Im}\alpha$ como frontera común ("teorema de la curva de Jordan"; ver [2], Teorema 8.40, sin demostración y [5], 5.7, Teorema 1, demostración en el caso de que α sea diferenciable), con lo que la unión (compacta) $\mathcal{R}$ del abierto acotado y su frontera posee área (Observación 2.7). El camino α se dice **positivo** si el compacto $\mathcal{R}$ queda siempre a la izquierda de α (ver [2], Definición 8.23).

Corolario 2.10 (Green) *Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}^2$ un camino cerrado, simple y positivo. Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{E}^2$ un abierto que contenga a la unión (compacta) $\mathcal{R}$ del abierto acotado (de $\mathbb{E}^2 - \operatorname{Im}\alpha$) y su frontera y sean $P, Q : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ funciones con derivadas parciales primeras continuas. Entonces se tiene (el miembro de la izquierda tiene sentido, por ser $\mathcal{R}$ acotado, $\partial\mathcal{R}$ de medida nula y el integrando una función acotada y continua):*

$$\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) = \int_{[a,b]} \left((P \circ \alpha) \frac{d\alpha_1}{dt} + (Q \circ \alpha) \frac{d\alpha_2}{dt} \right) \quad .$$

Demostración. Ver [2], Teorema 10.39 (versión para rectángulos) y [2], Teorema 10.43 (versión general) ■

Recordemos por último la siguiente versión del teorema del cambio de variable:

Teorema 2.11 (cambio de variable) *Sean $\mathbb{U}, \overline{\mathbb{U}}$ abiertos de $\mathbb{E}^n$ y $\psi : \overline{\mathbb{U}} \to \mathbb{U}$ un cambio de coordenadas en $\mathbb{U}$ (esto es, un difeomorfismo). Sea $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces $(f \circ \psi) |\det J_\psi| : \overline{\mathbb{U}} \to \mathbb{R}$ es integrable y se tiene:*

$$\int_{\mathbb{U}} f = \int_{\overline{\mathbb{U}}} (f \circ \psi) |\det J_\psi| \ .$$

Demostración Ver [8], Teorema 3.13. Para otras versiones, más elementales en su demostración pero más restrictivas en su enunciado, ver [2], Teorema 10.30 y [6], Teorema 9.3 ■

2.2. SUPERFICIES

2.2.1. Parametrizaciones locales de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Superficies

Las superficies son subconjuntos que admiten parametrizaciones (locales, 2-dimensionales) en torno a cada uno de sus puntos. Alternativamente, son subconjuntos que pueden describirse, localmente, como conjuntos de nivel regulares o también como gráficas de funciones diferenciables.

(A) Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea $r < n$. Una **parametrización (local, r-dimensional) de** S es una aplicación $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$, donde $\mathbb{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^r$ y $\mathcal{U}$ es un abierto de S en la topología relativa (esto es, intersección de S con un abierto de $\mathbb{R}^n$), tal que: (i) φ es un homeomorfismo, (ii) φ es (considerada como aplicación de $\mathbb{U}$ en $\mathbb{R}^n$) diferenciable, y (iii) la jacobiana J_φ es de rango r en todo punto de $\mathbb{U}$.

La parametrización φ queda determinada (2.1.1) por sus componentes $\varphi_i \equiv x_i \circ \varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$.

Los conjuntos de nivel regulares en el plano admiten parametrizaciones (locales, 1-dimensionales) en torno a cada uno de sus puntos (Ejercicio 6.1.21a).

(B) Un subconjunto M de $\mathbb{R}^3$ se llama **superficie** si, para cada punto $p \in M$, existe una parametrización (local, 2-dimensional) $\varphi :(\mathbb{R}^2 \supset)\mathbb{U} \to \mathcal{U}$ de M con $p \in \mathcal{U}$.

Habitualmente denotaremos $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$ a las coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $u \equiv u_1$, $v \equiv u_2$ a las coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^2$.

Observación 2.12 1. *Definimos pues las superficies como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, de los que las parametrizaciones son sólo descripciones locales.*

Si un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es localmente una superficie, es una superficie.

Resulta trivialmente cierto que cualquier abierto de una superficie (en la topología relativa) es también una superficie. También es cierto (Observación 2.15(2)) que, si un subconjunto de una superficie es también superficie, necesariamente es un abierto de la primera.

2. *No deseamos que las superficies tengan "autointersecciones" ni "bordes", a fin de que pueda definirse sin ambigüedad el plano tangente en cada punto. Pues bien, la inyectividad de las parametrizaciones*

$\varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^3$ evita algunos tipos de autointersecciones (piénsese en la aplicación $\varphi : (-\pi - \varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R} \ni (u, v) \mapsto (senu, sen2u, v) \in \mathbb{R}^3$, que es diferenciable pero no es inyectiva). Por otra parte, la continuidad de las inversas $\varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{U}$ evita otros tipos de autointersecciones (piénsese en la aplicación $\varphi : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \ni (u, v) \mapsto (senu, sen2u, v) \in \mathbb{R}^3$, que es diferenciable e inyectiva, pero cuya inversa φ^{-1} no es continua) y garantiza que los cambios de carta serán difeomorfismos (ver Observación 2.20(1)).

El que las parametrizaciones φ sean diferenciables con $rg(J_\varphi) = 2$, junto con la inyectividad de φ y la continuidad de φ^{-1}, garantizará la existencia de un plano tangente en cada punto de una superficie (Proposición 2.22).

Teorema 2.13 *Dado un subconjunto S de $\mathbb{R}^3$, considérense las siguientes afirmaciones: (i) S es una superficie, (ii) S es un conjunto de nivel regular para una función diferenciable $f : (\mathbb{R}^3 \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}$, y (iii) S es la gráfica de una función diferenciable $\varsigma : (\mathbb{R}^2 \supset)\Omega \to \mathbb{R}$. Entonces se verifica: $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ y las tres afirmaciones son localmente equivalentes.*

Demostración. Hay que tener en cuenta que las afirmaciones (ii) y (iii) son de naturaleza "global", mientras que (i) es "local". Se tiene:

1. $(ii) \overset{loc.}{\Rightarrow} (iii)$. Teorema 2.4 (función implícita).

   Contraejemplo a que la implicación sea global, la esfera.

2. $(iii) \Rightarrow (i)$. En efecto (ver [5], 2.2, Propos. 1, p. 69): si $\varsigma : (\mathbb{R}^2 \supset)\Omega \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, la aplicación $\varphi : \Omega \ni (x, y) \mapsto (x, y, \varsigma(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ tiene por imagen la gráfica de ς, es continua, es inyectiva, posee inversa $\varphi^{-1} = \pi_{12} |_{gráfica(\varsigma)}$ continua, es diferenciable y verifica $rg(J_\varphi(x, y)) = 2$; así φ resulta ser una parametrización global de la gráfica de ς.

3. $(ii) \Rightarrow (i)$. Consecuencia de 1 y 2.

4. $(i) \overset{loc.}{\Rightarrow} (iii)$. En efecto (ver [5], 2.2, Proposición 3, p. 74): Sea $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ una parametrización de M con $p \in \mathcal{U}$; s.p.d.g. podemos suponer que se verifica $\det(\partial(\varphi_1, \varphi_2)/\partial(u, v))\ (\varphi^{-1}(p)) \neq 0$. Consideremos la aplicación diferenciable $\tilde{\varphi} := \pi_{12} \circ \varphi : (\mathbb{R}^2 \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}^2_{xy}$, que verifica:

$$\det J_{\tilde{\varphi}}(\varphi^{-1}(p)) = \det \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} \right) (\varphi^{-1}(p)) \neq 0 \ .$$

   Por el Teorema 2.3 (función inversa) existen entornos $\mathbb{A}(\subset \mathbb{U})$ de $\varphi^{-1}(p)$ y $\Omega(\subset \mathbb{R}^2)$ de $\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(p)) = \pi_{12}(p)$ tales que $\tilde{\varphi}(\mathbb{A}) = \Omega$ y la aplicación $\tilde{\varphi} |_{\mathbb{A}}: \mathbb{A} \to \Omega$ es un difeomorfismo.

Entonces la función diferenciable $\varsigma := \varphi_3 \circ \ (\tilde{\varphi} \mid_{\mathbb{A}})^{-1} : \Omega \to \mathbb{R}_z$ tiene por gráfica:

$$\{(x, y, \varsigma(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\} = \{(\tilde{\varphi}(u, v), \varphi_3(u, v)) \mid (u, v) \in \mathbb{A}\} \equiv \varphi(\mathbb{A}) \ ,$$

que contiene a p y está contenida en $\mathcal{U}$. Pero, por ser φ una parametrización de M, $\varphi(\mathbb{A})$ es un abierto de M y el resultado se sigue.

5. $(iii) \Rightarrow (ii)$. Observación 2.5(2).

6. $(i) \overset{loc.}{\Rightarrow} (ii)$. Consecuencia de 4 y 5.

   Contraejemplo a que la implicación sea global, la banda de Moebius o, en general, toda superficie no orientable (ver más adelante 3.2.1). ■

Se sigue de lo anterior que *una superficie siempre puede expresarse localmente como conjunto de nivel regular para alguna función diferenciable* $f : (\mathbb{R}^3 \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}$; se dice entonces que la superficie está dada "en implícitas". También se sigue de lo anterior que *una superficie siempre puede expresarse localmente como la gráfica de alguna función diferenciable* $\varsigma : (\mathbb{R}^2 \supset)\Omega \to \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.14 *Determinar, para cada $r \geq 0$, si el subconjunto $M_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2 - z^2} = r\}$ es o no una superficie.*

En primer lugar, se tiene: $M_r = f^{-1}(r^2)$, con $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 \in \mathbb{R}$, que es diferenciable y verifica: $J_f(x, y, z) = (2x \quad 2y \quad -2z)$.

Sea $r > 0$. En tal caso, $M_r \subset \mathbb{U} \equiv \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$; y puesto que $rg(J_{f|_{\mathbb{U}}}) = 1$, el "hiperboloide de 1 hoja" M_r es un conjunto de nivel regular para la función diferenciable $f \mid_{\mathbb{U}}$ y, por tanto (Teorema 2.13), es una superficie.

Sea $r = 0$. En tal caso, $M_0 - \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{U}$; y puesto que $rg(J_{f|_{\mathbb{U}}}) = 1$, el "cono sin vértice" $M_0 - \{(0, 0, 0)\}$ es un conjunto de nivel regular para la función diferenciable $f \mid_{\mathbb{U}}$ y, por tanto (Teorema 2.13), es una superficie.

En cuanto al "cono" (completo) M_0: puesto que $rg(J_f(0, 0, 0)) = 0$, no podemos usar f para aplicar el Teorema 2.13 en el entorno del vértice $(0, 0, 0)$. Pues bien, la idea de buscar otra función diferenciable $h : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, con $\mathbb{V}$ cierto entorno de $(0, 0, 0)$, tal que $M_0 \cap \mathbb{V}$ sea un conjunto de nivel regular para h (idea que en ocasiones tiene éxito, ver Ejercicio 6.2.3c) está aquí condenada al fracaso: porque, si ello fuera posible, M_0 debería poder expresarse (también por el Teorema 2.13), localmente, como la gráfica de una función diferenciable, del tipo

$$x = \varsigma(y, z) \qquad ó \qquad y = \varsigma(x, z) \qquad ó \qquad z = \varsigma(x, y) \ \ ,$$

y esto es imposible (ya que las proyecciones de M_0 sobre los planos coordenados yz , xz y xy no son inyectivas en el entorno de $(0, 0, 0)$). Se concluye que M_0 no es una superficie (ver más argumentos en el Ejemplo 2.25).

Observación 2.15 1. *Cuando ya se sabe que el subconjunto M es una superficie, para concluir que una aplicación diferenciable $\varphi : (\mathbb{R}^2 \supset)\mathbb{U} \to M$ es de hecho una parametrización de M basta probar que φ es inyectiva y que $rg(J_\varphi(q)) = 2,\ \forall q \in \mathbb{U}$; y no es necesario comprobar que $\varphi^{-1} : \varphi(\mathbb{U}) \to \mathbb{U}$ es continua, ya que siempre va a serlo.*

En efecto (ver [5], 2.2, Proposición 4, p. 75, la demostración resulta allí algo equívoca): Todo $p \in \varphi(\mathbb{U})$ posee (Teorema 2.13(4)) un entorno en M que es la gráfica de una función diferenciable, s.p.d.g. $\varsigma : (\mathbb{R}^2_{xy} \supset)\Omega \to \mathbb{R}_z$. Por ser φ continua, existe un entorno de $\varphi^{-1}(p)$ (s.p.d.g. el propio $\mathbb{U}$) cuya imagen está contenida en la gráfica de ς, esto es, $\varphi_3 = \varsigma \circ \tilde{\varphi}$, con $\tilde{\varphi} := \pi_{12} \circ \varphi : (\mathbb{R}^2 \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}^2_{xy}$. Puesto que, por hipótesis, $rg(J_\varphi) = 2$, lo anterior implica que necesariamente debe ser:

$$\det J_{\tilde{\varphi}}(\varphi^{-1}(p)) \neq 0 \ .$$

Por el Teorema 2.3 (función inversa) existen entornos $\mathbb{A}(\subset \mathbb{U})$ de $\varphi^{-1}(p)$ y $\mathbb{B}(\subset \Omega)$ de $\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(p)) = \pi_{12}(p)$ tales que $\tilde{\varphi}(\mathbb{A}) = \mathbb{B}$ y la aplicación $\tilde{\varphi}\ |_{\mathbb{A}}: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un difeomorfismo. Pero entonces $\varphi^{-1}\ |_{\varphi(\mathbb{A})} = (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \pi_{12})\ |_{\varphi(\mathbb{A})}$, que es continua. Al ser p arbitrario, φ^{-1} resulta continua y, por tanto, φ es un homeomorfismo y una parametrización de M.

2. *Podemos ahora probar que, si un subconjunto S de una superficie M es también superficie, necesariamente es un abierto de M. Para ello, basta probar que cada punto de S posee un M-entorno contenido en S. Sean $p \in S$ y $\varphi : (\mathbb{R}^2 \supset)\mathbb{U} \to S$ una parametrización de S en torno a p, con lo que φ es inyectiva y $rg(J_\varphi(q)) = 2,\ \forall q \in \mathbb{U}$. Al ser $\varphi(\mathbb{U}) \subset M$, φ resulta (apartado 1) también una parametrización de M, con lo que $\varphi(\mathbb{U})$ es efectivamente un M-entorno de p.*

2.2.2. Cartas en superficies

Las cartas son las inversas de las parametrizaciones.

Si $\varphi : (\mathbb{R}^2 \supset)\ \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ es una parametrización de una superficie M, la aplicación inversa $\varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{U}$ se denomina una **carta de** M. Para hacer explícito su dominio, denotaremos habitualmente las cartas por $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$. Diremos que $\mathcal{U}$ es un **entorno coordenado de** M. Así se tiene ($\forall p \in \mathcal{U}$):

$$\varphi^{-1}(p) = ((u \circ \varphi^{-1})(p), (v \circ \varphi^{-1})(p)) \ .$$

Pues bien, presuponiendo que se ha fijado de antemano la carta φ^{-1}, las funciones (u, v) se considerarán indistintamente funciones definidas sobre

$\mathbb{U} = \varphi^{-1}(\mathcal{U})$ *o sobre el propio* $\mathcal{U}$*; por lo que valdrán las identificaciones* $u \equiv u \circ \varphi^{-1}$, $v \equiv v \circ \varphi^{-1}$, *escribiremos*

$$p = (u(p), v(p)) \equiv (\ (u \circ \varphi^{-1})(p), (v \circ \varphi^{-1})(p)\ )$$

y diremos que $(u(p), v(p))$ *son las* **coordenadas de** p **en la carta** $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$. La "filosofía" que subyace a esta identificación es ya familiar de los cambios de coordenadas en abiertos de $\mathbb{R}^n$ (2.1.4).

Ejemplo 2.16 *(carta polar de la esfera) La esfera* $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0\}$ *admite la parametrización local* $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ *dada por*

$$\begin{cases} \mathcal{U} = M - \{(x, y, z) \in M \mid x \leq 0, y = 0\} \\ \mathbb{U} = (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \\ \varphi(\vartheta \equiv u, \phi \equiv v) := (x = r sen\vartheta \cos\phi, y = r sen\vartheta sen\phi, z = r\cos\vartheta)\ ,\ \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow\ \ \varphi^{-1}(x, y, z) = (\vartheta = \arccos_{(0,\pi)} \frac{z}{r}, \phi = \begin{cases} \arccos_{(-\pi,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ si\ y < 0 \\ 0\ ,\ si\ y = 0 \\ \arccos_{(0,\pi)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ si\ y > 0 \end{cases}). \end{cases}$$

En efecto: (i) φ *(claramente continua) es inyectiva, ya que se verifica:*

$$\begin{cases} \cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_2 \overset{\vartheta_i \in (0,\pi)}{\Rightarrow} \vartheta_1 = \vartheta_2 \\ \left.\begin{array}{l} \cos\phi_1 = \cos\phi_2 \\ sen\phi_1 = sen\phi_2 \end{array}\right\} \overset{\phi_i \in (-\pi,\pi)}{\Rightarrow} \phi_1 = \phi_2\ , \end{cases}$$

además φ^{-1} *es continua, ya que* $\arccos_{(0,\pi)}$ *y* $\arccos_{(-\pi,0)}$ *lo son y* $\lim_{y\to 0^-, x>0}\ \phi = 0 = \lim_{y\to 0^+, x>0}\ \phi$*; (ii)* φ *es diferenciable; y (iii) la jacobiana*

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} r\ \cos\vartheta\cos\phi & -r\ sen\ \vartheta\ sen\ \phi \\ r\ \cos\vartheta\ sen\phi & r\ sen\ \vartheta\cos\phi \\ -r\ sen\ \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

tiene siempre rango 2*, ya que:* $\det J_\varphi^{13} = -r^2 sen^2\vartheta sen\phi$, $\det J_\varphi^{23} = r^2 sen^2\vartheta\cos\phi$, *la función* $sen\vartheta$ *nunca se anula en* $(0, \pi)$ *y las funciones* $sen\phi$ *y* $\cos\phi$ *no se anulan simultáneamente.*

La carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ *se denomina* ***(una) carta polar de la esfera*** M *y las coordenadas* ϑ *y* ϕ *se llaman* ***colatitud*** *y* ***azimut****, respectivamente. Esta carta puede obviamente obtenerse también a partir del cambio de cartesianas a polares en* $\mathbb{R}^3$ *(Ejemplo 2.6), con* $\mathcal{U}_{aquí} = \mathbb{U}_{allí} \cap M$, $\mathbb{U}_{aquí} = \overline{\mathbb{U}}_{allí} \cap \{\rho = r\}$ *y* $\varphi_{aquí} = \psi_{allí}\ |_{\overline{\mathbb{U}}_{allí} \cap \{\rho = r\}}$.

Ejemplo 2.17 *Sea* $r > 0$*. Sea* $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ *una curva alabeada parametrizada por la longitud de arco, con curvatura* $\kappa(< 1/r)$ *y torsión* τ *constantes, y sea* $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ *su triedro de Frenet. Considérese el conjunto* $M := \mathrm{Im}\,\Phi$*, siendo*

$$\Phi : I \times \mathbb{R} \ni (u, v) \mapsto \alpha(u) + r\cos v\ \vec{N}(u) + r sen\ v\ \vec{B}(u) \in \mathbb{E}^3\ .$$

El conjunto M es un "tubo" de radio r centrado en $\mathrm{Im}\,\alpha$. En el caso $\tau \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha$ es una hélice (Ejercicio 6.1.14a); en el caso $\tau = 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha$ es una circunferencia de radio $1/\kappa$ (Ejercicio 6.1.1b) y M es un toro de radios $1/\kappa$ y r (Ejercicio 6.2.7). Supongamos que M constituye una superficie (para α genérica, no lo será). Como Φ es diferenciable y verifica ($\forall(u,v) \in I \times \mathbb{R}$):

$$rg(J_\Phi(u,v)) \overset{(17)}{=} rg\left((1 - \kappa r\cos v)\,\vec{T}(u) + \tau r\left[-sen v\ \vec{N}(u) + \cos v\vec{B}(u)\right]\ ,\right.$$

$$\left. r\left[-sen v\ \vec{N}(u) + \cos v\vec{B}(u)\right]\right) = 2\ ,$$

la Observación 2.15(1) garantiza que, para todo $p \in M$, existe un abierto $J \subset I$ tal que $\varphi \equiv \Phi\mid_{J\times(-\pi,\pi)} : J \times (-\pi,\pi) \to M$ es una parametrización de M en torno a p. Llamaremos $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ a la carta asociada.

2.3. APLICACIONES DIFERENCIABLES ENTRE SUPERFICIES. PLANO TANGENTE

La noción de diferenciabilidad para aplicaciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^n$ (2.1.1) debe ser generalizada para aplicaciones definidas en abiertos de superficies. Se prueba que, en este sentido, las cartas son aplicaciones diferenciables, por tanto difeomorfismos.

2.3.1. Aplicaciones diferenciables entre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

Este apartado generaliza 2.1.1.

(A) Sean S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\bar{S}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Una aplicación $F : S \to \bar{S}$ se dirá **diferenciable** si, para cada punto $p \in S$, existen un entorno $\mathbb{U}(\subset \mathbb{R}^n)$ de p y una **extensión** $\tilde{F}$ de $F\mid_{\mathbb{U}\cap S}$ a $\mathbb{U}$ (esto es, una aplicación $\tilde{F} : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ tal que $\tilde{F}\mid_{\mathbb{U}\cap S} = F\mid_{\mathbb{U}\cap S}$) diferenciable. En particular, *si F es diferenciable, es continua.* Obsérvese que, aun siendo F diferenciable, la noción de "derivadas parciales de F" en un punto de S puede carecer de sentido.

Ejemplo 2.18 *(a) Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. La función $f : S \ni (x,y,z) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2} \in \mathbb{R}$ es diferenciable si y sólo si $(0,0,0) \notin S$. (b) Sea S el plano xy. La función diferenciable $f : S \ni (x,y,0) \mapsto x^2+y^2 \in \mathbb{R}$ no posee derivada parcial con respecto a z, y atribuirle la de sus extensiones resulta equívoco: p.ej., la extensión $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto x^2+y^2 \in \mathbb{R}$ verifica $\partial\tilde{f}/\partial z\mid_S = 0$, mientras que la extensión $\bar{f} : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+xz \in \mathbb{R}$ verifica $\partial\bar{f}/\partial z\mid_S = x$.*

El conjunto $\mathfrak{F}(S)$ de las funciones diferenciables $f : S \to \mathbb{R}$ tiene estructura de anillo.

Resulta inmediato (trabajando con extensiones locales) que la composición de aplicaciones diferenciables entre subconjuntos del espacio afín es también diferenciable. Una aplicación diferenciable $F : S \to \bar{S}$ se llama **difeomorfismo** si es biyectiva y si su inversa $F^{-1} : \bar{S} \to S$ es también diferenciable. Obviamente, todo difeomorfismo es un homeomorfismo.

Concentrémonos en las superficies. Utilizando el teorema de la función inversa (Teorema 2.3) se demuestra inmediatamente el siguiente

Lema 2.19 *Sea $\varphi : (\mathbb{R}^2 \supset)\mathbb{U} \to \mathcal{U}$ una parametrización de una superficie M. Entonces la aplicación diferenciable $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ es un difeomorfismo cuya inversa es la carta $\varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{U}$.*

Demostración. Lo único que hay que probar es que φ^{-1} es diferenciable. Sea $p \in \mathcal{U}$; s.p.d.g. podemos suponer que se verifica $\det(\partial(\varphi_1, \varphi_2)/\partial(u, v))\ (\varphi^{-1}(p)) \neq 0$. Consideremos la aplicación diferenciable $\tilde{\varphi} := \pi_{12} \circ \varphi : (\mathbb{R}^2 \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}^2_{xy}$, que verifica:

$$\det J_{\tilde{\varphi}}(\varphi^{-1}(p)) = \det \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} \right) (\varphi^{-1}(p)) \neq 0 \ .$$

Por el Teorema 2.3 (función inversa) existen entornos $\mathbb{A}(\subset \mathbb{U})$ de $\varphi^{-1}(p)$ y $\mathbb{B}(\subset \mathbb{R}^2)$ de $\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(p)) = \pi_{12}(p)$ tales que $\tilde{\varphi}(\mathbb{A}) = \mathbb{B}$ y la aplicación $\tilde{\varphi} |_{\mathbb{A}}: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un difeomorfismo.

Entonces $\varphi(\mathbb{A})$ es abierto de M (puesto que φ^{-1} es continua) y la aplicación $\varphi^{-1} |_{\varphi(\mathbb{A})}: \varphi(\mathbb{A}) \to \mathbb{U}$ coincide con la aplicación diferenciable $(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \pi_{12}) |_{\varphi(\mathbb{A})}$. Se concluye que φ^{-1} es diferenciable en torno a p. Al ser p arbitrario, el resultado se sigue ■

Observación 2.20 *1. Resulta así que las parametrizaciones de una superficie son precisamente los difeomorfismos entre abiertos de $\mathbb{R}^2$ y abiertos de la superficie. Por otra parte, la identificación de un abierto $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ con la superficie $\mathbb{U} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ conduce a que cualquier parametrización de una superficie es un difeomorfismo entre superficies.*

2. *Sean M una superficie y $f : M \to \mathbb{R}$ una función. El Lema 2.19 implica que f es diferenciable en $p \in M$ si y sólo si, para alguna (y toda) parametrización local $\varphi : (\mathbb{R}^2 \supset)\mathbb{U} \to \mathcal{U} \subset M$ en torno a p, la función compuesta $f \circ \varphi : (\mathbb{R}^2 \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$.*

3. *Sean M una superficie y $\alpha : I \to M$ una curva (por tanto, diferenciable) por $p \in M$. El Lema 2.19 también implica que, dada cualquier parametrización φ: $\mathbb{U} \to \mathcal{U}$ de M en torno a p, la aplicación $\varphi^{-1} \circ \alpha : I \to \mathbb{U}$ es diferenciable, y por tanto es una curva. Si u, v son las coordenadas de φ, escribiremos*

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)) \equiv ((u \circ \varphi^{-1} \circ \alpha)(t), (v \circ \varphi^{-1} \circ \alpha)(t))$$

y diremos que $(u(t), v(t))$ *es la* ***expresión local de*** α ***en la carta*** $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$.

(B) Si $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{U})$, $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1} : \overline{\mathcal{U}} \to \overline{\mathbb{U}})$ son dos cartas de una superficie M, con $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$ no vacío, resulta inmediato del Lema 2.19 que la aplicación **cambio de carta**

$$\bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi \; : \; (\mathbb{U} \supset) \, \varphi^{-1}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}) \to \; \bar{\varphi}^{-1}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}) \; (\subset \overline{\mathbb{U}}) \tag{24}$$

es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^2$ (en el lenguaje de 2.1.4, se trata de un cambio de coordenadas en $\bar{\varphi}^{-1}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$). Diremos entonces que las ecuaciones $\bar{u}_i = \bar{u}_i(u, v) \equiv (\bar{u}_i \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(u, v), \; i = 1, 2,$ son las **ecuaciones del cambio de carta**. La correspondiente matriz jacobiana $J_{\bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi} := \left(\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right) \equiv \begin{pmatrix} \partial\bar{u}/\partial u & \partial\bar{u}/\partial v \\ \partial\bar{v}/\partial u & \partial\bar{v}/\partial v \end{pmatrix}$ está definida en $\varphi^{-1}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$.

Ejemplo 2.21 *El paraboloide hiperbólico* $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$ *admite las parametrizaciones locales (comprobar que lo son!)* $\varphi : (\mathbb{R}^2 \supset) \mathbb{U} \to \mathcal{U}(\subset M)$ *y* $\bar{\varphi} : (\mathbb{R}^2 \supset) \overline{\mathbb{U}} \to \overline{\mathcal{U}}(\subset M)$ *dadas por*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} = M \quad , \quad \mathbb{U} = \mathbb{R}^2 \\ \varphi(u, v) = (x = u + v, y = u - v, z = 4uv) \; , \; \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \; \varphi^{-1}(x, y, z) = (u = \frac{x+y}{2}, v = \frac{x-y}{2}) \end{array} \right. \qquad y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{U}} = M \cap \{z > 0\} \quad , \quad \overline{\mathbb{U}} = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{u} \neq 0\} \\ \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = (x = \bar{u} \cosh \bar{v}, y = \bar{u} \; senh \bar{v}, z = \bar{u}^2) \; , \; \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \; \bar{\varphi}^{-1}(x, y, z) = (\bar{u} = (signo \; x)\sqrt{z}, \bar{v} = arc \tanh(\frac{y}{x})) \; . \end{array} \right.$$

Entonces las ecuaciones del cambio de carta

$$\bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi \; : \; (\mathbb{U} \supset) \, \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid uv > 0\} \to \{(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{u} \neq 0\} \; (= \overline{\mathbb{U}})$$

son: $\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}(u, v) = signo(u + v) \, 2\sqrt{uv} \\ \bar{v} = \bar{v}(u, v) = arc \tanh(\frac{u-v}{u+v}) \end{array} \right.$ *, con inversa:* $\left\{ \begin{array}{l} u = u(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\bar{u}}{2} e^{\bar{v}} \\ v = v(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\bar{u}}{2} e^{-\bar{v}} \end{array} \right.$.

2.3.2. Plano tangente a una superficie en un punto

El "conjunto tangente" a una superficie en cada punto resulta ser un plano vectorial, que puede verse como la imagen de la diferencial de cualquier parametrización de la superficie en torno al punto.

(A) Sean S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $p \in S$. Generalizando la expresión hallada en 1.2.3 para el espacio tangente $T_p\mathbb{R}^n$, denominamos **conjunto tangente a** S **en** p al conjunto

$$T_pS := \{\alpha'(0) \mid \alpha \in C(p, S)\} \; \subset T_p\mathbb{R}^n,$$

donde $C(p,S)$ es la familia de curvas por p en S. Si $\mathcal{U}$ es abierto de S (en la topología relativa) y $p \in \mathcal{U}$, resulta $T_p\mathcal{U} = T_pS$ (en particular, $T_p\mathbb{U} = T_p\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{U}$ es abierto de $\mathbb{R}^n$).

Como sabemos (1.1.3), $T_p\mathbb{R}^n$ tiene estructura natural de espacio vectorial. Pues bien, el conjunto T_pS no tiene por qué (!) ser un *subespacio* de $T_p\mathbb{R}^n$; sin embargo, como vamos a ver, sí lo es cuando S es una superficie.

Proposición 2.22 *Sea $M(\subset \mathbb{R}^3)$ una superficie y sea $p \in M$.*

1. *Si $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ es una parametrización (local) de M en torno a p, entonces se verifica: $T_pM = \mathrm{Im}(d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi)$.*

2. *El conjunto T_pM es un subespacio de $T_p\mathbb{R}^3$ de dimensión 2, denominado* ***plano tangente a** M **en** p.*

3. *Si $\mathcal{V}(\subset M)$ es un entorno de p de la forma $\mathcal{V} = f^{-1}(0)$, donde f es una cierta función diferenciable (definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$ y valuada en $\mathbb{R}$) con $rg(J_f\ |_{\mathcal{V}}) = 1$ (recordar Teorema 2.13), entonces se verifica: $T_pM = \ker(d_pf)$.*

Demostración. Probemos 1 (ver [5], 2.4, Proposición 1): si $\vec{\eta}_{\varphi^{-1}(p)} = \alpha'(0) \in T_{\varphi^{-1}(p)}\mathbb{R}^2$, para cierta curva $\alpha \in C(\varphi^{-1}(p), \mathbb{U})$, entonces se verifica: $(\varphi\circ\alpha)'(0) \overset{(21)}{=} d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi\ (\vec{\eta}_{\varphi^{-1}(p)})$, con lo que $\mathrm{Im}(d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi) \subset T_pM$. Viceversa: si $\vec{\xi}_p = \alpha'(0) \in T_pM$, para cierta curva $\alpha \in C(p,\mathcal{U})$, se verifica: $d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi\ ((\varphi^{-1}\circ\alpha)'(0)) \overset{(21)}{=} \vec{\xi}_p$ (recordar que $\varphi^{-1}\circ\alpha$ es diferenciable, Observación 2.20(3)), con lo que $T_pM \subset \mathrm{Im}(d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi)$.

El apartado 2 es consecuencia inmediata de 1 y de que la aplicación lineal $d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi\ :\ T_{\varphi^{-1}(p)}\mathbb{R}^2 \to T_p\mathbb{R}^3$ tiene siempre rango 2.

Probemos 3. Si $\vec{\xi}_p = \alpha'(0) \in T_pM$, para cierta curva $\alpha \in C(p, f^{-1}(0))$, entonces se verifica: $d_pf\ (\vec{\xi}_p) \overset{(21)}{=} (f\circ\alpha)'(0) = \vec{0}_{f(p)}$, con lo que $T_pM \subset \ker(d_pf)$. Por otra parte, puesto que

$$\dim\ \ker(d_pf) = \dim\ T_p\mathbb{R}^3 - \dim\ \mathrm{Im}(d_pf) = 2 = \dim\ T_pM$$

(la segunda igualdad, al ser $rg(J_f(p)) = 1$), se concluye inmediatamente que: $\ker(d_pf) = T_pM$ ■

Observación 2.23 *1. Dada una superficie M y un punto $p \in M$, hemos optado (siguiendo a [5], 2.4) por dar una definición "intrínseca" de T_pM, probando luego que $T_pM = \mathrm{Im}(d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi)$, para cualquier parametrización local φ de M en torno a p. Otros textos (por ejemplo, [1],* *3.32) prefieren definir $T_pM := \mathrm{Im}(d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi)$, para cierta parametrización local φ de M en torno a p, quedando luego la tarea de probar que esta defición no depende de la φ empleada. En cualquier caso, la última demostración que se hace requiere ya saber que las parametrizaciones φ son difeomorfismos.*

2. *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. El que T_pS sea un subespacio de dimensión 2 de $T_p\mathbb{R}^3$, para todo $p \in S$, no implica que S sea una superficie (poner un ejemplo*).*

Ejemplo 2.24 *Calculemos el plano tangente a la esfera $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en el punto $p \equiv (1, 0, 0)$.*

Considerando la parametrización local de M (inversa de una carta polar, Ejemplo 2.16)

$$\varphi : \mathbb{U} \equiv (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \ni (\vartheta, \phi) \mapsto (sen\, \vartheta \cos \phi, sen\, \vartheta\ sen\, \phi, \cos \vartheta) \in \mathcal{U}\ ,$$

con jacobiana $J_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\phi & -\ sen\, \vartheta\ sen\, \phi \\ \cos\vartheta\ sen\, \phi & sen\, \vartheta \cos \phi \\ -\ sen\, \vartheta & 0 \end{pmatrix}$, *se tiene, en el punto* $p = \varphi(\vartheta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0)$*:*

$$T_pM \overset{Prop.\ 2.22(1)}{=} \mathrm{Im}\left(d_{(\frac{\pi}{2},0)}\varphi\right) \overset{2.1.3}{=} \{\left(J_\varphi(\frac{\pi}{2}, 0) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}\right)_p \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(0, \mu, -\lambda)_p \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\ .$$

Por otra parte, considerando que M es (globalmente) el conjunto de nivel regular $M = f^{-1}(0)$ para la función diferenciable $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1 \in \mathbb{R}$, con jacobiana $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$, se llega (faltaría más!) al mismo resultado. En efecto, se tiene:

$$T_pM \overset{Prop.\ 2.22(3)}{=} \ker(d_pf) = \{\vec{\xi}_p \mid J_f(1, 0, 0)\vec{\xi} = 0\} =$$

$$= \{\vec{\xi}_p \mid \xi_1 = 0\} = \{(0, \xi_2, \xi_3)_p \mid \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}\}\ .$$

Ejemplo 2.25 *Dos formas alternativas más de concluir que el cono (completo) $M_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ del Ejemplo 2.14 no es superficie: (i) el conjunto tangente $T_{(0,0,0)}M_0$ contiene 3 vectores linealmente independientes; y (ii) el conjunto tangente $T_{(0,0,0)}M_0$ no es un subespacio.*

(B) Sean M una superficie y $\varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{U}$ una carta de M con parametrización local asociada $\varphi :\ \mathbb{U} \ni (u, v) \mapsto (x, y, z) \in \mathcal{U}$. Para todo $p \in \mathbb{U}$, el conjunto

$$\left(d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi\ \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{\varphi^{-1}(p)}\ ,\ d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi\ \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{\varphi^{-1}(p)}\right)$$

constituye (puesto que $J_\varphi(\varphi^{-1}(p))$ tiene rango 2) una base del espacio vectorial tangente T_pM, lo que lleva a introducir la notación (para $i = 1, 2$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \overset{Not.}{\equiv} d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{\varphi^{-1}(p)} \overset{(19)}{=} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i}(\varphi^{-1}(p)) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \quad ; \qquad (25)$$

llamaremos a la base $((\frac{\partial}{\partial u})_p, (\frac{\partial}{\partial v})_p)$ de T_pM **base inducida por la carta** $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$. La "filosofía" que subyace a esta notación es ya familiar de los cambios de coordenadas en abiertos de $\mathbb{R}^n$ (2.1.4).

Observación 2.26 *Con esta notación, la velocidad de una curva $\alpha : I \to \mathcal{U}$ en $\tau \in I$ se escribe:*

$$\alpha'(\tau) \overset{(21)}{=} d_{\varphi^{-1}(\alpha(\tau))}\varphi\left((\varphi^{-1}\circ\alpha)'(\tau)\right) \overset{2.1.2}{=}$$

$$= d_{\varphi^{-1}(\alpha(\tau))}\varphi\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{du_i}{dt}(\tau)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{\varphi^{-1}(\alpha(\tau))}\right) \overset{(25)}{\equiv} \sum_{i=1}^{2}\frac{du_i}{dt}(\tau)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{\alpha(\tau)} ,$$

siendo $(u(t), v(t))$ la correspondiente expresión local (Observación 2.20(3)) de α.

2.3.3. Diferencial y regla de la cadena para aplicaciones entre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

El cálculo diferencial para aplicaciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^n$ (2.1.2-2.1.3) debe ser generalizado para aplicaciones definidas en abiertos de superficies.

Sean S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $p \in S$ y $\vec{\xi}_p \in T_pS$. Dada una función diferenciable (2.3.1) $f : S \to \mathbb{R}$, se define la **derivada direccional de** f **según** $\vec{\xi}_p$ como el número real

$$\vec{\xi}_p(f) := \vec{\xi}_p(\tilde{f}) \ ,$$

siendo $\tilde{f} : \mathbb{U}(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *cualquier* extensión (local) diferenciable de f. Este número está bien definido (esto es, no depende de la extensión $\tilde{f}$ elegida), ya que se tiene (para cualquier curva $\alpha \in C(p, S)$ con $\alpha'(0) = \vec{\xi}_p$):

$$\vec{\xi}_p(\tilde{f}) \overset{(22)}{=} \frac{d(\tilde{f}\circ\alpha)}{dt}(0) \overset{\tilde{f}\circ\alpha = f\circ\alpha}{=} \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}(0) \ .$$

Observación 2.27 *Sean M una superficie, $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ una carta de M y $p \in \mathcal{U}$. Sea $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable (y $\tilde{f}$ cualquier extensión local diferenciable). Entonces se tiene:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p (f) := \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p (\tilde{f}) \overset{(25)}{=} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i}(\varphi^{-1}(p)) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (\tilde{f}) \overset{2.1.2}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i}(\varphi^{-1}(p)) \, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}(p) \overset{2.1.3}{=} \frac{\partial (\tilde{f} \circ \varphi)}{\partial u_i}(\varphi^{-1}(p)) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u_i}(\varphi^{-1}(p)) \ .$$

Sean S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $\bar{S}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ y $p \in S$. Dada una aplicación diferenciable (2.3.1) $F : S \to \bar{S}$, se llama **diferencial de F en p** a la aplicación (*no necesariamente lineal*, en la medida en que el conjunto T_pS no tiene por qué ser un subespacio vectorial de $T_p\mathbb{R}^n$) $d_pF : T_pS \to T_{F(p)}\bar{S}$ dada por

$$d_pF \ (\vec{\xi}_p) := d_p\tilde{F} \ (\vec{\xi}_p) \ ,$$

siendo $\tilde{F} : \mathbb{U}(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ *cualquier* extensión (local) diferenciable de F. Esta aplicación está bien definida (esto es, no depende de la extensión $\tilde{F}$ local elegida y su imagen pertenece efectivamente a $T_{F(p)}\bar{S}$), ya que se tiene (para cualquier curva $\alpha \in C(p, S)$ con $\alpha'(0) = \vec{\xi}_p$):

$$d_p\tilde{F} \ (\vec{\xi}_p) \overset{(21)}{=} (\tilde{F} \circ \alpha)'(0) \overset{\tilde{F}\circ\alpha = F\circ\alpha}{=} (F \circ \alpha)'(0) \ .$$

Como se ve, *la diferencial d_pF que acabamos de definir no es sino es la restricción a T_pS de la aplicación lineal $d_p\tilde{F} : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$.* Cuando T_pS es un subespacio vectorial (como ocurre si S es un abierto de $\mathbb{R}^n$ o una superficie, Proposición 2.22(2)), la aplicación d_pF resulta lineal.

Si $F : S \to S'$ y $G : S' \to S''$ son aplicaciones diferenciables entre subconjuntos del espacio afín, sabemos que también lo es la aplicación $G \circ F : S \to S''$ y resulta inmediato comprobar (trabajando con extensiones locales y usando (20)) que se verifica para todo $p \in S$:

$$d_p(G \circ F) = d_{F(p)}G \circ d_pF \ , \tag{26}$$

lo que generaliza (20). Si $\alpha : I \to S$ es una curva, resulta también inmediato comprobar (trabajando con una extensión local y usando (21)) que se tiene para todo $\tau \in I$:

$$(F \circ \alpha)'(\tau) = d_{\alpha(\tau)}F \ (\alpha'(\tau)) \ \ , \tag{27}$$

lo que generaliza (21).

2.3.4. Representación local de aplicaciones continuas entre superficies

Las aplicaciones diferenciables entre superficies se describen localmente via aplicaciones diferenciables entre abiertos de $\mathbb{R}^2$.

Sea $F : M \to \bar{M}$ una aplicación *continua* entre superficies. Entonces, para cada punto $p \in M$ y cada carta $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1})$ en torno a $F(p) \in \bar{M}$, *existe* otra carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ en torno a p tal que $F(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$, con lo que la aplicación

$$F^{\varphi\bar{\varphi}} := \bar{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi : \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \to \bar{\varphi}^{-1}(\overline{\mathcal{U}})$$

está bien definida y resulta ser una aplicación continua entre abiertos de $\mathbb{R}^2$. Se denomina a $F^{\varphi\bar{\varphi}}$ **representación local de** F **en** $(\varphi, \bar{\varphi})$ y a las expresiones

$$\bar{u}_i \circ F \,|_{\mathcal{U}} = F_i^{\varphi\bar{\varphi}}(u, v) \ , \quad i = 1, 2, \tag{28}$$

ecuaciones locales de F **en** $(\varphi, \bar{\varphi})$.

Lema 2.28 *Sea $F : M \to \bar{M}$ una aplicación continua entre superficies. Entonces:*

1. *Si F es diferenciable, cualquier representación local de F es diferenciable.*

2. *Si F admite una representación local (en torno a cada punto $p \in M$) diferenciable, entonces F es diferenciable.*

3. *Si F es diferenciable, $p \in M$ y $F^{\varphi\bar{\varphi}}$ es una representación local de F en torno a p, se tiene:*

$$d_pF\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial F_j^{\varphi\bar{\varphi}}}{\partial u_i}(\varphi^{-1}(p)) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_j}\right)_{F(p)} \quad (i = 1, 2) \tag{29}$$

Demostración. El apartado 1 es inmediato, por ser $F^{\varphi\bar{\varphi}}$ composición de aplicaciones diferenciables (tener en cuenta que φ^{-1} lo es, Lema 2.19).

El apartado 2 también es obvio ya que, si $\mathcal{U}$ y $\overline{\mathcal{U}}$ son tales que $F(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$, se tiene: $F\,|_{\mathcal{U}} = \bar{\varphi} \circ F^{\varphi\bar{\varphi}} \circ \varphi^{-1}$.

Probemos 3. Teniendo en cuenta que, por definición, $F \circ \varphi = \bar{\varphi} \circ F^{\varphi\bar{\varphi}}$, se deduce, $\forall p \in \mathcal{U}$ $(i = 1, 2)$:

$$d_pF\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \overset{(25)}{\equiv} d_pF\left(d\varphi\,|_{\varphi^{-1}(p)}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{\varphi^{-1}(p)}\right) \overset{(26)}{=}$$

$$= d_{F^{\varphi\bar{\varphi}}(\varphi^{-1}(p))}\bar{\varphi}\left(d_{\varphi^{-1}(p)}F^{\varphi\bar{\varphi}}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{\varphi^{-1}(p)}\right) \overset{(19)}{=}$$

$$= d_{\bar{\varphi}^{-1}(F(p))}\bar{\varphi}\left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial F_j^{\varphi\bar{\varphi}}}{\partial u_i}(\varphi^{-1}(p)) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_j}\right)_{\bar{\varphi}^{-1}(F(p))}\right) \overset{(25)}{\equiv}$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial F_j^{\varphi\bar{\varphi}}}{\partial u_i}(\varphi^{-1}(p)) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_j}\right)_{F(p)} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 2.29 *Sean las superficies (comprobar que lo son!)* $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$ *y* $\bar{M} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4z = y^2 - x^2\}$. *Considérese la aplicación* $\tilde{F} : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto (x-y, x+y, z) \in \mathbb{R}^3$, *que es diferenciable y lleva* M *en* $\bar{M}$ *(comprobarlo!). Así, la restricción* $F \equiv \tilde{F}\mid_M : M \to \bar{M}$ *resulta ser una aplicación diferenciable entre superficies. Por ser* M *y* $\bar{M}$ *(globalmente) gráficas de funciones diferenciables de la forma* $\varsigma : (\mathbb{R}^2 \supset)\Omega \ni (x,y) \mapsto \varsigma(x,y) \in \mathbb{R}$, *ambas admiten cartas naturales (globales)* φ^{-1} *y* $\bar{\varphi}^{-1}$, *dadas por las respectivas proyecciones sobre el plano* xy. *La representación local de* F *en* $(\varphi, \bar{\varphi})$ *será entonces:*

$$F^{\varphi\bar{\varphi}} : (u,v) \overset{\varphi}{\mapsto} (u,v,uv) \overset{F}{\mapsto} (u-v, u+v, uv) \overset{\bar{\varphi}^{-1}}{\mapsto} (u-v, u+v) \ ,$$

esto es, $\begin{cases} (\bar{u} \circ F)(u,v) = u - v \\ (\bar{v} \circ F)(u,v) = u + v \end{cases}$, *con Jacobiana* $J_{F^{\varphi\bar{\varphi}}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; *y, para cualquier punto* $p \equiv (u,v) \in M$, *se tendrá:*

$$\begin{cases} d_{(u,v)}F \ \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{(u,v)} \overset{(29)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial}{\partial \bar{v}}\right)_{(\bar{u}=u-v, \bar{v}=u+v)} \\ d_{(u,v)}F \ \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{(u,v)} \overset{(29)}{=} \left(-\frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial}{\partial \bar{v}}\right)_{(\bar{u}=u-v, \bar{v}=u+v)} \end{cases} .$$

Observación 2.30

1. *(Coherencia de la notación) Sean* $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ *una carta de una superficie* M *y* $p \in \mathcal{U}$. *Tomando como* F *la propia* $\varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{U}$ *y, como cartas,* φ^{-1} *en* $\mathcal{U}$ *y la canónica* $id_{\mathbb{U}}$ *en* $\mathbb{U}$, *se tiene:* $F^{\varphi\, id_{\mathbb{U}}} = id_{\mathbb{U}}$. *De donde se sigue:*

$$d_p\varphi^{-1} \ \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \overset{(29)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{\varphi^{-1}(p)} \qquad (i = 1,2) \ ,$$

lo que es coherente con la notación (25).

2. *(Cambio de carta) Sean* $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ *y* $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1})$ *dos cartas de una superficie* M *y* $p \in \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$. *Tomando como* F *la identidad en* M, *se tiene:* $F^{\varphi\bar{\varphi}} = \bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ *(la aplicación cambio de carta, 2.3.1). De donde se sigue:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \overset{(29)}{=} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i}(\varphi^{-1}(p)) \ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_j}\right)_p \quad (i = 1,2)$$

(con $\bar{u} = \bar{u}(u,v)$, $\bar{v} = \bar{v}(u,v)$ *las ecuaciones del cambio de carta) o, en otras palabras,*

$$(\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p) = (\left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{v}}\right)_p) \ \left(\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}\right)(\varphi^{-1}(p)) \ .$$

2.3.5. Difeomorfismos entre superficies. Teorema de la función inversa para superficies

El teorema de la función inversa para aplicaciones definidas en abiertos de $\mathbb{R}^n$ (2.1.4) se generaliza para aplicaciones definidas en abiertos de superficies.

(A) Sean M y $\bar{M}$ superficies. Recordemos (2.3.1) que una aplicación diferenciable $F : M \to \bar{M}$ se llama **difeomorfismo** si es biyectiva y si su inversa $F^{-1} : \bar{M} \to M$ es también diferenciable.

Si existe un difeomorfismo $F : M \to \bar{M}$, las superficies M y $\bar{M}$ se dicen **difeomorfas**. Como la identidad, la inversa de un difeomorfismo y la composición de difeomorfismos son difeomorfismos, se concluye que la relación "ser difeomorfas" es de equivalencia.

Sabemos (Lema 2.19) que, dada cualquier carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ de una superficie M, la aplicación $\varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{U}$ es un difeomorfismo con inversa φ: $\mathbb{U} \to \mathcal{U}$. Puesto que las bolas (euclídeas) abiertas constituyen una base de la topología de $\mathbb{R}^2$ y son todas difeomorfas, se deduce (de la definición de superficie) que, *localmente, todas las superficies son difeomorfas.*

Si $F : M \to \bar{M}$ es un difeomorfismo, se tiene ($\forall p \in M$):

$$Id_{T_pM} = d_p(Id_M) = d_p(F^{-1} \circ F) \overset{(26)}{=} d_{F(p)}F^{-1} \circ d_pF \ ;$$

de donde se concluye que $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}\bar{M}$ es un isomorfismo y que $(d_pF)^{-1} = d_{F(p)}F^{-1}$. El recíproco es también (localmente) cierto y constituye el

Teorema 2.31 (función inversa para superficies) *Sean $F : M \to \bar{M}$ una aplicación diferenciable entre superficies y $p \in M$. Si $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}\bar{M}$ es un isomorfismo, existen entornos $\mathcal{U}(\subset M)$ de p y $\overline{\mathcal{U}}(\subset \bar{M})$ de $F(p)$ tales que $F(\mathcal{U}) = \overline{\mathcal{U}}$ y $F|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Vamos a aplicar el teorema de la función inversa (Teorema 2.3) a la representación local $F^{\varphi\bar{\varphi}} := \bar{\varphi}^{-1} \circ F \circ \varphi$. Sean cartas $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ en torno a $p \in M$ y $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1})$ en torno a $F(p) \in \bar{M}$ tales que $F(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$. Entonces $F^{\varphi\bar{\varphi}} : (\mathbb{R}^2 \supset)\mathbb{U} \to \overline{\mathbb{U}}(\subset \mathbb{R}^2)$ es diferenciable (Lema 2.28(1)) y se verifica

$$rg\left(d_{\varphi^{-1}(p)}F^{\varphi\bar{\varphi}}\right) \overset{(26)}{=} rg\left(d_{F(p)}\bar{\varphi}^{-1} \circ d_pF \circ d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi\right) = 2 \ ,$$

esta última igualdad por ser las tres aplicaciones lineales inyectivas (la primera y la tercera siempre, la segunda por la hipótesis) y por coincidir los dominios de la segunda y tercera con las imágenes de la primera y segunda, respectivamente.

Se deduce entonces del Teorema 2.3 que $F^{\varphi\bar{\varphi}}$ es en torno a $\varphi^{-1}(p)$ un difeomorfismo y s.p.d.g. (restringiendo adecuadamente los abiertos $\mathbb{U}$ y $\overline{\mathbb{U}}$) que $F^{\varphi\bar{\varphi}}$ es un difeomorfismo. Al ser φ y $\bar{\varphi}$ difeomorfismos, se concluye que $F\mid_{\mathcal{U}}\ (=\bar{\varphi}\circ F^{\varphi\bar{\varphi}}\circ\varphi^{-1})$ es un difeomorfismo ■

(B) Sean M y $\bar{M}$ superficies. Una aplicación diferenciable $F : M \to \bar{M}$ se llama **difeomorfismo local** si, para cada $p \in M$, existen entornos $\mathcal{U}(\subset M)$ de p y $\overline{\mathcal{U}}(\subset \bar{M})$ de $F(p)$ tales que $F(\mathcal{U}) = \overline{\mathcal{U}}$ y $F\mid_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ es un difeomorfismo. Si además F es inyectiva, resulta ser un difeomorfismo sobre su imagen.

Por lo dicho antes, una aplicación diferenciable entre superficies $F : M \to \bar{M}$ es un difeomorfismo local si (Teorema 2.31) y sólo si, en cada punto $p \in M$, su diferencial $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}\bar{M}$ es un isomorfismo.

Lema 2.32 *Sea $F : M \to \bar{M}$ una aplicación diferenciable entre superficies. Entonces F es un difeomorfismo local si y sólo si, para cada punto $p \in M$, existen cartas $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ de M en torno a p y $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1} = (\bar{u}, \bar{v}))$ de $\bar{M}$ en torno a $F(p)$, con $F(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$, tales que $F^{\varphi\bar{\varphi}} = id_{\mathbb{U}}$, esto es, tales que las ecuaciones locales (28) de F en $(\varphi, \bar{\varphi})$ son*

$$\bar{u}_k \circ F\mid_{\mathcal{U}} = u_k\ , \quad k = 1, 2\ \ ;$$

estas cartas se llaman ***adaptadas al difeomorfismo local*** *F.*

Demostración. Condición necesaria: sea $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ una carta en torno a p tal que $F\mid_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \to F(\mathcal{U})$ es un difeomorfismo. Tómese en torno a $F(p) \in \bar{M}$ la carta $(\overline{\mathcal{U}} = F(\mathcal{U}), \bar{\varphi}^{-1} = \varphi^{-1} \circ (F\mid_{\mathcal{U}})^{-1})$. Trivialmente entonces $F^{\varphi\bar{\varphi}} = id_{\mathbb{U}}$. Condición suficiente: el que existan cartas $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ de M en torno a p y $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1})$ de $\bar{M}$ en torno a $F(p)$, tales que $F(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$ y $F^{\varphi\bar{\varphi}} = id_{\mathbb{U}}$, prueba que $F\mid_{\mathcal{U}} = \bar{\varphi}\circ\varphi^{-1}$, que es un difeomorfismo. Al ser p arbitrario, el resultado se sigue ■

2.4. CAMPOS DE VECTORES SOBRE SUPERFICIES

2.4.1. Campos de vectores sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

Los campos de vectores sobre una superficie resultarán (Capítulo 3) herramientas utilísimas en el estudio es ésta.

Un **campo (diferenciable de vectores) X sobre un subconjunto** S **de** $\mathbb{R}^n$ viene determinado por una aplicación *diferenciable* $\vec{X} \equiv (X_1, ..., X_n) : S \to \mathbb{R}^n$ y se define como la aplicación

$$\mathbf{X} : S \ni p \mapsto \left(\vec{X}(p)\right)_p = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^n.$$

Se denomina a $\vec{X}$ la **parte vectorial de X**. Las funciones diferenciables $X_i : S \to \mathbb{R}$ reciben el nombre de **componentes de** $\vec{X}$ *(*y **de X***)*.

Surge así de manera natural (para cada $i = 1, ..., n$) el campo sobre S

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_S ,$$

que hace corresponder a cada $p \in S$ el vector (no necesariamente tangente a S) $(\partial/\partial x_i)_p \in T_p\mathbb{R}^n$. Obsérvese que la parte vectorial de $\partial/\partial x_i \mid_S$ es la aplicación constante $\vec{e}_i := (0, \ldots, 1^{i)}, , \ldots, 0)$.

El conjunto $\mathfrak{X}_S$ de campos sobre un subconjunto S tiene estructura natural de $\mathbb{R}$-espacio vectorial y de $\mathfrak{F}(S)$-módulo. Puesto que, dado un campo $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_S$, existen funciones $X_i \in \mathfrak{F}(S)$ tales que $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_S \right)$, el conjunto $(\partial/\partial x_1 \mid_S, \ldots, \partial/\partial x_n \mid_S)$ constituye una base (esto es, un sistema generador $\mathfrak{F}(S)$-linealmente independiente), llamada **canónica**, del $\mathfrak{F}(S)$-módulo $\mathfrak{X}_S$.

2.4.2. Campos de vectores tangentes a superficies

> Un campo de vectores sobre una superficie se describe por sus tres componentes, que son funciones diferenciables. Si además es tangente a la superficie, puede alternativamente describirse, en cada carta, por sólo dos funciones (definidas donde la carta), que también son diferenciables.

(A) Un campo (diferenciable de vectores) $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_S$ sobre un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ se dice **tangente a** S si, para todo $p \in S$, se verifica $\mathbf{X}(p) \in T_pS$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(S)$ el conjunto de los campos tangentes a S.

Obviamente se tiene: $\mathfrak{X}(S) \subset \mathfrak{X}_S$. Obsérvese que:

(i) Si $\mathbb{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathfrak{X}(\mathbb{U}) = \mathfrak{X}_{\mathbb{U}}$ (recordar de 2.3.2 que $T_p\mathbb{U} = T_p\mathbb{R}^n$, $\forall p \in \mathbb{U}$);

(ii) Si M es una superficie, entonces $\mathfrak{X}(M)$ está estrictamente contenido en $\mathfrak{X}_M$; y

(iii) Si $\mathcal{U}$ es un abierto de una superficie M y $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\mathbf{V} \mid_{\mathcal{U}} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$.

En todo caso, $\mathfrak{X}(S)$ es un $\mathfrak{F}(S)$-submódulo de $\mathfrak{X}_S$. Esta afirmación resulta evidente cuando S es una superficie o un abierto de $\mathbb{R}^n$, ya que, en tal caso, T_pS es un subespacio vectorial de $T_p\mathbb{R}^n$, para todo $p \in S$. Para S genérico (caso en el que *no* estamos interesados), la demostración es algo más delicada y no la vamos a desarrollar aquí.

Sean M una superficie y $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ una carta de M. Entonces la asignación (para cada $i = 1, 2$)

$$\frac{\partial}{\partial u_i} ,$$

que hace corresponder a cada $p \in \mathcal{U}$ el vector tangente $(\partial/\partial u_i)_p \in T_pM$, verifica:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \overset{(25)}{=} \sum_{j=1}^{3} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i} \circ \varphi^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \mid_{\mathcal{U}} \right) \; ; \tag{30}$$

por tener componentes diferenciables, $\frac{\partial}{\partial u_i}$ constituye (2.4.1) un campo tangente a $\mathcal{U}$, que denominaremos **i-ésimo campo coordenado (correspondiente a la carta** $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$*)*. Si $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1} = (\bar{u}, \bar{v}))$ es otra carta de M, con $\bar{\varphi} : \overline{\mathbb{U}} \to \overline{\mathcal{U}}$ la parametrización local asociada, se deduce de la Observación 2.30(2) que, en $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{2} (\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i} \circ \varphi^{-1}) \, \frac{\partial}{\partial \bar{u}_j} \quad (i = 1, 2) \tag{31}$$

(con $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ las ecuaciones del cambio de carta) o, en otras palabras,

$$(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}) = (\frac{\partial}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial}{\partial \bar{v}}) \, (\left(\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right) \circ \varphi^{-1}) \; .$$

(B) Sean M una superficie, $\mathbf{V} = \sum_{j=1}^{3} V_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \mid_M \right) \in \mathfrak{X}(M)$ un campo tangente y $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ una carta de M. Puesto que, para cada $p \in \mathcal{U}$, el conjunto $((\frac{\partial}{\partial u_1})_p, (\frac{\partial}{\partial u_2})_p)$ constituye (2.3.2) una base de T_pM, es claro que existirán funciones $V_1^{\varphi}, V_2^{\varphi} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ (no necesariamente diferenciables, por el momento) tales que se podrá escribir

$$\mathbf{V} \mid_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{2} V_i^{\varphi} \frac{\partial}{\partial u_i} \; ; \tag{32}$$

esta expresión se denomina **expresión local de V en la carta** $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ y las V_i^{φ} $(i = 1, 2)$ son las **componentes locales de V en la carta** $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$. Ahora bien, las funciones $V_j \in \mathfrak{F}(M)$ $(j = 1, 2, 3)$ restringen a funciones diferenciables $V_j|_{\mathcal{U}} \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ y entre éstas y las V_i^{φ} $(i = 1, 2)$ existen, como consecuencia de (30), las siguientes relaciones:

$$V_j|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{2} V_i^{\varphi} \, (\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_i} \circ \varphi^{-1}) \;\; (j = 1, 2, 3) \; ; \tag{33}$$

en base a lo cual es posible demostrar el siguiente

Lema 2.33 *Sean M una superficie, $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(M)$ un campo tangente y $\mathbf{V} \mid_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{2} V_i^{\varphi} \frac{\partial}{\partial u_i}$ su expresión local en una carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ de M. Entonces las componentes locales $V_i^{\varphi} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.*

Demostración: ver Apéndice 5.2.1 ■

Se concluye que la pareja $(\partial/\partial u, \partial/\partial v)$ *de campos coordenados constituye una base (esto es, un sistema generador* $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$*-linealmente independiente) del* $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$*-módulo* $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$*.*

Ejemplo 2.34 *Sea la esfera* $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\}$ *y considérese el campo* $\mathbf{X} := (-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}) \mid_M \in \mathfrak{X}_M$*, con parte vectorial* $\vec{X} = (-y,x,0) \mid_M$*. Puesto que* $M = f^{-1}(0)$*, con* $f : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-r^2 \in \mathbb{R}$ *, se tendrá* ($\forall p \in M$)*:*

$$T_pM \overset{Prop.\ 2.22(3)}{=} \ker(d_pf) = \{\vec{\xi}_p \mid J_f(p)\vec{\xi} = 0\} = \{\vec{\xi}_p \mid \sum_{i=1}^{3} x_i(p)\xi_i = 0\} \ .$$

Al ser $\sum_{i=1}^{3}(x_iX_i) \mid_M = (-xy+yx) \mid_M = 0$*, se concluye que* $\mathbf{X}$ *es tangente a* M*. Con lo que, en la carta polar* $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ *de la esfera* M *(Ejemplo 2.16)*

$$\varphi : \mathbb{U} \equiv (0,\pi)\times(-\pi,\pi) \ni (\vartheta,\phi) \mapsto (rsen\vartheta\cos\phi \ , \ rsen\vartheta sen\phi \ , \ r\cos\vartheta) \in \mathcal{U} \ ,$$

se verificará: $\mathbf{X} \mid_{\mathcal{U}} = X_1^{\varphi}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + X_2^{\varphi}\frac{\partial}{\partial\phi} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$*, para ciertas funciones* $X_1^{\varphi}, X_2^{\varphi} \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$*. Teniendo en cuenta que*

$$\left\{ \begin{array}{l} Parte\ vect.\ de\ \ (\mathbf{X} \mid_{\mathcal{U}}) = (-rsen\vartheta sen\phi \ , \ rsen\vartheta\cos\phi \ , \ 0) \\ Parte\ vect.\ de\ \ \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) \overset{(30)}{=} (r\cos\vartheta\cos\phi \ , \ r\cos\vartheta sen\phi \ , \ -rsen\vartheta) \\ Parte\ vect.\ de\ \ \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \overset{(30)}{=} (-rsen\vartheta sen\phi \ , \ rsen\vartheta\cos\phi \ , \ 0) \end{array} \right. ,$$

se obtiene el siguiente sistema de 3 *ecuaciones para las* 2 *funciones* $X_1^{\varphi}, X_2^{\varphi}$ *(no olvidar que ya sabemos que el sistema tiene que tener solución única!)*

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1^{\varphi}\ r\cos\vartheta\cos\phi - X_2^{\varphi}\ rsen\vartheta sen\phi = -rsen\vartheta sen\phi \\ X_1^{\varphi}\ r\cos\vartheta sen\phi + X_2^{\varphi}\ rsen\vartheta\cos\phi = rsen\vartheta\cos\phi \\ -X_1^{\varphi}\ rsen\vartheta = 0 \end{array} \right. ,$$

con solución: $X_1^{\varphi} = 0$ *,* $X_2^{\varphi} = 1$*. Con lo que, finalmente queda:* $\mathbf{X} \mid_{\mathcal{U}} = \frac{\partial}{\partial\phi}$ *.*

2.4.3. Derivación natural en $\mathbb{R}^n$

Recogemos aquí la formalización de las operaciones de derivación natural (de campos de vectores) en abiertos de $\mathbb{R}^n$, extendiéndolas a abiertos de superficies. Interesa reunir ahora las propiedades más relevantes de esta derivación natural, para compararlas más adelante con las de la llamada "derivación covariante" (4.1.2) sobre superficies de $\mathbb{E}^3$.

Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que T_pS es subespacio vectorial de $T_p\mathbb{R}^n$, para todo $p \in S$ (usualmente, S es un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$ o una superficie M de $\mathbb{R}^3$).

(A) Dada una función diferenciable $f \in \mathfrak{F}(S)$, *ya sabemos* (2.3.3) cómo definir la **derivada direccional de f según $\boldsymbol{\xi} \in T_pS$**, a saber, como el número real

$$\boldsymbol{\xi}(f) := \boldsymbol{\xi}(\tilde{f}) \ , \tag{34}$$

siendo $\tilde{f} : \mathbb{U}(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *cualquier* extensión (local) diferenciable de f.

Es inmediato comprobar (2.1.2) que la correspondencia $(\boldsymbol{\xi}, f) \mapsto \boldsymbol{\xi}(f)$ es $\mathbb{R}$-lineal en ambas entradas y verifica $\boldsymbol{\xi}(fg) = \boldsymbol{\xi}(f)g(p) + f(p)\boldsymbol{\xi}(g)$.

Si $S = \mathbb{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, se tiene (2.1.2): $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad (i = 1, ..., n)$. Y si $S = M$ es una superficie y $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ es una carta de M, se tiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p (f) \overset{\text{Obs. 2.27}}{=} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u_i}(\varphi^{-1}(p)) \quad (i = 1, 2) \ .$$

(B) En base a lo anterior, resulta natural definir la **derivada de $f \in \mathfrak{F}(S)$ con respecto a un campo tangente $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(S)$** como la función $\mathbf{V}(f) \in \mathfrak{F}(S)$ tal que:

$$(\mathbf{V}(f))(p) := \mathbf{V}(p)(f) \ \ , \text{ para todo } p \in S \ . \tag{35}$$

Se deduce inmediatamente de las propiedades de (34) que la correspondencia $(\mathbf{V}, f) \mapsto \mathbf{V}(f)$ es $\mathbb{R}$-lineal en ambas entradas, $\mathfrak{F}(S)$-lineal en la primera y verifica $\mathbf{V}(fg) = \mathbf{V}(f)g + f\mathbf{V}(g)$ (con lo que *no* es $\mathfrak{F}(S)$-lineal en la segunda).

Si $S = \mathbb{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, se tiene: $\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, ..., n)$. Y si $S = M$ es una superficie y $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ es una carta de M, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(f) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u_i} \circ \varphi^{-1} \quad (i = 1, 2) \ . \tag{36}$$

(C) Dado un campo $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_S\right) \in \mathfrak{X}_S$, definimos la **derivada direccional de $\mathbf{X}$ según $\boldsymbol{\xi} \in T_pS$** como el vector (no necesariamente tangente a S)

$$D_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{X} : = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\xi}(X_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^n \ ; \tag{37}$$

en particular, $D_{\boldsymbol{\xi}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_S\right) = 0$. Así pues, en esta definición el vector $\boldsymbol{\xi}$ actúa exclusivamente sobre las *componentes* de $\mathbf{X}$, sin afectar en absoluto a los campos de la base canónica $(\partial/\partial x_1 |_S, \ldots, \partial/\partial x_n |_S)$ de $\mathfrak{X}_S$.

Observación 2.35 ** Cualquier ley de derivación de campos $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_S$ según vectores tangentes $\boldsymbol{\xi} \equiv \alpha'(0) \in T_pS$ supone calcular un límite de la forma $\lim_{t\to 0} \frac{(\mathbf{X}\circ\alpha)(t)-(\mathbf{X}\circ\alpha)(0)}{t}$. Pero $(\mathbf{X}\circ\alpha)(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n$, mientras que $(\mathbf{X}\circ\alpha)(0) \in T_{\alpha(0)}\mathbb{R}^n$; por lo que dar sentido al numerador de esta fracción supone adoptar una "ley de transporte" $T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n \to T_{\alpha(0)}\mathbb{R}^n$. La ley de transporte "natural" (sobreentendida en la definición de $D_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{X}$) es la inducida (a lo largo de α) por el isomorfismo natural $T_p\mathbb{R}^n \ni \vec{\xi}_p \mapsto \vec{\xi}_q \in T_q\mathbb{R}^n$, que identifica en particular $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ con $(\frac{\partial}{\partial x_i})_q$. No es esta la única ley de transporte concebible. Volveremos sobre esta cuestión más adelante (Sección 4.2).*

De nuevo se deduce inmediatamente de las propiedades de (34) que la correspondencia $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \mapsto D_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{X}$ es $\mathbb{R}$-lineal en ambas entradas y verifica: $D_{\boldsymbol{\xi}}(f\mathbf{X}) = \boldsymbol{\xi}(f)\mathbf{X}(p) + f(p)D_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{X}$ (con lo que *no* es $\mathfrak{F}(S)$-lineal en la segunda).

(D) Dado un campo $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n V_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \alpha\right) \in \mathfrak{X}_\alpha$ a lo largo de una curva $\alpha : I \to S$, *ya sabemos* (1.2.2) cómo definir la **derivada de V**, a saber, como el campo

$$\frac{D\mathbf{V}}{dt} := \sum_{i=1}^n \frac{dV_i}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_\alpha \in \mathfrak{X}_\alpha \ . \tag{38}$$

Obteníamos así una correspondencia $\mathbf{V} \mapsto \frac{D\mathbf{V}}{dt}$ que era $\mathbb{R}$-lineal y verificaba: $D(f\mathbf{V})/dt = (df/dt)\mathbf{V} + fD\mathbf{V}/dt$ (con lo que *no* es $\mathfrak{F}(I)$-lineal).

El motivo de recordar esto aquí es que se tiene la siguiente (importantísima) propiedad que relaciona (38) con (37): si $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_S$, entonces se tiene:

$$\frac{D(\mathbf{X}\circ\alpha)}{dt} = D_{\alpha'}\mathbf{X} \ . \tag{39}$$

(donde el miembro de la derecha se entiende como: $(D_{\alpha'}\mathbf{X})(t) := D_{\alpha'(t)}\mathbf{X}$).

En efecto: Escribiendo $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_S\right)$, se tiene:

$$\frac{D(\mathbf{X}\circ\alpha)}{dt}(t) \overset{(38)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{d(X_i\circ\alpha)}{dt}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\alpha(t)} \overset{(22)}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha'(t)(X_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\alpha(t)} \overset{(37)}{=} D_{\alpha'(t)}\mathbf{X} \ \blacksquare$$

(E) Dados dos campos $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_S\right) \in \mathfrak{X}_S$ y $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(S)$, definimos la **derivada de X con respecto a V** como el campo (no necesariamente tangente a S)

$$D_{\mathbf{V}}\mathbf{X} := \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_S\right) \in \mathfrak{X}_S \ ; \tag{40}$$

las fórmulas (35) y (37) muestra que se verifica la expresión (que puede tomarse como definición alternativa de $D_{\mathbf{V}}\mathbf{X}$):

$$(D_{\mathbf{V}}\mathbf{X})(p) = D_{\mathbf{V}(p)}\mathbf{X} \text{ , para todo } p \in S \ . \tag{41}$$

Se deduce inmediatamente de las propiedades de (37) que la correspondencia $(\mathbf{V}, \mathbf{X}) \mapsto D_{\mathbf{V}}\mathbf{X}$ es $\mathbb{R}$-lineal en ambas entradas, $\mathfrak{F}(S)$-lineal en la primera y verifica: $D_{\mathbf{V}}(f\mathbf{X}) = \mathbf{V}(f)\mathbf{X} + fD_{\mathbf{V}}\mathbf{X}$ (con lo que *no* es $\mathfrak{F}(S)$-lineal en la segunda).

Si $S = \mathbb{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathfrak{X}_S = \mathfrak{X}(S)$ y se tiene: $D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\mathbf{X} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\mid_S\right)$ $(i = 1, ..., n)$; en particular, $D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\mid_S\right) = 0$ (los campos de la base canónica $(\partial/\partial x_1 \mid_S, \ldots, \partial/\partial x_n \mid_S)$ de $\mathfrak{X}_S$ poseen derivada nula). Y si $S = M$ es una superficie y $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ es una carta de M, se tiene:

$$D_{\partial/\partial u_i}\frac{\partial}{\partial u_j} \overset{(30)}{=} D_{\partial/\partial u_i}\left(\sum_{k=1}^3 (\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j} \circ \varphi^{-1})\ (\frac{\partial}{\partial x_k}\mid_{\mathcal{U}})\right) \overset{(40)}{=}$$
$$= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i}(\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j} \circ \varphi^{-1})\ \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\mid_{\mathcal{U}}\right) \overset{(36)}{=} \sum_{k=1}^3 (\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j} \circ \varphi^{-1})\ \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\mid_{\mathcal{U}}\right) \ , \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ D_{\partial/\partial u_i}\frac{\partial}{\partial u_j} = D_{\partial/\partial u_j}\frac{\partial}{\partial u_i} \ . \tag{42}$$

Ejemplo 2.36 *Sea el hiperboloide* $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = r^2\}$ *y considérese el campo* $\mathbf{X} := (xy^3\frac{\partial}{\partial x} + yz^3\frac{\partial}{\partial z}) \mid_M \in \mathfrak{X}_M$*, con parte vectorial* $\vec{X} = (xy^3, 0, yz^3) \mid_M$.

Dados $p = (r, r, r) \in M$ *y el vector tangente (comprobar que lo es!)* $\boldsymbol{\xi} = (r, 0, r)_p \in T_pM$*, se tiene:*

$$D_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{X} \overset{(37)}{=} r(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z})_p(xy^3)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + r(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z})_p(yz^3)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \overset{(35)}{=}$$
$$= r^4\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + 3r^4\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \equiv (r^4, 0, 3r^4)_p \ \in T_p\mathbb{R}^3 \ .$$

Dado el campo tangente (comprobar que lo es!) $\mathbf{V} := (y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}) \mid_M \in \mathfrak{X}(M)$*, se tiene:*

$$D_{\mathbf{V}}\mathbf{X} \overset{(40)}{=} \left((y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y})(xy^3)\frac{\partial}{\partial x} + (y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y})(yz^3)\frac{\partial}{\partial z}\right) \mid_M =$$
$$= \left((y^4 - 3x^2y^2)\frac{\partial}{\partial x} - xz^3\frac{\partial}{\partial z}\right) \mid_M \equiv (y^4 - 3x^2y^2, 0, xz^3) \mid_M \in \mathfrak{X}_M \ .$$

3. SUPERFICIES EN EL ESPACIO EUCLIDEO

En este capítulo se estudiarán aquellos aspectos y propiedades de las superficies del espacio $\mathbb{E}^3$ que tienen que ver con la estructura euclídea canónica de éste.

3.1. PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

3.1.1. Estructura euclídea de los espacios tangentes a $\mathbb{E}^3$

En el espacio euclídeo (1.1.4) las funciones diferenciables poseen gradiente. Allí donde una superficie es conjunto de nivel regular para una función diferenciable, el gradiente de la función es ortogonal a la superficie.

(A) Sea S un subconjunto de $\mathbb{E}^n$ tal que T_pS es *subespacio* vectorial de $T_p\mathbb{E}^n$, para todo $p \in S$ (usualmente, S es un abierto $\mathbb{U}$ o una superficie M de $\mathbb{E}^3$). Dados $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}_S$, se define $< \mathbf{X}, \mathbf{Y} > \in \mathfrak{F}(S)$ por:

$$< \mathbf{X}, \mathbf{Y} > (p) := < \mathbf{X}(p), \mathbf{Y}(p) > \overset{(8)}{=} < \vec{X}(p), \vec{Y}(p) > \ ;$$

y si, además, $n = 3$, se define $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}_S$ por:

$$(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})(p) := \mathbf{X}(p) \times \mathbf{Y}(p) \overset{(9)}{=} (\vec{X}(p) \times \vec{Y}(p))_p \ .$$

En cuanto a derivaciones de productos escalares de campos, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.1 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{E}^n$ tal que T_pS es subespacio vectorial de $T_p\mathbb{E}^n$, para todo $p \in S$.*

1. *Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}_S$ y $\boldsymbol{\xi} \in T_pS$. Entonces se tiene:*

$$\boldsymbol{\xi}(< \mathbf{X}, \mathbf{Y} >) = < D_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(p)> + < \mathbf{X}(p), D_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{Y} > \ .$$

2. *Sean $\alpha : I \to S$ una curva y $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}_\alpha$. Entonces se tiene:*

$$\frac{d < \mathbf{X}, \mathbf{Y} >}{dt} = < \frac{D\mathbf{X}}{dt}, \mathbf{Y} > + < \mathbf{X}, \frac{D\mathbf{Y}}{dt} > \ .$$

3. *Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}_S$ y $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(S)$. Entonces se tiene:*

$$\mathbf{V}(< \mathbf{X}, \mathbf{Y} >) = < D_{\mathbf{V}}\mathbf{X}, \mathbf{Y} > + < \mathbf{X}, D_{\mathbf{V}}\mathbf{Y} > \ .$$

Demostración. El apartado 2 ya se vio en 1.2.2. Para los apartados 1 y 3, escribamos $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_S\right)$ y $\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_S\right)$, con $X_i, Y_i \in \mathfrak{F}(S)$ $(i = 1, ..., n)$. Se tiene:

$$\boldsymbol{\xi}(<\mathbf{X},\mathbf{Y}>) = \boldsymbol{\xi}\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i\right) \overset{(34)}{=} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\xi}(X_i)\; Y_i(p) + X_i(p)\; \boldsymbol{\xi}(Y_i)) \overset{(37)}{=}$$

$$=< D_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{X}, \mathbf{Y}(p)> + < \mathbf{X}(p), D_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{Y} >$$

y también:

$$\mathbf{V}(<\mathbf{X},\mathbf{Y}>) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i\right) \overset{(35)}{=} \sum_{i=1}^n (\mathbf{V}(X_i)\; Y_i + X_i\; \mathbf{V}(Y_i)) \overset{(40)}{=}$$

$$=< D_{\mathbf{V}}\mathbf{X}, \mathbf{Y} > + < \mathbf{X}, D_{\mathbf{V}}\mathbf{Y} > \quad \blacksquare$$

(B) Sean $f : (\mathbb{E}^n \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $p \in \mathbb{U}$. Puesto que la aplicación $T_p\mathbb{E}^n \ni \vec{\xi}_p \mapsto \vec{\xi}_p(f) \in \mathbb{R}$ es lineal, existe (Observación 1.4) un único vector tangente, denotado $(grad\ f)(p) \in T_p\mathbb{E}^n$, que verifica (para todo $\vec{\xi}_p \in T_p\mathbb{E}^n$):

$$< (grad\ f)(p), \vec{\xi}_p > := \vec{\xi}_p(f) \quad . \tag{43}$$

Se deduce de (43) y (22) que $(grad\ f)(p)$ *es ortogonal al conjunto de nivel* $f^{-1}(f(p))$.

Puesto que $\vec{\xi}_p(f) \overset{2.1.2}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\xi_i$, la correspondencia que asocia, a cada $p \in \mathbb{U}$, el vector tangente $(grad\ f)(p)$ constituye (2.4.1) un campo (el **gradiente de** f)

$$grad\ f \;=\; \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_{\mathbb{U}}\right) \in \mathfrak{X}(\mathbb{U}) \; .$$

Observación 3.2 *1. Si $(grad\ f)(p) \neq \vec{0}_p$, se sigue de (43) que el valor máximo de la derivada direccional de f según vectores unitarios de $T_p\mathbb{E}^n$ se alcanza precisamente según el vector $\frac{(grad\ f)(p)}{|(grad\ f)(p)|}$; además dicho valor máximo es igual a $|(grad\ f)(p)|$.*

2. La definición dada (independiente de coordenadas) de gradiente es obviamente una definición "métrica". Es posible adoptar la expresión (coordenada) grad $f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_{\mathbb{U}}\right)$ como definición de gradiente de

f, pero ello no hace superflua la estructura euclídea de $\mathbb{E}^n$ (en cada punto $p \in \mathbb{E}^n$, la base canónica de $T_p\mathbb{E}^3$ es ortonormal).

Por el contrario, la diferencial de f sí admite (Observación 2.2(1)) una definición independiente de coordenadas que no precisa de la estructura euclídea de $\mathbb{E}^n$.

Sean M una superficie en $\mathbb{E}^3$ y $p \in M$. Localmente en torno a p, M es (Teorema 2.13(6)) un conjunto de nivel regular para alguna función diferenciable f (definida en un abierto de $\mathbb{E}^3$ y valuada en $\mathbb{R}$). Por lo dicho antes, se tiene:

$$< (grad\ f)(p), T_pM >= 0 \quad . \tag{44}$$

Ejemplo 3.3 *La función diferenciable $f : \mathbb{E}^3 \ni (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1 \in \mathbb{R}$ tiene por gradiente $grad\ f = \sum_{i=1}^{3} 2x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{E}^3)$. En el punto $p \equiv (1,0,0)$ de la esfera $M := f^{-1}(0)$ es $(grad\ f)(p) = 2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p$ y, de acuerdo con (44), resulta $T_pM = \{\vec{\xi}_p \mid < \vec{\xi}, (1,0,0) >= 0\}$ (simple reelaboración del resultado del Ejemplo 2.24).*

3.1.2. Formas bilineales sobre superficies

> Una forma bilineal sobre una superficie es un "conjunto diferenciable" de formas bilineales sobre sus planos tangentes. La forma bilineal puede describirse, en cada carta, por cuatro funciones (definidas donde la carta), que son diferenciables.

Una **forma bilineal sobre una superficie** M es una correspondencia $\mathcal{B}$ que asocia, a cada punto $p \in M$, una forma bilineal $\mathcal{B}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, verificando además la siguiente propiedad de diferenciabilidad: para todo abierto $\mathcal{U}$ de M y para todo par de campos $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, la función $\mathcal{B}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, definida por $\mathcal{B}(\mathbf{V}, \mathbf{W})(p) := \mathcal{B}_p(\mathbf{V}(p), \mathbf{W}(p))$, es *diferenciable.*

La correspondencia $(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \mapsto \mathcal{B}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ resulta así $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$-bilineal. Además, si $\mathcal{V}$ es un abierto contenido en $\mathcal{U}$, resulta: $\mathcal{B}(\mathbf{V} \mid_{\mathcal{V}}, \mathbf{W} \mid_{\mathcal{V}}) = \mathcal{B}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \mid_{\mathcal{V}}$.

Si $(\mathcal{U}\ , \varphi^{-1} = (u, v))$ es una carta de M, las funciones:

$$b_{ij} := \mathcal{B}(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}) \in \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \qquad (i, j = 1, 2) \quad ,$$

llamadas **componentes de $\mathcal{B}$ en la carta** $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$, determinan completamente $\mathcal{B}$ en $\mathcal{U}$. En efecto, dados $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{2} V_i^{\varphi} \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ y $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{2} W_i^{\varphi} \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, se tiene: $\mathcal{B}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} V_i^{\varphi} W_j^{\varphi}$.

Lema 3.4 *Sean $\mathcal{B}$ una forma bilineal sobre una superficie M, $(\mathcal{U}, \varphi^{-1}), (\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1})$ dos cartas de M y $b_{ij}, \bar{b}_{ij}$ las correspondientes componentes de $\mathcal{B}$. Si la aplicación cambio de carta (24) $\bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}) \to \bar{\varphi}^{-1}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$ tiene por ecuaciones $\bar{u}_i = \bar{u}_i(u, v)$, $i = 1, 2$, entonces se verifica:*

$$b_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} \bar{b}_{kl} (\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_i} \circ \varphi^{-1})(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial u_j} \circ \varphi^{-1}) \ \ (i, j = 1, 2) \ ,$$

donde se entiende que $\bar{b}_{ij}(u, v) \equiv \bar{b}_{ij}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$.

Demostración. En efecto:

$$b_{ij} := \mathcal{B}(\tfrac{\partial}{\partial u_i}, \tfrac{\partial}{\partial u_j}) \overset{(31)}{=} \mathcal{B}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{2} (\tfrac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_i} \circ \varphi^{-1}) \tfrac{\partial}{\partial \bar{u}_k} \ , \ \textstyle\sum_{l=1}^{2} (\tfrac{\partial \bar{u}_l}{\partial u_j} \circ \varphi^{-1}) \tfrac{\partial}{\partial \bar{u}_l}\right) =$$

$$= \textstyle\sum_{k,l=1}^{2} \bar{b}_{kl} (\tfrac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_i} \circ \varphi^{-1})(\tfrac{\partial \bar{u}_l}{\partial u_j} \circ \varphi^{-1}) \ \ \blacksquare$$

Observación 3.5 *Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Sean b y $\bar{b}$ bases de $\mathbb{V}$ y escribamos $b = \bar{b}A$. Entonces se tiene (Observación 1.2): $B_b = A^T B_{\bar{b}} A$. Este es el contenido algebraico del lema anterior.*

3.1.3. Primera forma fundamental (PFF)

La primera forma fundamental de una superficie, aplicada a dos vectores tangentes en un punto, es el producto escalar de ambos.

Sea M una superficie. Se denomina **primera forma fundamental de** M a la correspondencia $\mathcal{G}$ que asocia, a cada punto $p \in M$, la forma bilineal $\mathcal{G}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{G}_p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) :=< \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} > \ .$$

Dados $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, usualmente escribiremos $< \mathbf{V}, \mathbf{W} >$ en lugar de $\mathcal{G}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Obviamente $\mathcal{G}$ es simétrica.

Para comprobar que la definición dada de $\mathcal{G}$ corresponde a la de una forma bilineal sobre M basta tener en cuenta que, escribiendo $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{3} V_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_{\mathcal{U}}\right)$ y $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{3} W_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_{\mathcal{U}}\right)$, con V_i, W_i funciones diferenciables en $\mathcal{U}$, resulta: $\mathcal{G}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \sum_{i=1}^{3} V_i W_i$, que es una función diferenciable $\blacksquare$

Fijada una carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ de M, las componentes g_{ij} de la primera forma fundamental $\mathcal{G}$ en dicha carta se escriben:

$$g_{ij} :=< \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} > \stackrel{(30)}{=} \sum_{k=1}^{3} (\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \circ \varphi^{-1})(\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j} \circ \varphi^{-1}) \ .$$

Introducimos las siguientes notaciones (que son estándar en la bibliografía) para los coeficientes g_{ij}:

$$\left\{ \begin{array}{l} E \equiv g_{11} = \sum_{k=1}^{3} (\frac{\partial \varphi_k}{\partial u} \circ \varphi^{-1})^2 \\ F \equiv g_{12} = \sum_{k=1}^{3} (\frac{\partial \varphi_k}{\partial u} \circ \varphi^{-1})(\frac{\partial \varphi_k}{\partial v} \circ \varphi^{-1}) \\ G \equiv g_{22} = \sum_{k=1}^{3} (\frac{\partial \varphi_k}{\partial v} \circ \varphi^{-1})^2 \end{array} \right. \quad , \tag{45}$$

que se denominan **coeficientes de la primera forma fundamental de** M **en la carta** $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ (*no confundir el coeficiente* $F \equiv g_{12}$ *con alguna aplicación entre superficies* $F : M \to \bar{M}$). Al ser el producto escalar euclídeo *definido positivo*, se sigue de (1): $E > 0, G > 0$ y $EG - F^2 > 0$.

Sean $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{2} V_i^{\varphi} \frac{\partial}{\partial u_i}, \mathbf{W} = \sum_{i=1}^{2} W_i^{\varphi} \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$. Se tiene:

$$< \mathbf{V}, \mathbf{W} > = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} V_i^{\varphi} W_j^{\varphi} = (V_1^{\varphi}, V_2^{\varphi}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^{\varphi} \\ W_2^{\varphi} \end{pmatrix} \quad ;$$

en particular, $|\mathbf{V}|^2 = E(V_1^{\varphi})^2 + 2F V_1^{\varphi} V_2^{\varphi} + G(V_2^{\varphi})^2$.

Se dice que una carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ de M es **ortogonal** (o también, que es un **sistema de coordenadas ortogonales**) si los campos coordenados $\frac{\partial}{\partial u}$ y $\frac{\partial}{\partial v}$ son mutuamente ortogonales en cada punto de $\mathcal{U}$; con las notaciones que acabamos de introducir, ello es así si y sólo si $F = 0$.

Proposición 3.6 *Sea M una superficie. Existe un sistema de coordenadas ortogonales en el entorno de cada punto de M.*

Demostración* ([5], 3.4, Corolario 2): ver Apéndice 5.3.1 ■

Ejemplo 3.7 *Considérese la esfera $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0\}$ y la carta polar $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (\vartheta, \phi))$ del Ejemplo 2.16. De la expresión $\varphi(\vartheta \equiv u, \phi \equiv v) = (x = r sen\vartheta \cos\phi, y = r sen\vartheta sen\phi, z = r\cos\vartheta)$ se deduce:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = (r\ \cos\vartheta \cos\phi\ ,\ r\ \cos\vartheta\ sen\phi\ ,\ -r\ sen\vartheta) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = (-r\ sen\vartheta\ sen\phi\ ,\ r\ sen\vartheta \cos\phi\ ,\ 0) \end{array} \right. \ .$$

Entonces, los coeficientes (45) de la primera forma fundamental de M en dicha carta vienen dados por (con las identificaciones $u_i \equiv u_i \circ \varphi^{-1}$, recordar 2.2.2):

$$E = r^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = r^2 sen^2\vartheta \ .$$

Ejemplo 3.8 *Considérese la superficie M dada en el Ejemplo 2.17 y la carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ definida en el mismo. De la expresión $\varphi(u,v) = \alpha(u) + r\cos v\, \vec{N}(u) + r sen\, v\, \vec{B}(u)$ se deduce (tener en cuenta que $|\alpha'| = 1$):*

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial u} = (1 - \kappa r \cos v)\,\vec{T}(u) + \tau r \left(-sen v\ \vec{N}(u) + \cos v \vec{B}(u)\right) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} = r\left(-sen v\ \vec{N}(u) + \cos v \vec{B}(u)\right) \end{cases},$$

donde $\kappa(< 1/r)$ y τ son la curvatura y torsión (constantes) de la curva alabeada alrededor de cuya imagen se construye M. Entonces, los coeficientes (45) de la primera forma fundamental de M en dicha carta vienen dados por:

$$E = (1 - \kappa r \cos v)^2 + \tau^2 r^2 \quad , \quad F = \tau r^2 \quad , \quad G = r^2 \ .$$

3.1.4. Longitudes y áreas en entornos coordenados

Reescribimos la expresión (1.3.2) de la longitud de una curva (en un entorno coordenado de una superficie) en términos de las coordenadas de la curva y de los coeficientes de la primera forma fundamental. Definimos la integrabilidad y la integral de una función (en un entorno coordenado) en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental. También definimos el área de un subconjunto (de un entorno coordenado).

(A) Sea M una superficie y sea $\alpha : I \to M$ una curva que posee longitud. *Vamos a ver la expresión coordenada de la longitud de α cuando su imagen está contenida en un entorno coordenado* (cuando no, siempre puede hacerse una partición de I tal que la imagen de cada segmento esté contenida en un entorno coordenado; la longitud total será la suma de las correspondientes a los distintos tramos).

Sean $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ una carta de M tal que $\mathrm{Im}\,\alpha \subset \mathcal{U}$ y $(u(t), v(t))$ la expresión local de α en dicha carta (Observación 2.20(3)). Entonces se tiene:

$$L(\alpha) := \int_I |\ \alpha'\ | \overset{\text{Obs. 2.26}}{=} \int_I |\sum_{i=1}^{2} \frac{du_i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial u_i} \circ \alpha\right)| \overset{(45)}{=}$$

$$= \int_I \sqrt{(E\circ\alpha)(\frac{du}{dt})^2 + 2(F\circ\alpha)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + (G\circ\alpha)(\frac{dv}{dt})^2} \equiv$$

$$\equiv \int_I \sqrt{E(u,v)(\frac{du}{dt})^2 + 2F(u,v)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(u,v)(\frac{dv}{dt})^2} \quad .$$

Observación 3.9 *Es claro que el conocimiento de la primera forma fundamental permite calcular longitudes de curvas. Recíprocamente, el conocimiento de las longitudes de curvas arbitrarias sobre M permite, por derivación,* *calcular normas de cualesquiera vectores tangentes y, por la "identidad de polarización"* $<\vec{\xi},\vec{\eta}>\equiv \frac{1}{2}(\left|\vec{\xi}+\vec{\eta}\right|^2 - \left|\vec{\xi}\right|^2 - |\vec{\eta}|^2)$*, la primera forma fundamental.*

(B) Sean M una superficie y $(\mathcal{U},\varphi^{-1}=(u,v))$ una carta de M, con $\varphi:\mathbb{U}\to\mathcal{U}$ la parametrización local asociada. Se tiene:

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right| \overset{(3)}{=} \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{EG-F^2} \quad \in \mathfrak{F}(\mathcal{U}). \tag{46}$$

Diremos que una función $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ es **integrable** si lo es $(f\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|)\circ\varphi:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$ (2.1.5). En tal caso, se llama **integral de** f al número real

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\mathcal{U}} f := \int_{\mathbb{U}}(f\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|)\circ\varphi \overset{(46)}{=} \int_{\mathbb{U}}(f\sqrt{EG-F^2})\circ\varphi \equiv \\ \textstyle\equiv \int_{\mathbb{U}} f(u,v)\,\sqrt{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}\;\;;\end{aligned} \tag{47}$$

el Teorema 2.11 (del cambio de variable) prueba que la integrabilidad y la integral (47) de una función $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ *no dependen* de la parametrización $\varphi:\mathbb{U}\to\mathcal{U}$ utilizada.

En efecto: Sean $(\mathcal{U},\varphi^{-1}=(u,v))$ y $(\mathcal{U},\bar{\varphi}^{-1}=(\bar{u},\bar{v}))$ dos cartas de M (s.p.d.g. con el mismo dominio $\mathcal{U}$), con $\varphi:\mathbb{U}\to\mathcal{U}$ y $\bar{\varphi}:\overline{\mathbb{U}}\to\mathcal{U}$ las parametrizaciones locales asociadas, y sea $\psi^{-1}\equiv\bar{\varphi}^{-1}\circ\varphi:\mathbb{U}\to\overline{\mathbb{U}}$ la aplicación cambio de carta (24), con jacobiana $J_{\psi^{-1}}=\left(\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}\right)$. Se tiene:

$$(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}) \overset{(31)}{=} (\frac{\partial}{\partial \bar{u}},\frac{\partial}{\partial \bar{v}})\;(J_{\psi^{-1}}\circ\varphi^{-1})\;\;,\;\;\overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\;\;\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v} = (\det J_{\psi^{-1}}\circ\varphi^{-1})\;(\frac{\partial}{\partial \bar{u}}\times\frac{\partial}{\partial \bar{v}}) = (\frac{1}{\det J_{\psi}}\circ\bar{\varphi}^{-1})(\frac{\partial}{\partial \bar{u}}\times\frac{\partial}{\partial \bar{v}}) \quad (^*)\;\;.$$

Supongamos que existe $\int_{\mathbb{U}}(f\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|)\circ\varphi$. Entonces el Teorema 2.11 garantiza que existe $\int_{\overline{\mathbb{U}}}\left((f\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|)\circ\bar{\varphi}\right)|\det J_{\psi}|$ y que se verifica:

$$\int_{\mathbb{U}}(f\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|)\circ\varphi \overset{\text{Teor. 2.11}}{=} \int_{\overline{\mathbb{U}}}\left((f\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|)\circ\bar{\varphi}\right)|\det J_{\psi}| \overset{(*)}{=}$$

$$= \int_{\overline{\mathbb{U}}}(f\left|\frac{\partial}{\partial \bar{u}}\times\frac{\partial}{\partial \bar{v}}\right|)\circ\bar{\varphi} \qquad \blacksquare$$

Sea $\mathcal{R}\subset\mathcal{U}$ un subconjunto. Suponiendo que su función característica $1_{\mathcal{R}}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ sea integrable, lo que ocurre (Observación 2.7(3)) siempre que

$\varphi^{-1}(\mathcal{R}) \subset \mathbb{E}^2$ es acotado (en particular, si $\mathcal{R}$ es compacto) y $\varphi^{-1}(\partial\mathcal{R}) \subset \mathbb{E}^2$ tiene medida cero, se llama **área de** $\mathcal{R}$ a la integral

$$\begin{aligned} Area(\mathcal{R}) := \int_{\mathcal{U}} 1_{\mathcal{R}} &\overset{(47)}{=} \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{EG - F^2} \circ \varphi \equiv \\ &\equiv \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2}\ . \end{aligned} \tag{48}$$

Sean una función $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ y un subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$. Suponiendo que la función $1_{\mathcal{R}} \cdot f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sea integrable, lo que ocurre (Observación 2.7(3)) siempre que $\varphi^{-1}(\mathcal{R}) \subset \mathbb{E}^2$ es acotado (en particular, si $\mathcal{R}$ es compacto), $\varphi^{-1}(\partial\mathcal{R}) \subset \mathbb{E}^2$ tiene medida cero y f es continua, se llama **integral de** f **en** $\mathcal{R}$ al número real

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} f := \int_{\mathcal{U}} 1_{\mathcal{R}} \cdot f &\overset{(47)}{=} \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} (f\sqrt{EG - F^2}) \circ \varphi \equiv \\ &\equiv \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} f(u,v) \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2}\ . \end{aligned} \tag{49}$$

Observación 3.10 *1. Sean M una superficie, $f : M \to \mathbb{R}$ una función y $\mathcal{R} \subset M$ un subconjunto (no necesariamente contenido en un entorno coordenado). En general, establecer una noción de "integrabilidad" para $1_{\mathcal{R}} \cdot f : M \to \mathbb{R}$ es una cuestión "delicada", para la que se requiere una herramienta (las "particiones de la unidad") que no vamos a desarrollar en este curso.*

*Supongamos sin embargo que disponemos de una descomposición de la forma $\mathcal{R} = \cup_{i=1}^n \mathcal{R}_i$, donde: (i) cada $\mathcal{R}_i$ está contenido en un entorno coordenado $\mathcal{U}_i$ y $\int_{\mathcal{R}_i} f := \int_{\mathcal{U}_i} 1_{\mathcal{R}_i} \cdot f$ existe, y (ii) para cada i, j, $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \cup_{k=1}^m \mathcal{S}_k$, donde cada $\mathcal{S}_k$ está contenido en un entorno coordenado $\mathcal{V}_k$ y $\int_{\mathcal{S}_k} f := \int_{\mathcal{V}_k} 1_{\mathcal{S}_k} \cdot f$ existe y vale cero. Entonces llamaremos **integral de** f **en** $\mathcal{R}$ a la suma $\int_{\mathcal{R}} f := \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{R}_i} f$. El valor de esta integral es (ver [5], 4.5, Proposición 5, sin demostración) independiente de la descomposición elegida. Esta noción será suficiente para resolver la mayor parte de los problemas de áreas en superficies y para la breve introducción a la relación entre curvatura y topología que se desarrolla en la Sección 4.3.*

2. Acerca de la definición (48) de área de un subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ (ver [5], 2.8 y [9], Cap.17, fig.17.1): de la fórmula (3) se sigue que las áreas de los rectángulos generados por las bases

$$\begin{cases} \left(\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{\varphi^{-1}(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{\varphi^{-1}(p)} \right) \text{ en } T_{\varphi^{-1}(p)}\mathbb{E}^2 \quad y \\ \left(\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p \right) \text{ en } T_pM \end{cases}$$

valen 1 y $\sqrt{EG - F^2}(p)$, respectivamente (las parametrizaciones no tienen por qué preservar los productos escalares de los vectores tangentes);

por lo que, si bien es (obviamente) $Area(\varphi^{-1}\mathcal{R}) := \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} 1$*, la expresión de* $Area(\mathcal{R})$ *"deberá ser" la dada en (48). Todo ello es similar a lo que ocurre con la definición de longitud (1.3.2) de una curva* $\alpha : I \to \mathcal{U}$*: las longitudes de los vectores tangentes*

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt}\right)_t \text{ en } T_t\mathbb{E}^1 \quad y \\ \alpha'(t) \text{ en } T_{\alpha(t)}M \end{cases}$$

son 1 y $|\alpha'(t)|$*, respectivamente; por lo que, si bien es (obviamente)* $L(I) := \int_I 1$*, la expresión de la longitud de* α *"debe ser"* $L(\alpha) := \int_I |\alpha'(t)|$.

A partir de la definición (48), resulta inmediato "recuperar" la expresión del Teorema de Pappus para el área de una superficie (acotada) de revolución (ver Ejercicio 6.3.4).

Ejemplo 3.11 *Calculemos el área de la esfera* $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0\}$ *utilizando la carta polar* $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (\vartheta, \phi))$ *del Ejemplo 2.16. En primer lugar,* $M \equiv \mathcal{U} \cup \mathcal{R}$*, donde* $\mathcal{R}$ *es un semimeridiano cerrado, que podemos pensar contenido en el dominio de otra carta* $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1})$ *y verificando* $\mathcal{R} = \bar{\varphi}([a, b] \times \{0\})$*, con lo que (Observación 2.7(1,2))* $\bar{\varphi}^{-1}(\mathcal{R})(\subset \mathbb{R}^2)$ *tiene medida cero, con lo que (Observación 2.7(3)) cualquier función continua definida en el compacto* $\bar{\varphi}^{-1}(\mathcal{R})$ *es integrable y la integral vale cero, con lo que procede definir (Observación 3.10(1)):* $Area(M) := Area(\mathcal{U})$*. Y en segundo lugar, como los coeficientes de la primera forma fundamental de* M *en dicha carta vienen dados por (Ejemplo 3.7):* $E = r^2$*,* $F = 0$ *y* $G = r^2 sen^2\vartheta$*, se concluye:*

$$Area(M) := Area(\mathcal{U}) \overset{(48)}{=} \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{U})} \sqrt{EG - F^2} \circ \varphi \overset{Fubini}{=}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{\pi} r^2 sen\vartheta d\vartheta\right) d\phi = 2\pi r^2 [-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 4\pi r^2 .$$

3.2. SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

3.2.1. Orientación de superficies

No todas las superficies son orientables (esto es, no todas admiten un campo normal unitario), aunque todas lo son localmente.

Sean $p \in \mathbb{E}^3$ y Π un plano (vectorial) de $T_p\mathbb{E}^3$. Se dice que un vector $\vec{\nu}_p \in T_p\mathbb{E}^3$ es **normal unitaria a** Π si verifica: $< \vec{\nu}_p, \vec{\nu}_p >= 1$ y $< \vec{\nu}_p, \Pi >= 0$. Existen exactamente dos normales unitarias $(\pm \vec{\nu}_p)$ a Π, y cada una de ellas define una **orientación de** Π en el siguiente sentido: se dice que una base $(\vec{\xi}_p, \vec{\eta}_p)$ de Π es(tá) **positiva(mente orientada) con respecto a** $\vec{\nu}_p$ si el vector $\vec{\xi}_p \times \vec{\eta}_p$ tiene el mismo sentido que $\vec{\nu}_p$, es decir, si $< \vec{\xi}_p \times \vec{\eta}_p, \vec{\nu}_p >$ es positivo, lo cual equivale a decir, teniendo en cuenta (4), que $\det(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\nu}) > 0$. En caso contrario, se dice que $(\vec{\xi}_p, \vec{\eta}_p)$ es(tá) **negativa(mente orientada) con respecto a $\vec{\nu}_p$.**

Sea M una superficie. Se dice que un campo (diferenciable) $\boldsymbol{\nu} \in \mathfrak{X}_M$ es **normal unitaria a** M si $\boldsymbol{\nu}(p)$ es normal unitaria a T_pM, para todo $p \in M$. Como vamos a ver, no siempre existe una normal unitaria $\boldsymbol{\nu} \in \mathfrak{X}_M$ a una superficie M; pero, cuando existe, se dice que M es **orientable** y $\boldsymbol{\nu}$ define una **orientación en** M. Así, dar una orientación en M supone establecer una orientación sobre cada espacio tangente T_pM y que esta orientación varíe diferenciablemente al mover el punto p sobre la superficie. *Si M es conexa y orientable, admite exactamente dos orientaciones.*

Si la superficie M es un conjunto de nivel regular para alguna función diferenciable, esto es, si $M = f^{-1}(0)$, siendo $f : (\mathbb{E}^3 \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}$ diferenciable y con $rango(J_f(p)) = 1$, $\forall p \in M$, entonces, habida cuenta de (44), se podrá tomar como normal unitaria

$$\boldsymbol{\nu} := \frac{(grad\ f)\ |_M}{|(grad\ f)\ |_M|} \in \mathfrak{X}_M ,$$

por lo que M resultará orientable. Se sigue de ello y del Teorema 2.13(6) que *toda superficie es localmente orientable.*

En particular, una carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ de M induce una orientación sobre $\mathcal{U}$, que es la definida por la normal unitaria

$$\boldsymbol{\nu}_\varphi := \frac{\partial/\partial u \times \partial/\partial v}{|\partial/\partial u \times \partial/\partial v|} \overset{(46)}{=} \frac{\partial/\partial u \times \partial/\partial v}{\sqrt{EG - F^2}} \in \mathfrak{X}_{\mathcal{U}} .$$

En el Apéndice 5.3.2* se explora con más detalle la orientabilidad de superficies. Una *condición suficiente para garantizar que una superficie no es orientable* se trata en el Ejercicio 6.3.5a. La banda de Moebius (Ejercicio 6.2.10) resulta así no-orientable (Ejercicio 6.3.5b) y, por lo dicho anteriormente, no podrá expresarse globalmente como conjunto de nivel regular para una función diferenciable (lo que ya se mencionó en la demostración del Teorema 2.13). Digamos finalmente que *toda superficie compacta es orientable* (citado en [5], 2.7, Observación 2, p. 122).

3.2.2. Segunda forma fundamental (SFF)

La segunda forma fundamental de una superficie (orientada), aplicada a dos vectores tangentes en un punto, es (cambiado de signo) el producto escalar de uno de ellos por la derivada direccional de la normal según el otro.

Sea $(M, \boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada. Se denomina **segunda forma fundamental de** $(M, \boldsymbol{\nu})$ a la correspondencia $\mathcal{H}$ que asocia, a cada punto $p \in M$, la forma bilineal $\mathcal{H}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{H}_p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) := - < D_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta} > . \tag{50}$$

Dados $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, se tiene: $\mathcal{H}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \overset{(41)}{=} - < D_{\mathbf{V}}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{W} >$.

> **Para comprobar** que la definición dada de $\mathcal{H}$ corresponde a la de una forma bilineal sobre M basta tener en cuenta que, escribiendo $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{3} V_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_{\mathcal{U}}\right)$, $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{3} W_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_{\mathcal{U}}\right)$ y $\boldsymbol{\nu} |_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{3} \nu_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_{\mathcal{U}}\right)$, con $V_i, W_i, \nu_i \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ $(i = 1, 2, 3)$, resulta: $\mathcal{H}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = -\sum_{j=1}^{3} (D_{\mathbf{V}}\boldsymbol{\nu})_j W_j \overset{(40)}{=} -\sum_{i,j=1}^{3} V_i \frac{\partial \nu_j}{\partial x_i} W_j$, que es una función diferenciable ■

De la expresión que acabamos de obtener se deduce que $\mathcal{H}$ es simétrica.

Fijada una carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ de M, las componentes h_{ij} de la segunda forma fundamental $\mathcal{H}$ se escriben:

$$h_{ij} := - < D_{\frac{\partial}{\partial u_i}}(\boldsymbol{\nu} |_{\mathcal{U}}), \frac{\partial}{\partial u_j} > \overset{\text{Prop. 3.1(3)}}{=} < D_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j}, \boldsymbol{\nu} |_{\mathcal{U}} > \overset{(42)}{=} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j} \circ \varphi^{-1}\right) (\nu_k |_{\mathcal{U}}) .$$

Introducimos las siguientes notaciones (que son estándar en la bibliografía) para los coeficientes h_{ij}:

$$\left\{ \begin{array}{l} e \equiv h_{11} = \sum_{k=1}^{3} (\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u^2} \circ \varphi^{-1}) \ (\nu_k |_{\mathcal{U}}) \\ f \equiv h_{12} = \sum_{k=1}^{3} (\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u \partial v} \circ \varphi^{-1}) \ (\nu_k |_{\mathcal{U}}) \\ g \equiv h_{22} = \sum_{k=1}^{3} (\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial v^2} \circ \varphi^{-1}) \ (\nu_k |_{\mathcal{U}}) \end{array} \right. , \tag{51}$$

que se denominan **coeficientes de la segunda forma fundamental de** $(M, \boldsymbol{\nu})$ **en la carta** $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$.

Sean $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{2} V_i^{\varphi} \frac{\partial}{\partial u_i}$, $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{2} W_i^{\varphi} \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$. Se tiene:

$$\mathcal{H}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} V_i^{\varphi} W_j^{\varphi} = (V_1^{\varphi}, V_2^{\varphi}) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^{\varphi} \\ W_2^{\varphi} \end{pmatrix} \quad ;$$

en particular, $\mathcal{H}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = e(V_1^{\varphi})^2 + 2f V_1^{\varphi} V_2^{\varphi} + g(V_2^{\varphi})^2$.

Ejemplo 3.12 *Considérese la esfera* $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0\}$ *y la carta polar* $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (\vartheta, \phi))$ *del Ejemplo 2.16. De la expresión*

$\varphi(\vartheta \equiv u, \phi \equiv v) = (x = r sen\vartheta \cos\phi, y = r sen\vartheta sen\phi, z = r\cos\vartheta)$ se deducían (Ejemplo 3.7) las expresiones de $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}$; derivando una vez más, se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2} = (-r\ sen\vartheta\cos\phi\ ,\ -r\ sen\vartheta\ sen\phi\ ,\ -r\ \cos\vartheta) \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta\partial\phi} = (-r\ \cos\vartheta\ sen\phi\ ,\ r\ \cos\vartheta\cos\phi\ ,\ 0) \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = (-r\ sen\vartheta\ \cos\phi\ ,\ -r\ sen\vartheta\ sen\phi\ ,\ 0) \end{cases} .$$

Por otra parte, es inmediato convencerse de que la normal unitaria $\boldsymbol{\nu}_\varphi := \frac{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial}{\partial\phi}}{\left|\frac{\partial}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial}{\partial\phi}\right|} \overset{(46)}{=} \frac{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial}{\partial\phi}}{\sqrt{EG-F^2}} \in \mathfrak{X}_\mathcal{U}$ es la "exterior" a la esfera, por lo que (sin necesidad de calcular el producto vectorial del numerador) deberá ser:

$$\boldsymbol{\nu}_\varphi(\vartheta,\phi) = (\frac{\varphi(\vartheta,\phi)-o}{r})_{\varphi(\vartheta,\phi)} = (sen\vartheta\cos\phi\ ,\ sen\vartheta\ sen\phi\ ,\ \cos\vartheta)_{\varphi(\vartheta,\phi)} .$$

Entonces los coeficientes (51) de la segunda forma fundamental de $(M, \boldsymbol{\nu}_\varphi)$ en dicha carta vienen dados por (con las identificaciones $u_i \equiv u_i \circ \varphi^{-1}$, recordar 2.2.2):

$$e = -r \quad , \quad f = 0 \quad , \quad g = -r sen^2\vartheta \ .$$

Ejemplo 3.13 *Considérese la superficie M dada en el Ejemplo 2.17 y la carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ definida en el mismo. De la expresión $\varphi(u,v) = \alpha(u) + r\cos v\ \vec{N}(u) + r sen\ v\ \vec{B}(u)$ se deducían (Ejemplo 3.8) las expresiones de $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$; derivando una vez más se obtiene:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = \kappa\tau r senv\ \vec{T}(u) + (\kappa - (\kappa^2+\tau^2)\, r\cos v)\vec{N}(u) - \tau^2 r senv\ \vec{B}(u) \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(u,v) = \kappa r senv\ \vec{T}(u) - \tau r\cos v\ \vec{N}(u) - \tau r senv\ \vec{B}(u) \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(u,v) = -r\cos v\ \vec{N}(u) - r senv\ \vec{B}(u) \end{cases} .$$

Por otra parte, es inmediato comprobar que el campo $\boldsymbol{\nu} \in \mathfrak{X}_\mathcal{U}$ con parte vectorial $\vec{\nu}(u,v) := \cos v\vec{N}(u) + senv\ \vec{B}(u)$ es normal a M; para convencerse de ello, basta verificar que, efectivamente, $< \vec{\nu}, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\circ\varphi^{-1} >= 0 =< \vec{\nu}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\circ\varphi^{-1} >$ (también puede deducirse directamente que $\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{\nu}_\varphi := -\frac{\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}$; basta efectuar el producto vectorial del numerador, teniendo en cuenta que $\vec{T}\times\vec{N} = \vec{B}$).

Entonces los coeficientes (51) de la segunda forma fundamental de $(M, \boldsymbol{\nu})$ en dicha carta vienen dados por (con las identificaciones $u_i \equiv u_i \circ \varphi^{-1}$, recordar 2.2.2):

$$e = \kappa\cos v(1 - \kappa r\cos v) - \tau^2 r \quad , \quad f = -\tau r \quad , \quad g = -r \ .$$

3.2.3. Curvatura normal y función altura

La forma cuadrática asociada a la segunda forma fundamental en un punto proporciona las curvaturas (salvo el signo) de curvas planas cuyas imágenes son "secciones normales" de la superficie por el punto, así como el "segundo orden" de la función altura sobre el punto.

(A) Sean $(M, \boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada, $p \in M$ y $\boldsymbol{\xi}(\neq \vec{0}_p) \in T_pM$. Se llama **curvatura normal de** $(M, \boldsymbol{\nu})$ **en la dirección de** $\boldsymbol{\xi}$ al número real

$$\kappa_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{-1}{\mid \boldsymbol{\xi} \mid^2} < D_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi} > \overset{(50)}{=} \frac{\mathcal{H}_p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})}{\mathcal{G}_p(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})} \quad ; \tag{52}$$

la terminología "en la dirección de" es intencional, en el sentido de que este número depende, no ya del vector tangente (no nulo) propiamente dicho, sino de la recta que éste genera. Como veremos más adelante (3.3.5), los valores que toma $\kappa_{\boldsymbol{\nu}}$ en p son todos los que se encuentran entre los dos autovalores de una cierta aplicación lineal autoadjunta (la aplicación de Weingarten) en T_pM.

Sea $\alpha : I \to M$ una curva regular. Se llama **curvatura normal de** α **en** $(M, \boldsymbol{\nu})$ a la función diferenciable $\kappa^{\alpha}_{\boldsymbol{\nu}} \in \mathfrak{F}(I)$ dada por:

$$\kappa^{\alpha}_{\boldsymbol{\nu}} := \frac{-1}{\mid \alpha' \mid^2} < D_{\alpha'}\boldsymbol{\nu}, \alpha' > \overset{(39)}{=} \frac{-1}{\mid \alpha' \mid^2} < \frac{D\,(\boldsymbol{\nu} \circ \alpha)}{dt}, \alpha' > \overset{\text{Prop. 3.1(2)}}{=} \frac{1}{\mid \alpha' \mid^2} < \boldsymbol{\nu} \circ \alpha, \alpha'' > \tag{53}$$

(esto es: $\kappa^{\alpha}_{\boldsymbol{\nu}}(t) = \kappa_{\boldsymbol{\nu}}(\alpha'(t))$.

Observación 3.14 *1. Si la curva regular α es alabeada, se tiene (denotando por $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ su tangente y normal de Frenet y por $\kappa(> 0)$ su curvatura):*

$$\alpha'' \overset{(17)}{=} \frac{d \mid \alpha' \mid}{dt}\mathbf{T} + \mid \alpha' \mid^2 \kappa \mathbf{N} \ , \ \Rightarrow \ \kappa^{\alpha}_{\boldsymbol{\nu}} = \kappa \ < \boldsymbol{\nu} \circ \alpha, \mathbf{N} > \ . \tag{54}$$

Por ejemplo, si $\operatorname{Im}\alpha$ es un paralelo (en la esfera de radio r) de colatitud $\vartheta_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y $\boldsymbol{\nu}$ es la normal exterior, resulta: $\kappa^{\alpha}_{\boldsymbol{\nu}} = \kappa \cos(\frac{\pi}{2} + \vartheta_0) = \frac{-sen\vartheta_0}{r}$.

*2. Resulta inmediato (constituye parte del llamado **teorema de Meusnier**) que todas las curvas regulares $\beta : I \to M$ con la misma tangente (no necesariamente la misma velocidad) en 0 que α poseen la misma curvatura normal en 0 que α. En particular, si $\operatorname{Im}\beta$ está contenida en el plano afín al que son tangentes $\alpha'(0)$ y $\boldsymbol{\nu}(\alpha(0))$ (diremos que β es una **sección normal de** M **por** $\alpha'(0)$), entonces su curvatura κ (como curva plana) verifica: $\kappa^{\alpha}_{\boldsymbol{\nu}}(0) = \pm\kappa(0)$; así, la curvatura normal en 0 de α no es sino la curvatura en 0 (salvo signo) de cualquier sección normal de M por $\alpha'(0)$.*

(B) Sean $(M, \boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada y $p \in M$. Definimos la **altura sobre** p **(respecto de la normal** $\boldsymbol{\nu}(p)$**)** como la función *diferenciable*

$$h_p : \mathbb{E}^3 \ni q \mapsto < q - p, \vec{\nu}(p) > \in \mathbb{R} \ ;$$

así, los puntos $q \in \mathbb{E}^3$ para los que $h_p(q)$ sea positiva estarán situados a un lado del plano afín tangente a M en p; y los $q \in \mathbb{E}^3$ para los que $h_p(q)$ sea negativa, al otro.

Pues bien, es inmediato ver que es precisamente la segunda forma fundamental $\mathcal{H}_p$ la que proporciona (hasta el "segundo orden") la información sobre la función $h_p\,|_M \in \mathfrak{F}(M)$ en las proximidades de p (obviamente $h_p(p) = 0$).

Lema 3.15 *Sean $(M, \boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada y $p \in M$.*

1. *Sea $\alpha : I \to M$ una curva con $\alpha(0) = p$. Entonces se tiene:*

$$\frac{d(h_p \circ \alpha)}{dt}(0) = 0 \quad , \quad \frac{d^2(h_p \circ \alpha)}{dt^2}(0) = \mathcal{H}_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) \ .$$

2. *Sea $(U, \varphi^{-1} = (u, v))$ una carta de M con $\varphi(0,0) = p$. Entonces se tiene:*

$$\frac{\partial(h_p \circ \varphi)}{\partial u_i}(0,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2(h_p \circ \varphi)}{\partial u_i \partial u_j}(0,0) = h_{ij}(p) \quad (i, j = 1, 2) \ .$$

Demostración. Probemos 1. Se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(h_p \circ \alpha)}{dt}(0) = \frac{d<\alpha - p, \vec{\nu}(p)>}{dt}(0) =< \frac{d\alpha}{dt}(0)\ , \vec{\nu}(p) >=< \alpha'(0)\ , \boldsymbol{\nu}(p) >= 0 \\ \frac{d^2(h_p \circ \alpha)}{dt^2}(0) = \frac{d^2<\alpha - p, \vec{\nu}(p)>}{dt^2}(0) =< \frac{d^2\alpha}{dt^2}(0)\ , \vec{\nu}(p) >=< \alpha''(0)\ , \boldsymbol{\nu}(p) > \overset{\text{Prop. 3.1(2)}}{=} \\ \quad = - < \alpha'(0), \frac{D(\boldsymbol{\nu} \circ \alpha)}{dt}(0) > \overset{(39)}{=} - < \alpha'(0), D_{\alpha'(0)}\boldsymbol{\nu} > =: \mathcal{H}_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) \ . \end{array} \right.$$

Y probemos 2. Considerando la curva $\alpha(t) := \varphi(t, 0)$, que verifica: $\alpha'(t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi_j}{\partial u}(t, 0)(\frac{\partial}{\partial x_j})_{\alpha(t)} \overset{(30)}{=} (\frac{\partial}{\partial u})_{\alpha(t)}$, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(h_p \circ \varphi)}{\partial u}(0,0) = \frac{d(h_p \circ \alpha)}{dt}(0) \overset{Aptdo.\ 1}{=} 0 \\ \frac{\partial^2(h_p \circ \varphi)}{\partial u^2}(0,0) = \frac{d^2(h_p \circ \alpha)}{dt^2}(0) \overset{Aptdo.\ 1}{=} \mathcal{H}_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) = h_{11}(p) \ . \end{array} \right.$$

Considerando la curva $\beta(t) := \varphi(0, t)$, se deducen (análogamente) las correspondientes expresiones para la coordenada v.

Finalmente, considerando la curva $\gamma(t) := \varphi(t, t)$, que verifica: $\gamma'(t) = (\frac{\partial}{\partial u})_{\gamma(t)} + (\frac{\partial}{\partial v})_{\gamma(t)}$, se obtiene:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2(h_p \circ \varphi)}{\partial u^2}(0,0) + 2\frac{\partial^2(h_p \circ \varphi)}{\partial u \partial v}(0,0) + \frac{\partial^2(h_p \circ \varphi)}{\partial v^2}(0,0) = \frac{d^2(h_p \circ \gamma)}{dt^2}(0) \overset{Aptdo.\ 1}{=} \\ \quad = \mathcal{H}_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) = h_{11}(p) + 2h_{12}(p) + h_{22}(p) \ . \end{array}$$

Se sigue de lo anterior:

$$\frac{\partial^2(h_p \circ \varphi)}{\partial u \partial v}(0,0) = h_{12}(p) \qquad \blacksquare$$

Concluimos que, efectivamente, $\mathcal{H}_p$ controla (hasta el "segundo orden") el comportamiento de $h_p\mid_M$ en las proximidades de p. Si, por ejemplo, se verifica $\mathcal{H}_p(\alpha'(0),\alpha'(0)) \neq 0$, entonces $h_p \circ \alpha$ presenta un extremo local estricto en $0 \in I$ y ello nos permite concluir que, para I pequeño, la imagen de α está situada a un mismo lado del plano afín tangente a M en p. Y si, por ejemplo, $\mathcal{H}_p$ es definida (positiva o negativa), la propia superficie debe estar, en un entorno de dicho punto, a un mismo lado del correspondiente espacio afín tangente (ver [9], Cap. 13, Teorema 3; se dice entonces que la superficie es "estrictamente convexa en p").

3.3. APLICACIÓN DE (GAUSS-)WEINGARTEN

3.3.1. Aplicación de Weingarten

La aplicación de Weingarten "explora" la normal unitaria (a la superficie) a través de su derivada direccional según los vectores tangentes. Por tratarse de la aplicación autoadjunta asociada a la segunda forma fundamental, sus coeficientes en una carta pueden calcularse (Proposición 1.7(2)) en función de los coeficientes de las dos formas fundamentales.

Sea M una superficie. La primera forma fundamental define, en cada espacio tangente T_pM, una forma bilineal simétrica; la aplicación lineal autoadjunta asociada (Proposición 1.7(4)) es la aplicación identidad.

Sea $(M,\boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada. La segunda forma fundamental define, en cada espacio tangente T_pM, una forma bilineal simétrica; la aplicación lineal autoadjunta asociada (Proposición 1.7(4)) $\mathcal{L}_p : T_pM \to T_pM$, llamada **aplicación de Weingarten de** $(M,\boldsymbol{\nu})$ **en** p, viene dada (habida cuenta de (50)) por

$$\mathcal{L}_p\boldsymbol{\xi} := -D_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\nu} \quad , \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in T_pM \tag{55}$$

(el que $D_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\nu}$ pertenece de hecho a T_pM es consecuencia de que $<\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}>= 1$ y de la Proposición 3.1(1)).

Se llama **aplicación de Weingarten de** $(M,\boldsymbol{\nu})$ a la correspondencia $\mathcal{L}$ que asocia, a cada punto $p \in M$, la aplicación de Weingarten $\mathcal{L}_p$ en dicho punto. Para cada abierto $\mathcal{U}$ de M, la aplicación de Weingarten $\mathcal{L}$ induce una aplicación (denotada por la misma letra) $\mathcal{L} : \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \ni \mathbf{V} \mapsto -D_{\mathbf{V}}\boldsymbol{\nu} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, que es (por las propiedades de (40)) $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$-lineal.

Si $(\mathcal{U},\varphi^{-1} = (u,v))$ es una carta de M y consideramos la base $(\partial/\partial u, \partial/\partial v)$ del $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$-módulo $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$, necesariamente existirán funciones diferenciables $l_{ij} \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ $(i,j = 1,2)$, llamadas **coeficientes de la aplicación de Weingarten de** $(M,\boldsymbol{\nu})$ **en la carta** $(\mathcal{U},\varphi^{-1})$, que verificarán

$$(\mathcal{L}\frac{\partial}{\partial u}, \mathcal{L}\frac{\partial}{\partial v}) = (\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}) \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \tag{56}$$

y que se obtienen a partir de los coeficientes g_{ij} y h_{ij} de las dos formas fundamentales:

$$(l_{ij}) \stackrel{\text{Prop. 1.7(2)}}{=} (g_{ij})^{-1}(h_{ij}) \ , \tag{57}$$

o de forma más explícita:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} .$$

3.3.2. Curvaturas principales, de Gauss y media. Bases adaptadas

> Como toda aplicación lineal, la aplicación de Weingarten en un punto posee determinante ("curvatura de Gauss") y traza ("curvatura media"). Por ser autoadjunta, posee una base ortonormal de autovectores. Las direcciones de esta base son únicas si y sólo si los dos autovalores ("curvaturas principales") son distintos.

Sean $(M, \boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada y $p \in M$. Los invariantes geométricos (traza, determinante, autovalores, etc.) de la aplicación de Weingarten $\mathcal{L}_p$ dan lugar a invariantes geométricos de la superficie, que a su vez gobiernan el aspecto de ésta en las proximidades de p. Se llaman:

(i) **Curvaturas principales** $k_1(p), k_2(p)$ **de** $(M, \boldsymbol{\nu})$ **en** p a los autovalores de $\mathcal{L}_p$.

(ii) **Curvatura de Gauss** $K(p)$ **de** $(M, \boldsymbol{\nu})$ **en** p al determinante de $\mathcal{L}_p$.

(iii) **Curvatura media** $H(p)$ **de** $(M, \boldsymbol{\nu})$ **en** p a la mitad de la traza de $\mathcal{L}_p$.

Obsérvese que la curvatura de Gauss no depende de la orientación (local o global) de la superficie, ya que $det(\mathcal{L}_p) = det(-\mathcal{L}_p)$.

Se sigue de la Proposición 1.7(3) que existe una base *ortonormal* $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ de T_pM *formada por autovectores* de $\mathcal{L}_p$. Según la definición anterior, se tiene:

$$\mathcal{L}_p \boldsymbol{\xi}_i = k_i(p)\, \boldsymbol{\xi}_i \ \ (i = 1, 2) \quad , \quad K(p) = k_1(p) k_2(p) \quad , \quad H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2} \ ;$$

por otra parte, las direcciones de esta base son únicas si y sólo si $k_1(p) \neq k_2(p)$. La base $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ puede además elegirse *positiva* respecto de $\boldsymbol{\nu}(p)$, en cuyo caso se dice **adaptada (a** $(M, \boldsymbol{\nu})$ **en** p).

Si $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ es una carta de M, se tiene la fórmula local (recordar que $EG - F^2 > 0$): $K \mid_{\mathcal{U}} \stackrel{(57)}{=} \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$; lo que pone de manifiesto que *la curvatura de Gauss* $K : M \to \mathbb{R}$ *de una superficie es una función diferenciable*. En cuanto a las curvaturas principales $k_1, k_2 : M \to \mathbb{R}$ (cuando hablamos de las *funciones*, elegimos la notación de forma que sea $k_1 \geq k_2$), resultan continuas en M y diferenciables (al menos) en los puntos no umbílicos (Ejercicio 6.3.6).

Ejemplo 3.16 *El cálculo de las curvaturas principales de planos y esferas se puede hacer fácilmente sin coordenadas.*

Todo plano (afín) M (en $\mathbb{E}^3$) verifica $M = f^{-1}(0)$, para la función $f : \mathbb{E}^3 \ni q \mapsto < q - p, \vec{\eta} > \in \mathbb{R}$, con $p, \vec{\eta} \in \mathbb{E}^3$. Eligiendo como normal unitaria $\boldsymbol{\nu}$ a M la dada por $\boldsymbol{\nu}(q) := \left(\frac{\vec{\eta}}{|\vec{\eta}|}\right)_q$, $\Rightarrow \boldsymbol{\nu} = \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_i}{|\vec{\eta}|}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_M\right)$, se tiene (para todo $q \in M$ y todo $\vec{\xi}_q \in T_qM$): $\mathcal{L}_q\vec{\xi}_q := -D_{\vec{\xi}_q}\boldsymbol{\nu} \stackrel{(37)}{=} 0$. Con lo que $k_1 = k_2 = 0$ y $K = 0$.

Por otra parte, toda esfera M (en $\mathbb{E}^3$) verifica $M = f^{-1}(0)$, para la función $f : \mathbb{E}^3 \ni q \mapsto < q - p, q - p > -r^2 \in \mathbb{R}$, con $p \in \mathbb{E}^3, r > 0$. Eligiendo como normal unitaria $\boldsymbol{\nu}$ a M la "exterior", dada por $\boldsymbol{\nu}(q) := \left(\frac{q-p}{r}\right)_q$, $\Rightarrow \boldsymbol{\nu} = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - p_i}{r}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_M\right)$, se tiene (para todo $q \in M$ y todo $\vec{\xi}_q \in T_qM$): $\mathcal{L}_q\vec{\xi}_q := -D_{\vec{\xi}_q}\boldsymbol{\nu} \stackrel{(37)}{=} \frac{-1}{r}\sum_{i=1}^3 \vec{\xi}_q(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q = \frac{-1}{r}\sum_{i=1}^3 \xi_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q = \frac{-1}{r}\vec{\xi}_q$. Con lo que $k_1 = k_2 = \frac{-1}{r}$ y $K = \frac{1}{r^2}$.

También podemos calcular sin coordenadas la curvatura de Gauss de un cilindro (o de un cono) M, a lo largo de cuyas generatrices la parte vectorial de la normal unitaria es (como en el caso del plano) constante. Dado $q \in M$, y eligiendo una curva $\alpha \in C(q, M)$ con imagen la correspondiente generatriz, se tiene: $\mathcal{L}_q\alpha'(0) := -D_{\alpha'(0)}\boldsymbol{\nu} \stackrel{(39)}{=} \frac{-D(\boldsymbol{\nu}\circ\alpha)}{dt}(0) \stackrel{(38)}{=} 0$. La arbitrariedad de q prueba que una de las curvaturas principales es siempre nula (la otra nunca lo es, si M es de revolución) y que $K = 0$.

Ejemplo 3.17 *Sea una carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ de una superficie orientada $(M, \boldsymbol{\nu})$. Una vez calculados los coeficientes g_{ij} y h_{ij} de las dos formas fundamentales en dicha carta, resulta inmediato calcular las curvaturas prinicipales, media y de Gauss en $\mathcal{U}$ utilizando la expresión (57).*

Así, en la esfera de radio r y en la carta polar del Ejemplo 2.16, puede aplicarse lo obtenido en los Ejemplos 3.7 (PFF) y 3.12 (SFF, con la normal $\boldsymbol{\nu}_\varphi$) para llegar a la expresión

$$(l_{ij}) \stackrel{(57)}{=} \frac{1}{r^4 sen^2\vartheta}\begin{pmatrix} r^2 sen^2\vartheta & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r sen^2\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{r} \end{pmatrix} \quad ;$$

de donde se concluye (en principio en $\mathcal{U}$ y, por continuidad, en toda la esfera) lo que ya sabemos (Ejemplo 3.16), esto es, que las curvaturas principales son $k_1 = k_2 = \frac{-1}{r}$ y la curvatura de Gauss es $K = \frac{1}{r^2}$.

Análogamente, en la superficie M dada en el Ejemplo 2.17 y en la carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ definida en el mismo, puede aplicarse lo obtenido en los Ejemplos 3.8 (PFF) y 3.13 (SFF, con la normal $\boldsymbol{\nu}_\varphi$) para llegar a la expresión:

$$(l_{ij}) \stackrel{(57)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\kappa\cos v}{1-\kappa r\cos v} & 0 \\ * & \frac{-1}{r} \end{pmatrix}$$

(¿cómo es que la matriz no sale simétrica?); de donde se concluye (!) que las curvaturas principales son $k_1 \mid_{\mathcal{U}} = \frac{\kappa \cos v}{1-\kappa r \cos v}$ *y* $k_2 \mid_{\mathcal{U}} = \frac{-1}{r}$ *y la curvatura de Gauss es* $K \mid_{\mathcal{U}} = \frac{-\kappa \cos v}{r(1-\kappa r \cos v)}$.

Un procedimieno concreto para expresar M, localmente en torno a p, como gráfica de una función diferenciable (utilizando la función altura sobre p, introducida en 3.2.3) se describe en el Apéndice 5.3.3.

3.3.3. Aplicación de Gauss

> La normal unitaria induce una aplicación de la superficie orientada sobre la esfera unidad, que hace intuitiva la curvatura de Gauss y cuya diferencial es (cambiada de signo) la aplicación de Weingarten.

Sea $(M, \boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada. Se denomina **aplicación de Gauss de** $(M, \boldsymbol{\nu})$ a la aplicación $\vec{\nu} : M \to \mathbb{S}^2$ (donde $\mathbb{S}^2$ es la esfera unitaria de $\mathbb{E}^3$ centrada en el origen) que asocia, a cada punto de M, la parte vectorial de la normal unitaria en dicho punto.

Nótese que, por ser las componentes ν_i $(i = 1, 2, 3)$ funciones diferenciables (recordar que esto significa que admiten extensiones locales $\tilde{\nu}_i$ diferenciables en torno a cada punto de $M \subset \mathbb{E}^3$), *la aplicación de Gauss es una aplicación diferenciable entre superficies*. Por otra parte, para cada $p \in M$, y puesto que los espacios tangentes a M en p y a $\mathbb{S}^2$ en $\vec{\nu}(p)$ verifican $T_pM = \{\vec{\xi}_p \in T_p\mathbb{E}^3 \mid <\vec{\xi}, \vec{\nu}(p)>= 0\}$ y $T_{\vec{\nu}(p)}\mathbb{S}^2 = \{\vec{\xi}_{\vec{\nu}(p)} \in T_{\vec{\nu}(p)}\mathbb{E}^3 \mid <\vec{\xi}, \vec{\nu}(p)>= 0\}$, la correspondencia canónica $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\vec{\nu}(p)}$ *identifica* T_pM con $T_{\vec{\nu}(p)}\mathbb{S}^2$ (ambos espacios tangentes tienen "la misma parte vectorial").

La siguiente proposición establece que la aplicación de Weingarten en el punto p es (salvo el signo) la diferencial en p de la aplicación de Gauss y proporciona una interesante interpretación geométrica (del valor absoluto) de la curvatura de Gauss $|K(p)|$:

Proposición 3.18 *Sean* $(M, \boldsymbol{\nu})$ *una superficie orientada y* $\vec{\nu} : M \to \mathbb{S}^2$ *la aplicación de Gauss.*

1. *Sea* $p \in M$. *Utilizando la identificación* $T_pM \equiv T_{\vec{\nu}(p)}\mathbb{S}^2$ *anterior, se tiene:*
$$d_p\vec{\nu} = -\mathcal{L}_p$$

2. *Sean* $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ *una carta de* M, $\mathcal{R}(\subset \mathcal{U})$ *un subconjunto que posee área y* $p \in \mathcal{R}$. *Entonces, se tiene:*
$$\lim_{\mathcal{R} \to \{p\}} \frac{Area(\vec{\nu}(\mathcal{R}))}{Area(\mathcal{R})} = |K(p)| \ .$$

Demostración: Ver Apéndice 5.3.4 ■

El resultado de la Proposición 3.18(2) representa el análogo en superficies de la expresión para curvas planas (Observación 1.28(3)): $\lim_{\mathcal{I}\to\{t\}} \frac{L(\vec{N}|_{\mathcal{I}})}{L(\alpha|_{\mathcal{I}})} = |\ \kappa(t)\ |$. Esta es la definición original de curvatura dada por Gauss, que es quizá la más natural de todas. Hace evidente, por ejemplo, que un plano o un cilindro tienen curvatura $K = 0$, mientras que una esfera de radio r tiene curvatura constante $K = 1/r^2$ (Ejemplo 3.16).

3.3.4. Clasificación de los puntos de una superficie. Direcciones principales

El "carácter" de un punto de una superficie codifica los signos de los autovalores ("curvaturas principales") de la aplicación de Weingarten en el punto.

(A) Sean M una superficie y $p \in M$. Sean $k_1(p)$ y $k_2(p)$ las curvaturas principales (respecto de alguna normal unitaria definida en torno a p) y $K(p)$ la curvatura de Gauss de M en p. Se dice que p es (la adscripción de p a alguno o algunos de los siguientes casos constituye su **carácter**):

(i) **hiperbólico** si $k_1(p)$ y $k_2(p)$ tienen *distinto signo* (esto es, si $K(p) < 0$).

(ii) **parabólico** si $k_1(p)$ ó $k_2(p)$ (pero no ambas) *es nula* (con lo que $K(p) = 0$).

(iii) **elíptico** si $k_1(p)$ y $k_2(p)$ tienen el *mismo signo* (esto es, si $K(p) > 0$).

(iv) **plano** si $k_1(p)$ y $k_2(p)$ *son nulas* (con lo que $K(p) = 0$).

Hasta aquí, la clasificación es *exhaustiva* (agota todos los posibles casos) *y excluyente* (las categorías son disjuntas). Además se dice que p es:

(v) **umbílico** si $k_1(p)$ y $k_2(p)$ *son iguales*; umbílicos son todos los puntos planos y algunos de los elípticos.

Puesto que todas estas definiciones involucran la curvatura de Gauss y/o la anulación de (alguna de) las curvaturas principales, el carácter de los puntos de una superficie es *independiente de la orientación* (local o global) elegida en ésta.

(B) Se dice que un vector tangente (no nulo) $\boldsymbol{\xi} \in T_pM$ define una **dirección principal** si $\boldsymbol{\xi}$ es autovector de $\mathcal{L}_p$. La noción de dirección principal es *independiente* de la orientación (local o global) elegida en la superficie. Entonces el punto p es:

(1) no-umbílico si y sólo si T_pM posee exactamente dos direcciones principales distintas (en tal caso, éstas son mutuamente ortogonales y están definidas por los vectores $\boldsymbol{\xi}_1$ y $\boldsymbol{\xi}_2$ de cualquier base adaptada).

(2) umbílico si y sólo si todas las direcciones en T_pM son principales.

En efecto: el que $\mathcal{L}_p$ posea sólo dos direcciones principales está ligado al hecho de que los dos autovalores de $\mathcal{L}_p$ sean distintos (recordar la Proposición 1.7(3)) $\blacksquare$

3.3.5. Fórmula de Euler. Direcciones asintóticas

La curvatura normal de una superficie (orientada) en un punto toma todos los valores que se encuentran entre los dos autovalores de la aplicación de Weingarten en dicho punto.

(A) Sean $(M, \boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada y k_1, k_2 sus curvaturas principales (elegimos la notación de manera que la función k_1 sea siempre mayor o igual que la función k_2). Sean $p \in M$ y $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ una base adaptada de T_pM. Un vector genérico $\boldsymbol{\xi} \in T_pM$ se puede escribir: $\boldsymbol{\xi} =| \boldsymbol{\xi} | (\cos\theta \, \boldsymbol{\xi}_1 + sen\,\theta \, \boldsymbol{\xi}_2)$, para cierto $\theta \in [0, 2\pi)$. Entonces la curvatura normal (3.2.3) de $(M, \boldsymbol{\nu})$ en la dirección de $\boldsymbol{\xi}$ verifica:

$$\kappa_\nu(\boldsymbol{\xi}) \overset{(52)}{:=} \frac{-1}{| \boldsymbol{\xi} |^2} < D_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi} > = \frac{1}{| \boldsymbol{\xi} |^2} < \mathcal{L}_p\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} >= k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\; sen^2\,\theta. \tag{58}$$

La fórmula que acabamos de obtener (llamada **fórmula de Euler**) muestra que los valores de la curvatura normal de $(M, \boldsymbol{\nu})$ en p son una combinación afín y "convexa" (ya que $\cos^2\theta \geq 0$, $sen^2\,\theta \geq 0$ y su suma es uno) de las curvaturas principales $k_1(p)$ y $k_2(p)$ en p. Al variar θ entre 0 y 2π, obtenemos todos los valores del intervalo $[k_2(p), k_1(p)]$, en particular $k_1(p)$ para $\theta = 0$ (y π) y $k_2(p)$ para $\theta = \pi/2$ (y $3\pi/2$). De esta forma concluimos que *las curvaturas principales $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son los valores máximo y mínimo, respectivamente, de la curvatura normal de $(M, \boldsymbol{\nu})$ en p.*

(B) Se dice que un vector tangente (no nulo) $\boldsymbol{\xi} \in T_pM$ define una **dirección asintótica** si $< \mathcal{L}_p\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} >= 0$, lo que equivale a decir que la curvatura normal $\kappa_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\xi})$ de $(M, \boldsymbol{\nu})$ en la dirección de $\boldsymbol{\xi}$ es nula. Entonces el punto p es:

(1) hiperbólico si y sólo si T_pM posee exactamente dos direcciones asintóticas distintas.

(2) parabólico si y sólo si T_pM posee una única dirección asintótica.

(3) elíptico si y sólo si T_pM no posee direcciones asintóticas.

(4) plano si y sólo si todas las direcciones de T_pM son asintóticas.

En efecto: A la vista de (58), las direcciones asintóticas en T_pM aparecen siempre por parejas, formando ángulos $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y $\pi - \theta_0$ con la dirección principal $\boldsymbol{\xi}_1$.

Condiciones necesarias: si p es hiperbólico ($k_1(p) > 0 > k_2(p)$), resulta $\theta_0 = \arctan_{(0,\frac{\pi}{2})} \sqrt{-k_1(p)/k_2(p)}$ y T_pM posee dos direcciones asintóticas; si p es parabólico, resulta $\theta_0 = 0$ (si $k_1(p) = 0 > k_2(p)$) ó $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (si $k_1(p) > 0 = k_2(p)$) y T_pM posee una (y sólo una) dirección asintótica; si p es elíptico, T_pM no posee direciones asintóticas; y si p es plano, todas las direcciones de T_pM son asintóticas.

Condiciones suficientes: inmediatas, por ser excluyente la casuística anterior sobre las direcciones asintóticas y exhaustiva la clasificación de los puntos por su carácter ■

Ejemplo 3.19 *Se sigue del Ejemplo 3.16 que cualquier punto de un plano es plano (por tanto umbílico), cualquier punto de una esfera es elíptico (y umbílico) y cualquier punto de un cilindro (o de un cono) de revolución es parabólico. Cualquier dirección tangente a un plano es principal y asintótica. Cualquier dirección tangente a una esfera es principal y ninguna es asintótica.*

En la superficie M del Ejemplo 2.17 y en la carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ definida en el mismo, se obtiene (teniendo en cuenta las expresiones obtenidas en el Ejemplo 3.17 para $k_1 \mid_{\mathcal{U}}$ y $k_2 \mid_{\mathcal{U}}$) que los puntos de $\mathcal{U}$ son hiperbólicos, parabólicos o elípticos según que su coordenada v verifique: $\cos v > 0, = 0$ *ó* < 0*, respectivamente.*

Una construcción interesante, que codifica el carácter de un punto de una superficie, es la *indicatriz de Dupin*, que se describe en el Apéndice 5.3.5*.

3.3.6. Líneas de curvatura y líneas asintóticas. Geodésicas

Una curva en una superficie se dice geodésica si su aceleración es normal a la superficie. Esta noción generaliza la de tener aceleración nula, propiedad que puede resultar incompatible con la de estar sobre una superficie dada. Veremos más adelante (4.2.2) "cuántas" geodésicas hay en una superfice.

(A) Sea M una superficie. Se dice que una curva regular $\alpha : I \to M$ define una **línea de curvatura de** M (respectivamente, una **línea asintótica de** M) si su velocidad α' define siempre una dirección principal (respectivamente, una dirección asintótica). *En ambos casos se trata de propiedades de las trayectorias ("líneas") de las curvas y no de las curvas (regulares) mismas.*

Se sigue de la definición de dirección principal (3.3.4) que una curva regular $\alpha : I \to M$ define una línea de curvatura si y sólo si, para cualquier elección (local) de normal unitaria $\boldsymbol{\nu}$, se verifica:

$$k_\alpha \alpha' = \mathcal{L}_\alpha \alpha' := -D_{\alpha'}\boldsymbol{\nu} \overset{(39)}{=} \frac{-D\,(\boldsymbol{\nu}\circ\alpha)}{dt}\ ,\ \overset{(38)}{\Leftrightarrow}\ \frac{d\,(\vec{\nu}\circ\alpha)}{dt} = -k_\alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

(sistema de ecuaciones diferenciales de 1er. orden en las componentes de la velocidad de α), donde la función $k_\alpha : I \to \mathbb{R}$ da lugar, en cada $t \in I$, a un autovalor (curvatura principal) de $\mathcal{L}_{\alpha(t)}$. Este resultado se conoce como **teorema de Olinde-Rodrigues** (ver [5], 3.2, Proposición 3).

Similarmente, se sigue de la definición de dirección asintótica (3.3.5) que una curva regular $\alpha : I \to M$ define una línea asintótica si y sólo si, para cualquier elección (local) de normal unitaria $\boldsymbol{\nu}$, se verifica:

$$0 =< \mathcal{L}_\alpha \alpha', \alpha' >:= - < D_{\alpha'}\boldsymbol{\nu}, \alpha' > \overset{(39)}{=} < \frac{-D\,(\boldsymbol{\nu}\circ\alpha)}{dt}, \alpha' >\ ,\ \overset{(38)}{\Leftrightarrow} < \frac{d\,(\vec{\nu}\circ\alpha)}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} >= 0$$

(ecuación diferencial de 1er. orden en las componentes de la velocidad de α).

(B) Se dice que una curva $\alpha : I \to M$ es una **geodésica** (**de** M) si su aceleración $\alpha'' := \frac{D\alpha'}{dt}$ es normal a M. Si $\alpha : I \to M$ es una geodésica, entonces se tiene: $\frac{d<\alpha',\alpha'>}{dt} \overset{\text{Prop. 3.1(2)}}{=} 2 < \alpha'', \alpha' >= 0$, $\Rightarrow \mid \alpha' \mid= cte.$ *Es importante señalar que el carácter de geodésica es una propiedad de la curva y no sólo de la trayectoria.*

Observación 3.20 *Sea $\alpha : I \to M$ una curva con $\mid \alpha' \mid$ constante. Si α no es una geodésica de M,* ninguna *reparametrización (1.3.1) de α puede serlo.*

En efecto: Sea $f : J \to I$ un difeomorfismo. Para que $\alpha \circ f : J \to M$ sea geodésica de M, debe ser $\mid (\alpha \circ f)' \mid= cte.$; y por ser $\mid \alpha' \mid= cte.$, se deduce de la Proposición 1.16(1): $\frac{df}{ds} = cte.$, $\Rightarrow \frac{d^2 f}{ds^2} = 0$. Pero en tal caso, se deduce de la Proposición 1.16(3): $(\alpha \circ f)'' = (\frac{df}{ds})^2\,(\alpha'' \circ f)$. Con lo que, si α'' no es paralela a $\boldsymbol{\nu} \circ \alpha$, tampoco $(\alpha \circ f)''$ puede ser paralela a $\boldsymbol{\nu} \circ \alpha \circ f$.

Ejemplo 3.21 *Cualquier curva regular en un plano define una línea de curvatura y asintótica. Cualquier curva regular en una esfera define una línea de curvatura; la esfera no posee líneas asintóticas.*

Todas las curvas con (norma de la) velocidad constante cuyas imágenes son rectas en el plano, hélices (también rectas o circunferencias) en el cilindro o círculos máximos en la esfera son geodésicas (Ejercicio 6.4.3a-c); probar que todas *las geodésicas en estas tres superficies son de esa forma (Ejercicio 6.4.3d) requiere esperar (hasta el apartado 4.2.2).*

En la superficie M dada en el Ejemplo 2.17 y en la carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ definida en el mismo, se tiene que, para cada $u \in J$, la curva $\beta_u : (-\pi, \pi) \ni$

$v \mapsto \alpha(u) + r\cos v\ \vec{N}(u) + r sen\ v\ \vec{B}(u) \in M$ *verifica:*

$$\beta_u'(v) = -r\left(sen\ v\ \vec{N}(u) - \cos v\ \vec{B}(u)\right)_{\beta_u(v)}\ , \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \beta_u''(v) = -r\left(\cos v\ \vec{N}(u) + sen\ v\ \vec{B}(u)\right)_{\beta_u(v)} = -r\left(\boldsymbol{\nu}\circ\beta_u\right)(v)$$

(utilizando la normal con parte vectorial $\vec{\nu}(u,v) := \cos v\vec{N}(u) + senv\ \vec{B}(u)$*, ya empleada en el Ejemplo 3.13), con lo que* β_u *es geodésica de* M*. Por otra parte:*

$$\mathcal{L}_{\beta_u(v)}\left(\beta_u'(v)\right) := -D_{\beta_u'(v)}\boldsymbol{\nu} \overset{(39)}{=} \frac{-D(\boldsymbol{\nu}\circ\beta_u)}{dt}(v) =$$

$$= \left(sen\ v\ \vec{N}(u) - \cos v\ \vec{B}(u)\right)_{\beta_u(v)} = \frac{-1}{r}\beta_u'(v)\ ,$$

con lo que β_u *define una línea de curvatura de* M*.*

3.4. ISOMETRÍAS Y CONGRUENCIAS

3.4.1. Isometrías entre superficies. Teorema egregio de Gauss

> Si una aplicación diferenciable entre superficies preserva (via su diferencial) productos escalares (se llama entonces isometría local), resulta ser un difeomorfismo local. Si además es biyectiva (se llama entonces isometría), resulta ser un difeomorfismo. Las isometrías locales preservan la longitud de curvas y la curvatura de Gauss, pero las aplicaciones diferenciables que preservan la curvatura de Gauss no tiene por qué ser isometrías locales.

Sean M y $\bar{M}$ superficies. Un difeomorfismo $F: M \to \bar{M}$ se llama **isometría** si, en cada punto $p \in M$, su diferencial $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}\bar{M}$ preserva la PFF, es decir:

$$< d_pF\ (\boldsymbol{\xi}), d_pF\ (\boldsymbol{\eta}) > = < \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} > \quad , \ \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in T_pM\ . \tag{59}$$

Si existe una isometría $F : M \to \bar{M}$, las superficies M y $\bar{M}$ se dicen **isométricas**. Como la identidad, la inversa de una isometría y la composición de isometrías son isometrías, se concluye que la relación "ser isométricas" es de equivalencia.

Observación 3.22 *No existe, para las isometrías entre superficies, un "análogo" a lo que el teorema de la función inversa (Teorema 2.31) es para los difeomorfismos entre superficies. Concretamente: si* $F : M \to \bar{M}$ *es una aplicación diferenciable (entre superficies) tal que* $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}\bar{M}$ *es una isometría lineal para cierto* $p \in M$*, no existe en general un entorno* $\mathcal{U}(\subset M)$ *de* p *tal que* $F\mid_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to F(\mathcal{U})$ *sea una isometría. La razón de esta diferencia es que la condición de que* d_pF *sea un isomorfismo lineal es "abierta", mientras que la de que* d_pF *sea una isometría lineal es "cerrada".*

Sean M y $\bar{M}$ superficies. Una aplicación diferenciable $F : M \to \bar{M}$ se llama **isometría local** si, en cada punto $p \in M$, su diferencial $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}\bar{M}$ preserva la PFF. Se sigue de la Observación 3.9 que F *es una isometría local si y sólo si preserva las longitudes de curvas.* Si además F es inyectiva, resulta ser una isometría sobre su imagen.

Toda isometría local es (al ser su diferencial en cada punto un isomorfismo) un difeomorfismo local (Teorema 2.31). Y se tiene:

Lema 3.23 *Sea $F : M \to \bar{M}$ un difeomorfismo local entre superficies. Entonces F es una isometría local si y sólo si, para cada punto $p \in M$ y para algún (y todo) par de cartas $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ de M en torno a p y $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1} = (\bar{u}, \bar{v}))$ de $\bar{M}$ en torno a $F(p)$ adaptadas a F (Lema 2.32), se verifica*

$$\bar{g}_{ij} \circ F\,|_{\mathcal{U}} = g_{ij} \;\; , \;\; i, j = 1, 2 \quad .$$

Demostración: Puesto que las citadas cartas cumplen $F(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$ y $F_k^{\varphi\bar{\varphi}} = u_k$ $(k = 1, 2)$, se tiene: $d_pF \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \overset{(29)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_i}\right)_{F(p)}$ $(i = 1, 2)$, y el resultado se sigue ■

Proposición 3.24 *Sea $F : M \to \bar{M}$ una isometría local entre superficies. Entonces F preserva la curvatura de Gauss: $\bar{K}(F(p)) = K(p)$, $\forall p \in M$ **(teorema egregio de Gauss)***

Demostración. El punto difícil de la demostración consiste en probar que, aunque la curvatura de Gauss de una superficie depende en principio de las dos formas fundamentales sobre ésta (3.3.2), en realidad sólo depende de la primera (esto es, constituye lo que llamaremos un objeto geométrico "intrínseco" de la superficie). Pospondremos la demostración de este punto hasta el Teorema 4.7, después de introducir la noción de "derivación covariante" en superficies.

Una vez probado que la curvatura de Gauss sólo depende de la PFF, se sigue que, si $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ y $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1})$ son cartas cualesquiera en torno a $p \in M$ y $F(p) \in \bar{M}$ (respectivamente), con g_{ij} y $\bar{g}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ los coeficientes de la primera forma fundamental en dichas cartas, se tiene:

$$K\,|_{\mathcal{U}} = \Psi(g_{ij}) \quad \text{y} \quad \bar{K}\,|_{\overline{\mathcal{U}}} = \Psi(\bar{g}_{ij}) \quad (^*) \quad ,$$

siendo Ψ una cierta función diferenciable (la misma en ambos casos!, en (71) daremos una expresión explícita de Ψ) de los coeficientes de la primera forma fundamental. Ahora bien, si F es una isometría local, sabemos (Lema 3.23) que, para cualquier $p \in M$, existen cartas $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ en torno a $p \in M$ y $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1})$ en torno a $F(p) \in \bar{M}$ en las que se verifica:

$$\bar{g}_{ij} \circ F\,|_{\mathcal{U}} = g_{ij} \;\; (i, j = 1, 2) \;\; , \;\; \overset{(^*)}{\Rightarrow} \quad \bar{K} \circ F\,|_{\mathcal{U}} = K\,|_{\mathcal{U}} \;\; ;$$

y, por la arbitrariedad de p, resulta $\bar{K} \circ F = K$ ■

Observación 3.25 *También puede probarse que las isometrías locales preservan las geodésicas. Sin embargo, esperaremos a formalizar este resultado hasta que estemos en condiciones de probarlo por completo (Proposición 4.14(2) en 4.2.2), después de introducir la noción de "transporte paralelo" en superficies.*

Ejemplo 3.26 *Sea M un sector (abierto) de generatriz l y "amplitud" Δv de un (semi)cono de revolución de "abertura" a (un tal cono tiene s.p.d.g. la ecuación $x^2 + y^2 - (tg\ a)^2 z^2 = 0$) y sea $\bar{M}$ un plano. Vamos a probar que el "desarrollo" de M en $\bar{M}$ (obtenido llevando las generatrices de aquél sobre radios de éste) es una isometría sobre su imagen (ver [5], 4.2, Ejemplo 3, p.226), que es un sector plano (circular, abierto) de radio l y ángulo $\Delta\phi = \Delta v\ sena$. Obsérvese que, a priori, no es obvio que dicho proceso (interesante para la fabricación de pantallas de lámpara) no suponga algún tipo de "estiramiento".*

Para empezar, ambas superficies poseen curvatura de Gauss nula (Ejemplo 3.16), con lo que la Proposición 3.24 no supone ninguna obstrucción. Sean las parametrizaciones (con el mismo dominio)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{U} \equiv (0,l) \times (0, \Delta v\ sena) \ni (\rho, \phi) \mapsto \\ \qquad \mapsto (\rho\ sena \cos(\frac{\phi}{sena}),\ \rho\ sena\ sen(\frac{\phi}{sena}), \rho \cos a) \in \mathcal{U}(= M) \\ \bar{\varphi} : \mathbb{U} \equiv (0,l) \times (0, \Delta v\ sena) \ni (\rho, \phi) \mapsto (\rho \cos\phi\ ,\ \rho\ sen\phi\ ,\ 0) \in \overline{\mathcal{U}}(\subset \bar{M})\ . \end{array} \right.$$

La aplicación φ es similar (pero no igual) a la parametrización obvia $(0,l) \times (0, \Delta v) \ni (\rho, v) \mapsto (\rho\ sena \cos v, \rho\ sena\ senv, \rho \cos a)$ del sector cónico M como superficie de revolución (generada por la curva plana $\alpha : (0,l) \ni \rho \mapsto (\rho\ sena, \rho \cos a) \in \mathbb{R}^2_{xy}$ al girar en torno al eje z; recordar el Ejercicio 6.2.7b). Por otra parte, $\bar{\varphi}$ es la parametrización polar usual del plano $\bar{M}$.

La elección de las parametrizaciones φ y $\bar{\varphi}$ pone de manifiesto que el citado "desarrollo" $\mathcal{F} : M \to \bar{M}$ (utilizamos la $\mathcal{F}$ caligráfica para no confundir la aplicación con el coeficiente F de la primera forma fundamental) verifica $\mathcal{F} = \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$, esto es, $\mathcal{F}$ es un difeomorfismo local y φ^{-1} y $\bar{\varphi}^{-1}$ son cartas adaptadas al mismo. Pues bien, un sencillo cálculo (!) nos da los siguientes coeficientes para la PFF del sector cónico M en la parametrización global φ y del plano $\bar{M}$ en la parametrización $\bar{\varphi}$:

$$E(\rho,\phi) = 1,\ F(\rho,\phi) = 0,\ G(\rho,\phi) = \rho^2 \quad y \quad \bar{E}(\rho,\phi) = 1,\ \bar{F}(\rho,\phi) = 0,\ \bar{G}(\rho,\phi) = \rho^2,$$

respectivamente. Se sigue que $\bar{g}_{ij}(\rho,\phi) = g_{ij}(\rho,\phi)$, o también, $\bar{g}_{ij} \circ \mathcal{F} = g_{ij}$ $(i,j = 1,2)$. Al ser $\mathcal{F}$ biyectiva por construcción, $\mathcal{F}$ resulta ser (Lema 3.23) una isometría sobre su imagen. Y hemos terminado.

En particular, el (semi)cono (privado de una generatriz) de abertura $\frac{\pi}{6}$ (con ecuación $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$) es isométrico a un semiplano (ver [9], Cap. 23, Ejemplo 4).

Ejemplo 3.27 *Sea $\mathcal{F} : M \to \bar{M}$ un difeomorfismo entre superficies que preserva la curvatura de Gauss. Pues bien, $\mathcal{F}$ no tiene por qué ser una isometría (no existe un "recíproco" del teorema egregio de Gauss).*

Veamos un primer ejemplo (trivial): sean $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ y $\bar{M} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$ y sea el difeomorfismo $\mathcal{F} : M \ni (x, y) \mapsto (2x, 2y) \in \bar{M}$. Claramente $\mathcal{F}$ no es una isometría ($\forall p \in M$ y $\forall \vec{\xi}_p \in T_pM$, $\left|d\mathcal{F}\mid_p \vec{\xi}_p\right| = 2\left|\vec{\xi}_p\right|$) y sin embargo $\mathcal{F}$ preserva la curvatura de Gauss ($K^M = 0 = K^{\bar{M}}$).

Veamos un ejemplo en el que las curvaturas de Gauss no son constantes (otro ejemplo de este tipo puede verse en el Ejercicio 6.4.9c): Sea $r > 0$, sean α y $\bar{\alpha} : I \to \mathbb{E}^3$ curvas alabeadas parametrizadas por la longitud de arco, con curvaturas $\kappa = \bar{\kappa}(< 1/r)$ y torsiones $\tau \neq \bar{\tau}$ constantes, y sean $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ y $(\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{B}})$ sus respectivos triedros de Frenet. Considérense los conjuntos $M := \operatorname{Im}\Phi$ y $\bar{M} := \operatorname{Im}\bar{\Phi}$, siendo

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi : I \times \mathbb{R} \ni (u, v) \mapsto \alpha(u) + r\cos v\ \vec{N}(u) + r sen\ v\ \vec{B}(u) \in \mathbb{E}^3 \\ \bar{\Phi} : I \times \mathbb{R} \ni (u, v) \mapsto \bar{\alpha}(u) + r\cos v\ \vec{\overline{N}}(u) + r sen\ v\ \vec{\overline{B}}(u) \in \mathbb{E}^3 \end{array}\right.$$

(M y $\bar{M}$ son "tubos" de radio r centrados en $\operatorname{Im}\alpha$ y $\operatorname{Im}\bar{\alpha}$, respectivamente; Ejemplo 2.17) y supongamos que ambos son superficies. Sabemos (Ejemplo 2.17) que cada punto $(u, v) \in I \times \mathbb{R}$ posee un entorno $J \times (-\pi, \pi)(\subset I \times \mathbb{R})$ sobre el que Φ y $\bar{\Phi}$ inducen, por restricción, parametrizaciones locales $\varphi : J \times (-\pi, \pi) \to \mathcal{U}$ y $\bar{\varphi} : J \times (-\pi, \pi) \to \overline{\mathcal{U}}$ de M y $\bar{M}$, respectivamente. Definiendo la aplicación $\mathcal{F} := \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$, resulta $\mathcal{F}^{\varphi\bar{\varphi}} = id\mid_{J\times(-\pi,\pi)}$. Pues bien, en el Ejemplo 3.8 obteníamos las siguientes expresiones para los coeficientes de la PFF de M en la parametrización φ y de $\bar{M}$ en la parametrización $\bar{\varphi}$:

$$\left\{\begin{array}{l} E(u, v) = (1 - \kappa r\cos v)^2 + \tau^2 r^2 \quad \neq \quad (1 - \kappa r\cos v)^2 + \bar{\tau}^2 r^2 = \bar{E}(u, v) \\ F(u, v) = \tau r^2 \quad \neq \quad \bar{\tau} r^2 = \bar{F}(u, v) \\ G(u, v) = r^2 = \bar{G}(u, v) \end{array}\right. ;$$

de donde se concluye (Lema 3.23) que el difeomorfismo $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ no es una isometría. Y sin embargo, en el Ejemplo 3.17 obteníamos las siguientes expresiones para las curvaturas de Gauss de M en la parametrización φ y de $\bar{M}$ en la parametrización $\bar{\varphi}$:

$$K(u, v) = \frac{-\kappa\cos v}{r\,(1 - \kappa r\cos v)} = \bar{K}(u, v)\ ;$$

con lo que el difeomorfismo $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ sí preserva la curvatura de Gauss.

3.4.2. Superficies localmente homogéneas

Si dos superficies poseen la misma curvatura de Gauss constante, cada punto de la primera posee un entorno isométrico a un entorno de cada punto de la segunda. Pero no tiene por qué existir una isometría local entre ambas superficies.

Una superficie M se dice **localmente homogénea** si, para cada par de puntos $p, q \in M$, existen entornos $\mathcal{U}$ de p y $\mathcal{V}$ de q y una isometría $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ con $F(p) = q$. Se sigue de la Proposición 3.24 que una superficie localmente homogénea tiene necesariamente curvatura de Gauss constante. Pero también el recíproco es cierto, como consecuencia del

Teorema 3.28 (Minding) *Sean M y $\bar{M}$ superficies con la misma curvatura de Gauss constante. Entonces, dados dos puntos cualesquiera $p \in M$ y $\bar{p} \in \bar{M}$, existen entornos $\mathcal{U}$ de p y $\overline{\mathcal{U}}$ de $\bar{p}$ isométricos.*

Demostración* (Ver [5], 4.6, Teorema, p. 290). En efecto: para cualquier superficie M de $\mathbb{E}^3$, es posible probar, en un cierto tipo de coordenadas $(\rho > 0, 0 < \phi < 2\pi)$ (llamadas "geodésicas polares" y que existen alrededor de cada punto, aunque éste no pertenece a su dominio), que los coeficientes de la primera forma fundamental verifican : $E = 1$, $F = 0$ y $\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial \rho^2} + K\sqrt{G} = 0$, con $\lim_{\rho \to 0} G = 0$ y $\lim_{\rho \to 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \rho} = 1$. Si $K = c$ (constante), se sigue que $G = f_c(\rho)$, donde f_c es cierta función (que no depende de ϕ) diferenciable (la misma para todas las superficies con $K = c$). Sea ahora $\bar{M}$ otra superficie con curvatura de Gauss $\bar{K} = c$ y sean dos puntos cualesquiera $p \in M, \bar{p} \in \bar{M}$. Utilicemos cartas geodésicas polares $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ de M alrededor de p y $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1})$ de $\bar{M}$ alrededor de $\bar{p}$ con la misma imagen $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$. Denotando $\mathcal{F} \equiv \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ (con lo que $\mathcal{F}^{\varphi\bar{\varphi}} = id \mid_{\mathbb{U}}$), se sigue que: $\bar{E} \circ \mathcal{F} = 1 = E$, $\bar{F} \circ \mathcal{F} = 0 = F$ y $(\bar{G} \circ \mathcal{F})(\rho, \phi) = f_c(\rho) = G(\rho, \phi)$. Se concluye (Lema 3.23) que $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ es una isometría ■

Observación 3.29 *Sean M y $\bar{M}$ superficies. Considérense las afirmaciones siguientes: (i) existe una isometría local $M \to \bar{M}$, (ii) cada punto de M posee un entorno que es isométrico a un entorno de $\bar{M}$, (iii) cada punto de M y cada punto de $\bar{M}$ poseen entornos isométricos por una isometría que lleva el primer punto en el segundo (equivalente, por el Teorema de Minding, a que M y $\bar{M}$ tienen la misma curvatura de Gauss constante). Trivialmente $(iii) \Rightarrow (ii)$ y $(ii) \not\Rightarrow (iii)$ (dos toros iguales). Pues bien, se tiene:*

1. *$(i) \Rightarrow (ii)$ (toda isometría local es localmente una isometría), pero $(ii) \not\Rightarrow (i)$ (ver Ejercicio 6.3.16c: no existe una aplicación diferenciable del catenoide en el helicoide que sea una isometría local). En este sentido, la afirmación "M y $\bar{M}$ son localmente isométricas" es equívoca (no está claro si quiere decir (i) o (ii)) y debe ser usada con sumo cuidado.*

2. *(i)* $\not\Rightarrow$ *(iii) (dos toros iguales) y (iii)* $\not\Rightarrow$ *(i) (ver Ejercicio 6.4.9b: no existe una aplicación diferenciable de un cilindro en un plano o en otro cilindro de radio mayor que sea una isometría local; basta tener en cuenta que las isometrías locales preservan las geodésicas, lo que se probará en el apartado 4.2.2).*

3.4.3. Congruencias entre superficies. Rigidez

Se llaman congruencias entre superficies aquellas isometrías que proceden de restringir movimientos del espacio euclídeo. Dada una superficie, el que sea isométrica a otra no implica (en general) que tenga que ser congruente con ella; cuando sí lo implica, la superficie se llama rígida.

Sea $\mathcal{A}$ un movimiento en $\mathbb{E}^3$, esto es (1.1.4), una biyección de la forma (6): $\mathcal{A}(p) - o = A(p - o) + \vec{\xi}$, donde $o \equiv (0,0,0)$, $A \in O(3)$ y $\vec{\xi} = \mathcal{A}(o) - o \in \mathbb{E}^3$. Sabemos que $\mathcal{A}$ posee inversa $\mathcal{A}^{-1}$, dada por: $\mathcal{A}^{-1}(p) - o = A^{-1}(p-o) - A^{-1}\vec{\xi}$, que es otro movimiento. Como los movimientos son diferenciables, resultan ser difeomorfismos de $\mathbb{E}^3$.

Sea M una superficie. De lo anterior y de la propia definición de superficie (existencia de difeomorfismos entre entornos de cada punto de la superficie y abiertos del plano, Observación 2.20(1)) se deduce inmediatamente que, si $\mathcal{A} : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ es un movimiento, $\mathcal{A}(M)$ es una superficie.

Sean M y $\bar{M}$ superficies. Una aplicación diferenciable $F : M \to \bar{M}$ se llama **congruencia** si existe un movimiento $\mathcal{A} : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ tal que $F = \mathcal{A}\mid_M$ y $\bar{M} = \mathcal{A}(M)$.

Si existe una congruencia $F : M \to \bar{M}$, las superficies M y $\bar{M}$ se dicen **congruentes**. Como la identidad, la inversa de una congruencia y la composición de congruencias son congruencias, se concluye que la relación "ser congruentes" es de equivalencia.

Como los movimientos en $\mathbb{E}^3$ son difeomorfismos, también lo son las congruencias entre superficies. Más aún: Sea $F = \mathcal{A}\mid_M : M \to \bar{M}$ una congruencia entre superficies. Para cada $p \in M$, y escribiendo de nuevo $\mathcal{A}(p) - o = A(p - o) + \vec{\xi}$, se tiene: $J_{\mathcal{A}}(p) \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x_j}\right)(p) = A$, con lo que la diferencial (2.1.3) $d_p\mathcal{A}$ verifica:

$$d_p\mathcal{A} : T_p\mathbb{E}^3 \ni \vec{\eta}_p \mapsto (A\vec{\eta})_{\mathcal{A}(p)} \in T_{\mathcal{A}(p)}\mathbb{E}^3$$

y, por ser $A \in O(3)$, resulta ser una isometría lineal. Teniendo en cuenta que la diferencial $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}\bar{M}$ es (2.3.3) la restricción a T_pM de la diferencial $d_p\mathcal{A}$, se concluye que: para cada $p \in M$, la diferencial d_pF es una isometría lineal. Así pues, *toda congruencia entre superficies es también (3.4.1) una isometría.*

Una excelente caracterización de las congruencias viene dada por el siguiente:

Teorema 3.30 *Un difeomorfismo $F : M \to \bar{M}$ es una congruencia si y sólo si, para cada $p \in M$, la diferencial $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}\bar{M}$ preserva la PFF y (para ciertas elecciones de orientación local) la SFF.*

> **Demostración*.** La condición necesaria es relativamente sencilla de probar (ver [9], Cap. 22, Teorema 2). Probar la condición suficiente es algo más difícil (ver [9], Cap. 22, Teorema 3). La condición suficiente está relacionada con el Teorema de Bonnet (Teorema 5.2, en el Apéndice 5.4.4*): éste es un resultado local, pero incluye, además de la unicidad, una afirmación de *existencia* (lo que implica resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales), mientras que nuestra condición suficiente es global, si bien sólo incluye una afirmación de unicidad ■

El que dos superficies M y $\bar{M}$ sean isométricas *no implica* (en general) que tengan que ser congruentes. Pero si, fijada M, la implicación es cierta para toda $\bar{M}$, se dice que M es **rígida** (es decir, una superficie es rígida si toda superficie isométrica a ella es congruente con ella). Intuitivamente hablando, una superficie rígida es aquélla que no puede cambiar de forma sin alterar las longitudes sobre ella. Así, por ejemplo, de la experiencia común se deduce que un abierto del plano no es rígido (Ejemplo 3.26); otro ejemplo de superficie que no es rígida puede verse en [5], 5.2. *Un ejemplo de superficie rígida es la esfera*, como se deduce del siguiente:

Teorema 3.31 (Hilbert-Liebmann) *Si M es una superficie conexa, compacta y con curvatura de Gauss constante K, entonces M es necesariamente una esfera.*

> **Demostración.** La demostración depende de tres resultados preliminares, el segundo de los cuales es de tipo técnico.
>
> Resultado 1: Toda superficie compacta posee (al menos) un punto elíptico (Ejercicio 6.3.8c).
>
> Resultado 2 (Hilbert): Sean M una superficie y $p \in M$ un punto en el que la curvatura de Gauss K es positiva y en el que las curvaturas principales $k_1 : M \to \mathbb{R}$ y $k_2 : M \to \mathbb{R}$ (elegimos la notación de manera que sea $k_1 \geq k_2$) poseen un máximo (local) y un mínimo (local), respectivamente. Entonces $k_1(p) = k_2(p)$, con lo que p resulta ser un punto umbílico de M (ver [5], 5.2, Lema 1; ver también [4], 5.6, Lema 6.2. La demostración utiliza la ecuación (71) del Teorema 4.7 y las ecuaciones de Mainardi-Codazzi (83) del Apéndice 5.4.4*).

Resultado 3. Si todos los puntos de una superficie conexa son umbílicos, entonces la superficie es un abierto de una esfera o de un plano (Ejercicio 6.3.15a).

Probemos ahora el Teorema. Por ser M compacta, posee (Resultado 1) un punto elíptico; y, por ser K constante (hipótesis), debe ser $K > 0$.

Las funciones k_1 y k_2 son continuas (Ejercicio 6.3.6). Por ser M compacta y ser $K = k_1 k_2$ constante, existe un punto $p \in M$ en el que k_1 alcanza un valor máximo y, *simultáneamente*, k_2 un mínimo. Por ser $K > 0$, el punto p es (Resultado 2) umbílico y se tiene: $k_1 \leq k_1(p) = k_2(p) \leq k_2$; pero $k_1 \geq k_2$, de donde se concluye que $k_1 = k_2$ y M tiene todos sus puntos umbílicos.

Por ser conexa y compacta, M es (Resultado 3) una esfera (obviamente, de radio $R = 1/\sqrt{K}$) ■

4. GEOMETRIA INTRINSECA LOCAL DE SUPERFICIES

Imaginemos unos hipotéticos seres bidimensionales (pero con sentido de la distancia euclídea), que habitaran sobre una superficie del espacio euclídeo $\mathbb{E}^3$ ignorantes del espacio ambiente que les rodea. Los elementos geométricos de esta superficie capaces de ser observados o medidos por estos seres (esencialmente, longitudes) constituyen lo que se denomina "geometría intrínseca" de la superficie. Nos ocuparemos aquí de observadores locales, cuya vista sólo alcanza un entorno coordenado.

Precisando un poco más los conceptos: diremos que un cierto objeto geométrico (local) sobre una superficie M es **intrínseco** si puede expresarse exclusivamente en función de la primera forma fundamental de M. Que es razonable adoptar esta definición lo prueba el que la primera forma fundamental *codifica equivalentemente* (Observación 3.9) las longitudes de curvas sobre M.

Puesto que las isometrías locales entre superficies vienen *caracterizadas* (59) como aquéllas aplicaciones diferenciables que preservan la primera forma fundamental, podemos afirmar que *los objetos geométricos (locales) intrínsecos son precisamente aquéllos que se preservan bajo las isometrías locales*; recordar a este respecto la Proposición 3.24, referida a la "curvatura de Gauss" (aunque el carácter intrínseco de ésta se terminará de probar en el Teorema 4.7 de este Capítulo).

4.1. DERIVACION COVARIANTE

En el apartado 2.4.3 hemos recordado (o introducido) las nociones habituales de derivación de campos definidos sobre subconjuntos S de $\mathbb{R}^n$ (sobreentendiendo que T_pS es subespacio vectorial de $T_p\mathbb{R}^n$, $\forall p \in S$). Usaremos aquí estos conceptos para mostrar que, cuando S es una superficie M del espacio euclídeo $\mathbb{E}^3$, aparece una noción *intrínseca* de derivación de campos tangentes a M, que denominaremos "derivación covariante". Con su ayuda probaremos que la curvatura de Gauss es un concepto intrínseco.

4.1.1. Proyecciones tangente y normal

Sea M una superficie. Fijado $p \in M$, cada vector tangente $\boldsymbol{\xi} \in T_p\mathbb{E}^3$ se descompone de forma única en suma $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{Tan} + \boldsymbol{\xi}^{Nor}$, donde la **parte normal**

$$\boldsymbol{\xi}^{Nor} := < \boldsymbol{\nu}(p), \boldsymbol{\xi} > \boldsymbol{\nu}(p)$$

es ortogonal a T_pM y la **parte tangente**

$$\boldsymbol{\xi}^{Tan} := \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^{Nor}$$

pertenece a T_pM. Las proyecciones $Nor : T_p\mathbb{E}^3 \ni \boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{\xi}^{Nor} \in T_p\mathbb{E}^3$ y $Tan : T_p\mathbb{E}^3 \ni \boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{\xi}^{Tan} \in T_pM$ son *homomorfismos de* $\mathbb{R}$*-espacios vectoriales.*

Sea $\mathcal{U}$ un abierto de M. Un campo $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ puede pues descomponerse en $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{Tan} + \mathbf{X}^{Nor}$, donde la **parte normal** viene definida por $\mathbf{X}^{Nor}(p) := \mathbf{X}(p)^{Nor}$ y la **parte tangente** por $\mathbf{X}^{Tan}(p) := \mathbf{X}(p)^{Tan}$. Evidentemente se verifica: $\mathbf{X}^{Nor} =< \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X} > \boldsymbol{\nu} \in \mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ y $\mathbf{X}^{Tan} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^{Nor} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$. Las correspondientes aplicaciones $Nor : \mathfrak{X}_{\mathcal{U}} \to \mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ y $Tan : \mathfrak{X}_{\mathcal{U}} \to \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ son *homomorfismos de* $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$*-módulos.*

4.1.2. Derivación covariante en superficies

> Definimos aquí la "derivación covariante" (de campos tangentes) en superficies, que no es sino la proyección tangente de la derivación natural. Contra lo que pudiera parecer, esta ley de derivación resulta (4.1.4) intrínseca.

Conviene leer este apartado en paralelo con los correspondientes epígrafes del apartado 2.4.3. Sea M una superficie.

(C) Dado un campo *tangente* $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}(M)$, definimos la **derivada covariante direccional de V según** $\boldsymbol{\xi}$ $\in T_pM$ como el vector tangente

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{V} := (D_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{V})^{Tan} \quad \in T_pM \tag{60}$$

Se deduce inmediatamente de las propiedades de (37) que la correspondencia $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{V}) \mapsto \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{V}$ es $\mathbb{R}$-lineal en ambas entradas y verifica: $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}(f\mathbf{V}) = \boldsymbol{\xi}(f)\mathbf{V}(p) + f(p)\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{V}$ (con lo que *no* es $\mathfrak{F}(M)$-lineal en la segunda).

Además, se deduce de la Proposición 3.1(1): $\boldsymbol{\xi}(< \mathbf{V}, \mathbf{W} >) =< \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{V}, \mathbf{W}(p) > + < \mathbf{V}(p), \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{W} >$.

(D) Si $\alpha : I \to M$ es una curva, un campo $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha$ a lo largo de α se dice **tangente a** M si $\mathbf{V}(t) \in T_{\alpha(t)}M$, $\forall t \in I$. El conjunto $\mathfrak{X}_\alpha(M)$ de campos (a lo largo de α) tangentes a M constituye un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y un $\mathfrak{F}(I)-$módulo. Obviamente $\alpha' \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$.

Dado un campo *tangente* $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$, definimos la **derivada covariante de V** como el campo tangente

$$\frac{\nabla \mathbf{V}}{dt} := \left(\frac{D\mathbf{V}}{dt}\right)^{Tan} \in \mathfrak{X}_\alpha(M)\ . \tag{61}$$

Se deduce inmediatamente de las propiedades de (38) que la correspondencia $\mathbf{V} \mapsto \frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}$ es $\mathbb{R}$-lineal y verifica: $\nabla(f\mathbf{V})/dt = (df/dt)\mathbf{V} + f\nabla\mathbf{V}/dt$ (con lo que *no* es $\mathfrak{F}(I)$-lineal).

Además, se deduce de la Proposición 3.1(2): $\frac{d<\mathbf{V},\mathbf{W}>}{dt} =< \frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}, \mathbf{W} > + < \mathbf{V}, \frac{\nabla \mathbf{W}}{dt} >$.

Por último, si $\mathbf{U} \in \mathfrak{X}(M)$, se deduce de (39) que:

$$\frac{\nabla(\mathbf{U} \circ \alpha)}{dt} = \nabla_{\alpha'}\mathbf{U} \tag{62}$$

(donde el miembro de la derecha se entiende como: $(\nabla_{\alpha'}\mathbf{U})(t) := \nabla_{\alpha'(t)}\mathbf{U}$).

(E) Dados dos campos *tangentes* $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}(M)$, definimos la **derivada covariante de W con respecto a V** como el campo tangente

$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W} := (D_{\mathbf{V}}\mathbf{W})^{Tan} \in \mathfrak{X}(M) \; ; \tag{63}$$

obsérvese que se verifica la expresión (que podría tomarse como definición alternativa de $\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W}$):

$$(\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W})(p) = \nabla_{\mathbf{V}(p)}\mathbf{W} \text{ , para todo } p \in M \; . \tag{64}$$

En efecto:

$(\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W})(p) := (D_{\mathbf{V}}\mathbf{W})(p) - < \boldsymbol{\nu}(p), (D_{\mathbf{V}}\mathbf{W})(p) > \boldsymbol{\nu}(p) \overset{(41)}{=}$
$= D_{\mathbf{V}(p)}\mathbf{W} - < \boldsymbol{\nu}(p), D_{\mathbf{V}(p)}\mathbf{W} > \boldsymbol{\nu}(p) =: \nabla_{\mathbf{V}(p)}\mathbf{W}$ ∎

Se deduce inmediatamente de las propiedades de (40) que la correspondencia $(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \mapsto \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W}$ es $\mathbb{R}$-lineal en ambas entradas, $\mathfrak{F}(M)$-lineal en la primera y verifica: $\nabla_{\mathbf{V}}(f\mathbf{W}) = \mathbf{V}(f)\mathbf{W} + f\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W}$ (con lo que *no* es $\mathfrak{F}(M)$-lineal en la segunda).

Además, si $\mathbf{U} \in \mathfrak{X}(M)$, se deduce de la Proposición 3.1(3) que se cumple: $\mathbf{U}(< \mathbf{V}, \mathbf{W} >) =< \nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V}, \mathbf{W} > + < \mathbf{V}, \nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{W} >$.

Proposición 4.1 *Sean $(M, \boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada y $\mathcal{H}$ la segunda forma fundamental. Para todo $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}(M)$, se verifica (**ecuación de Gauss**):*

$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = D_{\mathbf{V}}\mathbf{W} - \underbrace{\mathcal{H}(\mathbf{V}, \mathbf{W})}_{<\mathcal{L}\mathbf{V}, \mathbf{W}>}\boldsymbol{\nu} \; . \tag{65}$$

Demostración. En efecto:

$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W} := D_{\mathbf{V}}\mathbf{W} - < \boldsymbol{\nu}, D_{\mathbf{V}}\mathbf{W} > \boldsymbol{\nu} \overset{\text{Prop. 3.1(3)}}{=}$
$= D_{\mathbf{V}}\mathbf{W} + < D_{\mathbf{V}}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{W} > \boldsymbol{\nu} =: D_{\mathbf{V}}\mathbf{W} - \mathcal{H}(\mathbf{V}, \mathbf{W})\boldsymbol{\nu}$.

Obsérvese que la inversión de $\boldsymbol{\nu}$ invierte a su vez $\mathcal{H}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ ∎

Ejemplo 4.2 *Antes de ver la expresión que toma en coordenadas arbitrarias la derivación covariante en una superficie, resulta interesante explorar directamente su aspecto en un caso bien conocido, como es el de la esfera $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0\}$ en la carta polar $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (\vartheta, \phi))$ del*

Ejemplo 2.16. Para los campos coordenados $(\frac{\partial}{\partial u_1} \equiv \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial u_2} \equiv \frac{\partial}{\partial \phi})$ *se deduce, usando la normal unitaria (exterior)* $\boldsymbol{\nu}_\varphi := \frac{\frac{\partial}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial}{\partial \phi}}{|\frac{\partial}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial}{\partial \phi}|} \in \mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ *y la ecuación de Gauss (65), la expresión:* $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} = D_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} - h_{ij} \boldsymbol{\nu}_\varphi$*, siendo* h_{ij} $(i, j = 1, 2)$ *los coeficientes de la segunda forma fundamental de* $(\mathcal{U}, \boldsymbol{\nu}_\varphi)$*. Ahora bien, se tenía (Ejemplo 3.7)*

$$\begin{cases} \textit{Parte vect. de } \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) \overset{(30)}{=} (r \ \cos\vartheta \cos\phi \ , \ r \ \cos\vartheta \ sen\phi \ , \ -r \ sen\vartheta) \\ \textit{Parte vect. de } \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \overset{(30)}{=} (-r \ sen\vartheta \ sen\phi \ , \ r \ sen\vartheta \cos\phi \ , \ 0) \end{cases} ,$$

de donde se deducía (Ejemplo 3.12):

$$\begin{cases} \textit{Parte vect. de } \left(D_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) \overset{(42)}{=} (-r \ sen\vartheta \cos\phi \ , \ -r \ sen\vartheta \ sen\phi \ , \ -r \ \cos \ \vartheta) \\ \textit{Parte vect. de } \left(D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) \overset{(42)}{=} (-r \ \cos\vartheta \ sen\phi \ , \ r \ \cos\vartheta \cos\phi \ , \ 0) \\ \textit{Parte vect. de } \left(D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \phi}\right) \overset{(42)}{=} (-r \ sen\vartheta \ \cos\phi \ , \ -r \ sen\vartheta \ sen\phi \ , \ 0) \\ \vec{\nu}_\varphi = (sen\vartheta \cos\phi \ , \ sen\vartheta \ sen \ \phi \ , \ \cos \ \vartheta) \\ e \equiv h_{11} = -r \quad , \quad f \equiv h_{12} = 0 \quad , \quad g \equiv h_{22} = -r sen^2\vartheta \quad . \end{cases}$$

De todo ello se concluye:

$$\begin{cases} D_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = h_{11} \boldsymbol{\nu}_\varphi \\ D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = \cot\vartheta \ \frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (\Rightarrow D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ |_{\vartheta = \pi/2} = 0 \ ) \\ D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} = h_{22} \boldsymbol{\nu}_\varphi - sen\vartheta \ \cos\vartheta \ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \qquad (\Rightarrow D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} \ |_{\vartheta = \pi/2} = -r \boldsymbol{\nu}_\varphi \ |_{\vartheta = \pi/2} \ ) \end{cases}$$

y finalmente:

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = \cot\vartheta \ \frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (\Rightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ |_{\vartheta = \pi/2} = 0 \ ) \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} = -sen\vartheta \cos\vartheta \ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \qquad (\Rightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} \ |_{\vartheta = \pi/2} = 0 \ ) \end{cases} .$$

4.1.3. Expresión local de la derivación covariante. Símbolos de Christoffel

La derivación covariante en superficies puede describirse, en cada carta, por seis funciones (los símbolos de Christoffel, definidos donde la carta), que son diferenciables. Dados una curva (en un entorno coordenado) y un campo de vectores (a lo largo de ella) tangente a la superficie, las componentes de la derivada covariante del campo son funciones $\mathbb{R}$-lineales de las componentes del campo.

Sean M una superficie y $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ una carta de M. El campo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ se podrá escribir en la forma:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} =: \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u_k} , \tag{66}$$

para ciertas funciones $\Gamma_{ij}^k \equiv \Gamma_{ij}^k(u,v) \in \mathfrak{F}\ (\mathcal{U})\ \ (i,j,k=1,2)$, llamadas **símbolos de Christoffel de** M **en la carta** $(\mathcal{U},\varphi^{-1})$, que resultan *simétricos en los índices inferiores* ya que se tiene (para todo $i,j,k=1,2$):

$$D_{\frac{\partial}{\partial u_i}}\frac{\partial}{\partial u_j} \overset{(42)}{=} D_{\frac{\partial}{\partial u_j}}\frac{\partial}{\partial u_i}\ ,\ \overset{(63)}{\Rightarrow}\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}}\frac{\partial}{\partial u_j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_j}}\frac{\partial}{\partial u_i}\ ,\ \overset{(66)}{\Rightarrow}\ \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

Los símbolos de Christoffel determinan completamente la derivación covariante en el dominio $\mathcal{U}$. En efecto:

Proposición 4.3 *Sean* M *una superficie y* $(\mathcal{U},\varphi^{-1}=(u,v))$ *una carta de* M*.*

1. *Sean* $\alpha : I \to \mathcal{U}$ *una curva y* $(u(t),v(t))$ *su expresión local asociada. Sea un campo (a lo largo de* α *y tangente a* M*)* $\mathbf{V} = \sum_{j=1}^2 V_j^\varphi(\frac{\partial}{\partial u_j}\circ\alpha) \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$*, con* $V_j^\varphi \in \mathfrak{F}(I)$ $(j=1,2)$*. Se tiene:*
$$\frac{\nabla\mathbf{V}}{dt} = \sum_{k=1}^2\left(\frac{dV_k^\varphi}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{du_i}{dt}V_j^\varphi\ (\Gamma_{ij}^k\circ\alpha)\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_k}\circ\alpha\right) \tag{67}$$

2. *Sean los campos (tangentes)* $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^2 V_i^\varphi\frac{\partial}{\partial u_i}, \mathbf{W} = \sum_{j=1}^2 W_j^\varphi\frac{\partial}{\partial u_j} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$*, con* $V_i^\varphi, W_j^\varphi \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ $(i,j=1,2)$*. Se tiene:*
$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W} = \sum_{k=1}^2\left(\sum_{i=1}^2 V_i^\varphi\frac{\partial W_k^\varphi}{\partial u_i} + \sum_{i,j=1}^2 V_i^\varphi W_j^\varphi \Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial}{\partial u_k} \tag{68}$$

Demostración. Probemos 1:

$$\frac{\nabla\mathbf{V}}{dt} \overset{(61)}{=} \sum_{j=1}^2\left(\frac{dV_j^\varphi}{dt}(\frac{\partial}{\partial u_j}\circ\alpha) + V_j^\varphi\frac{\nabla}{dt}(\frac{\partial}{\partial u_j}\circ\alpha)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^2\left(\frac{dV_k^\varphi}{dt} + \sum_{i,j=1}^2\frac{du_i}{dt}V_j^\varphi(\Gamma_{ij}^k\circ\alpha)\right)(\frac{\partial}{\partial u_k}\circ\alpha)\ ,$$

donde la segunda igualdad es debida a que

$$\frac{\nabla}{dt}(\frac{\partial}{\partial u_j}\circ\alpha) \overset{(62)}{=} \nabla_{\sum_{i=1}^2\frac{du_i}{dt}(\frac{\partial}{\partial u_i}\circ\alpha)}\frac{\partial}{\partial u_j} \overset{(60)}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^2\frac{du_i}{dt}\nabla_{(\frac{\partial}{\partial u_i}\circ\alpha)}\frac{\partial}{\partial u_j} \overset{(64)}{=} \sum_{i=1}^2\frac{du_i}{dt}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}}\frac{\partial}{\partial u_j}\circ\alpha) \overset{(66)}{=} \sum_{i,k=1}^2\frac{du_i}{dt}(\Gamma_{ij}^k\circ\alpha)(\frac{\partial}{\partial u_k}\circ\alpha)\ .$$

Y probemos 2:

$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W} \overset{(63)}{=} \sum_{i,j=1}^{2}\left(V_i^{\varphi}\frac{\partial W_j^{\varphi}}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial u_j} + V_i^{\varphi}W_j^{\varphi}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}}\frac{\partial}{\partial u_j})\right) \overset{(66)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2}V_i^{\varphi}\frac{\partial W_k^{\varphi}}{\partial u_i} + \sum_{i,j=1}^{2}V_i^{\varphi}W_j^{\varphi}\Gamma_{ij}^{k}\right)\frac{\partial}{\partial u_k} \qquad \blacksquare$$

4.1.4. Carácter intrínseco de la derivación covariante y de la curvatura de Gauss.

Los símbolos de Christoffel se expresan en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental (con lo que la derivación covariante resulta un concepto intrínseco) y la curvatura de Gauss se expresa localmente en términos de la derivación covariante y de los coeficientes de la primera forma fundamental (con lo que la cuvatura de Gauss resulta también intrínseca).

Como la derivación covariante viene representada (localmente) por los símbolos de Christoffel, para demostrar que ésta tiene carácter intrínseco bastará demostrar que, en una carta arbitraria $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$, los símbolos Γ_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2)$ dependen sólo de los coeficientes $g_{ij} \equiv < \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} >$ $(i, j = 1, 2)$ de la primera forma fundamental. En efecto, ello es así y se tiene:

Proposición 4.4 *Sean M una superficie y $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ una carta de M. Sean $g_{ij} \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ $(i, j = 1, 2)$ y $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ $(i, j, k = 1, 2)$ los coeficientes de la primera forma fundamental y los símbolos de Christoffel, respectivamente, de M en la carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$. Entonces se verifica $(\forall i, j, h = 1, 2)$:*

$$\Gamma_{ij}^{h} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} g^{kh}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}(g_{ik}) + \frac{\partial}{\partial u_i}(g_{jk}) - \frac{\partial}{\partial u_k}(g_{ij})\right) \quad , \tag{69}$$

donde (g^{kh}) es la matriz inversa de la matriz (g_{ij}) y $\frac{\partial}{\partial u_k}(f) \overset{(36)}{=} \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u_k} \circ \varphi^{-1}$, para toda $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$.

Demostración*: ver Apéndice 5.4.1 $\blacksquare$

Observación 4.5 *Con las notaciones E, F, G para los coeficientes de la primera forma fundamental, y teniendo en cuenta que $(g^{kh}) = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$, las fórmulas (69) se escriben:*

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{G\frac{\partial}{\partial u}(E) - 2F\frac{\partial}{\partial u}(F) + F\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2(EG-F^2)} \ , \ \Gamma_{12}^1 = \frac{G\frac{\partial}{\partial v}(E) - F\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2(EG-F^2)} \ , \ \Gamma_{22}^1 = \frac{2G\frac{\partial}{\partial v}(F) - G\frac{\partial}{\partial u}(G) - F\frac{\partial}{\partial v}(G)}{2(EG-F^2)} \ , \\ \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{-F\frac{\partial}{\partial u}(E) + 2E\frac{\partial}{\partial u}(F) - E\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2(EG-F^2)} \ , \ \Gamma_{12}^2 = \frac{-F\frac{\partial}{\partial v}(E) + E\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2(EG-F^2)} \ , \ \Gamma_{22}^2 = \frac{-2F\frac{\partial}{\partial v}(F) + F\frac{\partial}{\partial u}(G) + E\frac{\partial}{\partial v}(G)}{2(EG-F^2)} \ . \end{cases}$$

En particular, si $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ es una carta ortogonal (esto es, si $F = 0$), se concluye:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(E)}{2E}, \Gamma_{12}^1 = \frac{\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2E}, \Gamma_{22}^1 = \frac{-\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2E}, \Gamma_{11}^2 = \frac{-\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2G}, \Gamma_{12}^2 = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2G}, \Gamma_{22}^2 = \frac{\frac{\partial}{\partial v}(G)}{2G}. \tag{70}$$

Ejemplo 4.6 *En el caso de la esfera $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0\}$ en la carta polar $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (\vartheta, \phi))$ del Ejemplo 2.16 (para la que se verifica: $E = r^2, F = 0$ y $G = r^2 sen^2\,\vartheta$, ver Ejemplo 3.7), de la expresión (70) se obtiene*

$$\Gamma_{11}^1 = 0\ ,\ \Gamma_{12}^1 = 0\ ,\ \Gamma_{22}^1 = -sen\vartheta \cos\vartheta\ ,\ \Gamma_{11}^2 = 0\ ,\ \Gamma_{12}^2 = \cot\vartheta\ ,\ \Gamma_{22}^2 = 0\ \ ;$$

lo que puede usarse en (66) para deducir rápidamente la expresión de las derivadas covariantes $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j}$, halladas "a mano" en el Ejemplo 4.2.

El siguiente teorema (uno de los más importantes en la geometría local de superficies) afirma que *la curvatura de Gauss de una superficie de $\mathbb{E}^3$ es un objeto geométrico intrínseco*, esto es, depende sólo de la primera forma fundamental. Este resultado permite completar la demostración del llamado teorema egregio de Gauss (Proposición 3.24).

Teorema 4.7 *Sean M una superficie, $K \in \mathfrak{F}(M)$ su curvatura de Gauss, $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ una carta de M y $g_{ij} \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ $(i, j = 1, 2)$ los coeficientes de la primera forma fundamental en dicha carta. Entonces se tiene:*

$$K\mid_{\mathcal{U}} = \frac{< -\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial}{\partial v} >}{\det(g_{ij})}\ , \tag{71}$$

con lo que la curvatura de Gauss resulta ser un objeto geométrico intrínseco.

Demostración*: Para la demostración de (71), ver Apéndice 5.4.2. Como la derivación covariante ∇ es (Proposición 4.4) intrínseca, el primer miembro de (71) también lo es ■

Corolario 4.8 *Sean M una superficie, $K \in \mathfrak{F}(M)$ su curvatura de Gauss y $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ una carta ortogonal de M. Entonces se verifica:*

$$K\mid_{\mathcal{U}} = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial v}(E)}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial u}(G)}{\sqrt{EG}} \right) \right)\ , \tag{72}$$

donde $\frac{\partial}{\partial u_k}(f) \overset{(36)}{=} \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial u_k} \circ \varphi^{-1}$, para toda $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$.

Demostración*. Ver Apéndice 5.4.3 ■

El resultado de que la curvatura de Gauss, concepto definido a partir de las dos formas fundamentales sobre una superficie, depende sólo (Teorema 4.7) de la primera de ellas hace sospechar que, entre ambas formas deben existir ciertas *ecuaciones de compatibilidad*; esta cuestión se trata en el Apéndice 5.4.4*.

4.2. TRANSPORTE PARALELO

En cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ habíamos construido (1.1.3) el espacio vectorial tangente $T_p\mathbb{R}^n := \{\boldsymbol{\xi} \equiv \vec{\xi}_p \mid \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n\}$ de los vectores "apoyados" en p. Hay un "transporte paralelo natural" para llevar vectores que se apoyan en un punto $p \in \mathbb{R}^n$ hasta otro punto $q \in \mathbb{R}^n$, que viene definido por el isomorfismo natural $T_p\mathbb{R}^n \ni \vec{\xi}_p \mapsto \vec{\xi}_q \in T_q\mathbb{R}^n$.

Veamos lo mismo desde otro punto de vista. Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$ y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva entre p y q. Dado $\vec{\xi}_p \equiv \sum_{i=1}^n \xi_i(\frac{\partial}{\partial x_i})_p \in T_p\mathbb{R}^n$, existe un único campo (a lo largo de α) $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha$ tal que $\frac{D\mathbf{V}}{dt} = 0$ y $\mathbf{V}(a) = \vec{\xi}_p$. En efecto, habida cuenta de (38), dicho campo es necesariamente $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \xi_i(\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \alpha)$. De esta forma, el "transporte paralelo natural" del vector $\vec{\xi}_p$ de p a q puede verse también como el resultado de evaluar $\mathbf{V}$ en el valor b del parámetro de α (independientemente de la curva α sobre la que se hace el transporte).

Sean M una superficie y $p, q \in M$. Resulta evidente (pensar un ejemplo!) que el isomorfismo natural $T_p\mathbb{R}^n \to T_q\mathbb{R}^n$ no lleva (en general) T_pM sobre T_qM. Sin embargo, vamos a ver que, si M es conexa, el punto de vista expuesto en el anterior párrafo permite definir una *noción de transporte (que llamaremos "paralelo", aunque no lo sea con el paralelismo natural)* entre T_pM y T_qM. Este transporte resulta intrínseco y constituye un excelente vehículo para detectar la huella que deja la curvatura de Gauss en la geometría intrínseca de la superficie.

4.2.1. Transporte paralelo. Carácter intrínseco

Se trata de saber si es posible definir, a lo largo de curvas en una superficie, una ley de "transporte paralelo" de vectores tangentes a ésta por el método de construir un campo de vectores "intermediario" que tenga derivada covariante nula. Puesto que esta última condición se traduce (4.1.3) en que las componentes locales de dicho campo (en cualquier carta) son soluciones de cierto sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, el citado problema de transporte (intrínseco por serlo la derivación covariante) posee siempre solución y ésta es única.

Sean $\alpha : I \to M$ una curva en una superficie M y $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ un campo (a lo largo de α y tangente a M). Se dice que $\mathbf{V}$ es **paralelo** (habría que decir "∇-paralelo") si $\frac{\nabla\mathbf{V}}{dt} = 0$.

De las propiedades de $\frac{\nabla\mathbf{V}}{dt}$ en (61) se concluye que el conjunto $\mathfrak{X}_\alpha^{||}(M)$ de campos (a lo largo de α y tangentes a M) paralelos constituye un $\mathbb{R}$-*espacio vectorial* (cuidado: no constituye un $\mathfrak{F}(I)$-módulo!) y que, para cualesquiera $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}_\alpha^{||}(M)$, el producto escalar $< \mathbf{V}, \mathbf{W} >$ es *constante* a lo largo de α.

Teorema 4.9 *Sean M una superficie, $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ una carta de M, $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{U}$ una curva y $(u(t), v(t))$ su expresión local asociada.*

1. *Sea el campo (a lo largo de α y tangente a M) $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{2} V_i^{\varphi}(\frac{\partial}{\partial u_i} \circ \alpha) \in \mathfrak{X}_{\alpha}(M)$, con $V_i^{\varphi} \in \mathfrak{F}(I)$ $(i = 1,2)$. Entonces: $\mathbf{V}$ es paralelo si y sólo si las funciones $V_i^{\varphi}(t)$ son soluciones del siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales de 1er. orden:*
$$\frac{dV_k^{\varphi}}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{du_i}{dt} V_j^{\varphi}(\Gamma_{ij}^k \circ \alpha) = 0 \quad , \quad k = 1,2 \ . \tag{73}$$

2. *Para cada $a \in I$ y cada $\boldsymbol{\xi} \in T_{\alpha(a)}M$, existe un único campo $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}} \in \mathfrak{X}_{\alpha}^{||}(M)$ tal que $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}}(a) = \boldsymbol{\xi}$. El $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{X}_{\alpha}^{||}(M)$ posee dimensión 2.*

3. *Si $a, b \in I$, la aplicación $||_{a,b}^{\alpha}$: $T_{\alpha(a)}M \ni \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}}(b) \in T_{\alpha(b)}M$ es un isomorfismo lineal, que se denomina **transporte paralelo de** $p = \alpha(a)$ **a** $q = \alpha(b)$ **a lo largo de** α. Además $||_{a,b}^{\alpha}$ es una isometría lineal. Finalmente, si $c \in (a,b)$, se verifica: $||_{a,b}^{\alpha} = ||_{c,b}^{\alpha} \circ ||_{a,c}^{\alpha}$.*

4. *Consideremos $\mathcal{U}$ orientado por la normal unitaria $\boldsymbol{\nu}_{\varphi} \in \mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$. Si $\alpha(a) = p = \alpha(b)$, la isometría lineal $||_{a,b}^{\alpha}$ es una rotación en el plano orientado $(T_pM, \boldsymbol{\nu}_{\varphi}(p))$.*

Demostración. El apartado 1 es consecuencia inmediata de la Proposición 4.3(1).

Probemos 2. La primera parte es consecuencia inmediata del resultado mencionado en el Apéndice 5.1.4* sobre existencia y unicidad de solución maximal (global) del sistema lineal (73) de ecuaciones diferenciales de 1er orden, para la condición inicial $V_k^{\varphi}(a) = \xi_k$ $(k = 1,2)$, esto es, para $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}}(a) = \boldsymbol{\xi}$. La segunda parte es consecuencia de que la biyección $\mathfrak{X}_{\alpha}^{||}(M) \ni \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}(a) \in T_{\alpha(a)}M$ que acabamos de obtener es $\mathbb{R}$-lineal y, por tanto, un isomorfismo de espacios vectoriales.

Probemos 3. La aplicación $||_{a,b}^{\alpha}$ es, por el apartado 2, la composición de los isomorfismos $\boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}}$ y $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}} \mapsto \mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}}(b)$. Además, si $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}_{\alpha}^{||}(M)$, se tiene:
$$\frac{d < \mathbf{V}, \mathbf{W} >}{dt} \overset{(61)}{=} < \frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}, \mathbf{W} > + < \mathbf{V}, \frac{\nabla \mathbf{W}}{dt} > = 0 \ ,$$
con lo que $||_{a,b}^{\alpha}$ resulta ser una isometría lineal.

Probemos 4. Sea $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ una base ortonormal de T_pM. Para todo $t \in [a,b]$, se sigue del apartado 3 que $(\mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}}(t), \mathbf{V}^{\boldsymbol{\eta}}(t))$ es una base ortonormal de $T_{\alpha(t)}M$. Al ser la función $< \mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{V}^{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\nu}_{\varphi} \circ \alpha >$ $(= \pm 1)$

continua en $[a,b]$, debe ser constante. Por tanto, si la base $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ es positiva respecto de $\boldsymbol{\nu}_\varphi(p)$, la base $(||_{a,b}^\alpha\ \boldsymbol{\xi}, ||_{a,b}^\alpha\ \boldsymbol{\eta})$ debe ser también positiva respecto de $\boldsymbol{\nu}_\varphi(p)$ ■

Puesto que las nociones de "campo paralelo" y de "transporte paralelo" se expresan via las ecuaciones (73), que son intrínsecas debido a las ecuaciones (69), se concluye que *tanto la noción de campo paralelo como la de transporte paralelo son intrínsecas.*

Observación 4.10 *1. Recordemos (2.1.5) que un camino en* $\mathbb{E}^n$ $(n \geq 2)$ *es una aplicación continua* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}^n$ *y diferenciable a trozos. Si* $\alpha : [a,b] \to M(\subset \mathbb{E}^3)$ *es un camino, siempre es posible encontrar una partición* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ *de* $[a,b]$ *de manera que cada* $\alpha_i \equiv \alpha\ |_{[t_{i-1},t_i]}$ $(i = 1,...,k)$ *sea diferenciable y con imagen contenida en el dominio de una carta. Se define entonces la aplicación*

$$||_{a,b}^\alpha := ||_{t_{k-1},b}^\alpha \circ \cdots ||_{t_1,t_2}^\alpha \circ\circ ||_{a,t_1}^\alpha : T_{\alpha(a)}M \to T_{\alpha(b)}M \quad ,$$

que resulta independiente de la partición y es una isometría lineal. Si el camino α *es cerrado (esto es,* $\alpha(a) = p = \alpha(b)$*) y existe una normal unitaria* $\boldsymbol{\nu}$ *a lo largo de* α *(por ejemplo, si* M *es orientable o si* $\mathrm{Im}\,\alpha$ *está contenida en el dominio de una carta),* $||_{a,b}^\alpha$ *es (recordar la demostración del Teorema 4.9(4)) una rotación en el plano orientado* $(T_pM, \boldsymbol{\nu}(p))$*.*

2. *En una superficie, la noción de transporte paralelo entre dos puntos a lo largo de una curva regular es invariante frente a reparametrizaciones de ésta (Ejercicio 6.4.8).*

   El transporte paralelo en un plano afín $\Pi \subset \mathbb{E}^3$ *coincide con el "transporte paralelo natural" inducido en* $\Pi \approx \mathbb{R}^2$ *vía cualquier referencia afín (Ejercicio 6.4.5).*

   Si $\alpha : I \to M$ *es una curva en una superficie* M *y* $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ *es un campo (a lo largo de* α *y tangente a* M*), el criterio de paralelismo para* $\mathbf{V}$ *dado en el Teorema 4.9(1) requiere coordenadas e integrar un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Cuando* α *es geodésica de* M*, hay un criterio sin coordenadas (Ejercicio 6.4.1), mucho más cómodo de manejar y que se aplica con frecuencia.*

   Si dos superficies se cortan a lo largo de una curva α*, las dos nociones de paralelismo (para campos a lo largo de* α *y tangentes a ambas superficies) no tienen por qué coincidir; sí lo hacen cuando las superficies son mutuamente tangentes a lo largo de* α *(Ejercicio 6.4.7).*

Ejemplo 4.11 *Consideremos la esfera* $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0\}$*. Sea* $\alpha : [a,b] \to M$ *un camino cerrado cuya imagen conste de: un* *arco de meridiano entre el polo norte p y el ecuador, un arco de ecuador de amplitud en azimut $\Delta\phi \in (0, 2\pi]$ y un segundo arco de meridiano entre el ecuador y el polo norte. Elegida la normal exterior $\boldsymbol{\nu} \in \mathfrak{X}_M$ a la esfera, el transporte paralelo $||^{\alpha}_{a,b}$: $T_pM \to T_pM$ es (Observación 4.10(1)) una rotación en el plano orientado $(T_pM, \boldsymbol{\nu}(p))$. Calculemos la determinación $\Theta \in (-\pi, \pi]$ del ángulo girado (obviamente independiente del vector $\vec{\xi}_p \in T_pM$ de partida).*

Puesto que el transporte paralelo es invariante frente a reparametrizaciones (Ejercicio 6.4.8), podemos (s.p.d.g.) suponer que $|\alpha'| =$ cte., con lo que, por constar $\operatorname{Im}\alpha$ de tres arcos de círculo máximo, existirá (Ejercicio 6.4.3c) una partición $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = b$ de $[a, b]$ tal que cada $\alpha_i \equiv \alpha\ |_{[t_{i-1},t_i]}$ $(i = 1, 2, 3)$ es una geodésica. Llamemos $p_1 \equiv \alpha(t_1), p_2 \equiv \alpha(t_2), p_3 \equiv \alpha(t_3) = p$. Para mayor sencillez, elijamos una referencia euclídea en $\mathbb{E}^3$ tal que $\operatorname{Im}\alpha_1$ esté contenida en el plano xz. Tomemos $\vec{\xi}_p = \alpha'(a) = \lambda(1, 0, 0)_p$, para cierto $\lambda > 0$. Por el Ejercicio 6.4.1, se tiene inmediatamente:

$$\begin{cases} ||^{\alpha}_{a,t_1}\ \vec{\xi}_p = \lambda(0,0,-1)_{p_1} \\ ||^{\alpha}_{a,t_2}\ \vec{\xi}_p := (||^{\alpha}_{t_1,t_2} \circ ||^{\alpha}_{a,t_1})\vec{\xi}_p = \lambda(0,0,-1)_{p_2} \\ ||^{\alpha}_{a,b}\ \vec{\xi}_p := (||^{\alpha}_{t_2,b} \circ ||^{\alpha}_{t_1,t_2} \circ ||^{\alpha}_{a,t_1})\vec{\xi}_p = \lambda(\cos\Delta\phi, sen\Delta\phi, 0)_p \end{cases},$$

con lo que se concluye:

$$\Theta = \begin{cases} \Delta\phi\ , & si\ 0 < \Delta\phi \le \pi \\ \Delta\phi - 2\pi\ , & si\ \pi < \Delta\phi \le 2\pi \end{cases}.$$

Lo anterior pone de manifiesto que: $\forall p \in M$ y $\forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in T_pM$ con $|\boldsymbol{\xi}| = |\boldsymbol{\eta}|$, existe un camino cerrado $\alpha : [a, b] \to M$ con $\alpha(a) = p = \alpha(b)$ tal que $||^{\alpha}_{a,b}\ \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}$.

4.2.2. Transporte paralelo, geodésicas e isometrías

Resulta que una geodésica en una superficie es una curva cuya velocidad posee derivada covariante nula. Esta condición significa que las coordenadas de la curva en cualquier carta satisfacen un cierto sistema (en general no lineal) de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Con lo que, dado un vector tangente en una superficie, existe una única (salvo cuestiones de dominio) geodésica que lo tiene por velocidad inicial.

(A) Sea $\gamma : I \to M$ una curva en una superficie M. En 3.3.6 definimos γ como geodésica si su aceleración $\gamma'' := \frac{D\gamma'}{dt}$ era normal a M. Puesto que $\frac{\nabla\gamma'}{dt} := \left(\frac{D\gamma'}{dt}\right)^{Tan}$, resulta que γ *es geodésica si y sólo si* $\frac{\nabla\gamma'}{dt} = 0$, *esto es, si y sólo si su velocidad es un campo paralelo.* Se dice que la geodésica $\gamma : I \to M$ es una **geodésica por $\boldsymbol{\xi}$** $\in T_pM$, si $0 \in I$ y $\gamma'(0) = \boldsymbol{\xi}$ (obviamente, en tal caso $\gamma(0) = p$). Y se dice que γ es **maximal**, si no existe ninguna geodésica

$\tilde{\gamma} : \tilde{I} \mapsto M$ que "extienda" a γ (esto es, tal que $\tilde{I}$ contenga estrictamente a I y se verifique $\tilde{\gamma} \mid_I = \gamma$).

Sabemos (3.3.6) que, si $\gamma : I \to M$ es geodésica, la función $\mid \gamma' \mid : I \to \mathbb{R}$ es constante. Además se tiene:

Proposición 4.12 *Sea M una superficie.*

1. *Sean $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ una carta de M, $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{U}$ una curva y $(u(t), v(t))$ su expresión local asociada. Entonces: γ es una geodésica si y sólo si las funciones $u(t), v(t)$ son soluciones del siguiente sistema (en general, no lineal!) de ecuaciones diferenciales de segundo orden:*

$$\frac{d^2u_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}(\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) = 0 \quad , \quad k = 1,2 \; . \tag{74}$$

2. *Para cada $p \in M$ y cada $\boldsymbol{\xi} \in T_pM$, existe una geodésica $\gamma : I \to M$ por $\boldsymbol{\xi}$.*

3. *Dos geodésicas por $\boldsymbol{\xi} \in T_pM$ coinciden en la intersección de sus dominios. En consecuencia, para cada $p \in M$ y cada $\boldsymbol{\xi} \in T_pM$, existe una única geodésica maximal por $\boldsymbol{\xi}$, que denotaremos $\gamma_{\boldsymbol{\xi}} : I_{\boldsymbol{\xi}} \to M$.*

Demostración. Probemos 1. El sistema (74) es directa consecuencia del sistema (73), que da la expresión analítica (local) de la condición de paralelismo, y de que (Observación 2.26) $(\gamma')_k^{\varphi} = \frac{du_k}{dt}$ $(k = 1,2)$.

Probemos 2 y 3. Escribamos $u_k(p) \equiv a_k$ $(k = 1,2)$ y $\boldsymbol{\xi} \equiv \sum_{k=1}^{2} \xi_k \left(\partial/\partial u_k\right)_p$. El apartado 2 (respectivamente, el apartado 3) es directa consecuencia de que el sistema de dos ecuaciones diferenciales de 2^o orden (74) es equivalente al sistema de cuatro ecuaciones diferenciables de 1er orden

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_k}{dt} - f_k = 0 \\ \frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} f_i f_j (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) = 0 \end{array} \right. \quad , \quad k = 1,2 \; ,$$

y del resultado mencionado en el Apéndice 5.1.4* sobre existencia (respectivamente, sobre unicidad) de solución maximal de este último sistema, para la condición inicial $(u_k(0) = a_k, f_k(0) = \xi_k)$ $(k = 1,2)$, esto es, para $\gamma'(0) = \boldsymbol{\xi}$ ■

Observación 4.13 *Se puede demostrar (pero no lo haremos en este curso) que: (i) si una curva entre dos puntos de una superficie posee longitud mínima (de entre todas las que unen dichos puntos), necesariamente es una geodésica (ver p.ej. [9], Cap.19, Teorema 1); y (ii) si dos puntos de una superficie están "suficientemente próximos", existe entre ellos una geodésica de longitud mínima (ver [9], Cap.19, Teorema 3).*

(B) Hemos dicho al comienzo de este Capítulo que, puesto que las isometrías locales entre superficies vienen *caracterizadas* (59) por preservar la primera forma fundamental, preservarán todos los objetos geométricos (locales) intrínsecos de las superficies. Ya hemos comprobado (Proposición 3.24 y Teorema 4.7) que así ocurre con la curvatura de Gauss. Vamos a continuación a comprobar directamente que lo mismo sucede con el transporte paralelo y con las geodésicas.

Proposición 4.14 *Sea $F : M \to \bar{M}$ una isometría local entre superficies. Entonces:*

1. *F preserva el transporte paralelo, es decir: para toda curva $\alpha : I \to M$ y para todo $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}^{||}_\alpha(M)$, se verifica $d_\alpha F\ (\mathbf{V}) \in \mathfrak{X}^{||}_{F\circ\alpha}(\bar{M})$ (donde se entiende: $(d_\alpha F\ (\mathbf{V}))\,(t) := d_{\alpha(t)}F\ (\mathbf{V}(t))$).*

2. *F preserva las geodésicas: si $\alpha : I \to M$ es geodésica, también lo es $F \circ \alpha : I \to \bar{M}$*

Demostración. Usaremos cartas $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ en M y $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1} = (\bar{u}, \bar{v}))$ en $\bar{M}$ como las construídas en el Lema 3.23(3), esto es, tales que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_k \circ F\ |_{\mathcal{U}} = u_k \ \ , \ \ \overset{(29)}{\Rightarrow} \ \ d_pF \left(\frac{\partial}{\partial u_k}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_k}\right)_{F(p)} \ , \ \forall p \in \mathcal{U} \quad (k = 1, 2) \\ \bar{g}_{ij} \circ F\ |_{\mathcal{U}} = g_{ij} \ \ , \ \ \overset{(69)}{\Rightarrow} \ \ \bar{\Gamma}^k_{ij} \circ F\ |_{\mathcal{U}} = \Gamma^k_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2) \end{array} \right. .$$

y supondremos s.p.d.g. que $\alpha(I) \subset \mathcal{U}$.

Probemos 1. Escribiendo $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^2 V_i^\varphi \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \circ \alpha\right)$, resulta obviamente: $d_\alpha F\ (\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^2 V_i^\varphi \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} \circ F \circ \alpha\right) \in \mathfrak{X}_{F\circ\alpha}(\bar{M})$. Entonces se tiene:

$$\frac{dV_k^\varphi}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{d(\bar{u}_i \circ F \circ \alpha)}{dt} V_j^\varphi (\bar{\Gamma}^k_{ij} \circ F \circ \alpha) =$$

$$= \frac{dV_k^\varphi}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{d(u_i \circ \alpha)}{dt} V_j^\varphi (\Gamma^k_{ij} \circ \alpha) \overset{\text{Teor. 4.9(1)}}{=} 0 \ ;$$

y de nuevo por el Teorema 4.9(1) se sigue que $d_\alpha F\ (\mathbf{V}) \in \mathfrak{X}^{||}_{F\circ\alpha}(\bar{M})$.

Probemos 2. Se tiene:

$$\frac{d^2(\bar{u}_k \circ F \circ \alpha)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{d(\bar{u}_i \circ F \circ \alpha)}{dt} \frac{d(\bar{u}_j \circ F \circ \alpha)}{dt} (\bar{\Gamma}^k_{ij} \circ F \circ \alpha) =$$

$$= \frac{d^2(u_k \circ \alpha)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{d(u_i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(u_j \circ \alpha)}{dt} (\Gamma_{ij}^k \circ \alpha) \stackrel{\text{Prop. 4.12(1)}}{=} 0 \; ;$$

y de nuevo por la Proposición 4.12(1) se sigue que $F \circ \alpha$ es geodésica.

En realidad, se puede dar una demostración más elegante (sin coordenadas) de este apartado 2. En efecto, se tiene:

$$\alpha' \in \mathfrak{X}_\alpha^{||}(M) \;\; \Rightarrow \;\; (F \circ \alpha)' \stackrel{(27)}{=} d_\alpha F\,(\alpha') \stackrel{Aptdo,1}{\in} \mathfrak{X}_{F\circ\alpha}^{||}(\bar{M}) \;\; \blacksquare$$

Observación 4.15 *En una superficie, la noción de geodésica es invariante frente a reparametrizaciones afines (Ejercicio 6.4.4).*

Ya sabemos (Ejemplo 3.21) que todas las curvas con velocidad constante cuyas imágenes son rectas en el plano, hélices (también rectas o circunferencias) en el cilindro o círculos máximos en la esfera son geodésicas. Podemos ahora probar que todas las geodésicas en estas tres superficies son de esa forma (Ejercicio 6.4.3d).

El que las isometrías preservan las geodésicas (Proposición 4.14(2)) permite fácilmente ver (Ejercicio 6.4.9b) que, incluso si dos superficies tienen la misma curvatura de Gauss constante, no tiene por qué existir una isometría (y ni tan siquiera una isometría local) entre ellas (recordar la Observación 3.29(2)).

Ejemplo 4.16 *Consideremos la esfera* $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2 > 0\}$. *Sea* $\alpha : [a,b] \to M$ *un camino cerrado cuya imagen sea un paralelo de colatitud* $\vartheta_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$. *Elegida la normal exterior* $\boldsymbol{\nu} \in \mathfrak{X}_M$ *a la esfera, el transporte paralelo* $||_{a,b}^{\alpha}: T_pM \to T_pM$ *es (Observación 4.10(1)) una rotación en el plano orientado* $(T_pM, \boldsymbol{\nu}(p))$. *Calculemos la determinación* $\Theta \in (-\pi, \pi]$ *del ángulo girado (obviamente independiente del vector* $\boldsymbol{\xi} \in T_pM$ *de partida).*

Tomemos $\boldsymbol{\xi} \equiv \alpha'(a)$. *Puesto que* $\mathrm{Im}\,\alpha$ *no es un círculo máximo (salvo que sea* $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$*), no podemos utilizar el criterio de paralelismo del Ejercicio 6.4.1 para determinar el campo* ∇*-paralelo* $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}} \in \mathfrak{X}_\alpha^{||}(M)$. *Sea* $\bar{M}$ *el (semi)cono de revolución tangente a* M *a lo largo de* α. *Por el Ejercicio 6.4.7b el campo* $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}}$ *será también* $\bar{\nabla}$*-paralelo. Pero un sector (abierto) de generatriz* l *(que depende de* ϑ_0*) y "amplitud"* $\Delta v (= 2\pi)$ *de un cono de revolución de "abertura"* $a (= \frac{\pi}{2} - \vartheta_0)$ *es isométrico (Ejemplo 3.26) a un sector plano (circular, abierto)* $\tilde{M}$ *de radio* l *y ángulo* $\Delta\phi = \Delta v \; sen a (= 2\pi \cos\vartheta_0)$. *Debido a que las isometrías preservan el transporte paralelo (Proposición 4.14(1)), el cálculo de* Θ *puede hacerse ventajosamente en dicho sector plano* $\tilde{M}$, *donde los campos paralelos "no giran" (Ejercicio 6.4.5). Resulta entonces inmediato comprobar (un dibujo puede ayudar a convencerse de ello) que se tiene:*

$$\Theta = \begin{cases} -2\pi\cos\vartheta_0 + 2\pi \;, & si \; 0 < \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{3} \\ -2\pi\cos\vartheta_0 \;, & si \; \frac{\pi}{3} < \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

4.2.3. Transporte paralelo y curvatura de Gauss

Dado un camino α en una superficie M cerrado, simple y cuya imagen esté contenida en el dominio de una carta ortogonal y sea la frontera de un compacto en M, la integral de la curvatura de Gauss en dicho compacto es igual a la variación del ángulo entre dos campos (a lo largo de α y tangentes a M) unitarios, uno de ellos paralelo y el otro determinado por la carta (Teorema 4.21). Entre otras aplicaciones, esta relación será fundamental para poder establecer en 4.3.2 el teorema de Gauss-Bonnet (Teorema 4.28).

Sea $(M, \boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada.

Sean $\alpha : I \to M$ una curva y $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ un campo (a lo largo de α y tangente a M) unitario. *Introduzcamos la notación (en todo lo que sigue)*

$$\widehat{\mathbf{V}} \overset{Not.}{\equiv} (\boldsymbol{\nu} \circ \alpha) \times \mathbf{V} \ . \tag{75}$$

Puesto que $\frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}$ es simultáneamente ortogonal a $\mathbf{V}$ (al ser $|\mathbf{V}|$ constante) y a $\boldsymbol{\nu} \circ \alpha$ (al ser $< \mathbf{V}, \boldsymbol{\nu} \circ \alpha >= 0$) , debe existir una función (cuyo signo dependerá de la $\boldsymbol{\nu}$ elegida) $\left[\frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}\right] \in \mathfrak{F}(I)$, denominada **valor algebraico de** $\frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \mathbf{V}}{dt} =: \left[\frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}\right] \widehat{\mathbf{V}} \quad , \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \left[\frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}\right] =< \frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}, \widehat{\mathbf{V}} >=< \frac{D\mathbf{V}}{dt}, \widehat{\mathbf{V}} > \overset{(4)}{=} \det\left(\frac{D\mathbf{V}}{dt} \ , \ \boldsymbol{\nu} \circ \alpha \ , \ \mathbf{V}\right) . \end{aligned} \tag{76}$$

Supongamos que α es regular y está parametrizada por la longitud de arco. En tal caso, se define la **curvatura geodésica** κ_g^α **de** α como

$$\kappa_g^\alpha := \left[\frac{\nabla \alpha'}{ds}\right] \overset{(76)}{=} \det\left(\alpha'' \ , \ \boldsymbol{\nu} \circ \alpha \ , \ \alpha'\right) \tag{77}$$

(si la curva unitaria α es geodésica, su curvatura geodésica es nula).

Observación 4.17 *1. Si la curva unitaria α es alabeada, se tiene (denotando por $\mathbf{N}$ su normal de Frenet y por $\kappa(>0)$ su curvatura):*

$$\kappa \mathbf{N} \overset{(17)}{=} \alpha'' =: \frac{\nabla \alpha'}{ds} + < \boldsymbol{\nu} \circ \alpha, \alpha'' > \boldsymbol{\nu} \circ \alpha \overset{(76,53)}{=} \kappa_g^\alpha \ \widehat{\alpha'} + \kappa_{\boldsymbol{\nu}}^\alpha \ (\boldsymbol{\nu} \circ \alpha) \ , \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \kappa^2 = (\kappa_g^\alpha)^2 + (\kappa_{\boldsymbol{\nu}}^\alpha)^2 \ .$$

2. Sea $f : J \to I$ un cambio de parámetro de α con $\frac{df}{ds} = -1$ (f invierte orientación) y consideremos la curva $\tilde{\alpha} := \alpha \circ f : J \to M$. Entonces se tiene:

$$\kappa_g^{\tilde{\alpha}} \stackrel{(77)}{=} \det(\tilde{\alpha}'', \boldsymbol{\nu} \circ \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}') \stackrel{Prop.\ 1.16}{=} \det\left((\tfrac{df}{ds})^2(\alpha'' \circ f), \boldsymbol{\nu} \circ \alpha \circ f, \tfrac{df}{ds}(\alpha' \circ f)\right) =$$
$$= -\det(\alpha'' \ , \ \boldsymbol{\nu} \circ \alpha \ , \ \alpha') \circ f \stackrel{(77)}{=} -\kappa_g^{\alpha} \circ f \ .$$

Lema 4.18 *Sean $(M, \boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada, $\alpha : I \to M$ una curva y $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ campos (a lo largo de α y tangentes a M) unitarios. Entonces:*

1. *Existe una función diferenciable $\theta : I \to \mathbb{R}$, tal que: $\mathbf{V} = \cos\theta\ \mathbf{U} + sen\theta\ \widehat{\mathbf{U}}$. La función θ, determinada salvo una constante aditiva múltiplo entero de 2π, se denomina una **determinación diferenciable del ángulo (orientado) de U a V**.*

2. *Si θ es una determinación diferenciable del ángulo de $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$, se verifica:*
$$\left[\frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}\right] = \left[\frac{\nabla \mathbf{U}}{dt}\right] + \frac{d\theta}{dt} \ .$$

Demostración. Es claro que se tiene: $\mathbf{V} = f_1\mathbf{U} + f_2\widehat{\mathbf{U}}$, con $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(I)$. La cuestión es si existe $\theta \in \mathfrak{F}(I)$ tal que $f_1 = \cos\theta$ y $f_2 = sen\theta$. Así pues, la demostración de 1 es totalmente análoga al Ejercicio 6.1.3a.

Probemos 2 (ver [5], 4.4, Lema 2). Se tiene:

$$\widehat{\mathbf{V}} \equiv (\boldsymbol{\nu} \circ \alpha) \times \mathbf{V} \stackrel{Aptdo,1}{=} (\boldsymbol{\nu} \circ \alpha) \times (\cos\theta\ \mathbf{U} + sen\theta\ \widehat{\mathbf{U}}) \stackrel{(4)}{=} -sen\theta\ \mathbf{U} + \cos\theta\ \widehat{\mathbf{U}} \ .$$

Por otra parte, se verifica: $\frac{\nabla \mathbf{U}}{dt} \stackrel{(76)}{\sim} \widehat{\mathbf{U}}$ y $\frac{\nabla \widehat{\mathbf{U}}}{dt} \stackrel{(76)}{\sim} \widehat{\widehat{\mathbf{U}}} \stackrel{(4)}{=} -\mathbf{U}$. Con lo cual se tiene:

$$\left[\frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}\right] \stackrel{(76)}{=} < \frac{\nabla \mathbf{V}}{dt}, \ \widehat{\mathbf{V}} > \stackrel{Aptdo.\ 1}{=}$$
$$=< -sen\theta\ \frac{d\theta}{dt}\ \mathbf{U} + \cos\theta \underbrace{\frac{\nabla \mathbf{U}}{dt}}_{\sim \widehat{\mathbf{U}}} + \cos\theta\ \frac{d\theta}{dt}\ \widehat{\mathbf{U}} + sen\theta \underbrace{\frac{\nabla \widehat{\mathbf{U}}}{dt}}_{\sim \mathbf{U}} \ , \ -sen\theta\ \mathbf{U} + \cos\theta\ \widehat{\mathbf{U}} >=$$
$$= \frac{d\theta}{dt} + \cos^2\theta < \frac{\nabla \mathbf{U}}{dt}, \widehat{\mathbf{U}} > - sen^2\theta < \frac{\nabla \widehat{\mathbf{U}}}{dt}, \mathbf{U} >=$$
$$= \frac{d\theta}{dt} + < \frac{\nabla \mathbf{U}}{dt}, \widehat{\mathbf{U}} > \stackrel{(76)}{=} \frac{d\theta}{dt} + \left[\frac{\nabla \mathbf{U}}{dt}\right] \qquad \blacksquare$$

Observación 4.19 *1. La función diferenciable $\theta : I \to \mathbb{R}$ no debe confundirse con la función continua $\bar{\theta} : I \to [0, \pi]$ dada por $\cos\bar{\theta} :=< \mathbf{U}, \mathbf{V} >$ (ángulo no orientado definido por el producto escalar). De hecho se tiene: $\bar{\theta} = |\theta - 2k\pi|$, si $\theta \in [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$, k entero. Si ambos campos $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son paralelos, $\bar{\theta}$ tiene que ser (Teorema 4.9(3)) constante, lo que implica $\frac{d\theta}{dt} = 0$.*

2. *Si alguno de los campos, por ejemplo* $\mathbf{V}$*, es paralelo,* $\frac{d\theta}{dt}$ *resulta (apartado 2 del Lema) independiente de la elección de* $\mathbf{V}$ *(sólo depende de* $\mathbf{U}$*). En particular, si* $\mathbf{V}$ *es paralelo y* $\mathbf{U} = \alpha'$ *(ello presupone que* α *está parametrizada por la longitud de arco), entonces* $\frac{-d\theta}{dt} \overset{(77)}{=} \kappa_g^\alpha$*, la curvatura geodésica de* α*.*

Lema 4.20 *Sean* M *una superficie,* $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ *una carta ortogonal (con normal unitaria* $\boldsymbol{\nu}_\varphi \in \mathfrak{X}_\mathcal{U}$*),* $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{U}$ *una curva y* $(u(t), v(t))$ *su expresión local asociada. Sea* $\mathbf{U} \equiv \frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$*, que es unitario. Se tiene*

$$\left[\frac{\nabla \mathbf{U}}{dt}\right] = -\left(\frac{\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2\sqrt{EG}} \circ \alpha\right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2\sqrt{EG}} \circ \alpha\right) \frac{dv}{dt}$$

donde $\frac{\partial}{\partial u_k}(f) \overset{(36)}{=} \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial u_k} \circ \varphi^{-1}$*, para toda* $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$*.*

Demostración. (ver [5], 4.4, Proposición 3). En primer lugar, se verifica:

$$\widehat{\mathbf{U}} \equiv (\boldsymbol{\nu}_\varphi \circ \alpha) \times \mathbf{U} \overset{3.2.1}{=} \left(\frac{\partial/\partial u \times \partial/\partial v}{\sqrt{EG}} \times \frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}}\right) \circ \alpha \underset{F=0}{\overset{(4)}{=}} \frac{\partial/\partial v}{\sqrt{G}} \circ \alpha \qquad (^*) \ .$$

Por otra parte, a lo largo de la demostración de la Proposición 4.3(1) se concluía:

$$\frac{\nabla}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial u_j} \circ \alpha\right) = \sum_{i,k=1}^{2} \frac{du_i}{dt} (\Gamma_{ij}^k \circ \alpha)\left(\frac{\partial}{\partial u_k} \circ \alpha\right) \qquad (^{**}) \ .$$

Con lo cual se tiene:

$$\left[\frac{\nabla \mathbf{U}}{dt}\right] \overset{(76)}{=} < \frac{\nabla \mathbf{U}}{dt}, \widehat{\mathbf{U}} > \overset{(^*)}{=} < \frac{\nabla}{dt}\left(\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha\right), \frac{\partial/\partial v}{\sqrt{G}} \circ \alpha > \overset{F=0}{=}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \circ \alpha\right) < \frac{\nabla}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial u} \circ \alpha\right), \frac{\partial}{\partial v} \circ \alpha > \overset{(^{**})}{=}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \circ \alpha\right) < \sum_{i,k=1}^{2} \frac{du_i}{dt} (\Gamma_{i1}^k \circ \alpha)\left(\frac{\partial}{\partial u_k} \circ \alpha\right), \frac{\partial}{\partial v} \circ \alpha > \overset{F=0}{=}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{G}{E}} \circ \alpha\right) \sum_{i=1}^{2} \frac{du_i}{dt} (\Gamma_{i1}^2 \circ \alpha) \overset{(70)}{=} -\left(\frac{\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2\sqrt{EG}} \circ \alpha\right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2\sqrt{EG}} \circ \alpha\right) \frac{dv}{dt} \quad \blacksquare$$

Teorema 4.21 *Sean* M *una superficie,* $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ *una carta ortogonal (con normal unitaria* $\boldsymbol{\nu}_\varphi \in \mathfrak{X}_\mathcal{U}$*) y* $\alpha : [a,b] \to \mathcal{U} (\subset \mathbb{E}^3)$ *un camino cerrado, simple (2.1.5) y tal que* $\operatorname{Im} \alpha$ *es la frontera de un compacto* $\mathcal{R} (\subset \mathcal{U})$*. Supongamos además que* α *es* ***positivo respecto de*** $\boldsymbol{\nu}_\varphi$*, esto es,* $(\boldsymbol{\nu}_\varphi \circ \alpha) \times \alpha'$ *apunta* *(allí donde está definido y no es nulo) hacia el interior de $\mathcal{R}$ (con lo que el camino $\varphi^{-1}\circ\alpha : [a,b] \to \mathbb{E}^2$ resulta positivo, 2.1.5). Sean $\mathbf{U},\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ campos (a lo largo de α y tangentes a M) unitarios, con $\mathbf{U} \equiv \frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha$ y $\mathbf{V}$ paralelo, y sea $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ una determinación diferenciable del ángulo de $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$. Se tiene:*

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_{\mathcal{R}} K \ .$$

Demostración. Sea $(u(t), v(t))$ la expresión local de α en la carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$. Se verifica:

$$\int_{\mathcal{R}} K \overset{(49)}{=} \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} (K\sqrt{EG})\circ\varphi \overset{(72)}{=}$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} \left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2\sqrt{EG}}\right)\right)\circ\varphi \overset{(36)}{=}$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})} \left(\frac{\partial \overbrace{\left(\frac{-\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2\sqrt{EG}}\circ\varphi\right)}^{\equiv -P}}{\partial v} + \frac{\partial \overbrace{\left(\frac{-\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2\sqrt{EG}}\circ\varphi\right)}^{\equiv Q}}{\partial u} \right) \overset{\text{Cor. 2.10 (Green)}}{=}$$

$$= \int_{[a,b]} \left(\underbrace{\left(\frac{\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2\sqrt{EG}}\circ\alpha\right)}_{P\circ(\varphi^{-1}\circ\alpha)} \frac{du}{dt} + \underbrace{\left(\frac{-\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2\sqrt{EG}}\circ\alpha\right)}_{Q\circ(\varphi^{-1}\circ\alpha)} \frac{dv}{dt} \right) \overset{\text{Lema 4.20}}{=}$$

$$= -\int_{[a,b]} \left[\frac{\nabla\mathbf{U}}{dt}\right] dt \overset{\text{Lema 4.18(2)}}{=} \int_a^b \frac{d\theta}{dt} dt = \theta(b) - \theta(a) \ \blacksquare$$

Observación 4.22 1. *El incremento $\theta(b) - \theta(a)$ del ángulo orientado de $\mathbf{U} \equiv \frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha$ a $\mathbf{V}$ (paralelo) sólo depende del comportamiento de la curvatura en la región $\mathcal{R}$.*

En realidad, el resultado mantiene su validez (ver [9], Cap. 21, Teorema 1) sin hacer mención alguna de la carta ortogonal $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$, simplemente exigiendo que el compacto $\mathcal{R}$ esté contenido en el dominio (abierto) de algún campo $\mathbf{X}$ (tangente a M) unitario y tomando $\mathbf{U} \equiv \mathbf{X}\circ\alpha$.

2. *Sabemos (Observación 4.10(1)) que el transporte paralelo* $||_{a,b}^{\alpha}: T_pM \to T_pM$ *de* $p = \alpha(a)$ *a* $p = \alpha(b)$ *a lo largo del camino* α *es una rotación en el plano orientado* $(T_pM, \boldsymbol{\nu}_\varphi(p))$. *Entonces la determinación* $\Theta \in (-\pi, \pi]$ *del ángulo girado verifica:* $\theta(b) - \theta(a) = \Theta + 2\lambda\pi$, *para cierto* λ *entero.*

   En efecto: *El ángulo* Θ *viene definido por:*

$$\mathbf{V}(b) = \cos\Theta\ \mathbf{V}(a) + sen\ \Theta\ \widehat{\mathbf{V}}(a) \quad (^*)\ .$$

   Por otra parte, por la definición de θ *(y para todo* $t \in I$*),*

$$\mathbf{V}(t) = \cos\theta(t)\ \mathbf{U}(t) + sen\ \theta(t)\ \widehat{\mathbf{U}}(t) \quad , \quad \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\mathbf{V}}(t) = \cos\theta(t)\ \widehat{\mathbf{U}}(t) - sen\ \theta(t)\ \mathbf{U}(t)\ .$$

   Se sigue:

$$\begin{aligned}
\cos\theta(b)\ \underbrace{\mathbf{U}(b)}_{\mathbf{U}(a)} + sen\ \theta(b)\ \underbrace{\widehat{\mathbf{U}}(b)}_{\widehat{\mathbf{U}}(a)} &= \mathbf{V}(b) \overset{(^*)}{=} \\
&= \cos\Theta\left(\cos\theta(a)\ \mathbf{U}(a) + sen\theta(a)\ \widehat{\mathbf{U}}(a)\right) + \\
&\quad + sen\Theta\left(\cos\theta(a)\ \widehat{\mathbf{U}}(a) - sen\theta(a)\ \mathbf{U}(a)\right) = \\
&= \cos(\Theta + \theta(a))\ \mathbf{U}(a) + sen(\Theta + \theta(a))\ \widehat{\mathbf{U}}(a) \quad ; \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow\ \theta(b) - \theta(a) = \Theta + 2\lambda\pi \quad , \quad \lambda\ entero \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

   Pero $\theta(b) - \theta(a) \overset{Teor.\ 4.21}{=} \int_{\mathcal{R}} K$ *y* $\Theta \in (-\pi, \pi]$. *Si el área de* $\mathcal{R}$ *es "suficientemente pequeña" (como para que* $\int_{\mathcal{R}} K \in (-\pi, \pi]$*), entonces debe ser* $\lambda = 0$ *y resulta:* $\Theta = \int_{\mathcal{R}} K$.

Ejemplo 4.23 *Consideremos la esfera* $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0\}$ *y en ella un triángulo (ver 4.3.1)* $T(\subset M)$ *que tiene un vértice en el polo norte* p *y dos en el ecuador y por lados dos arcos de meridiano y un arco de ecuador de amplitud en azimut* $\Delta\phi \in (0, 2\pi]$.

Calculemos la integral de la curvatura de Gauss $K (= \frac{1}{r^2}$, *ver el Ejemplo 3.16) en* T. *Ayudándonos de la carta polar* $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1} = (\vartheta, \phi))$ *del Ejemplo 2.16 (que verifica* $T \subset \overline{\mathcal{U}}$ *salvo un conjunto de medida nula, y en la que sabemos que se tiene* $\bar{E} = r^2, \bar{F} = 0$ *y* $\bar{G} = r^2 sen^2\vartheta$*), se encuentra:*

$$\int_T K = \frac{1}{r^2} Area(T) \overset{(48)}{=} \frac{1}{r^2}\int_{\bar{\varphi}^{-1}(T)} (\sqrt{\bar{E}\bar{G}} \circ \varphi) \overset{Fubini}{=} \int_0^{\Delta\phi} (\int_0^{\pi/2} sen\vartheta\ d\vartheta) d\phi = \Delta\phi\ .$$

Sea $\alpha : [a, b] \to M$ *un camino regular en tres trozos (respecto de una partición* $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = b$*), cerrado (*$\alpha(a) = p = \alpha(b)$*) y tal que*

$\operatorname{Im}\alpha = \partial T$ *(la frontera de T en M; por tanto α es simple). Si $\boldsymbol{\nu} \in \mathfrak{X}_M$ es la normal unitaria exterior a la esfera, sabemos (Observación 4.10(1)) que el transporte paralelo $||_{a,b}^{\alpha}$: $T_pM \to T_pM$ es una rotación en el plano orientado $(T_pM, \boldsymbol{\nu}(p))$ y que la determinación $\Theta \in (-\pi, \pi]$ del ángulo girado es (Ejemplo 4.11)*

$$\Theta = \begin{cases} \Delta\phi\ , & si\ 0 < \Delta\phi \leq \pi \\ \Delta\phi - 2\pi\ , & si\ \pi < \Delta\phi \leq 2\pi \end{cases} .$$

Resulta por tanto claro que, si $Area(T) \leq \pi r^2$ (esto es, si $\Delta\phi \leq \pi$), se cumple lo afirmado en la Observación 4.22(2), a saber, que $\Theta = \int_T K$ (conviene hacer un dibujo para visualizar los casos $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π).

Vayamos un poco más lejos. El Teorema 4.21 afirma además que, en una carta ortogonal $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ de M, con $T \subset \mathcal{U}$ y tal que α sea positivo respecto de $\boldsymbol{\nu}_\varphi$, se tendrá (para todo campo $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ unitario y paralelo): $\int_T K = \theta(b) - \theta(a)$, siendo $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ una determinación diferenciable del ángulo de $\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha$ a $\mathbf{V}$. Vamos a comprobar esto último, calculando directamente $\theta(b) - \theta(a)$. Sin pérdida de generalidad (Ejercicio 6.4.8b), supondremos que cada tramo regular $\alpha_i \equiv \alpha\ |_{[t_{i-1},t_i]}$ $(i = 1,2,3)$ es unitario. Podemos escribir $\theta\ |_{[t_{i-1},t_i]} = \theta_i + \omega_i$ $(i = 1,2,3)$, donde las funciones $\theta_i, \omega_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$ son determinaciones diferenciables de los ángulos de $\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha_i$ a α_i' y de α_i' a $\mathbf{V}$, respectivamente, y se tendrá:*

$$\theta(b) - \theta(a) \equiv \sum_{i=1}^{3} (\theta(t_i) - \theta(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{3} (\theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^{3} (\omega_i(t_i) - \omega_i(t_{i-1}))\ .$$

Calculemos primero $\sum_{i=1}^{3}(\theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1}))$. Como carta ortogonal no podemos elegir la carta polar $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1} = (\vartheta, \phi))$ anterior (el que el polo norte $\alpha(a) = \alpha(b)$ no pertenezca a $\overline{\mathcal{U}}$ no es algo irrelevante; de hecho, es inmediato ver que, en el intervalo abierto (a,b), se tiene: $\measuredangle(\frac{\partial/\partial\vartheta}{\sqrt{\bar{E}}} \circ \alpha, \mathbf{V})\ |_{(a,b)} = cte.$). Elijamos la carta de la proyección estereográfica (Ejercicio 6.2.9) desde el polo sur de M sobre el plano ecuatorial $(\mathcal{U} = M - \{polo\ sur\}, \varphi^{-1} = (u,v))$ y elijamos el sentido de recorrido de α para que éste sea positivo respecto de $\boldsymbol{\nu}_\varphi (= \boldsymbol{\nu}\ |_{\mathcal{U}})$. Puesto que se verifica (Ejercicio 6.3.2b) $\left(\frac{\partial/\partial\vartheta}{\sqrt{\bar{E}}}, \frac{\partial/\partial\phi}{\sqrt{\bar{G}}}\right) |_{\overline{\mathcal{U}}} = \left(\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}}, \frac{\partial/\partial v}{\sqrt{G}}\right) |_{\overline{\mathcal{U}}} \begin{pmatrix} \cos\phi & -sen\phi \\ sen\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, se sigue que:

$$\begin{cases} \theta_1 = \measuredangle(\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha_1, \frac{\partial/\partial\vartheta}{\sqrt{\bar{E}}} \circ \alpha_1) \overset{mód,2\pi}{=} \phi \circ \alpha_1 = 0\ ,\ \Rightarrow\ \theta_1(t_1) - \theta_1(t_0) = 0 \\ \theta_2 = \measuredangle(\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha_2, \frac{\partial/\partial\phi}{\sqrt{\bar{G}}} \circ \alpha_2) \overset{mód,2\pi}{=} (\phi + \frac{\pi}{2}) \circ \alpha_2\ ,\ \Rightarrow\ \theta_2(t_2) - \theta_2(t_1) = \Delta\phi \\ \theta_3 = \measuredangle(\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha_3, \frac{-\partial/\partial\vartheta}{\sqrt{\bar{E}}} \circ \alpha_3) \overset{mód,2\pi}{=} (\phi + \pi) \circ \alpha_3 = \Delta\phi + \pi\ ,\ \Rightarrow\ \theta_3(t_3) - \theta_3(t_2) = 0 \end{cases} ;$$

con lo que: $\sum_{i=1}^{3}(\theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})) = \Delta\phi$ *(a este resultado puede también llegarse, independientemente de la carta elegida, por un argumento basado en que* $\varphi^{-1}(T)$ *es estrellado y en el llamado "teorema de rotación de tangentes", que se describe en el Apéndice 5.4.5*).*

Por otra parte, por ser cada α_i *geodésica, se sigue del Lema 4.18(2) que*

$$\frac{d\omega_i}{dt} = 0 \ , \ \Rightarrow \ \omega_i(t_i) - \omega_i(t_{i-1}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \ .$$

Con lo que efectivamente resulta: $\theta(b) - \theta(a) = \Delta\phi \ (= \int_T K)$*.*

Ejemplo 4.24 *Consideremos de nuevo la esfera* $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0\}$ *y en ella un casquete esférico* $\mathcal{R}(\subset M)$ *centrado en el polo norte p y limitado por un paralelo de colatitud* $\vartheta_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$*.*

Calculemos la integral de la curvatura de Gauss $K(= \frac{1}{r^2})$ *en* $\mathcal{R}$*. Ayudándonos de la carta polar* $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1} = (\vartheta, \phi))$ *(que verifica* $\mathcal{R} \subset \overline{\mathcal{U}}$ *salvo un conjunto de medida nula, y en la que sabemos que se tiene* $\bar{E} = r^2, \bar{F} = 0$ *y* $\bar{G} = r^2 sen^2\vartheta$*), se encuentra:*

$$\int_{\mathcal{R}} K = \frac{1}{r^2} Area(\mathcal{R}) \overset{(48)}{=} \frac{1}{r^2} \int_{\bar{\varphi}^{-1}(\mathcal{R})} (\sqrt{\bar{E}\bar{G}} \circ \varphi) \overset{Fubini}{=} \int_0^{2\pi} (\int_0^{\vartheta_0} sen\vartheta \, d\vartheta) d\phi = 2\pi(1 - \cos\vartheta_0) \ .$$

Sea $\alpha : [a, b] \to M$ *una curva regular, con* $\alpha(a) = p = \alpha(b)$ *y tal que* $\operatorname{Im}\alpha = \partial\mathcal{R}$ *(la frontera de* $\mathcal{R}$ *en* M*; por tanto* α *es simple). Si* $\boldsymbol{\nu} \in \mathfrak{X}_M$ *es la normal unitaria exterior a la esfera, sabemos (Observación 4.10(1)) que el transporte paralelo* $||_{a,b}^{\alpha}$*:* $T_pM \to T_pM$ *es una rotación en el plano orientado* $(T_pM, \boldsymbol{\nu}(p))$ *y que la determinación* $\Theta \in (-\pi, \pi]$ *del ángulo girado es (Ejemplo 4.16)*

$$\Theta = \begin{cases} -2\pi\cos\vartheta_0 + 2\pi \ , & si \ 0 < \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{3} \\ -2\pi\cos\vartheta_0 \ , & si \ \frac{\pi}{3} < \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \ .$$

Resulta por tanto claro que, si $Area(\mathcal{R}) \leq \pi r^2$ *(esto es, si* $\vartheta_0 \leq \frac{\pi}{3}$*), se cumple lo afirmado en la Observación 4.22(2), a saber, que* $\Theta = \int_{\mathcal{R}} K$*.*

Vayamos un poco más lejos. El Teorema 4.21 afirma además que, en una carta ortogonal* $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ *de* M*, con* $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ *y tal que* α *sea positivo respecto de* $\boldsymbol{\nu}_\varphi$*, se tendrá (para todo campo* $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ *unitario y paralelo):* $\int_{\mathcal{R}} K = \theta(b) - \theta(a)$*, siendo* $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una determinación diferenciable del ángulo de* $\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha$ *a* $\mathbf{V}$*. Vamos a comprobar esto último, calculando directamente* $\theta(b) - \theta(a)$*. Sin pérdida de generalidad (Ejercicio 6.4.8b), supondremos que* α *es unitaria. Podemos escribir* $\theta = \theta_1 + \omega_1$*, donde las funciones* $\theta_1, \omega_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ *son determinaciones diferenciables de los ángulos orientados de* $\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha$ *a* α' *y de* α' *a* $\mathbf{V}$*, respectivamente, y se tendrá:*

$$\theta(b) - \theta(a) = (\theta_1(b) - \theta_1(a)) + (\omega_1(b) - \omega_1(a)) \ .$$

Calculemos primero $\theta_1(b) - \theta_1(a)$. Como en el Ejemplo 4.23, elijamos la carta de la proyección estereográfica desde el polo sur de M sobre el plano ecuatorial ($\mathcal{U} = M - \{polo\ sur\}, \varphi^{-1} = (u, v)$) y elijamos el sentido de recorrido de α para que éste sea positivo respecto de $\boldsymbol{\nu}_\varphi (= \boldsymbol{\nu} \mid_{\mathcal{U}})$ (con lo que dicho sentido será el de azimuts crecientes). Puesto que se verifica (Ejercicio 6.3.2b) $\left(\frac{\partial/\partial\vartheta}{\sqrt{\bar{E}}}, \frac{\partial/\partial\phi}{\sqrt{\bar{G}}}\right) \mid_{\overline{\mathcal{U}}} = \left(\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}}, \frac{\partial/\partial v}{\sqrt{G}}\right) \mid_{\overline{\mathcal{U}}} \begin{pmatrix} \cos\phi & -sen\phi \\ sen\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, se sigue que:

$$\theta_1 = \measuredangle\left(\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha, \frac{\partial/\partial \phi}{\sqrt{\bar{G}}} \circ \alpha\right) \overset{m\acute{o}d, 2\pi}{=} \left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \circ \alpha\ , \Rightarrow \theta_1(b) - \theta_1(a) = 2\pi$$

(a este resultado puede también llegarse, independientemente de la carta elegida, por un argumento basado en que $\varphi^{-1}(\mathcal{R})$ es estrellado y en el llamado "teorema de rotación de tangentes", que se describe en el Apéndice 5.4.5).*

Por otra parte, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\nu}(\alpha(s)) := \frac{1}{r}(\alpha(s) - o)_{\alpha(s)}$ y que $\alpha(s) := (r sen\vartheta_0 \cos(\frac{s}{r sen\vartheta_0}), r sen\vartheta_0 sen(\frac{s}{r sen\vartheta_0}), r\cos\vartheta_0)$, se obtiene:

$$\omega_1(b) - \omega_1(a) \equiv \int_{[0, 2\pi r sen\vartheta_0]} \frac{d\omega_1}{ds} \overset{Obs.\ 4.19(2)}{=} - \int_{[0, 2\pi r sen\vartheta_0]} \kappa_g^\alpha \overset{(77)}{=}$$

$$= - \int_{[0, 2\pi r sen\vartheta_0]} \det(\alpha''\ ,\ \boldsymbol{\nu} \circ \alpha\ ,\ \alpha') \overset{(!)}{=} - \int_0^{2\pi r sen\vartheta_0} \frac{ds}{r \tan\vartheta_0} = -2\pi\cos\vartheta_0\ .$$

Con lo que efectivamente resulta: $\theta(b) - \theta(a) = 2\pi(1 - \cos\vartheta_0)$ $(= \int_{\mathcal{R}} K)$.

4.3. CURVATURA Y TOPOLOGIA

Uno de los resultados más profundos de la teoría global intrínseca de superficies lo constituye el teorema de Gauss-Bonnet, que relaciona la integral de la curvatura de Gauss sobre una superficie compacta con el "género" (topológico) g de ésta.

4.3.1. Triangulaciones e integración en superficies

Para cada triangulación de una superficie se define la característica de Euler, que es un número entero. Toda superficie compacta admite triangulaciones.

Definimos un **triángulo en una superficie** M como un subconjunto T de la forma $T = \varphi(\Delta) \subset \mathcal{U}$, donde $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ es una carta de M y Δ es un triángulo estándar en $\mathbb{E}^2$. Así, T es conexo y compacto y su frontera topológica $\partial T (\subset T)$ en M es la imagen de un camino $\alpha : [t_0, t_3] \to M$ diferenciable en *tres* trozos (respecto de una partición $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$), cerrado y simple. Puesto que $\varphi^{-1}(T) \subset \mathbb{E}^2$ es acotado y $\varphi^{-1}(\partial T)$ tiene medida cero, se sigue (3.1.4) que *todo triángulo tiene área.* Los puntos $p_i \equiv \alpha(t_i)$ $(i =$

$1,2,3)$ son los **vértices de** T y los "segmentos" $\alpha([t_{i-1},t_i])$ $(i=1,2,3)$ los **lados de** T. El triángulo T se dirá **geodésico** si sus tres lados son imágenes de geodésicas (de M).

Una **triangulación de una superficie** M es una familia finita $\mathcal{T} = \{T_1,...,T_n\}$ de triángulos tal que: (i) $\cup_{i=1}^n T_i = M$ y (ii) si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, entonces, o bien $T_i \cap T_j$ es un único vértice, o bien es exactamente un lado común (con sus dos vértices incluidos). Puede probarse (!) que, en estas condiciones, se verifica además la propiedad: (iii) cada lado de $\mathcal{T}$ es exactamente intersección de dos triángulos distintos de $\mathcal{T}$. Denotaremos por n_v y n_l, respectivamente, el número de vértices y lados de $\mathcal{T}$. Consecuencia inmediata de (iii) es que: $2n_l = 3n$.

Se denomina **característica de Euler de la superficie** M **respecto de la triangulación** $\mathcal{T} = \{T_1,...,T_n\}$ al entero (ver [7], 1.8): $\chi_{\mathcal{T}}(M) := n + n_v - n_l$.

Cuando disponemos, en una superficie M, de una triangulación $\mathcal{T} = \{T_1,...,T_n\}$, podemos definir (Observación 3.10(1)) la **integral de una función continua** $f : M \to \mathbb{R}$ por: $\int_M f := \sum_{i=1}^n \int_{T_i} f$, donde las integrales sobre los triángulos T_i fueron ya definidas en (49) y su suma es independiente de la triangulación $\mathcal{T}$ elegida; en particular, es independiente de que los triángulos sean o no geodésicos.

Usaremos el siguiente resultado (ver [5], 4.5, Proposiciones 1 y 2, sin demostración):

Proposición 4.25 *Toda superficie compacta admite una triangulación cuyos triángulos están contenidos en dominios de cartas ortogonales* ■

4.3.2. Teorema de Gauss-Bonnet

La suma de los ángulos internos de un triángulo geodésico contenido en el dominio de una carta ortogonal excede a π en la integral de la curvatura de Gauss en el triángulo (Teorema 4.26, de Gauss). La característica de Euler de una superficie compacta, respecto de cualquier triangulación, es igual a la integral de la curvatura de Gauss en la superficie (Teorema 4.28, de Gauss-Bonnet).

Sea $(M, \boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada. Dado un triángulo T en M, elijamos un camino regular en tres trozos $\alpha : [t_0, t_3] \to M$ que parametrice su borde ∂T. Definimos los **ángulos externos de** T (*orientados* por $\boldsymbol{\nu}$) por $\varepsilon_i := \measuredangle(\alpha_i'(t_i), \alpha_{i+1}'(t_i)) \in (-\pi, \pi]$ $(i = 1,2,3;\ \alpha_4 \equiv \alpha_1)$ y los **ángulos internos de** T (*no orientados*) por $\iota_i := \pi - \varepsilon_i \in [0, 2\pi)$ $(i=1,2,3)$ (obsérvese que, con la definición que hemos dado de triángulo, ni los ángulos externos ni los internos pueden valer 0 ó π). En la geometría del plano euclídeo, la suma de los ángulos internos de un triángulo vale π radianes. En una superficie arbitraria, se tiene:

Teorema 4.26 (Gauss-Bonnet local) *Sea M una superficie con curvatura de Gauss K. Sean $T = \varphi(\Delta)$ un triángulo en M contenido en el dominio de una carta ortogonal $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} \equiv (u, v))$ y $\alpha : [s_0, s_3] \to M$ un camino regular en tres trozos, unitario y positivo respecto de $\boldsymbol{\nu}_\varphi$, que parametriza su borde. Se tiene:*

$$\int_T K + \sum_{i=1}^{3} \int_{[s_{i-1}, s_i]} \kappa_g^{\alpha_i} = -\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i + 2\pi \quad \left(= \sum_{i=1}^{3} \iota_i - \pi \right) ,$$

siendo $\kappa_g^{\alpha_i}$ la curvatura geodésica de α_i.

*En particular, si T es geodésico, $\int_T K = \sum_{i=1}^{3} \iota_i - \pi$ (**teorema de Gauss**).*

Demostración* (ver por ejemplo [5], 4.5 y [9], Cap. 21, Teorema 2). Sea $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ un campo (a lo largo de α y tangente a M) unitario y paralelo. El Teorema 4.21 afirma que:

$$\int_T K = \theta(s_3) - \theta(s_0) \quad ,$$

siendo $\theta : [s_0, s_3] \to \mathbb{R}$ una determinación diferenciable del ángulo de $\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha$ a $\mathbf{V}$.

Podemos escribir $\theta \mid_{[s_{i-1}, s_i]} = \theta_i + \omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$, donde las funciones $\theta_i, \omega_i : [s_{i-1}, s_i] \to \mathbb{R}$ son determinaciones diferenciables de los ángulos de $\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E_\psi}} \circ \alpha_i$ a α_i' y de α_i' a $\mathbf{V}$, respectivamente, y se tendrá:

$$\theta(s_3) - \theta(s_0) \equiv \sum_{i=1}^{3} (\theta(s_i) - \theta(s_{i-1})) = \sum_{i=1}^{3} (\theta_i(s_i) - \theta_i(s_{i-1})) + \sum_{i=1}^{3} (\omega_i(s_i) - \omega_i(s_{i-1})) \quad .$$

En cuanto al término $\sum_{i=1}^{3} (\theta_i(s_i) - \theta_i(s_{i-1}))$, podemos siempre expresarlo en función de los ángulos externos ε_i de T (independientemente de que, como en el Ejemplo 4.23, podamos en algún caso hacer un cálculo directo del mismo). En efecto: en cada vértice p_i $(i = 1, 2, 3)$ y adoptando el convenio de escribir $\theta_4(s_3) \equiv \theta_1(s_0)$, se tendrá: $\theta_{i+1}(s_i) = \theta_i(s_i) + \varepsilon_i - 2\lambda_i \pi$, para cierto λ_i entero. Con lo que se tendrá: $\sum_{i=1}^{3} (\theta_i(s_i) - \theta_i(s_{i-1})) \equiv \sum_{i=1}^{3} (\theta_i(s_i) - \theta_{i+1}(s_i)) = -\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i + 2\lambda\pi$, para cierto λ entero. El teorema "de rotación de tangentes" aplicado al triángulo estándar Δ en $\mathbb{E}^2$ y la posibilidad de construir una deformación continua de un abierto (de $\mathbb{E}^2$) que contenga a Δ en un abierto (de M) que contenga a T (ver el Apéndice 5.4.5*) conducen a que debe ser $\lambda = 1$, con lo que finalmente se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{3} (\theta_i(s_i) - \theta_i(s_{i-1})) = -\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i + 2\pi \quad .$$

En cuanto al término $\sum_{i=1}^{3}(\omega_i(s_i) - \omega_i(s_{i-1}))$, se obtiene (para cada $i = 1, 2, 3$):

$$\omega_i(t_i) - \omega_i(t_{i-1}) \equiv \int_{[s_{i-1},s_i]} \frac{d\omega_i}{ds} \overset{\text{Obs. 4.19(2)}}{=} -\int_{[s_{i-1},s_i]} \kappa_g^{\alpha_i} \quad .$$

Con todo lo cual resulta:

$$\int_T K = -\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i + 2\pi - \sum_{i=1}^{3} \int_{[s_{i-1},s_i]} \kappa_g^{\alpha_i} \quad \blacksquare.$$

Ejemplo 4.27 *Sean M un plano y $T \subset M$ el triángulo constituido por un sector circular de radio r y ángulo $\pi/2$. Entonces: $\iota_i = \pi/2$ $(i = 1, 2, 3)$, $\kappa_g^{\alpha_1} = 0 = \kappa_g^{\alpha_3}$ y $\kappa_g^{\alpha_2} \overset{(77)}{=} 1/r$. Con lo cual se obtiene (tener en cuenta que $s_2 - s_1 = \pi r/2$):*

$$\int_T K + \sum_{i=1}^{3} \int_{[s_{i-1},s_i]} \kappa_g^{\alpha_i} = \int_{[s_1,s_2]} \kappa_g^{\alpha_2} = \frac{\pi}{2} = \sum_{i=1}^{3} \iota_i - \pi \quad .$$

Sean ahora M una esfera (de radio r) y $T \subset M$ el triángulo constituido por un octante geodésico. Entonces: $\iota_i = \pi/2$ y $\kappa_g^{\alpha_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Con lo cual se obtiene:

$$\int_T K + \sum_{i=1}^{3} \int_{[s_{i-1},s_i]} \kappa_g^{\alpha_i} = \frac{1}{r^2} Area(T) = \frac{\pi}{2} = \sum_{i=1}^{3} \iota_i - \pi \quad .$$

Estamos ya en condiciones de probar el resultado fundamental de esta sección:

Teorema 4.28 (Gauss-Bonnet) *Sean M una superficie compacta, K su curvatura de Gauss, $\mathcal{T}$ una triangulación de M y $\chi_{\mathcal{T}}(M)$ la correspondiente característica de Euler. Se verifica:*

$$\int_M K = 2\pi \chi_{\mathcal{T}}(M) \; .$$

Demostración. La triangulación $\mathcal{T}$ admite (Proposición 4.25) un "refinamiento" $\mathcal{T}' = \{T'_1, ..., T'_n\}$ (esto es, cada $T_i \in \mathcal{T}$ se subdivide en triángulos $T'_j \in \mathcal{T}'$) tal que los T'_j están contenidos en dominios de cartas ortogonales (denotemos por n_v y n_l, respectivamente, el número de vértices y lados de $\mathcal{T}'$). Y se tiene: (i) la integral $\int_M K$ puede calcularse (4.3.1) indistintamente con cualquier triangulación, en particular con ayuda de $\mathcal{T}$ o de $\mathcal{T}'$; (ii) puesto que cada lado de $\mathcal{T}'$ es exactamente intersección de dos triángulos distintos de $\mathcal{T}'$ (lo que además conduce a que $2n_l = 3n$), la suma de las integrales de línea de las curvaturas geodésicas (que cambian de signo cuando cambia el sentido de recorrido, Observación 4.17(2)) de los lados de todos los triángulos de $\mathcal{T}'$ es nula (en dicha suma, cada lado está contado dos veces, una en cada sentido); y (iii) por consideraciones elementales, $\chi_{\mathcal{T}}(M) = \chi_{\mathcal{T}'}(M)$. Entonces, denotando por α_j, β_j, γ_j los ángulos internos del triángulo T'_j, se concluye:

$$\int_M K \overset{(i)}{=} \sum_{j=1}^{n} \int_{T'_j} K \overset{\text{Teor. 4.26 } y\ (ii)}{=} \sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\beta_j+\gamma_j)-n\pi = 2\pi n_v - n\pi \equiv$$

$$\equiv (2n+2n_v-3n)\pi \overset{2n_l=3n}{=} 2(n+n_v-n_l)\pi =: 2\pi\chi_{\mathcal{T}'}(M) \overset{(iii)}{=} 2\pi\chi_{\mathcal{T}}(M) \quad \blacksquare$$

Ejemplo 4.29 *Sean M una esfera (de radio r) y $\mathcal{T} = \{T_1, ..., T_8\}$ una triangulación de M por octantes geodésicos. Entonces: $n = 8$, $n_v = 6$ y $n_l = 12$. Con lo cual se obtiene:*

$$\int_M K = \frac{1}{r^2} Area(M) = 4\pi \equiv 2\pi(8+6-12) =: 2\pi\chi_{\mathcal{T}}(M) \ .$$

De lo anterior, se deduce:

Corolario 4.30 *Sea M una superficie compacta. La característica de Euler $\chi_{\mathcal{T}}(M)$ no depende de la triangulación $\mathcal{T}$ que se utilice para calcularla, y se denota simplemente por $\chi(M)$* $\blacksquare$

4.3.3. Superficies topológicas

La característica de Euler de una superficie compacta respecto de una triangulación puede ya definirse a nivel topológico. Esta característica: (i) es independiente de la triangulación, (ii) está asociada a otro entero, el "género" de la superficie (intuitivamente, el número de "agujeros" de ésta), y (iii) clasifica topológicamente a las superficies (compactas y) conexas.

Una **superficie topológica** es un subconjunto M de $\mathbb{R}^3$ con la propiedad de que, por cada punto $p \in M$, existen abiertos $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{U}$ de M (con $p \in \mathcal{U}$) y existe una aplicación $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$, llamada "parametrización local", a la que sólo se le exige ser un *homeomorfismo*. Pueden definirse entonces, a este nivel, los conceptos de triángulo T, triangulación $\mathcal{T}$ y característica de Euler $\chi_{\mathcal{T}}(M)$. El resultado fundamental es el siguiente (ver [5], 4.5, Proposiciones 3 y 4, sin demostración):

Teorema 4.31 *Sea M una superficie topológica compacta. Entonces:*

1. *Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son dos triangulaciones de M, entonces $\chi_{\mathcal{T}}(M) = \chi_{\mathcal{T}'}(M)$; este número entero, denotado por $\chi(M)$, se denomina* ***característica de Euler de*** *M.*

2. *Existe un entero no negativo $g(M)$, llamado* ***género (topológico) de*** *M, de forma que $\chi(M) = 2 - 2g(M)$. Intuitivamente, el género es el número de "agujeros" de M, entendiendo que la esfera no tiene agujeros, el toro tiene un agujero, etc.*

3. *Sea M además conexa. Una superficie topológica $\bar{M}$ compacta y conexa es homeomorfa a M si y sólo si $\chi(\bar{M}) = \chi(M)$* ■

Este teorema de topología resulta fundamental. Su apartado 1 conduce trivialmente al Corolario 4.30. A la luz de su apartado 2, el Teorema 4.28 establece que la curvatura de Gauss de una superficie (compacta) debe "acomodarse" a lo que prescribe su topología (Ejemplo 4.33). Finalmente, sus apartados 2 y 3 más el Teorema 4.28 conducen a:

Corolario 4.32 *Si M es una superficie (diferenciable) conexa, compacta y con curvatura de Gauss $K \geq 0$, entonces M es homeomorfa a una esfera.*

> **Demostración.** Por ser compacta, M posee (al menos) un punto elíptico (Ejercicio 6.3.8c), con lo que K no es idénticamente nula. Entonces se tiene:
>
> $$0 < \int_M K \overset{\text{Teor. 4.28}}{=} 2\pi\chi(M) \; ; \overset{\text{Teor. 4.31(2)}}{\Rightarrow}$$
>
> $$\Rightarrow \chi(M) = 2 \; ; \overset{\text{Teor. 4.31(3)}}{\Rightarrow} M \text{ es homeomorfa a una esfera} \quad ■$$

Ejemplo 4.33 *Si M es un toro, se tiene:*

$$g(M) = 1 \; , \overset{Teor.\ 4.31(2)}{\Rightarrow} \chi(M) = 0 \; , \overset{Teor.\ 4.28}{\Rightarrow} \int_M K = 0 \; .$$

Comprobemos directamente esta igualdad: Consideremos la carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ dada en el Ejemplo 2.17. En primer lugar, $M \equiv \mathcal{U} \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ (donde $\mathcal{R}_1$ es un paralelo y $\mathcal{R}_2$ es un un meridiano); para cada $i = 1,2$, podemos pensar que $\mathcal{R}_i$ está contenido en el dominio de otra carta $(\mathcal{U}_i, \varphi_i^{-1})$ y verifica $\mathcal{R}_i = \varphi_i([a_i, b_i] \times \{0\})$, con lo que (Observación 2.7(1,2)) $\varphi_i^{-1}(\mathcal{R}_i)(\subset \mathbb{R}^2)$ tiene medida cero, con lo que (Observación 2.7(3)) cualquier función continua definida en el compacto $\varphi_i^{-1}(\mathcal{R}_i)$ es integrable y la integral vale cero, con lo que procede definir (Observación 3.10(1)): $\int_M K := \int_{\mathcal{U}} K$. Y en segundo lugar, como los coeficientes de la primera forma fundamental de M en dicha carta vienen dados por (Ejemplo 3.8): $E = (1 - \kappa r \cos v)^2$, $F = 0$ y $G = r^2$ y *la curvatura de Gauss viene dada por (Ejemplo 3.17):* $K\mid_{\mathcal{U}} = \frac{-\kappa \cos v}{r(1-\kappa r \cos v)}$ *(*$1/\kappa$ *y* r *son, respectivamente, los radios mayor y menor del toro), se concluye:*

$$\int_M K := \int_{\mathcal{U}} K \overset{(49)}{=} \int_{\varphi^{-1}(\mathcal{U}\ )} (K\sqrt{EG-F^2})\circ\varphi \overset{Fubini}{=} -\kappa \int_{-\pi}^{\pi} (\int_{-\pi}^{\pi} \cos v dv) du = 0 \ .$$

5. APÉNDICES

5.1. TEORÍA LOCAL DE CURVAS EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

5.1.1. Aplicaciones autoadjuntas en un espacio vectorial euclídeo. Demostración de la Proposición 1.7

Utilizamos las notaciones de la Observación 1.2. Que B sea la forma bilineal asociada a L *equivale* (por definición) a que se verifique:

$$B_b = L_b^T <,>_b \quad , \quad \text{para alguna (y toda) base } b \qquad (^*) \ ;$$

por otra parte, que L sea autoadjunta *equivale* (por definición) a que se verifique

$$L_b^T <,>_b = <,>_b L_b \quad , \quad \text{para alguna (y toda) base } b \qquad (^{**}) \ .$$

Probemos 1. El que L sea autoadjunta es *equivalente* (por $(^{**})$) a que se verifique:

$$L_b^T = L_b \quad , \quad \text{para alguna (y toda) base ortonormal } b.$$

Probemos 2. El que L sea autoadjunta es *equivalente* (por $(^*)$ y $(^{**})$) a que se verifique:

$$B_b = <,>_b L_b \quad , \quad \text{para alguna (y toda) base } b.$$

Probemos 3. La condición suficiente es consecuencia de 1. Y la condición necesaria es consecuencia de que, si L es autoadjunta, entonces: (i) el subespacio ortogonal a un subespacio L-invariante es también L-invariante (inmediato) y (ii) L posee un autovector (no nulo).

Que en efecto L posee un autovector, puede verse en tres fases:

(a) Un vector $\vec{\xi} \in \mathbb{E}$ se dice que es L-maximal si es unitario y si $\left|L\vec{\xi}\right| \geq |L\vec{\eta}|$, para todo $\vec{\eta}$ unitario. Al ser el conjunto de vectores unitarios compacto y la aplicación $\mathbb{E} \ni \vec{\xi} \mapsto \left|L\vec{\xi}\right| \in \mathbb{R}$ continua, existen (teorema del máximo) vectores que son L-maximales.

(b) Se define $|L| := \left|L\vec{\xi}\right|$, para cualquier $\vec{\xi}$ que sea L-maximal. Y entonces se tiene:

$$|L|^2 := < L\vec{\xi}, L\vec{\xi} > \overset{L\ autoadjunta}{=} < L^2\vec{\xi}, \vec{\xi} > \overset{Schwartz}{\leq}$$

$$\leq \left|L^2\vec{\xi}\right| \underbrace{\left|\vec{\xi}\right|}_{1} \overset{\vec{\eta}\equiv L\vec{\xi}}{=} \left|L\frac{\vec{\eta}}{|\vec{\eta}|}\right| |\vec{\eta}| \overset{\vec{\xi}\ es\ L-max.}{\leq} \left|L\vec{\xi}\right|^2 =: |L|^2 \ \ ; \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |L|^2 =< L^2\vec{\xi}, \vec{\xi} >= \left|L^2\vec{\xi}\right| \ \ ; \ \overset{Schwartz}{\Rightarrow} \ L^2\vec{\xi} = |L|^2\,\vec{\xi} \ .$$

(c) Tomando $\vec{\xi} \in \mathbb{E}$ que sea L-maximal, se tiene:

$$L(L\vec{\xi}-|L|\,\vec{\xi}) \overset{(b)}{=} -\,|L|\,(L\vec{\xi}-|L|\,\vec{\xi}) \ ; \ \Rightarrow \begin{cases} \text{o bien } \ \vec{\xi} \ \text{ es } L\text{-autovector} \\ \text{o bien } \ L\vec{\xi} - |L|\,\vec{\xi} \ \text{ es } L\text{-autovector} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Probemos 4. De acuerdo con (*), basta elegir L' tal que, en alguna base ortonormal b de $\mathbb{E}$, verifique: $L'_b := B'^T_b (= B'_b)$.

5.1.2. Aplicaciones en un espacio afín euclídeo. Demostración de la Proposición 1.8

(Ver por ejemplo [9], Cap. 22, Teorema 1):

Dentro del apartado 1, $(v) \Rightarrow (iii)$ resulta obvio. Probemos $(v) \Rightarrow (i)$: Si ψ preserva productos escalares, entonces, $\forall \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 \in \mathbb{E}$ y $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, se tiene (usando una base ortonormal $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$):

$$<\psi(\lambda_1\vec{\xi}_1 + \lambda_2\vec{\xi}_2) - \lambda_1\ \psi(\vec{\xi}_1) - \lambda_2\ \psi(\vec{\xi}_2)\ ,\ \psi(\vec{a}_i)> \overset{(v)}{=}$$

$$=< \lambda_1\vec{\xi}_1 + \lambda_2\vec{\xi}_2\ ,\ \vec{a}_i > -\lambda_1 < \vec{\xi}_1, \vec{a}_i > -\lambda_2 < \vec{\xi}_2, \vec{a}_i >= 0 \quad (i = 1, ...n)\ ;$$

ahora bien, puesto que n vectores unitarios que no generen todo $\mathbb{E}$ no pueden ser mutuamente ortogonales, se deduce que $(\psi(\vec{a}_1), \dots, \psi(\vec{a}_n))$ también es una base ortonormal; y de ahí se concluye:

$$\psi(\lambda_1\vec{\xi}_1 + \lambda_2\vec{\xi}_2) - \lambda_1\ \psi(\vec{\xi}_1) - \lambda_2\ \psi(\vec{\xi}_2) = 0\ .$$

Y probemos $(i) + (iii) \Rightarrow (v)$:

$$< \psi(\vec{\xi}_1), \psi(\vec{\xi}_2) >\equiv \frac{1}{2}\left(|\ \psi(\vec{\xi}_1) + \psi(\vec{\xi}_2)\ |^2 - |\ \psi(\vec{\xi}_1)\ |^2 - |\ \psi(\vec{\xi}_2)\ |^2\right) \overset{(i)+(iii)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\ \vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2\ |^2 - |\ \vec{\xi}_1\ |^2 - |\ \vec{\xi}_2\ |^2\right) \equiv< \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 > \ \ ,\ \ \forall \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 \in \mathbb{E}\ .$$

Probemos 2:

$$d(\psi(\xi), \psi(\eta)) := |\psi(\xi) - \psi(\eta)| = \left|\psi(\vec{\xi}) - \psi(\vec{\eta})\right| \overset{(i)}{=} \left|\psi(\vec{\xi} - \vec{\eta})\right| \overset{(iii)}{=} \left|\vec{\xi} - \vec{\eta}\right| = |\xi - \eta| =: d(\xi, \eta).$$

Probemos 3:

$$|\ \psi(\xi) - o\ | \overset{(i)}{=} |\ \psi(\xi) - \psi(o)\ | =: d(\psi(\xi), \psi(o)) \overset{(iv)}{=} d(\xi, o) := |\xi - o|\ .$$

Probemos 4:

$$\psi(\xi) = \psi(\eta) \;\Rightarrow\; d(\xi,\eta) \overset{(iv)}{=} d(\psi(\xi),\psi(\eta)) = 0 \;\Rightarrow\; \xi = \eta \;.$$

Finalmente probemos 5:

$$< \psi(\vec{\xi}_1), \psi(\vec{\xi}_2) > \equiv \tfrac{1}{2}\Big(- \mid \psi(\vec{\xi}_1) - \psi(\vec{\xi}_2) \mid^2 + \mid \psi(\vec{\xi}_1) \mid^2 + \mid \psi(\vec{\xi}_2) \mid^2 \Big) \overset{(iii)}{=}$$
$$= \tfrac{1}{2}\Big(-d^2(\psi(\xi_1),\psi(\xi_2)) + \mid \vec{\xi}_1 \mid^2 + \mid \vec{\xi}_2 \mid^2 \Big) \overset{(iv)}{=}$$
$$= \tfrac{1}{2}\Big(- \mid \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2 \mid^2 + \mid \vec{\xi}_1 \mid^2 + \mid \vec{\xi}_2 \mid^2 \Big) \equiv < \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 > \;.$$

5.1.3. Invariancia de las curvaturas de una curva alabeada. Demostración de la Proposición 1.25

Probemos 1. Sea s el parámetro de $\tilde{\alpha} = \alpha \circ f : J \to \mathbb{E}^n$.

(1-a) Vamos a ver primero que se verifica (para $i = 1, ..., n$):

$$\widetilde{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_i \circ f \;\;.$$

Haremos la demostración para los casos $n = 2$ y $n = 3$ (la demostración para n arbitrario sigue las mismas pautas, aunque resulta algo más tediosa):

Caso $n = 2$. Se tiene:

$$\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 := \tilde{\alpha}' \overset{\text{Prop. 1.16(1)}}{=} \frac{df}{ds}(\alpha' \circ f) =: \frac{df}{ds}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \circ f) \;\; ; \;\; \overset{\frac{df}{ds}>0}{\Rightarrow} \;\; \widetilde{\mathbf{E}}_1 = (\mathbf{E}_1 \circ f) \;\; ;$$

al ser $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ y $(\widetilde{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{E}_1 \circ f, \widetilde{\mathbf{E}}_2)$ bases ortonormales positivas, se sigue:

$$\underbrace{\det(\mathbf{E}_1 \circ f, \mathbf{E}_2 \circ f)}_{1} = \underbrace{\det(\widetilde{\mathbf{E}}_1, \widetilde{\mathbf{E}}_2)}_{1} = \det(\mathbf{E}_1 \circ f, \widetilde{\mathbf{E}}_2) \; ; \; \Rightarrow \; \widetilde{\mathbf{E}}_2 = (\mathbf{E}_2 \circ f) \;\; .$$

Caso $n = 3$. Se tiene:

$$\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 := \tilde{\alpha}' \overset{\text{Prop. 1.16(1)}}{=} \frac{df}{ds}(\alpha' \circ f) =: \frac{df}{ds}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \circ f) \; ; \; \overset{\frac{df}{ds}>0}{\Rightarrow} \; \widetilde{\mathbf{E}}_1 = (\mathbf{E}_1 \circ f) \; ; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 := \tilde{\alpha}'' - < \widetilde{\mathbf{E}}_1, \tilde{\alpha}'' > \widetilde{\mathbf{E}}_1 \overset{\text{Prop. 1.16(3)}}{=} \left((\frac{df}{ds})^2 (\alpha'' \circ f) + \frac{d^2 f}{ds^2}(\alpha' \circ f) \right) -$$
$$- < \mathbf{E}_1 \circ f, \left((\frac{df}{ds})^2 (\alpha'' \circ f) + \frac{d^2 f}{ds^2}(\alpha' \circ f) \right) > \mathbf{E}_1 \circ f \overset{\alpha' \in Sub(\mathbf{E}_1)}{=}$$
$$= (\frac{df}{ds})^2 (\alpha'' \circ f) - < \mathbf{E}_1 \circ f, (\frac{df}{ds})^2 (\alpha'' \circ f) > \mathbf{E}_1 \circ f =: (\frac{df}{ds})^2 (\boldsymbol{\varepsilon}_2 \circ f) \; ; \; \Rightarrow \; \widetilde{\mathbf{E}}_2 = (\mathbf{E}_2 \circ f) \; ;$$

al ser $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ y $(\widetilde{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{E}_1 \circ f, \widetilde{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{E}_2 \circ f, \widetilde{\mathbf{E}}_3)$ bases ortonormales positivas, se sigue:

$$\underbrace{\det(\mathbf{E}_1 \circ f, \mathbf{E}_2 \circ f, \mathbf{E}_3 \circ f)}_{1} = \underbrace{\det(\widetilde{\mathbf{E}}_1, \widetilde{\mathbf{E}}_2, \widetilde{\mathbf{E}}_3)}_{1} = \det(\mathbf{E}_1 \circ f, \mathbf{E}_2 \circ f, \widetilde{\mathbf{E}}_3) \; ; \; \Rightarrow \; \widetilde{\mathbf{E}}_3 = (\mathbf{E}_3 \circ f) \; .$$

(1-b) Una vez probado que $\widetilde{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_i \circ f$ $(i = 1, ..., n)$, se deduce (para $i = 1, ..., n-1$):

$$\tilde{\omega}_{i+1,i} := < \widetilde{\mathbf{E}}_{i+1}, \frac{D\widetilde{\mathbf{E}}_i}{ds} > = < \mathbf{E}_{i+1} \circ f, \frac{D(\mathbf{E}_i \circ f)}{ds} > \overset{\text{Prop. 1.16(2)}}{=}$$

$$= \frac{df}{ds} < \mathbf{E}_{i+1} \circ f, \frac{D\mathbf{E}_i}{dt} \circ f > =: \frac{df}{ds}(\omega_{i+1,i} \circ f) \; ; \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \tilde{\kappa}_i := \frac{\tilde{\omega}_{i+1,i}}{|\tilde{\alpha}'|} \overset{\text{Prop. 1.16(1)}}{=} \frac{\frac{df}{ds}(\omega_{i+1,i} \circ f)}{\left|\frac{df}{ds}\right| |\alpha' \circ f|} \overset{\frac{df}{ds}>0}{=} \frac{\omega_{i+1,i}}{|\alpha'|} \circ f =: \kappa_i \circ f \; .$$

Probemos 2. Sea t el parámetro de $\tilde{\alpha} := \mathcal{A} \circ \alpha \; : I \to \mathbb{E}^n$ y sea A la parte lineal (ortogonal) del movimiento directo $\mathcal{A}$ (ver 1.1.4).

(2-a) Vamos a ver primero que se verifica (para $i = 1, ..., n-1$):

$$\widetilde{\mathbf{E}}_i = (A\vec{E}_i)_{\tilde{\alpha}} \; .$$

Haremos la demostración para los casos $n = 2$ y $n = 3$ (la demostración para n arbitrario sigue las mismas pautas, aunque resulta algo más tediosa):

Caso $n = 2$. Se tiene:

$$\vec{\tilde{\varepsilon}}_1 := d\tilde{\alpha}/dt \overset{\text{Prop. 1.13}}{=} A\,(d\alpha/dt) =: A\vec{\varepsilon}_1 \; ; \; \overset{A \in O(2)}{\Rightarrow} \; \vec{\tilde{E}}_1 = A\vec{E}_1 \; ;$$

al ser $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$ y $(\vec{\tilde{E}}_1 = A\vec{E}_1, \vec{\tilde{E}}_2)$ bases ortonormales positivas, se sigue:

$$\underbrace{\det(\vec{E}_1, \vec{E}_2)}_{1} = \det \underbrace{(A\vec{E}_1, \vec{\tilde{E}}_2)}_{1} = \det A \cdot \det(\vec{E}_1, A^{-1}\vec{\tilde{E}}_2) \; ; \; \overset{A \in SO(2)}{\Rightarrow} \; \vec{\tilde{E}}_2 = A\vec{E}_2 \; .$$

Caso $n = 3$. Se tiene:

$$\vec{\tilde{\varepsilon}}_1 := d\tilde{\alpha}/dt \overset{\text{Prop. 1.13}}{=} A\,(d\alpha/dt) =: A\vec{\varepsilon}_1 \; ; \; \overset{A \in O(3)}{\Rightarrow} \; \vec{\tilde{E}}_1 = A\vec{E}_1 \; ; \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \vec{\tilde{\varepsilon}}_2 := \frac{d^2\tilde{\alpha}}{dt^2} - < \vec{\tilde{E}}_1, \frac{d^2\tilde{\alpha}}{dt^2} > \vec{\tilde{E}}_1 \overset{\text{Prop. 1.13}}{=} A\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) - < A\vec{E}_1, A\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) > A\vec{E}_1 =$$

$$\overset{A\in O(3)}{=} A\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} - < \vec{E}_1, \frac{d^2\alpha}{dt^2} > \vec{E}_1\right) =: A\vec{\varepsilon}_2 \ ; \ \overset{A\in O(3)}{\Rightarrow} \ \overrightarrow{\tilde{E}}_2 = A\vec{E}_2 \ ;$$

al ser $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ y $(\overrightarrow{\tilde{E}}_1 = A\vec{E}_1, \overrightarrow{\tilde{E}}_2 = A\vec{E}_2, \overrightarrow{\tilde{E}}_3)$ bases ortonormales positivas, se sigue:

$$\underbrace{\det(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)}_{1} = \underbrace{\det(A\vec{E}_1, A\vec{E}_2, \overrightarrow{\tilde{E}}_3)}_{1} = \det A \cdot \det(\vec{E}_1, \vec{E}_2, A^{-1}\overrightarrow{\tilde{E}}_3) \ ; \ \overset{A\in SO(3)}{\Rightarrow} \ \overrightarrow{\tilde{E}}_3 = A\vec{E}_3 \ .$$

(2-b) Una vez probado que $\widetilde{\mathbf{E}}_i = (A\vec{E}_i)_{\tilde{\alpha}}$ $(i = 1, ..., n)$, se deduce (para $i = 1, ..., n-1$):

$$\tilde{\omega}_{i+1,i} :=< \widetilde{\mathbf{E}}_{i+1}, \frac{D\widetilde{\mathbf{E}}_i}{dt} >=< \overrightarrow{\tilde{E}}_{i+1}, \frac{d\overrightarrow{\tilde{E}}_i}{dt} >=< A\vec{E}_{i+1}, \frac{d(A\vec{E}_i)}{dt} > \overset{A\in O(n)}{=}$$

$$=< \vec{E}_{i+1}, \frac{d\vec{E}_i}{dt} >=< \mathbf{E}_{i+1}, \frac{D\mathbf{E}_i}{dt} >=: \omega_{i+1,i} \ ; \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \tilde{\kappa}_i := \frac{\tilde{\omega}_{i+1,i}}{|\tilde{\alpha}'|} \overset{\text{Prop. 1.13}}{=} \frac{\omega_{i+1,i}}{\left|A(\frac{d\alpha}{dt})\right|} \overset{A\in O(n)}{=} \frac{\omega_{i+1,i}}{|\alpha'|} =: \kappa_i \ .$$

5.1.4. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales*

Sea $A = (A_{ij})$ una matriz cuadrada con entradas $A_{ij} \in \mathfrak{F}(I)$, siendo I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. El sistema de ecuaciones diferenciales (de 1er. orden)

$$\begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{dt}(t) \\ \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dt}(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \cdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} \tag{78}$$

se dice *lineal* porque, en la intersección de los dominios de dos soluciones, cualquier combinación lineal de éstas con coeficientes reales es también solución.

La teoría *general* de los sistemas de ecuaciones diferenciales asegura que, para cada $t_0 \in I$ y cada $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, existe una solución $\vec{\varphi} \equiv (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : J \to \mathbb{R}^n$ de (78) tal que $t_0 \in J$ (abierto contenido en I) y $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{\xi}$ ("condición inicial"). Por otra parte, si $\vec{\psi}$ es cualquier solución de (78) verificando la misma condición inicial $\vec{\psi}(t_0) = \vec{\xi}$, entonces $\vec{\varphi}$ y $\vec{\psi}$ coinciden en la intersección de sus dominios. Esto último conduce a la noción de *solución maximal* $\vec{\varphi}_{\vec{\xi}}$ (para dicha condición inicial), que es única. Este resultado se usa en el apartado 4.2.2 al hablar de geodésicas en superficies.

La teoría de los sistemas *lineales* de ecuaciones diferenciales asegura además que, en este caso, el dominio de cualquier solución maximal de (78) es todo el intervalo I (esto se expresa también diciendo que "cualquier solución maximal es global"). Resulta de ello que el conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones maximales del sistema (78) es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Por otra parte, fijado cualquier $t_0 \in I$, y como consecuencia de la unicidad (respectivamente, existencia) de solución global de (78), para cualquier condición inicial $\vec{\varphi}(t_0)$, la aplicación lineal

$$\mathcal{S} \ni \vec{\varphi} \mapsto \vec{\varphi}(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

resulta ser inyectiva (respectivamente, suprayectiva), esto es, resulta ser un *isomorfismo*; como consecuencia, *el* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* $\mathcal{S}$ *posee dimensión* n. Este resultado se usa en la demostración (Apéndice 5.1.5*) del teorema fundamental de la teoría de curvas en $\mathbb{E}^3$ y también en el apartado 4.2.1 al hablar del transporte paralelo en superficies.

5.1.5. Teorema fundamental de la teoría de curvas. Demostración del Teorema 1.27*

(ver por ejemplo [5], 1.5 y Cap. 4, Apéndice, p.310). Haremos la demostración para $n = 3$ (la demostración para n arbitrario sigue las mismas pautas).

Vamos a ver primero que, *fijados* $s_0 \in I$, $p \in \mathbb{E}^3$ *y una base ortonormal positiva* $(\vec{\xi}_p, \vec{\eta}_p, \vec{\chi}_p)$ *de* $T_p\mathbb{E}^3$, *existe una única* curva alabeada $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ (denotemos $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ a su referencia de Frenet), parametrizada por la longitud de arco, con curvaturas κ_1, κ_2 y verificando:

$$\alpha(s_0) = p \ , \ \ \vec{E}_1(s_0) = \vec{\xi} \ , \ \ \vec{E}_2(s_0) = \vec{\eta} \ , \ \ \vec{E}_3(s_0) = \vec{\chi} \ .$$

Con la notación:

$$\begin{cases} (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \equiv \vec{E}_1 \\ (\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6) \equiv \vec{E}_2 \\ (\varphi_7, \varphi_8, \varphi_9) \equiv \vec{E}_3 \end{cases} ,$$

la parte vectorial de las fórmulas (17) de Frenet (para curvas parametrizadas por la longitud de arco)

$$\begin{cases} d\vec{E}_1/ds = & & \kappa_1 \vec{E}_2 & \\ d\vec{E}_2/ds = & -\kappa_1 \vec{E}_1 & & +\kappa_2 \vec{E}_3 \\ d\vec{E}_3/ds = & & -\kappa_2 \vec{E}_2 & \end{cases} \qquad (^*)$$

constituye un sistema *lineal* de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{ds}(s) \\ \cdots \\ \frac{d\varphi_9}{ds}(s) \end{pmatrix} = A(s) \begin{pmatrix} \varphi_1(s) \\ \cdots \\ \varphi_9(s) \end{pmatrix} ,$$

donde los coeficientes de la matriz $A(s)$ dependen diferenciablemente del parámetro $s \in I$ y son conocidos a partir de las funciones κ_1 y κ_2. Usando el resultado del Apéndice 5.1.4* se concluye que, al fijar

$$\vec{\zeta} \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3) \in \mathbb{R}^9 ,$$

existe una única solución maximal $\vec{\varphi}_{\vec{\zeta}} : I \to \mathbb{R}^9$ de dicho sistema lineal para la condición inicial $\vec{\varphi}_{\vec{\zeta}}(s_0) = \vec{\zeta}$; o, en otras palabras, existen *tres curvas vectoriales únicas* $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3 : I \to \mathbb{E}^3$ que verifican las ecuaciones de Frenet (*) y tales que

$$\left(\vec{E}_1(s_0), \vec{E}_2(s_0), \vec{E}_3(s_0)\right) = \vec{\zeta}\ .$$

Hay ahora que comprobar que la tripleta $\left(\vec{E}_1(s), \vec{E}_2(s), \vec{E}_3(s)\right)$ hallada es *ortonormal en todo* $s \in I$. Para ello, consideremos las derivadas de sus productos escalares que, de acuerdo nuevamente con (*), deben verificar

$$\begin{cases} \frac{d<\vec{E}_1,\vec{E}_1>}{ds} = 2\kappa_1 < \vec{E}_1, \vec{E}_2 > \\ \frac{d<\vec{E}_1,\vec{E}_2>}{ds} = \kappa_1 < \vec{E}_2, \vec{E}_2 > -\kappa_1 < \vec{E}_1, \vec{E}_1 > +\kappa_2 < \vec{E}_1, \vec{E}_3 > \\ \frac{d<\vec{E}_1,\vec{E}_3>}{ds} = \kappa_1 < \vec{E}_2, \vec{E}_3 > -\kappa_2 < \vec{E}_1, \vec{E}_2 > \\ \frac{d<\vec{E}_2,\vec{E}_2>}{ds} = -2\kappa_1 < \vec{E}_1, \vec{E}_2 > +2\kappa_2 < \vec{E}_2, \vec{E}_3 > \\ \frac{d<\vec{E}_2,\vec{E}_3>}{ds} = -\kappa_1 < \vec{E}_1, \vec{E}_3 > +\kappa_2 < \vec{E}_3, \vec{E}_3 > -\kappa_2 < \vec{E}_2, \vec{E}_2 > \\ \frac{d<\vec{E}_3,\vec{E}_3>}{ds} = -2\kappa_2 < \vec{E}_2, \vec{E}_3 > \end{cases} ;$$

ello da lugar, escribiendo

$$\begin{cases} \phi_1 \equiv < \vec{E}_1, \vec{E}_1 > \quad , \quad \phi_2 \equiv < \vec{E}_1, \vec{E}_2 > \quad , \quad \phi_3 \equiv < \vec{E}_1, \vec{E}_3 > \\ \phi_4 \equiv < \vec{E}_2, \vec{E}_2 > \quad , \quad \phi_5 \equiv < \vec{E}_2, \vec{E}_3 > \\ \phi_6 \equiv < \vec{E}_3, \vec{E}_3 > \end{cases}$$

a un nuevo sistema *lineal* de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{pmatrix} \frac{d\phi_1}{ds}(s) \\ \cdots \\ \frac{d\phi_6}{ds}(s) \end{pmatrix} = B(s) \begin{pmatrix} \phi_1(s) \\ \cdots \\ \phi_6(s) \end{pmatrix} ,$$

para el que ($\phi_1 \equiv 1$, $\phi_2 \equiv 0$, $\phi_3 \equiv 0$, $\phi_4 \equiv 1$, $\phi_5 \equiv 0$, $\phi_6 \equiv 1$) es solución maximal (Apéndice 5.1.4*) con condición inicial $(1, 0, 0, 1, 0, 1)$; por la unicidad de la solución maximal, la tripleta de curvas vectoriales $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ es ortonormal.

Una vez determinada $\vec{E}_1 : I \to \mathbb{E}^3$, la curva

$$\alpha(s) = p + \int_{s_0}^{s} \vec{E}_1(s) ds$$

es la única curva alabeada $I \to \mathbb{E}^3$, parametrizada por la longitud de arco, con curvaturas κ_1, κ_2 y verificando $\alpha(s_0) = p$, $\vec{E}_1(s_0) = \vec{\xi}$, $\vec{E}_2(s_0) = \vec{\eta}$ y $\vec{E}_3(s_0) = \vec{\chi}$.

Sea ahora $\beta : I \to \mathbb{E}^3$ *cualquier otra* curva alabeada (denotemos $(\mathbf{E}_1^\beta, \mathbf{E}_2^\beta, \mathbf{E}_3^\beta)$ a su referencia de Frenet), parametrizada por la longitud de arco y con curvaturas κ_1, κ_2. Sea $\mathcal{A} : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ el movimiento directo dado por: $\mathcal{A}(q) - \beta(s_0) = D(q - \beta(s_0)) + \vec{\delta}$, con:

$$\begin{cases} D \in SO(3) \ \text{ tal que } \ (\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\chi}) = \left(D\vec{E}_1^\beta(s_0), D\vec{E}_2^\beta(s_0), D\vec{E}_3^\beta(s_0)\right) \\ \vec{\delta} := p - \beta(s_0) \in \mathbb{E}^3 \ . \end{cases} .$$

Por la Proposición 1.25(2), la curva alabeada $\mathcal{A} \circ \beta$ (denotemos $(\mathbf{E}_1^{\mathcal{A}\circ\beta}, \mathbf{E}_2^{\mathcal{A}\circ\beta}, \mathbf{E}_3^{\mathcal{A}\circ\beta})$ a su referencia de Frenet) verifica:

$$(\mathcal{A} \circ \beta)(s_0) = p \ \ , \ \ \vec{E}_1^{\mathcal{A}\circ\beta}(s_0) = \vec{\xi} \ \ , \ \ \vec{E}_2^{\mathcal{A}\circ\beta}(s_0) = \vec{\eta} \ \ , \ \ \vec{E}_3^{\mathcal{A}\circ\beta}(s_0) = \vec{\chi} \ \ ;$$

y por la unicidad probada anteriormente, se concluye: $\mathcal{A} \circ \beta = \alpha$.

5.2. SUPERFICIES EN EL ESPACIO AFÍN

5.2.1. Diferenciabilidad de las componentes locales de un campo tangente. Demostración del Lema 2.33

Veamos que, en efecto, las funciones V_i^φ $(i = 1, 2)$, definidas por (32) y cuyo cálculo, en cada caso concreto, se efectúa resolviendo directamente el sistema lineal (33), son diferenciables.

Sea $p \in \mathcal{U}$; s.p.d.g. podemos suponer que $\det\left(\partial(\varphi_1, \varphi_2)/\partial(u, v)\right)(\varphi^{-1}(p)) \neq 0$. Consideremos la siguiente extensión diferenciable de φ

$$\Phi : \mathbb{U} \times \mathbb{R} \ni (u, v, w) \mapsto (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v) + w) \in \mathbb{R}^3$$

(identificaremos $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ con $\mathbb{U} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$), que verifica

$$\det J_\Phi(\varphi^{-1}(p), 0) = \det \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \underbrace{J_\varphi(\varphi^{-1}(p))}_{3\times 2} & 0 \\ & 1 \end{array} \right) \neq 0 \ .$$

Por el Teorema de la función inversa (Teorema 2.3) existen entornos $\mathbb{A}(\subset \mathbb{U} \times \mathbb{R}\ )$ de $(\varphi^{-1}(p), 0)$ y $\mathbb{B}(\subset \mathbb{R}^3)$ de $\Phi(\varphi^{-1}(p), 0) = p$ tales que $\Phi(\mathbb{A}) = \mathbb{B}$ y $\Phi\mid_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un difeomorfismo.

Para cada $i = 1, 2, 3$, denotemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \overset{Not.}{\equiv} d_{(\varphi^{-1}(p),0)}\Phi \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{(\varphi^{-1}(p),0)} \overset{(19)}{=} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}(\Phi^{-1}(p)) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$$

(debido a que $\Phi\mid_{\mathbb{U}\times\{0\}} = \varphi$, esta notación coincide, para $i = 1, 2$, con la que venimos usando desde (25)); con lo que, al ser $\Phi\mid_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un difeomorfismo, se tiene, para cada $j = 1, 2, 3$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi_i^{-1}}{\partial x_j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \ .$$

Pues bien, de las igualdades $\sum_{j=1}^{3} V_j(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \mathbf{V}(p) \overset{(32)}{=} \sum_{i=1}^{2} V_i^{\varphi}(p)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p$ se deduce inmediatamente: $V_i^{\varphi}(p) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \Phi_i^{-1}}{\partial x_j}(p)\ V_j(p)\ \ (i = 1, 2)$. Y de la arbitrariedad del punto $p \in \mathcal{U}$ resulta: $V_i^{\varphi} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \Phi_i^{-1}}{\partial x_j}\ V_j|_{\mathcal{U}}\ (i = 1, 2)$, de donde se sigue que las V_i^{φ} $(i = 1, 2)$ son de hecho diferenciables.

5.2.2. Curvas integrales de un campo*

Sea $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{U})$ un campo sobre un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Una curva $\alpha : J \to \mathbb{U}$ se dice *curva integral de* $\mathbf{X}$ si $\mathbf{X}(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ para todo $t \in J$. Escribiendo $\alpha(t) \equiv (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t))$ y $\vec{X} \equiv (X_1, ..., X_n)$, la condición necesaria y suficiente para que α sea curva integral de $\mathbf{X}$ es que las funciones $\alpha_i(t)$ verifiquen el sistema de ecuaciones diferenciales (de 1er. orden)

$$\frac{d\alpha_i}{dt}(t) = X_i(\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)) \quad (i = 1, ..., n)\ .$$

La teoría *general* de los sistemas de ecuaciones diferenciales (ver Apéndice 5.1.4*) asegura que, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ y cada $p \in \mathbb{U}$, existe una curva integral $\alpha : J \to \mathbb{U}$ de $\mathbf{X}$ tal que $t_0 \in J$ y $\alpha(t_0) = p$ ("condición inicial"). Por otra parte, si β es cualquier curva integral de $\mathbf{X}$ verificando la misma condición inicial $\beta(t_0) = p$, entonces α y β coinciden en la intersección de sus dominios. Esto último conduce a la noción de *curva integral maximal* α_p, que es única. Usaremos este resultado en el apartado 4.2.2 al hablar de geodésicas en superficies.

Más aún: se puede demostrar ("dependencia diferenciable de la solución respecto de las condiciones iniciales") que, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ y cada $p \in \mathbb{U}$, existen

$$\begin{cases} \text{un entorno } \bar{J}(\subset \mathbb{R}) \text{ de } t_0 \\ \text{un entorno } \mathbb{V}(\subset \mathbb{U}) \text{ de } p \\ \text{una función diferenciable } \psi : \mathbb{V} \times \bar{J} \to \mathbb{U} \end{cases}$$

tales que, $\forall q \in \mathbb{V}$, la función $\psi(q, \cdot) : \bar{J} \to \mathbb{U}$ es una curva integral de $\mathbf{X}$ con $\psi(q, t_0) = q$. Esto se usará en el Apéndice 5.3.1*, al hablar de coordenadas ortogonales en superficies.

Si el sistema de ecuaciones diferenciales es *lineal*, esto es (Apéndice 5.1.4*), de la forma

$$\frac{d\alpha_i}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t)\alpha_j(t) \quad (i = 1, ..., n)\ \ ,$$

con $A_{ij} \in \mathfrak{F}(I)$ $(i, j = 1, ..., n)$, para cierto $I \subset \mathbb{R}^n$, se obtiene $J = I$. Ya hemos usado este resultado en el Apéndice 5.1.5* y volveremos a usarlo en el apartado 4.2.1 al hablar del transporte paralelo en superficies.

5.3. SUPERFICIES EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

5.3.1. Coordenadas ortogonales. Demostración de la Proposición 3.6*

(ver [5], 3.4, Corolario 2, p.187) Sea $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ una carta de M en torno a p. Sean E, F, G los coeficientes de la primera forma fundamental de M en esta carta. Consideremos los campos $\mathbf{V}_1 := \frac{\partial}{\partial u}$, $\mathbf{V}_2 := \frac{-F}{E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, que son linealmente independientes y ortogonales en todo $\mathcal{U}$. Vamos a probar que existe una carta $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1} = (\bar{u}, \bar{v}))$ de M en torno a p de foma que $\partial/\partial\bar{u}$ es proporcional a $\mathbf{V}_1 \mid_{\overline{\mathcal{U}}}$ y $\partial/\partial\bar{v}$ es proporcional a $\mathbf{V}_2 \mid_{\overline{\mathcal{U}}}$ (con lo que se tendrá: $< \frac{\partial}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial}{\partial \bar{v}} >= 0$).

Y en efecto (ver [5], 3.4, Teorema, p.186). Utilizaremos el resultado del Apéndice 5.2.2* sobre dependencia diferenciable (respecto de las condiciones iniciales) de las curvas integrales de un campo. Para cada $i = 1, 2$, y al ser $\mathbf{V}_i(p) \neq \vec{0}_p$, puede probarse (ver [5], 3.4, Lema) que existen $\left\{ \begin{array}{l} \text{un entorno } \mathcal{D}_i(\subset \mathcal{U}) \text{ de } p \\ \text{una función } f_i \in \mathfrak{F}(\mathcal{D}_i) \end{array} \right\}$ tales que $\left\{ \begin{array}{l} \forall q \in \varphi^{-1}(\mathcal{D}_i) \text{ , } rg(J_{f_i \circ \varphi}(q)) = 1 \\ \forall \text{ curva integral } \alpha_i \text{ de } \mathbf{V}_i \mid_{\mathcal{D}_i} \text{, es } f_i \circ \alpha_i = cte. \end{array} \right\}$; se llama a f_i una "integral primera" del campo $\mathbf{V}_i \mid_{\mathcal{D}_i}$.

Además, al ser $\mathbf{V}_1(p)$ y $\mathbf{V}_2(p)$ linealmente independientes, se ve inmediatamente que la aplicación

$$f := (f_1,\ f_2) \mid_{\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2} : \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}^2$$

verifica $\det J_{f \circ \varphi}(\varphi^{-1}(p)) \neq 0$. Por el Teorema de la función inversa (Teorema 2.3) existen entornos $\mathbb{A}(\subset \varphi^{-1}(\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2))$ de $\varphi^{-1}(p)$ y $\mathbb{B}(\subset \mathbb{R}^2)$ de $f(p)$ tales que $(f \circ \varphi)(\mathbb{A}) = \mathbb{B}$ y $(f \circ \varphi) \mid_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un difeomorfismo. Entonces $\varphi(\mathbb{A})$ es un abierto de M (por ser φ^{-1} continua) y $f \mid_{\varphi(\mathbb{A})} : \varphi(\mathbb{A}) \to \mathbb{B}$ es un difeomorfismo.

Sea $\overline{\mathcal{U}} := \varphi(\mathbb{A})(\subset \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2)$ y sean $\bar{u} := f_2 \mid_{\overline{\mathcal{U}}}$, $\bar{v} := f_1 \mid_{\overline{\mathcal{U}}}$. Se sigue que $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1} := (\bar{u}, \bar{v}))$ es una carta en torno a p y que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ curva integral } \alpha_1 \text{ de } \mathbf{V}_1 \mid_{\overline{\mathcal{U}}} \text{, es } \bar{v} \circ \alpha_1 = cte. \\ \forall \text{ curva integral } \alpha_2 \text{ de } \mathbf{V}_2 \mid_{\overline{\mathcal{U}}} \text{, es } \bar{u} \circ \alpha_2 = cte. \end{array} \right. ,$$

lo que significa que $\mathbf{V}_1(\bar{v}) = 0$ y $\mathbf{V}_2(\bar{u}) = 0$; escribiendo $\mathbf{V}_1 \mid_{\overline{\mathcal{U}}}$ y $\mathbf{V}_2 \mid_{\overline{\mathcal{U}}}$ como combinaciones $\mathfrak{F}(\overline{\mathcal{U}})$-lineales de $\partial/\partial\bar{u}$ y $\partial/\partial\bar{v}$, se deduce que $\mathbf{V}_1 \mid_{\overline{\mathcal{U}}}$ es proporcional a $\partial/\partial\bar{u}$ y $\mathbf{V}_2 \mid_{\overline{\mathcal{U}}}$ es proporcional a $\partial/\partial\bar{v}$.

5.3.2. Más sobre orientación de superficies*

Sea M una superficie. Se dice que dos cartas $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ y $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1})$ de M **definen la misma orientación** si, o bien $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} \neq \emptyset$ y $\boldsymbol{\nu}_{\varphi} \mid_{\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}} = \boldsymbol{\nu}_{\bar{\varphi}} \mid_{\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}}$, o bien $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} = \emptyset$. Si $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}} \neq \emptyset$ y $\boldsymbol{\nu}_{\varphi} \mid_{\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}} = -\boldsymbol{\nu}_{\bar{\varphi}} \mid_{\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}}$, se dice que **definen**

orientaciones opuestas. Puesto que la intersección $\mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}}$ *no tiene por qué ser conexa* (incluso aunque lo sean $\mathcal{U}$ y $\overline{\mathcal{U}}$), estas dos no son las únicas posibilidades. Dos cartas tales como $(\mathcal{U},(u,v))$ y $(\mathcal{U},(\bar{u}=u,\bar{v}=-v))$ definen orientaciones opuestas, ya que por (31) se obtiene: $\partial/\partial\bar{u}=\partial/\partial u$ y $\partial/\partial\bar{v}=-\partial/\partial v$. Finalmente, si $(M,\boldsymbol{\nu})$ es una superficie orientada, se dice que una carta $(\mathcal{U},\varphi^{-1})$ de M es **positiva respecto de $\boldsymbol{\nu}$** si $\boldsymbol{\nu}\mid_{\mathcal{U}}=\boldsymbol{\nu}_{\varphi}$.

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Proposición 5.1 *Sea M una superficie.*

1. *Dos cartas $(\mathcal{U},\varphi^{-1})$ y $(\overline{\mathcal{U}},\bar{\varphi}^{-1})$, con $\mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}}\neq\emptyset$, definen la misma orientación si y sólo si la Jacobiana del cambio de carta tiene determinante positivo:*
$$\det J_{\bar{\varphi}^{-1}\circ\varphi}:=\det\left(\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}\right)>0\,.$$

2. *M es orientable si y sólo si admite un sistema de cartas que recubren M y definen la misma orientación.*

Demostración. Probemos 1. En $\mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}}$, se tiene:

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial u},\tfrac{\partial}{\partial v}\right)\overset{(31)}{=}\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar{u}},\tfrac{\partial}{\partial\bar{v}}\right)\left(\left(\tfrac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}\right)\circ\varphi^{-1}\right)\quad;\quad\overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\quad\tfrac{\partial}{\partial u}\times\tfrac{\partial}{\partial v}=\left(\det\left(\tfrac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}\right)\circ\varphi^{-1}\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial\bar{u}}\times\tfrac{\partial}{\partial\bar{v}}\right)\quad.$$

De donde se sigue:

$$\boldsymbol{\nu}_{\varphi}\mid_{\mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}}}=\boldsymbol{\nu}_{\bar{\varphi}}\mid_{\mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}}}\quad\Leftrightarrow\quad\det J_{\bar{\varphi}^{-1}\circ\varphi}>0\,.$$

Probemos 2 (ver [5], 2.6, Proposición 1) Condición necesaria. Supongamos que M admite una normal unitaria (global) $\boldsymbol{\nu}$. Recubramos M por dominios de cartas (la existencia de un tal recubrimiento está garantizada por la propia definición de superficie). Dada cada una de estas cartas $(\mathcal{U},\varphi^{-1})$, invirtamos (eventualmente, en alguna de las componentes conexas de $\mathcal{U}$) una de las coordenadas hasta conseguir (como se ha indicado anteriormente) que $\boldsymbol{\nu}_{\varphi}=\boldsymbol{\nu}\mid_{\mathcal{U}}$. Entonces las cartas de este sistema definen la misma orientación. Condición suficiente: inmediata ■

5.3.3. Expresión local de superficies como gráficas de funciones

(A) Sean M una superficie y $p\in M$. *Sabemos (Teorema 2.13(4)) que M siempre puede expresarse, localmente en torno a p, como la gráfica de una función diferenciable (s.p.d.g.)* $\varsigma:(\mathbb{R}^2_{xy}\supset)U\to\mathbb{R}_z$. Utilizando entonces la parametrización asociada (Teorema 2.13(2)) $\varphi : \mathbb{U} \ni (x,y) \mapsto (x,y,\varsigma(x,y)) \in \mathcal{U}$ e introduciendo las siguientes notaciones (que son estándar en la bibliografía):

$$\begin{cases} \mathrm{p} \equiv \frac{\partial\varsigma}{\partial x}\circ\varphi^{-1} \quad , \quad \mathrm{q} \equiv \frac{\partial\varsigma}{\partial y}\circ\varphi^{-1} \\ \mathrm{r} \equiv \frac{\partial^2\varsigma}{\partial x^2}\circ\varphi^{-1} \quad , \quad \mathrm{s} \equiv \frac{\partial^2\varsigma}{\partial x\partial y}\circ\varphi^{-1} \quad , \quad \mathrm{t} \equiv \frac{\partial^2\varsigma}{\partial y^2}\circ\varphi^{-1} \end{cases}$$

(todas ellas funciones en $\mathcal{U}$), se encuentra:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x}\circ\varphi^{-1} = (1,0,\mathrm{p}) \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\circ\varphi^{-1} = (0,1,\mathrm{q}) \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\circ\varphi^{-1} = (0,0,\mathrm{r}) \quad , \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\circ\varphi^{-1} = (0,0,\mathrm{s}) \quad , \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\circ\varphi^{-1} = (0,0,\mathrm{t}) \end{cases}$$

y también

$$\vec{\nu}_\varphi := \textit{Parte vect. de} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}\times\frac{\partial}{\partial y}}{\left|\frac{\partial}{\partial x}\times\frac{\partial}{\partial y}\right|} \right) \overset{(30)}{=} \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|}\circ\varphi^{-1} = \frac{(-\mathrm{p},-\mathrm{q},1)}{\sqrt{1+\mathrm{p}^2+\mathrm{q}^2}} \; .$$

Entonces los coeficientes de las dos formas fundamentales de M en la carta $(\mathcal{U},\varphi^{-1})$ vienen dados por:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \overset{(45)}{=} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{p}^2 & \mathrm{pq} \\ \mathrm{pq} & 1+\mathrm{q}^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \overset{(51)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{p}^2+\mathrm{q}^2}} \begin{pmatrix} \mathrm{r} & \mathrm{s} \\ \mathrm{s} & \mathrm{t} \end{pmatrix} \; , \tag{79}$$

de donde se sigue que, a menos que sea $\mathrm{p} = 0$ ó $\mathrm{q} = 0$, $(\mathcal{U},\varphi^{-1})$ *no es una carta ortogonal.*

(B) Sean $(M,\boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada, $p \in M$ y $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$ una base *ortonormal* de T_pM y *positiva* respecto de $\boldsymbol{\nu}(p)$. *Veamos un procedimiento concreto para expresar M, localmente en torno a p, como la gráfica de una función diferenciable.*

Elijamos como coordenadas (x,y,z) en $\mathbb{E}^3$ las dadas por la referencia afín euclídea con origen p y con base ortonormal $(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2,\vec{\nu}(p))$; es decir, para todo $q \in \mathbb{E}^3$, se tiene:

$$x(q) := < q-p, \vec{\xi}_1 > \quad , \quad y(q) := < q-p, \vec{\xi}_2 > \quad , \quad z(q) := < q-p, \vec{\nu}(p) > = h_p(q) \quad ,$$

donde la aplicación $h_p \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^3)$ fue introducida en 3.2.3. De ahí se sigue que $\vec{\xi}_1$ juega el papel de $\vec{e}_1$, $\vec{\xi}_2$ el papel de $\vec{e}_2$ y $\vec{\nu}(p)$ el papel de $\vec{e}_3$ y, por tanto: $(\frac{\partial}{\partial x})_p = \boldsymbol{\xi}_1$, $(\frac{\partial}{\partial y})_p = \boldsymbol{\xi}_2$ y $(\frac{\partial}{\partial z})_p = \boldsymbol{\nu}(p)$.

Puesto que M y $\mathbb{R}^2_{xy}$ comparten plano tangente en $p = (0,0)$, la aplicación $d_p\pi_{12} : T_pM \to T_{(0,0)}\mathbb{R}^2_{xy}$ es la identidad; con lo que el Teorema de la función inversa para superficies (Teorema 2.31) garantiza que existen entornos $\mathcal{U}(\subset M)$ de p y $\mathbb{U}(\subset \mathbb{R}^2_{xy})$ de $(0,0)$ tales que $\pi_{12}\mid_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \to \mathbb{U}$ es una carta de M, con parametrización asociada $\varphi(x,y)=(x,y,z=(h_p\circ\varphi)(x,y))$. Así pues, el abierto $\mathcal{U}\subset M$ es la gráfica de la función diferenciable $\varsigma := h_p\circ\varphi$.

Puesto que $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p = \boldsymbol{\xi}_i$ $(i=1,2)$ y $\boldsymbol{\xi}_1\times\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\nu}(p)$, resulta claro que $\boldsymbol{\nu}\mid_{\mathcal{U}}=\boldsymbol{\nu}_\varphi$.

Se sigue del Lema 3.15(2) que:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{p}(0,0)\equiv\frac{\partial(h_p\circ\varphi)}{\partial x}(0,0)=0 \\ \mathrm{q}(0,0)\equiv\frac{\partial(h_p\circ\varphi)}{\partial y}(0,0)=0\end{array}\right\} \ , \overset{(79)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} g_{ij}(p)=\delta_{ij} \\ h_{ij}(p)=\frac{\partial^2(h_p\circ\varphi)}{\partial x_i\partial x_j}(0,0)\end{array}\right\} (i,j=1,2)\ , \Rightarrow$$

$$\overset{(57)}{\Rightarrow}\ l_{ij}(p)=\frac{\partial^2(h_p\circ\varphi)}{\partial x_i\partial x_j}(0,0)\quad (i,j=1,2)$$

Si $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$ es además *adaptada* (esto es, si $\boldsymbol{\xi}_1$ y $\boldsymbol{\xi}_2$ son además *autovectores* de $\mathcal{L}_p$), entonces se verifica además:

$$k_i(p)=\frac{\partial^2(h_p\circ\varphi)}{\partial x_i^2}(0,0)\quad (i=1,2)\ .$$

5.3.4. Aplicación de Gauss. Demostración de la Proposición 3.18

Probemos 1. Sea $\overrightarrow{\tilde\nu}\equiv(\tilde\nu_1,\tilde\nu_2,\tilde\nu_3)$ una extensión local diferenciable en torno a p de la aplicación de Gausss $\vec\nu\equiv(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$. Se verifica $(\forall\vec\xi_p\in T_pM)$:

$$-\mathcal{L}_p\vec\xi_p := D_{\vec\xi_p}\boldsymbol{\nu}\overset{(37)}{=}\sum_{j=1}^3\vec\xi_p(\nu_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\overset{(34)}{=}\sum_{i,j=1}^3\xi_i\,\frac{\partial\tilde\nu_j}{\partial x_i}(p)\,\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\overset{identif.}{\equiv}$$

$$\equiv\sum_{i,j=1}^3\xi_i\,\frac{\partial\tilde\nu_j}{\partial x_i}(p)\,\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\vec\nu(p)}\overset{(19)}{=}\sum_{i=1}^3\xi_i\,d_p\overrightarrow{\tilde\nu}\,\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p=d_p\overrightarrow{\tilde\nu}\,(\vec\xi_p)\overset{2.3.3}{=:}d_p\vec\nu\,(\vec\xi_p)\ .$$

Y probemos 2 (ver [5], 3.3, Proposición 2): El área del subconjunto $\mathcal{R}\subset M$ es

$$Area(\mathcal{R})\overset{(48)}{=}\int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R}\,)}\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|\circ\varphi\overset{(30)}{=}\int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R}\,)}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|\ ;$$

y análogamente, el área del subconjunto $\vec\nu(\mathcal{R})\subset\mathbb{S}^2$ vendrá dada por

$$Area(\vec\nu(\mathcal{R}))=\int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})}\left|\frac{\partial(\vec\nu\circ\varphi)}{\partial u}\times\frac{\partial(\vec\nu\circ\varphi)}{\partial v}\right|\ .$$

De la expresión $\boldsymbol{\nu}=\sum_{j=1}^3\nu_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\mid_M\right)$ se deduce:

$$D_{\frac{\partial}{\partial u_i}}\boldsymbol{\nu}\overset{(40)}{:=}\sum_{j=1}^3\frac{\partial}{\partial u_i}(\nu_j)\,\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\mid_{\mathcal{U}}\right)\overset{(36)}{=}\sum_{j=1}^3(\frac{\partial(\nu_j\circ\varphi)}{\partial u_i}\circ\varphi^{-1})\,\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\mid_{\mathcal{U}}\right)\ ,\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|D_{\frac{\partial}{\partial u}}\boldsymbol{\nu}\times D_{\frac{\partial}{\partial v}}\boldsymbol{\nu}\right| = \left|\frac{\partial(\vec{\nu}\circ\varphi)}{\partial u}\times\frac{\partial(\vec{\nu}\circ\varphi)}{\partial v}\right|\circ\varphi^{-1} \qquad (^*) \quad ;$$

y por otra parte, se tiene:

$$(-D_{\frac{\partial}{\partial u}}\boldsymbol{\nu}\ ,\ -D_{\frac{\partial}{\partial v}}\boldsymbol{\nu}) \overset{(55)}{=}: (\mathcal{L}\frac{\partial}{\partial u}\ ,\ \mathcal{L}\frac{\partial}{\partial v}) \overset{(56)}{=} (\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v})\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22}\end{pmatrix} \quad , \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|D_{\frac{\partial}{\partial u}}\boldsymbol{\nu}\times D_{\frac{\partial}{\partial v}}\boldsymbol{\nu}\right| \overset{(5)}{=} |K|\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right| \overset{(30)}{=} |K|\,(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|\circ\varphi^{-1}) \quad (^{**})\ .$$

Se sigue de (*) y (**) que:

$$\left|\frac{\partial(\vec{\nu}\circ\varphi)}{\partial u}\times\frac{\partial(\vec{\nu}\circ\varphi)}{\partial v}\right| = (|K|\circ\varphi)\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right| \quad ;$$

y finalmente se concluye:

$$\lim_{\mathcal{R}\to\{p\}}\frac{Area(\vec{\nu}(\mathcal{R}))}{Area(\mathcal{R})} = \lim_{\mathcal{R}\to\{p\}}\frac{\int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})}\ (|K|\circ\varphi)\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|}{\int_{\varphi^{-1}(\mathcal{R})}\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} |K(p)| \quad \blacksquare$$

5.3.5. Indicatriz de Dupin*

Sean $(M,\boldsymbol{\nu})$ una superficie orientada y $p\in M$. El conjunto

$$\mathcal{D}_p := \ \{\boldsymbol{\xi}\in T_pM \ \mid \mathcal{H}_p(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) \ = \pm 1\}$$

se denomina **indicatriz de Dupin de** $(M,\boldsymbol{\nu})$ **en** p.

La indicatriz de Dupin $\mathcal{D}_p$ *codifica el carácter (3.3.4) del punto* p. En efecto: sean $k_1(p)$ y $k_2(p)$ las curvaturas principales de $(M,\boldsymbol{\nu})$ en p (elegimos la notación de manera que se tenga: $k_1\geq k_2$) y $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$ una base de T_pM *adaptada* (3.3.2). Un vector genérico $\boldsymbol{\xi}\in T_pM$ se puede escribir: $\boldsymbol{\xi}=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2$, para ciertos números $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. Con lo que se tiene:

$$\mathcal{D}_p = \{\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2 \mid k_1(p)\ \lambda_1^2 \ + \ k_2(p)\ \lambda_2^2 = \pm 1\}\ .$$

Entonces el punto p resulta ser:

(i) hiperbólico si y sólo si $\mathcal{D}_p$ consiste en un par de hipérbolas. En tal caso, las asíntotas tienen direcciones $\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2\in T_pM$ definidas por la ecuación $k_1(p)\ \lambda_1^2+k_2(p)\ \lambda_2^2=0$.

(ii) parabólico si y sólo si $\mathcal{D}_p$ consiste en un par de rectas distintas.

(iii) elíptico si y sólo si $\mathcal{D}_p$ es una elipse.

(iv) plano si y sólo si $\mathcal{D}_p$ es vacío.

(v) umbílico y no plano si y sólo si $\mathcal{D}_p$ es una circunferencia.

En efecto:

(i) En este caso: $K(p) < 0$, $\Leftrightarrow$ $k_1(p) > 0 > k_2(p)$. Entonces: $\mathcal{D}_p = \{\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2 \mid \frac{\lambda_1^2}{1/k_1(p)} - \frac{\lambda_2^2}{1/|k_2(p)|} = \pm 1\}$.

(ii) En este caso: $K(p) = 0$ y una de las curvaturas principales en p es no nula , $\Leftrightarrow$ (s.p.d.g.) $k_1(p) > 0 = k_2(p)$. Entonces: $\mathcal{D}_p = \{\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2 \mid k_1(p)\lambda_1^2 = 1\}$.

(iii) En este caso: $K(p) > 0$, $\Leftrightarrow$ (s.p.d.g.) $k_1(p) \geq k_2(p) > 0$. Entonces: $\mathcal{D}_p = \{\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2 \mid \frac{\lambda_1^2}{1/k_1(p)} + \frac{\lambda_2^2}{1/k_2(p)} = 1\}$.

(iv) En este caso: $k_1(p) = k_2(p) = 0$. Entonces $\mathcal{D}_p$ es vacío.

(v) En este caso: $k_1(p) = k_2(p) \neq 0$ y (s.p.d.g.) $k_1(p) = k_2(p) > 0$. Entonces: $\mathcal{D}_p = \{\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2 \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1/k_1(p)\}$ ■

Elijamos ahora como coordenadas (x, y, z) en $\mathbb{E}^3$ las dadas por la referencia afín euclídea con origen p y con base ortonormal $(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\nu}(p))$ y consideremos la carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (x, y))$ inducida (Apéndice 5.3.3) en torno a p, que verifica:

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p = \boldsymbol{\xi}_i \ \ (i = 1, 2) \ \ .$$

Dado un número $\varepsilon > 0$, consideremos el conjunto (que puede ser vacío)

$$C_\varepsilon := \mathcal{U} \cap \{z = \pm\varepsilon^2\} = \{\varphi(x, y) \in \mathcal{U} \mid (h_p \circ \varphi)(x, y) = \pm\varepsilon^2\} \ \ ;$$

resulta evidente la importancia del conjunto C_ε (para ε pequeño) a fin de obtener información sobre la forma de la superficie M alrededor del punto p. Pues bien: *supuesto que el punto p sea no-plano,* y para cada valor de ε suficientemente pequeño, *el conjunto C_ε resulta ser (hasta el segundo orden) homotético (con factor $\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}$) a la indicatriz de Dupin.*

En efecto: Se sigue del Lema 3.15(2):

$$(h_p \circ \varphi)(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}(p)x_i x_j + \bigcirc(x_i^2 x_j) \ \ ,$$

de donde se deduce:

$$C_\varepsilon = \{\varphi(x, y) \in \mathcal{U} \mid \mathcal{H}_p(x\boldsymbol{\xi}_1 + y\boldsymbol{\xi}_2, x\boldsymbol{\xi}_1 + y\boldsymbol{\xi}_2) + \bigcirc(x_i^2 x_j) = \pm 2\varepsilon^2\} \ \ .$$

Se concluye que el conjunto C_ε es (a menos de términos de orden mayor o igual que 3 en las coordenadas x, y, y supuesto que los términos de orden 2 no se anulen, esto es, supuesto que p no sea plano) homotético (con factor $\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}$) a $\mathcal{D}_p$ ■

5.4. GEOMETRÍA INTRÍNSECA LOCAL DE SUPERFICIES

5.4.1. Carácter intrínseco de la derivación covariante. Demostración de la Proposición 4.4*

En primer lugar, se tiene ($\forall i,j,h=1,2$):

$$\frac{\partial}{\partial u_h}(g_{ij}) \overset{(63)}{=} < \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_h}} \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} > + < \frac{\partial}{\partial u_i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_h}} \frac{\partial}{\partial u_j} > \overset{(66)}{=} \Gamma_{hij} + \Gamma_{hji} \ \ (^*) \ ,$$

donde se usa la definición $\Gamma_{ijh} := \sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^{l} g_{hl}$.

Teniendo en cuenta ahora que $\Gamma_{hij} = \Gamma_{ihj}$, se concluye inmediatamente que ($\forall i,j,h=1,2$):

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijh} &\equiv \frac{1}{2}\left((\Gamma_{ijh} + \Gamma_{hji}) + (\Gamma_{ijh} + \Gamma_{hij}) - (\Gamma_{hij} + \Gamma_{hji})\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left((\Gamma_{jih} + \Gamma_{jhi}) + (\Gamma_{ijh} + \Gamma_{ihj}) - (\Gamma_{hij} + \Gamma_{hji})\right) \overset{(*)}{=} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}(g_{ih}) + \frac{\partial}{\partial u_i}(g_{jh}) - \frac{\partial}{\partial u_h}(g_{ij})\right) \ . \end{aligned} \tag{80}$$

De lo anterior se concluye que es posible despejar los Γ_{ij}^{k} en función de los g_{ij}, obteniéndose ($\forall i,j,k=1,2$):

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{k} &= \sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^{l} \delta_{l}^{k} \equiv \sum_{l=1}^{2} \Gamma_{ij}^{l} \left(\sum_{h=1}^{2} g^{kh} g_{hl}\right) =: \sum_{h=1}^{2} g^{kh} \Gamma_{ijh} \overset{(80)}{=} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{2} g^{kh} \left(\frac{\partial}{\partial u_j}(g_{ih}) + \frac{\partial}{\partial u_i}(g_{jh}) - \frac{\partial}{\partial u_h}(g_{ij})\right) \ . \end{aligned}$$

5.4.2. Carácter intrínseco de la curvatura de Gauss. Demostración del Teorema 4.7*

Probaremos la expresión (71). Sean $\boldsymbol{\nu} \in \mathfrak{X}_M$ cualquier normal unitaria local y $h_{ij} \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ ($i,j=1,2$) los coeficientes de la segunda forma fundamental de $(M, \boldsymbol{\nu})$ en la carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$. Se tiene (denotando $\mathbf{U} \equiv \frac{\partial}{\partial u}, \mathbf{V} \equiv \frac{\partial}{\partial v} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$):

$$D_{\mathbf{U}} D_{\mathbf{V}} \mathbf{U} \overset{(42)}{=} D_{\mathbf{U}} \left(\textstyle\sum_{k=1}^{3} (\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial v \partial u} \circ \varphi^{-1})(\frac{\partial}{\partial x_k} |_{\mathcal{U}})\right) \overset{(40)}{=}$$

$$= \textstyle\sum_{k=1}^{3} \mathbf{U}(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial v \partial u} \circ \varphi^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} |_{\mathcal{U}}\right) \overset{(36)}{=} \sum_{k=1}^{3} (\frac{\partial^3 \varphi_k}{\partial u \partial v \partial u} \circ \varphi^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} |_{\mathcal{U}}\right) = D_{\mathbf{V}} D_{\mathbf{U}} \mathbf{U} \ . \quad (^*)$$

Con lo cual se tiene:

$$-\nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{V}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{U} \overset{(65)}{=} -\nabla_{\mathbf{U}} (D_{\mathbf{V}} \mathbf{U} - < \mathcal{L}\mathbf{V}, \mathbf{U} > \boldsymbol{\nu}) + \nabla_{\mathbf{V}} (D_{\mathbf{U}} \mathbf{U} - < \mathcal{L}\mathbf{U}, \mathbf{U} > \boldsymbol{\nu}) =$$

$$= (-D_{\mathbf{U}} D_{\mathbf{V}} \mathbf{U} + D_{\mathbf{U}}(<\mathcal{L}\mathbf{V}, \mathbf{U}> \boldsymbol{\nu}))^{Tan} + (D_{\mathbf{V}} D_{\mathbf{U}} \mathbf{U} - D_{\mathbf{V}}(<\mathcal{L}\mathbf{U}, \mathbf{U}> \boldsymbol{\nu}))^{Tan} \overset{(*)}{=}$$

$$=<\mathcal{L}\mathbf{V}, \mathbf{U}> \underbrace{(D_{\mathbf{U}} \boldsymbol{\nu})^{Tan}}_{=D_{\mathbf{U}}\boldsymbol{\nu}} - <\mathcal{L}\mathbf{U}, \mathbf{U}> \underbrace{(D_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\nu})^{Tan}}_{=D_{\mathbf{V}}\boldsymbol{\nu}} =$$

$$= - <\mathcal{L}\mathbf{V}, \mathbf{U}> \mathcal{L}\mathbf{U} + <\mathcal{L}\mathbf{U}, \mathbf{U}> \mathcal{L}\mathbf{V} \;\; ; \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; <-\nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{V}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{U}, \mathbf{V}> = \det \begin{pmatrix} <\mathcal{L}\mathbf{U}, \mathbf{U}> & <\mathcal{L}\mathbf{U}, \mathbf{V}> \\ <\mathcal{L}\mathbf{V}, \mathbf{U}> & <\mathcal{L}\mathbf{V}, \mathbf{V}> \end{pmatrix} = \det(h_{ij}) \; .$$

De la igualdad matricial (57) en 3.3.1 se sigue que $K\mid_{\mathcal{U}} = \det(g_{ij})^{-1} \det(h_{ij})$ y, finalmente, se concluye:

$$K\mid_{\mathcal{U}} = \frac{<-\nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{V}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{U} \; , \; \mathbf{V}>}{\det(g_{ij})} \quad .$$

5.4.3. Curvatura de Gauss en coordenadas ortogonales. Demostración del Corolario 4.8*

Probaremos la expresión (72). Por una parte, se tiene:

$$K\mid_{\mathcal{U}} \overset{(71)}{=} \frac{<-\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} \, , \, \frac{\partial}{\partial v}>}{\det(g_{ij})} \overset{(66)}{=}$$
$$= \frac{<-\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} (\Gamma^1_{21} \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma^2_{21} \frac{\partial}{\partial v}) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} (\Gamma^1_{11} \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma^2_{11} \frac{\partial}{\partial v}) \, , \, \frac{\partial}{\partial v}>}{\det(g_{ij})} \overset{F=0}{=}$$
$$= \frac{\left(-\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{11} - \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma^2_{21}) - \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} + \frac{\partial}{\partial v}(\Gamma^2_{11}) + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}\right) G}{EG} \overset{(70)}{=}$$
$$= \frac{1}{E} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2E} \frac{\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2G} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2G} \right) - \left(\frac{\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2G} \right)^2 + \frac{\frac{\partial}{\partial u}(E)}{2E} \frac{\frac{\partial}{\partial u}(G)}{2G} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2G} \right) - \frac{\frac{\partial}{\partial v}(E)}{2G} \frac{\frac{\partial}{\partial v}(G)}{2G} \right) =$$
$$= \frac{1}{E} \left(\frac{1}{4} \frac{(\frac{\partial}{\partial v}(E))^2}{EG} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2}{\partial u^2}(G)}{G} + \frac{1}{4} \frac{(\frac{\partial}{\partial u}(G))^2}{G^2} + \frac{1}{4} \frac{\frac{\partial}{\partial u}(E) \frac{\partial}{\partial u}(G)}{EG} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2}{\partial v^2}(E)}{G} + \frac{1}{4} \frac{\frac{\partial}{\partial v}(E) \frac{\partial}{\partial v}(G)}{G^2} \right) \; .$$

Y por otra parte, se tiene:

$$\frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial v}(E)}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial u}(G)}{\sqrt{EG}} \right) \right) =$$
$$= \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial v^2}(E)}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v}(E) \frac{\frac{\partial}{\partial v}(EG)}{\sqrt{E^3G^3}} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial u^2}(G)}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u}(G) \frac{\frac{\partial}{\partial u}(EG)}{\sqrt{E^3G^3}} \right) =$$
$$= \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial v^2}(E)}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2} \frac{(\frac{\partial}{\partial v}(E))^2}{\sqrt{E^3G}} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial v}(E) \frac{\partial}{\partial v}(G)}{\sqrt{EG^3}} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial u^2}(G)}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial u}(E) \frac{\partial}{\partial u}(G)}{\sqrt{E^3G}} - \frac{1}{2} \frac{(\frac{\partial}{\partial u}(G))^2}{\sqrt{EG^3}} \right) =$$
$$= \frac{1}{E} \left(-\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2}{\partial v^2}(E)}{G} + \frac{1}{4} \frac{(\frac{\partial}{\partial v}(E))^2}{EG} + \frac{1}{4} \frac{\frac{\partial}{\partial v}(E) \frac{\partial}{\partial v}(G)}{G^2} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2}{\partial u^2}(G)}{G} + \frac{1}{4} \frac{\frac{\partial}{\partial u}(E) \frac{\partial}{\partial u}(G)}{EG} + \frac{1}{4} \frac{(\frac{\partial}{\partial u}(G))^2}{G^2} \right) \; .$$

Y el resultado se sigue.

5.4.4. Ecuaciones de compatibilidad*

Sea M una superficie. Fijada una carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$, es claro que el conjunto de campos locales $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \boldsymbol{\nu}_\varphi)$, donde $\boldsymbol{\nu}_\varphi$ es la normal unitaria inducida por la carta (3.2.1), constituye una base del módulo $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$. Las derivadas naturales (40) con respecto a $\frac{\partial}{\partial u}$ y $\frac{\partial}{\partial v}$ de los tres campos de esta base local se podrán a su vez escribir como combinaciones lineales de estos mismos campos; de hecho, conocemos ya todos los coeficientes de estas combinaciones lineales: son los símbolos de Christoffel, los coeficientes de la segunda forma fundamental y los del operador de Weingarten. En efecto, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} \overset{(65)}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} + h_{ij} \boldsymbol{\nu}_\varphi \overset{(66)}{=} \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u_k} + h_{ij} \boldsymbol{\nu}_\varphi \quad (i,j=1,2) \\ -D_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \boldsymbol{\nu}_\varphi =: \mathcal{L}(\frac{\partial}{\partial u_i}) \overset{(56)}{=} \sum_{j=1}^2 l_{ji} \frac{\partial}{\partial u_j} \quad (i=1,2) \end{array} \right. ;$$

más explícitamente (con las notaciones e, f, g para los coeficientes de la segunda forma fundamental):

$$\left\{ \begin{array}{c} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} + e \boldsymbol{\nu}_\varphi \\ D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} + f \boldsymbol{\nu}_\varphi = D_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} \\ D_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial v} + g \boldsymbol{\nu}_\varphi \\ -D_{\frac{\partial}{\partial u}} \boldsymbol{\nu}_\varphi = l_{11} \frac{\partial}{\partial u} + l_{21} \frac{\partial}{\partial v} \\ -D_{\frac{\partial}{\partial v}} \boldsymbol{\nu}_\varphi = l_{12} \frac{\partial}{\partial u} + l_{22} \frac{\partial}{\partial v} \end{array} \right. . \tag{81}$$

De la Proposición 4.4 y de la igualdad matricial (57) se deduce que *todos* los coeficientes que aquí aparecen se obtienen a partir de los de las formas fundamentales (g_{ij}) y (h_{ij}).

La consistencia de las igualdades (81) exige la existencia de relaciones entre las (g_{ij}) y las (h_{ij}). Ya sabemos que se verifica la condición (42) $D_{\frac{\partial}{\partial u}} D_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} = D_{\frac{\partial}{\partial v}} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u}$, cuya componente tangente $(D_{\frac{\partial}{\partial u}} D_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u})^{Tan} = (D_{\frac{\partial}{\partial v}} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u})^{Tan}$ conduce (Teorema 4.7) a la relación (71), lo que hace patente el carácter intrínseco de la curvatura de Gauss. Si ahora introducimos las notaciones $\mathbf{U}_i \equiv \frac{\partial}{\partial u_i}$ y $K_{ijkl} \equiv < -\nabla_{\mathbf{U}_i} \nabla_{\mathbf{U}_j} \mathbf{U}_k + \nabla_{\mathbf{U}_j} \nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{U}_k, \mathbf{U}_l >$ $(i,j,k,l=1,2)$, la relación (71) puede reescribirse en la forma

$$K_{1212} = \det(g_{ij}) \cdot K \mid_{\mathcal{U}} \overset{(57)}{=} \det(h_{ij}) \ , \tag{82}$$

que se denomina **fórmula de Gauss**.

Por otra parte, teniendo en cuenta (81) se encuentra:

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_{\frac{\partial}{\partial u}} D_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u})^{Nor} = \left(D_{\frac{\partial}{\partial u}} \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} + f \boldsymbol{\nu}_\varphi \right) \right)^{Nor} = \left(\Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + \frac{\partial}{\partial u}(f) \right) \boldsymbol{\nu}_\varphi \\ (D_{\frac{\partial}{\partial v}} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u})^{Nor} = \left(D_{\frac{\partial}{\partial v}} \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} + e \boldsymbol{\nu}_\varphi \right) \right)^{Nor} = \left(\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + \frac{\partial}{\partial v}(e) \right) \boldsymbol{\nu}_\varphi \end{array} \right.$$

y análogamente (intercambiando los papeles de u y v)

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_{\frac{\partial}{\partial v}} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v})^{Nor} = \left(D_{\frac{\partial}{\partial v}} \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} + f \boldsymbol{\nu}_\varphi \right) \right)^{Nor} = \left(\Gamma_{12}^1 f + \Gamma_{12}^2 g + \frac{\partial}{\partial v}(f) \right) \boldsymbol{\nu}_\varphi \\ (D_{\frac{\partial}{\partial u}} D_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v})^{Nor} = \left(D_{\frac{\partial}{\partial u}} \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial v} + g \boldsymbol{\nu}_\varphi \right) \right)^{Nor} = \left(\Gamma_{22}^1 e + \Gamma_{22}^2 f + \frac{\partial}{\partial u}(g) \right) \boldsymbol{\nu}_\varphi \end{array} \right.$$

Así, de la condición $(D_{\frac{\partial}{\partial u}} D_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u})^{Nor} = (D_{\frac{\partial}{\partial v}} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u})^{Nor}$ y de su análoga $(D_{\frac{\partial}{\partial v}} D_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v})^{Nor} = (D_{\frac{\partial}{\partial u}} D_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v})^{Nor}$ se obtienen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial v}(e) - \frac{\partial}{\partial u}(f) = \Gamma_{12}^1 e + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) f - \Gamma_{11}^2 g \\ \frac{\partial}{\partial u}(g) - \frac{\partial}{\partial v}(f) = \Gamma_{12}^2 g + (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) f - \Gamma_{22}^1 e \end{array} \right. , \tag{83}$$

que se denominan **ecuaciones de Mainardi-Codazzi**.

Las ecuaciones (82) y (83) se denominan **ecuaciones de compatibilidad**. Es importante recalcar que no existen otras relaciones de compatibilidad entre la primera y la segunda forma fundamentales; concretamente, se verifica el siguiente resultado, que es una especie de análogo al teorema fundamental de la teoría de curvas:

Teorema 5.2 (Bonnet) *Sean $E, F, G, e, f, g : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables definidas sobre un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^2$ (con coordenadas (u, v)), siendo $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$, y verificando formalmente las igualdades (82) y (83), con las Γ_{ij}^k dadas por las ecuaciones (69). Existe entonces una parametrización global $\varphi : \mathbb{U} \to M$ de una superficie M para la que las funciones $E \circ \varphi^{-1}, F \circ \varphi^{-1}, G \circ \varphi^{-1}, e \circ \varphi^{-1}, f \circ \varphi^{-1}, g \circ \varphi^{-1}$ son los coeficientes de sus formas fundamentales. Además la superficie M está determinada salvo movimientos.*

Demostración. Ver [5], 4.3, Teorema, con demostración en el Apéndice al Capítulo 4 ■

5.4.5. Transporte paralelo y rotación de tangentes*

Recordemos (2.1.5) que un camino en $\mathbb{E}^n$ $(n \geq 2)$ es una aplicación continua $\alpha : [a, b] \to \mathbb{E}^n$ y tal que existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ de forma que cada $\alpha_i \equiv \alpha \mid_{[t_{i-1}, t_i]}$ $(i = 1, ..., k)$ es una curva (diferenciable); y recordemos también que el camino α se dice cerrado si $\alpha(a) = \alpha(b)$ y se dice simple si la aplicación $\alpha \mid_{[a,b)}$ es inyectiva.

Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{E}^2$ un camino regular en k trozos, *cerrado* y *simple*. Recordemos (2.1.5) que el conjunto $\mathbb{E}^2 - \operatorname{Im} \alpha$ está constituido por dos abiertos conexos disjuntos, uno de ellos acotado, con $\operatorname{Im} \alpha$ como frontera común ("teorema de la curva de Jordan"). Sea $\mathcal{R}$ la unión del abierto acotado de $\mathbb{E}^2 - \operatorname{Im} \alpha$ y de su frontera $\operatorname{Im} \alpha$. Supongamos además que α es *positivo* (esto es, tal que el compacto $\mathcal{R}$ quede siempre a la izquierda). Definimos los **ángulos externos de** α (orientados) por $\varepsilon_i := \measuredangle(\alpha_i'(t_i), \alpha_{i+1}'(t_i)) \in (-\pi, \pi]$ $(i = 1, ..., k;$ $\alpha_{k+1} \equiv \alpha_1)$ y las funciones diferenciables $\theta_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., k)$ por (Ejercicio 6.1.3a) $\vec{T}_i =: (\cos \theta_i, sen\theta_i)$. Entonces se verifica la expresión ("teorema de rotación de tangentes"; ver [5], 5.7, Teorema 2):

$$\sum_{i=1}^{k} [\theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})] = -\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i + 2\pi \qquad (*) \ .$$

Sean M una superficie y $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ una carta de M. Sea $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ un subconjunto compacto cuya frontera en $\mathcal{U}$ sea la imagen de un camino $\alpha : [a,b] \to \mathcal{U}(\subset \mathbb{E}^3)$ regular en k trozos, cerrado, simple y positivo respecto de $\boldsymbol{\nu}_\varphi$ (esto es, tal que $(\boldsymbol{\nu}_\varphi \circ \alpha) \times \alpha'$ apunte, allí donde está definido y no es nulo, hacia el interior de $\mathcal{R}$). Definimos los **ángulos externos de** α **(**orientados por $\boldsymbol{\nu}_\varphi$) por $\varepsilon_i := \measuredangle(\alpha_i'(t_i), \alpha_{i+1}'(t_i)) \in (-\pi, \pi]$ ($i = 1, ..., k$; $\alpha_{k+1} \equiv \alpha_1$) y las funciones $\theta_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$ ($i = 1, ..., k$), determinaciones diferenciables (4.18(1)) de los ángulos (orientados por $\boldsymbol{\nu}_\varphi$) $\measuredangle(\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \circ \alpha_i, \alpha_i')$. En cada vértice p_i ($i = 1, ..., k$) y adoptando el convenio de escribir $\theta_{k+1}(t_k) \equiv \theta_1(t_0)$, se tendrá: $\theta_{i+1}(t_i) = \theta_i(t_i) + \varepsilon_i - 2\lambda_i \pi$, para cierto λ_i entero. Con lo que se tendrá:

$$\sum_{i=1}^{k} (\theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})) \equiv \sum_{i=1}^{k} (\theta_i(t_i) - \theta_{i+1}(t_i)) = -\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i + 2\lambda\pi \quad ,$$

para cierto λ entero. Puesto que φ^{-1} es un difeomorfismo, $\varphi^{-1} \circ \alpha : [a,b] \to \mathbb{E}^2$ resulta ser un camino cerrado, simple y positivo, al que se podrá aplicar el teorema de rotación de tangentes. *Supongamos además que* $\varphi^{-1}(\mathcal{R})(\subset \mathbb{E}^2)$ *es estrellado con respecto a un punto* (lo que ocurre si $\mathcal{R}$ es un triángulo). En tal caso, existe la posibilidad de construir una *deformación continua* de un abierto (de $\mathbb{E}^2$) que contenga a $\varphi^{-1}(\mathcal{R})$ en un abierto (de M) que contenga a $\mathcal{R}$ (ver p.ej. [9], Cap. 21, Teorema 2, pp. 198-199). Así se concluye que debe ser $\lambda = 1$.

Consideremos el Ejemplo 4.23, con la esfera $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0\}$ y en ella un triángulo $T(\subset M)$ que tiene un vértice en el polo norte y dos en el ecuador y por lados dos arcos de meridiano y un arco de ecuador de amplitud en azimut $\Delta\phi \in (0, 2\pi]$. Sea $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ *cualquier* carta ortogonal de M con $T \subset \mathcal{U}$ (obsérvese que $\varphi^{-1}(T) \in \mathbb{E}^2$ es estrellado) y sea $\alpha : [a,b] \to \mathcal{U}$ un camino diferenciable en tres trozos (respecto de una partición $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = b$), cerrado, simple, con $\operatorname{Im}\alpha = \partial T$ (la frontera de T en $\mathcal{U}$) y positivo respecto de $\boldsymbol{\nu}_\varphi$. Por lo dicho anteriormente, la expresión (*) mantiene su validez para nuestro camino α, cuyos ángulos externos son: $\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{\pi}{2}$ y $\varepsilon_3 = \pi - \Delta\phi$. Con lo que se encuentra:

$$\sum_{i=1}^{3} [\theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})] = -(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi - \Delta\phi) + 2\pi = \Delta\phi$$

(a este resultado habíamos llegado de manera directa en el Ejemplo 4.23, cuando la carta ortogonal $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u,v))$ de M era la de la proyección estereográfica desde el polo sur de M sobre el plano ecuatorial).

Consideremos ahora el Ejemplo 4.24, con la esfera $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0\}$ y en ella un casquete esférico $\mathcal{R}(\subset M)$ centrado en el polo norte y limitado por un paralelo de colatitud $\vartheta_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Sea $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ *cualquier* carta ortogonal de M con $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$ (obsérvese que $\varphi^{-1}(\mathcal{R}) \in \mathbb{E}^2$ es estrellado) y sea $\alpha : [a, b] \to \mathcal{U}$ un camino diferenciable, cerrado, simple, con $\operatorname{Im} \alpha = \partial \mathcal{R}$ (la frontera de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{U}$) y positivo respecto de $\boldsymbol{\nu}_\varphi$. Por lo dicho anteriormente, la expresión $(^*)$ mantiene su validez para nuestro camino α (cuyo único ángulo externo es $\varepsilon_1 = 0$). Con lo que se encuentra:

$$\theta_1(b) - \theta_1(a) = 2\pi$$

(a este resultado habíamos llegado de manera directa en el Ejemplo 4.24, cuando la carta ortogonal $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ de M era la de la proyección estereográfica desde el polo sur de M sobre el plano ecuatorial).

6. EJERCICIOS

Los ejercicios que siguen proporcionan muchos ejemplos para el desarrollo de la teoría. Se ha pretendido que sus *enunciados* transmitan información relevante. *Intentar resolverlos* (y lograrlo en bastantes casos) constituye una parte fundamental del curso. *Repensarlos una vez resueltos* ilustra en muchos casos sobre el "puesto" que ocupa cada ejercicio en el desarrollo de la teoría. Se ha renunciado deliberadamente a dar indicaciones sobre el grado de dificultad de cada ejercicio (eventuales "pistas" pueden surgir en las clases prácticas o en las tutorías). Para colecciones de problemas resueltos, ver por ejemplo [3] (cuyos convenios y notaciones son los de [4]) y también [1]; en todo caso, téngase en cuenta que *no es ni mucho menos lo mismo intentar resolver problemas que estudiar problemas resueltos.*

6.1. TEORÍA LOCAL DE CURVAS EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

6.1.1. (Curvatura y recta / Curvatura y circunferencia)

Sean $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ una curva regular y κ su curvatura. Probar que:

(a) La trayectoria de α está sobre una recta si y sólo si $\kappa(t) = 0$ (constante).

(b) La trayectoria de α está sobre una circunferencia de radio $r > 0$ si y sólo si $\mid \kappa(t) \mid = 1/r$ (constante).

6.1.2. (Hélices)

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con a y c no nulos. Considérese la curva $\alpha : \mathbb{R} \ni s \mapsto \left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right), a\, sen\left(\frac{s}{c}\right), b\frac{s}{c}\right) \in \mathbb{E}^3$. Si $b \neq 0$, se dice que la trayectoria de α es una **hélice**.

(a) ¿Es el parámetro s la longitud de arco?

(b) Determinar la curvatura y la torsión de α.

(c) Demostrar que la recta (afín) normal principal de α en s corta al eje z bajo un ángulo igual a $\pi/2$ (independiente de s).

(d) Demostrar que las rectas (afines) tangentes de α forman un ángulo constante con el eje z.

(e) Hallar el plano (afín) osculador de α.

6.1.3. (Determinación diferenciable del ángulo)

Sean $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ una curva regular y $\mathbf{T} \equiv \alpha' / |\alpha'| \in \mathfrak{X}_\alpha$ su campo (unitario) tangente.

(a) Probar que existe una función diferenciable $\theta : I \to \mathbb{R}$ de forma que $\vec{T} = (\cos\theta, sen\ \theta)$.

(b) Probar que se verifica: $\frac{d\theta}{dt} = \mid \alpha' \mid \kappa$, siendo κ la curvatura de α.

6.1.4. (Torsión y curva plana / Normales y circunferencia)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ una curva regular. Probar que:

(a) La trayectoria de α está sobre una recta si y sólo si α es no-alabeada en todo valor del parámetro.

A partir de ahora, supóngase que α es alabeada.

(b) La trayectoria de α está sobre un plano (esto es, la curva es plana) si y sólo si su torsión verifica $\tau = 0$ (constante).

(c) La trayectoria de α está sobre una circunferencia si y sólo si las rectas (afines) normales principales de α pasan todas por un mismo punto.

6.1.5. (Evolutas)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ una curva regular con curvatura κ nunca nula, y sea $\mathbf{N} \in \mathfrak{X}_\alpha$ su campo (unitario) normal. La curva $\beta : I \ni t \mapsto \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\vec{N}(t) \in \mathbb{E}^2$ se denomina **evoluta de** α (su imagen es el lugar geométrico de los "centros de curvatura" de α).

(a) Demuéstrese que, si $\frac{d\kappa}{dt}(t) \neq 0$, la recta (afín) normal de α en t es tangente a β en t.

(b) Considérense las rectas normales de α en dos valores próximos (pero distintos) t_1 y t_2 del parámetro. Aproxímese t_1 a t_2 y demuéstrese que el punto de intersección de ambas rectas converge hacia un punto de la imagen de la evoluta de α.

6.1.6. (Catenarias)

Sea $a \in \mathbb{R}^+$. La trayectoria definida por la curva plana $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto a(t, \cosh t) \in \mathbb{E}^2$ se denomina **catenaria**.

(a) Hallar la curvatura de α.

(b) Hallar la evoluta de α.

6.1.7. (Cicloides)

La curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{E}^2$ de ecuaciones $x = rt - rsen\ t,\ y = r - r\cos\ t$ describe el movimiento de un punto fijo de una circunferencia C de radio r cuando ésta rueda apoyada sobre el eje x. La trayectoria de α se denomina **cicloide**.

(a) ¿Es α una curva regular?. Hallar su longitud. Reparametrizar α por la longitud de arco.

(b) Hallar la curvatura de α.

(c) Hallar la evoluta de α y comprobar que su trayectoria es otra cicloide.

6.1.8. (Teorema fundamental de la teoría de curvas, versión bidimensional)

Dada una función diferenciable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, demuéstrese que existe una única (salvo movimientos directos) curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ parametrizada por la longitud de arco y con curvatura f.

6.1.9. (Diferenciabilidad, regularidad, alabeo)

Considérese la aplicación $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ dada por

$$\alpha(t) := \begin{cases} (t\ ,\ e^{-1/t^2}\ ,\ 0) & \text{si } t < 0 \\ (0,0,0) & \text{si } t = 0 \\ (t\ ,\ 0\ ,\ e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

(a) Estudiar si α es una curva (esto es, si es diferenciable).

(b) Estudiar si α es regular, si es alabeada y qué ocurre con su curvatura.

(c) Probar que el límite de los planos osculadores de α cuando $t \rightarrow 0^-$ es el plano $z = 0$, pero que dicho límite es el plano $y = 0$ cuando $t \rightarrow 0^+$.

(d) Demostrar que la torsión de α es nula en todos los puntos en los que está definida.

6.1.10. (Ángulo polar como parámetro)

Sea la curva plana $\alpha : [a,b] \ni \phi \mapsto (radio = \rho(\phi), ángulo = \phi) \in \mathbb{E}^2 - \{origen\}$, con $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ cierta función diferenciable. La curva está pues dada en coordenadas polares y con el propio ángulo como parámetro.

(a) Demostrar que la longitud de α verifica:

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\frac{d\rho}{d\phi})^2 + \rho^2}\, d\phi$$

(b) Demostrar que, si α es regular, su curvatura κ verifica:

$$\kappa = \frac{2(\frac{d\rho}{d\phi})^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\phi^2} + \rho^2}{((\frac{d\rho}{d\phi})^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

(c) Calcular la longitud y la curvatura de la curva (cuya imagen es una espiral logarítmica) $\alpha : [0,\infty) \ni \phi \mapsto (\rho(\phi), \phi) \in \mathbb{E}^2$, donde $\rho(\phi) = ae^{-b\phi}$ (con $a, b \in \mathbb{R}^+$). Reparametrizar α por la longitud de arco.

6.1.11. (Curvas sobre esferas)

Sea una curva alabeada $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ parametrizada por la longitud de arco y sean κ y τ su curvatura y torsión, respectivamente.

(a) Probar que una condición necesaria para que la trayectoria de α se encuentre sobre una esfera de radio r es que se verifique:

$$\pm\tau\sqrt{r^2 - \kappa^{-2}} = \kappa^{-2}\frac{d\kappa}{ds} .$$

(b) Probar que, si $\sqrt{r^2 - \kappa^{-2}} \neq 0$, la condición de (a) es también suficiente.

6.1.12. (Máximos de la distancia de un punto a una curva)

Sea $\alpha : (a,b) \to \mathbb{E}^2$ una curva regular. Supóngase que existen $p \in \mathbb{E}^2$ y $t_0 \in (a,b)$ tales que la distancia $\mid \alpha(t) - p \mid$ de p a la trayectoria de α tenga un máximo local en t_0. Demostrar que la curvatura κ de α verifica $\mid \kappa(t_0) \mid \geq 1/ \mid \alpha(t_0) - p \mid$.

6.1.13. (Tangente, normal y binormal)

Sea una curva alabeada $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$, parametrizada por la longitud de arco y cuya torsión nunca se anula.

(a) Demuéstrese que el conocimiento de la función vectorial $\vec{T}(t)$ asociada al campo tangente de α determina la curvatura y la torsión de α.

(b) Demuéstrese que el conocimiento de la función vectorial $\vec{B}(t)$ asociada al campo binormal de α determina la curvatura y el valor absoluto de la torsión de α, pero deja indeterminado el signo de la torsión. Poner un ejemplo de esta indeterminación.

(c) Demuéstrese que el conocimiento de la función vectorial $\vec{N}(t)$ asociada al campo normal principal de α deja indeterminadas la curvatura y la torsión de α. Poner un ejemplo de esta indeterminación.

(d) Probar que, si existe $\vec{\xi} \in \mathbb{E}^3$ tal que se verifica *una* de las dos condiciones siguientes

$$\begin{cases} < \vec{T}(t), \vec{\xi} >= 0 \ , \ \text{para todo } t \in I \\ < \vec{B}(t), \vec{\xi} >= 0 \ , \ \text{para todo } t \in I \end{cases} ,$$

entonces necesariamente es $\vec{\xi} = \vec{0}$. No ocurre lo propio con la condición

$$< \vec{N}(t), \vec{\xi} >= 0 \ , \ \text{para todo } t \in I \ ;$$

poner un ejemplo.

6.1.14. (Hélices)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ una curva alabeada cuya torsión nunca se anula. En general, se dice que $\mathrm{Im}\,\alpha$ es una **hélice** si las rectas (afines) tangentes de α forman un ángulo constante con alguna dirección fija. Pruébese que:

(a) $\mathrm{Im}\,\alpha$ es una hélice si y sólo si $\kappa/\tau = cte$.

(b) $\mathrm{Im}\,\alpha$ es una hélice si y sólo si las rectas (afines) normales principales de α son paralelas a algún plano fijo.

(c) $\mathrm{Im}\,\alpha$ es una hélice si y sólo si las rectas (afines) binormales de α forman un ángulo constante con alguna dirección fija.

(d) Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, los tres no nulos, y $\theta : I \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable con derivada nunca nula, entonces la curva $\alpha : I \ni s \mapsto \left(\frac{a}{c} \int sen\theta(s)ds \ , \ \frac{a}{c} \int \cos\theta(s)ds \ , \ \frac{b}{c}s\right) \in \mathbb{E}^3$ tiene por imagen una hélice.

6.1.15. (Plano osculador y círculo osculador)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ una curva alabeada parametrizada por la longitud de arco. Demuéstrese que:

(a) La posición límite de los planos afines que pasan por los puntos $\alpha(s), \alpha(s+h_1)$ y $\alpha(s+h_2)$, cuando $h_1, h_2 \to 0$, es el plano osculador de α en s.

(b) La posición límite de los círculos que pasan por los puntos $\alpha(s), \alpha(s+h_1)$ y $\alpha(s+h_2)$, cuando $h_1, h_2 \to 0$, es aquel círculo del plano osculador de α en s cuyo centro está sobre la recta normal principal de α en s y cuyo radio es $1/\kappa(s)$. Este círculo se llama **círculo osculador de** α **en** s.

6.1.16. (Proyección sobre el plano osculador)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ una curva alabeada. Pruébese que, para cada $t \in I$, la curvatura $\kappa(t)$ es el valor absoluto de la curvatura en t de la curva plana $\pi_t \circ \alpha$, siendo π_t la proyección normal de $\mathbb{E}^3$ sobre el plano (afín) osculador de α en t.

6.1.17. (Aceleraciones de una curva)

Dada una curva alabeada $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ parametrizada por la longitud de arco, probar que se verifica

$$< \alpha', \alpha'''' >= -3\kappa \frac{d\kappa}{ds} ,$$

siendo κ la curvatura de α.

6.1.18. (Modelos)

Considérense dos partículas puntuales que se muevan diferenciablemente en $\mathbb{E}^3$. Probar que la distancia entre ellas (supuesta nunca nula) se mantiene constante si y sólo si las proyecciones de sus velocidades sobre la dirección de la recta que las une son iguales.

6.1.19. (Modelos, cicloide)

Considérese la curva plana $\alpha : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (rt - rsent\ ,\ r + r\cos t) \in \mathbb{E}^2$, cuya trayectoria es una cicloide "invertida" (ver Ejercicio 6.1.7).

(a) Dados $t_0 \in (0, \pi)$ y $a \in \mathbb{R}^+$, imagínese que se reparametriza $\alpha\ |_{[t_0,\pi]}$ por un cambio de parámetro $f : [0, \tau_f] \ni \tau \mapsto t \in [t_0, \pi]$ tal que se verifique

$$\frac{1}{2}\left|(\alpha \circ f)'(\tau)\right|^2 = a((\alpha_2 \circ f)(0) - (\alpha_2 \circ f)(\tau)) \qquad (^*)\ .$$

Probar que τ_f *no depende de* t_0.

Observación: lo anterior puede reformularse así: si una bolita cae sin rozamiento siguiendo la trayectoria de una cicloide invertida dada, el tiempo que tarda (en llegar abajo) es independiente de la altura de partida (se dice en este sentido que la cicloide es "tautócrona"). El "tiempo" es el nuevo parámetro τ y la condición $(^*)$ expresa la "conservación de la energía" (no rozamiento) en el campo de aceleraciones (supuesto uniforme y de módulo a) en el que tiene lugar la caída.

(b) Considérese la evoluta $\beta : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \beta(t) \in \mathbb{E}^2$ de α. Por el Ejercicio 6.1.7c, su trayectoria será otra cicloide invertida, "adelantada" π unidades (del parámetro común t) y "elevada" $2r$ unidades de ordenada (altura) con respecto a α. Probar que, para todo $t \in [0, \pi]$, se verifica:

$$|\beta(t) - \alpha(t)| + L(\beta\ |_{[t,\pi]}) = 4r \qquad (\textit{independiente de } t)\ .$$

Observación: lo anterior constituye el fundamento del llamado "péndulo de Huygens", en el que se basaron los primeros cronómetros: un péndulo inextensible de longitud $4r$, tendido desde el vértice de una cicloide invertida de altura $2r$ e impedido de sobrepasar la trayectoria de ésta, describirá al oscilar otra cicloide (Parte b) y, bajo la influencia sólo de la gravedad, mantendrá su período independientemente de la amplitud de la oscilación (Parte a). Ello mejora el comportamiento de un péndulo simple, cuyo período sólo es independiente de la amplitud si ésta es pequeña.

6.1.20. (Frenet frente a reparametrizaciones y movimientos)

Sea $\alpha : I \to\ \mathbb{E}^n$ $(n \geq 2)$ una curva alabeada con referencia de Frenet $(\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_n)$ y curvaturas $\kappa_i : I \to\ \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n-1)$.

(a) Sea $f : J \to I$ un cambio de parámetro de α que *invierte* orientación y consideremos la curva $\tilde{\alpha} := \alpha \circ f : J \to \mathbb{E}^n$. Entonces la referencia de Frenet $(\widetilde{\mathbf{E}}_1, ..., \widetilde{\mathbf{E}}_n)$ de $\tilde{\alpha}$ verifica:

$$\widetilde{\mathbf{E}}_i = (-1)^i (\mathbf{E}_i \circ f) \qquad (i = 1, ...n-1) \quad , \quad \widetilde{\mathbf{E}}_n = (-1)^{n(n-1)/2} (\mathbf{E}_n \circ f) \ ,$$

de donde se obtiene:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{i+1,i} = -\frac{df}{ds}(\omega_{i+1,i} \circ f) \quad (i = 1, ..., n-2) \\ \tilde{\omega}_{n,n-1} = -(-1)^{n(n+1)/2} \frac{df}{ds}(\omega_{n,n-1} \circ f) \end{cases}$$

y, si $\tilde{\kappa}_i : J \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n-1)$ son las curvaturas de $\tilde{\alpha}$, se concluye:

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_i = \ \circ f \quad (i = 1, ..., n-2) \\ \tilde{\kappa}_{n-1} = (-1)^{n(n+1)/2} (\kappa_{n-1} \ \circ f) \end{cases} .$$

(b) Sea $\mathcal{A} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ un movimiento *no directo* y consideremos la curva $\tilde{\alpha}; = \mathcal{A} \circ \alpha \ : I \to \mathbb{E}^n$. Entonces la referencia de Frenet $(\widetilde{\mathbf{E}}_1, ..., \widetilde{\mathbf{E}}_n)$ de $\tilde{\alpha}$ verifica:

$$\widetilde{\mathbf{E}}_i = (A\vec{E}_i)_{\tilde{\alpha}} \qquad (i = 1, ...n-1) \quad , \quad \widetilde{\mathbf{E}}_n = -(A\vec{E}_n)_{\tilde{\alpha}} \ ,$$

de donde se obtiene:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{i+1,i} = \omega_{i+1,i} \quad (i = 1, ..., n-2) \\ \tilde{\omega}_{n,n-1} = -\omega_{n,n-1} \end{cases}$$

y, si $\tilde{\kappa}_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n-1)$ son las curvaturas de $\tilde{\alpha}$, se conckuye:

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_i = \kappa_i \quad (i = 1, ..., n-2) \\ \tilde{\kappa}_{n-1} = -\kappa_{n-1} \end{cases} .$$

Probar las expresiones anteriores para $n = 2$ y $n = 3$.

6.1.21. (Curvas planas "en implícitas")

Sea $g : (\mathbb{R}^2 \supset)\mathbb{U} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre un abierto $\mathbb{U}$ (s.p.d.g., $0 \in g(\mathbb{U})$). Supongamos que $p \in g^{-1}(0)(\subset \mathbb{U})$ es un punto "regular" para g; esto es, se verifica $rg(J_g(p)) = 1$, donde J_g es la matriz Jacobiana de g (sin pérdida de generalidad y eligiendo adecuadamente las coordenadas cartesianas (x, y) en $\mathbb{R}^2$, $(\partial g/\partial y)(p) \neq 0$; y escribiremos $p \equiv (a, b)$).

(a) Probar que $g^{-1}(0)$ admite una "parametrización (local, 1-dimensional)" en torno a p, esto es (2.2.1), que existen un abierto $\mathcal{U}(\ni p)$ de $g^{-1}(0)$ en la topología relativa y una curva regular e inyectiva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ tales que $\alpha(I) = \mathcal{U}$ y la aplicación inversa $\alpha^{-1} : \mathcal{U} \to I$ es continua.

Indicación: utilizar el teorema de la función implícita (Teorema 2.4), que garantiza la existencia de

$$\left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{un entorno } \ (\mathbb{R}_x \supset) \ \Omega \text{ de } a \\ \text{un entorno } \ (\mathbb{R}_y \supset) \ J \text{ de } b \end{array}\right\} \text{con } \Omega \times J \subset \mathbb{U} \\ \text{una función diferenciable } \varsigma : \Omega \to J \end{array} \right.$$

tales que

$$\{(x,y) \in \Omega \times J \mid g(x,y) = 0\} = \{(x, \varsigma(x)) \mid x \in \Omega\} \quad ,$$

esto es, tales que

$$g^{-1}(0) \cap (\Omega \times J) = \ gráfica\ de\ \varsigma \ .$$

(b) Probar que la curvatura κ de α verifica

$$\kappa = \frac{-sgn\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\frac{\partial g}{\partial y})^2 - 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\frac{\partial g}{\partial x})^2\right]}{[(\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2]^{3/2}} \circ \alpha \ .$$

(c) Concretar lo anterior para la función $g : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - r^2 \in \mathbb{R}$ (con $r > 0$) en torno al punto $p \equiv (0, r) \in g^{-1}(0)$.

(d) Supongamos la siguiente definición alternativa de "curva plana": subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que admite una parametrización (local, 1-dimensional) en torno a cada uno de sus puntos. Aceptada esta definición, probar que: todo punto de una "curva plana" está contenido en un abierto de la misma (en la topología relativa) que es la gráfica de una función diferenciable $\varsigma : (\mathbb{R} \supset) \ \Omega \to \mathbb{R}$, con Ω abierto.

6.1.22. ("El ocho")

Sea la curva (regular e inyectiva) $\alpha : (\mathbb{R} \supset) I \equiv (-\pi, \pi) \ni t \mapsto (sen\ t, sen\ 2t) \in \mathbb{E}^2$, cuya trayectoria denominaremos "el ocho".

(a) Probar que existe una función diferenciable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha(I) = g^{-1}(0)$.

(b) Probar que *cualquier* función diferenciable $\bar{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha(I) = \bar{g}^{-1}(0)$ verifica: $J_{\bar{g}}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ninguna función $\bar{g}$ que tenga a $\alpha(I)$ por conjunto de nivel puede ser regular en $\alpha(0)$).

(c) Comprobar que la aplicación $\alpha^{-1} : (\mathbb{E}^2 \supset)\alpha(I) \to I(\subset \mathbb{R})$ no es continua en $\alpha(0)$.

(d) Sea la curva (regular e inyectiva) $\beta : (\mathbb{R} \supset)(0, 2\pi) \ni s \mapsto (sen\ s, sen\ 2s) \in \mathbb{E}^2$, cuya trayectoria es *también* el ocho. Comprobar que la aplicación

$$\alpha^{-1} \circ \beta : (\mathbb{R} \supset)(0, 2\pi) \to (-\pi, \pi)(\subset \mathbb{R})$$

no es diferenciable (y, por tanto, $\alpha^{-1} \circ \beta$ *no* es un cambio de parámetro de α, la curva β *no* es una reparametrización de α y la aplicación $\alpha^{-1} \circ \beta$ *no* es una curva en $\mathbb{R}$).

6.2. SUPERFICIES EN EL ESPACIO AFÍN

6.2.1. (Superficies "en implícitas")

Determinar los valores de v para los que es una superficie el conjunto de nivel $f^{-1}(v) \in \mathbb{R}^3$, donde:

(a) $f(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

(b) $f(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$

(c) $f(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z$

(d) $f(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z$

(e) $f(x, y, z) := xyz - 1$

(con $a, b, c > 0$).

6.2.2. (Plano tangente)

Considérense las superficies (cuádricas) M definidas por las ecuaciones:

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (elipsoide)

(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (hiperboloide de 1 hoja)

(c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ (paraboloide elíptico)

(d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ (paraboloide hiperbólico)

(con $a, b, c > 0$). Determinar el plano tangente a cada una de ellas en el punto p de coordenadas $x(p) = a$, $y(p) = 0$.

6.2.3. (¿Superficies?)

Determinar si son superficies los siguientes conjuntos:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\ ,\ x^2 + y^2 < 1\}$

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\ ,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

(c) $f^{-1}(0)$, siendo $f(x, y, z) := z^2$.

6.2.4. (Cilindros)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana cuya trayectoria pueda expresarse localmente como un conjunto de nivel regular para alguna función diferenciable de (un abierto de) $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

(a) Probar que el conjunto $M \equiv \alpha(I) \times \mathbb{R}$ $(\subset \mathbb{R}^3)$ es una superficie (denominada **cilindro sobre** $\alpha(I)$)

(b) Sea un abierto $J \subset I$ tal que $\alpha\mid_J : J \to \mathbb{R}^2$ es regular e inyectiva. Probar que la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \supset J \times \mathbb{R} \ni (u, v) \mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u), v) \in M$$

es una parametrización de M

6.2.5. ("El ocho" en superficies)

Sea la curva (inyectiva y regular) $\alpha : (\mathbb{R} \supset) I \equiv (-\pi, \pi) \ni t \mapsto (sen\ t, sen\ 2t) \in \mathbb{R}^2$, cuya trayectoria es "el ocho" (recordar el Ejercicio 6.1.22).

(a) Probar que

(i) El conjunto $S \equiv \alpha(I) \times \mathbb{R} (\subset \mathbb{R}^3)$ puede expresarse como conjunto de nivel $f^{-1}(0)$ para cierta función diferenciable $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(ii) El conjunto $S - \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ es una superficie.

(b) Considérese la aplicación diferenciable

$$\varphi : (\mathbb{R}^2 \supset) \mathbb{U} \equiv (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \ni (u, v) \mapsto (sen\ u, sen\ 2u, v) \in S (\subset \mathbb{R}^3)\ .$$

(i) Probar que φ *no* es una parametrización de S.

(*ii*) Sea la curva $\beta : (\mathbb{R}\supset)(0,2\pi)\ni s\mapsto (sens, sen2s, 0)\in S$. Probar que la aplicación

$$\varphi^{-1}\circ\beta : (\mathbb{R}\supset)(0,2\pi)\to\mathbb{U}(\subset\mathbb{R}^2)$$

no es una curva.

(*iii*) Sea la extensión diferenciable Φ de φ dada por

$$\Phi : (\mathbb{R}^3\supset)\mathbb{U}\times\mathbb{R}\ni(u,v,w)\mapsto(sen\ u, sen\ 2u+w, v)\in\mathbb{R}^3\ .$$

(resulta $\Phi\ |_{\mathbb{U}\times\{0\}}=\varphi$). Probar que existen entornos $\mathbb{A}(\ \subset\mathbb{U}\times\mathbb{R})$ de $(0,0,0)$ y $\mathbb{B}(\subset\mathbb{R}^3)$ de $\Phi(0,0,0)=(0,0,0)$ tales que $\Phi(\mathbb{A})=\mathbb{B}$ y $\Phi\ |_{\mathbb{A}}: \mathbb{A}\to\mathbb{B}$ es un difeomorfismo. Probar sin embargo que:

$$(\Phi\ |_{\mathbb{A}})^{-1}\ |_{S\cap\mathbb{B}}\neq\varphi^{-1}\ |_{S\cap\mathbb{B}}\ \ .$$

(*c*) Probar que el conjunto S *no* es una superficie.

6.2.6. (Ejemplo de helicoide)

Sea la curva $\alpha(s):=(\cos s, sens, s)$ (cuya imagen es una hélice). El subconjunto M de $\mathbb{R}^3$ constituido por las rectas (afines) normales principales de α se denomina **helicoide**.

(*a*) Probar que la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R}^2\ni(s,t)\mapsto(t\cos s, t\ sens, s)\in\mathbb{R}^3$$

constituye una parametrización *global* de M (y, por tanto, M resulta ser una superficie).

(*b*) Encontrar una función diferenciable $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0)=M$ y $rg(J_f(p))=1$, para todo $p\in M$.

(*c*) Determinar T_pM para los puntos p de la forma $(0,0,z)$.

6.2.7. (Superficies de revolución)

Sea $\alpha : I\to\mathbb{R}^2$ una curva plana cuya trayectoria pueda expresarse localmente como un conjunto de nivel regular para alguna función función diferenciable de (un abierto de) $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

(*a*) Probar que el subconjunto M de $\mathbb{R}^3$ obtenido al girar la imagen $\alpha(I)$ (supuesta en el plano x_1x_2 de $\mathbb{R}^3$ y con $\alpha_2>0$) en torno al eje x_1 es una superficie (denominada **superficie de revolución generada por $\alpha(I)$ al girar en torno al eje x_1**).

(b) Sea un abierto $J \subset I$ tal que $\alpha\,|_J \colon J \to \mathbb{R}^2$ es regular e inyectiva. Probar que la aplicación

$$\varphi : (\mathbb{R}^2 \supset) J \times (-\pi, \pi) \ni (u, v) \mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u)\cos v, \alpha_2(u) sen\ v) \in M$$

es una parametrización local de M.

(c) Dibujar y encontrar parametrizaciones para las superficies de revolución generadas por $\alpha(I)$ al girar en torno al eje x_1 en los casos siguientes:

(i) $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t, 1) \in \mathbb{R}^2$. La superficie es un cilindro (Ver Ejercicio 6.2.4).

(ii) $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t, \cosh t) \in \mathbb{R}^2$. La superficie es un **catenoide**.

(iii) $\alpha : [-\pi, \pi] \ni t \mapsto (b\ \cos t, a + b\ sen\ t) \in \mathbb{R}^2$, $a > b > 0$. La superficie es un **toro**.

6.2.8. (Planos)

Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de rango 2, sea $p \in \mathbb{R}^3$ y consideremos la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \ni q \mapsto L(q - o) + p \in \mathbb{R}^3$, con $o \equiv (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Describir el conjunto $\operatorname{Im}\varphi$.

(b) Sean $q, \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$. Dada la curva $\alpha : I \ni t \mapsto q + t\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2$, ¿cuál es la velocidad $(\varphi \circ \alpha)'(0)$?

6.2.9. (Proyección estereográfica)

Sea la esfera $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$ y sea $p^+ \equiv (0, 0, r) \in M$ su "polo norte". Considérese la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\} \to M$ que hace corresponder, a cada $q = (q_1, q_2, 0)$, el punto (distinto de p^+) donde la recta que pasa por q y p^+ corta a M.

(a) Determinar las ecuaciones de φ y probar que φ es una parametrización (local) de M.

(b) Determinar las ecuaciones de la carta φ^{-1} (denominada **proyección estereográfica de M desde el polo norte sobre el plano ecuatorial**).

(c) Determinar las ecuaciones del cambio de carta entre φ^{-1} y la proyección estereográfica $\bar{\varphi}^{-1}$ desde el "polo sur" $p^- \equiv (0, 0, -r) \in M$.

6.2.10. (Banda de Moebius)

Sean $r, l \in \mathbb{R}$ con $r > l > 0$. Sea la circunferencia $C := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ y sea el segmento abierto $S := \{(0, r, z) \in \mathbb{R}^3 \mid\mid z \mid< l\}$, cuyo punto medio m pertenece a C. Movamos S de manera que, mientras el punto m recorre sobre C (en el plano xy) un ángulo u, el segmento S gira (en torno a m y manteniéndose ortogonal a C) un ángulo $-u/2$. El subconjunto $M := \{S_u \mid u \in [0, 2\pi]\}$ de $\mathbb{R}^3$, constituído por las sucesivas posiciones S_u del segmento S, se denomina **banda de Moebius**.

(a) Probar que la aplicación

$$\begin{aligned}\varphi : (0, 2\pi) \times (-l, l) \ni (u, v) \mapsto \\ \mapsto (-(r + v\ sen\tfrac{u}{2})\ sen\ u\ , (r + v\ sen\ \tfrac{u}{2}) \cos u\ ,\ v \cos \tfrac{u}{2}) \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

constituye una parametrización local de M.

(b) Probar que M es una superficie.

6.2.11. (Campos tangentes a superficies)

Sea el campo $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ con parte vectorial

$$\vec{X} : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (-zx, -zy, r^2 - z^2) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Demostrar que la restricción de $\mathbf{X}$ a la esfera $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ es tangente a ésta.

(b) Determinar la expresión analítica local de la restricción $\mathbf{X}\mid_M \in \mathfrak{X}(M)$ en las coordenadas (u, v) de la proyección estereográfica (Ejercicio 6.2.9) de M desde el polo norte $(0, 0, r)$ sobre el plano ecuatorial.

6.2.12. (Campos tangentes a superficies)

Sea el campo de vectores $\mathbf{X} := xz\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2)\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$.

(a) Demostrar que la restricción de $\mathbf{X}$ al hiperboloide de 1 hoja $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ es tangente a éste.

(b) Demostrar que la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \ni (t, \vartheta) \mapsto (\cosh t \cos \vartheta\ ,\ \cosh t\ sen\vartheta\ ,\ senht) \in \mathbb{R}^3$$

es una parametrización de M.

(c) Determinar la expresión analítica local de la restricción $\mathbf{X}\mid_M \in \mathfrak{X}(M)$ en las coordenadas (t, ϑ).

6.3. SUPERFICIES EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

6.3.1. (Normales y esfera)

Sea M una superficie conexa. Probar que las rectas (afines) normales a M pasan todas por un mismo punto si y sólo si M está sobre una esfera. ¿Qué ocurre si M no es conexa?

6.3.2. (PFF de la esfera en proyección estereográfica)

Sea $M \subset \mathbb{E}^3$ una esfera de radio r y sea $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (u, v))$ la carta de la proyección estereográfica de M desde el polo norte (respectivamente, desde el polo sur) sobre el plano ecuatorial (Ejercicio 6.2.9).

(a) Obtener los coeficientes E, F, G de la primera forma fundamental en dicha carta. Concluir que φ^{-1} es una aplicación conforme (esto es, preserva ángulos).

(b) Considérese la carta polar $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1} = (\vartheta, \phi))$ de M (Ejemplo 2.16) y sean $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ los coeficientes de la primera forma fundamental en dicha carta. Probar que se verifica:

$$\left(\frac{\mp\partial/\partial\vartheta}{\sqrt{\bar{E}}} \quad , \quad \frac{\partial/\partial\phi}{\sqrt{\bar{G}}} \right) |_{\overline{\mathcal{U}}} = \left(\frac{\partial/\partial u}{\sqrt{E}} \quad , \quad \frac{\partial/\partial v}{\sqrt{G}} \right) |_{\overline{\mathcal{U}}} \begin{pmatrix} \cos\phi & -sen\phi \\ sen\phi & \cos\phi \end{pmatrix} ,$$

donde el signo superior (resp. el signo inferior) corresponde al caso de la proyección estereográfica desde el polo norte (resp. desde el polo sur).

6.3.3. (Proyección de Mercator. Loxodromas)

Sean M la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = (\vartheta, \phi))$ una carta polar de M (Ejemplo 2.16) y $\bar{M}$ el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$.

(a) Sea $P : \mathcal{U} \to \bar{M}$ una "proyección cilíndrica", esto es, una aplicación diferenciable que lleva el meridiano de azimut ϕ en la generatriz tangente de $\bar{M}$ y el paralelo de colatitud ϑ sobre la circunferencia $z = f(\vartheta)$ de $\bar{M}$, siendo $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y con derivada nunca nula.

(i) Probar que P es un difeomorfismo sobre su imagen. ¿Puede ser una isometría para alguna f?

(ii) Determinar f para que P sea una aplicación conforme (esto es, preserve ángulos), en cuyo caso P se llama **proyección de Mercator**.

(*iii*) Determinar f para que P preserve áreas.

(*b*) Sea $\alpha : I \to M$ una curva regular cuya trayectoria forma un ángulo (no orientado) constante $\chi \in [0, \pi]$ con los meridianos que corta. La trayectoria de α se llama entonces **loxodroma**. Expresar el azimut de α en función de su colatitud. Hallar la longitud de α.

Observación: Suponer el cilindro desarrollado sobre el plano. Mercator estableció la proyección que lleva su nombre para que las loxodromas (o "líneas de rumbo" en navegación, que no son las más cortas entre dos puntos pero tienen la ventaja de que a lo largo de ellas la latitud es una función monótona del azimut) se representaran en los mapas por rectas (geodésicas). Los cálculos aproximados de Mercator (por trigonometría esférica) fueron anteriores a la introducción del cálculo integral y de los logaritmos neperianos.

6.3.4. (PFF de superficies de revolución en coordenadas)

Considérese una superficie de revolución M como las descritas en el Ejercicio 6.2.7.

(*a*) Suponiendo que I es acotado y que la curva generadora $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ es regular e inyectiva y está parametrizada por la longitud de arco, probar que el área $A(M)$ de la superficie M viene dada por la expresión

$$A(M) = 2\pi \int_I \rho(s)\, ds \ ,$$

siendo $\rho(s)$ la distancia de $\alpha(s)$ al eje de rotación (teorema de Pappus).

(*b*) Aplicar lo anterior para calcular el área del toro definido por la ecuación

$$(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a)^2 + x_3^2 - b^2 = 0 \quad ,$$

donde $a > b > 0$.

6.3.5. (Superficies no orientables)

Supóngase que una superficie M puede ser recubierta por los dominios conexos de dos cartas $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ y $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\varphi}^{-1})$, de forma que la intersección $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$ sea la unión de dos componentes conexas (disjuntas), $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$, y se verifique:

$$\det\left(\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}\right) \circ \varphi^{-1} |_{\mathcal{V}_1} > 0 \quad \text{y} \quad \det\left(\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}\right) \circ \varphi^{-1} |_{\mathcal{V}_2} < 0 \ .$$

(*a*) Probar que M no es orientable.

(*b*) Aplicar lo anterior para demostrar que la banda de Moebius (Ejercicio 6.2.10) no es orientable.

6.3.6. (Diferenciabilidad de las curvaturas principales)

Considérense las curvaturas principales $k_1, k_2 : M \to \mathbb{R}$ (cuando hablamos de las *funciones*, elegimos la notación de forma que sea $k_1 \geq k_2$) de una superficie orientada $(M, \boldsymbol{\nu})$.

(a) Probar que k_1 y k_2 son continuas en todo M y diferenciables (al menos) en aquellos puntos de M en los que son distintas entre sí (puntos no umbílicos).

(b) Probar que, en cualquier carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1})$ de M, las funciones $k_1 \mid_{\mathcal{U}}$ y $k_2 \mid_{\mathcal{U}}$ son las soluciones de la ecuación cuadrática

$$\det \begin{pmatrix} e - kE & f - kF \\ f - kF & g - kG \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

siendo E, F, G y e, f, g, los coeficientes de las dos formas fundamentales de $(M, \boldsymbol{\nu})$ en dicha carta.

6.3.7. (SFF de superficies de revolución en coordenadas)

Considérese una superficie de revolución M como las descritas en el Ejercicio 6.2.7. Supóngase que la curva generadora $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ está en el plano x_1x_2 de $\mathbb{E}^3$, con $\alpha_2 > 0$. Utilizando la parametrización local de M dada por

$$\varphi : J \times (-\pi.\pi) \ni (u, v) \mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u) \cos v, \alpha_2(u) \ sen v) \in M \ ,$$

donde $J \subset I$ es un abierto tal que $\alpha \mid_J$ es regular e inyectiva:

(a) Determinar los coeficientes de la segunda forma fundamental.

(b) Determinar las curvaturas principales, la curvatura de Gauss K y la curvatura media.

(c) Probar que las líneas $u = cte.$ y $v = cte.$ definen líneas de curvatura.

(d) Probar que, si α está parametrizada por la longitud de arco, se verifica:

$$\frac{d^2\alpha_2}{du^2} + (K \circ \alpha) \ \alpha_2 = 0 \ .$$

(e) Aplicar lo anterior al cálculo de las curvaturas principales, la curvatura de Gauss K y la curvatura media del toro (definido en el Ejercicio 6.2.7c).

6.3.8. (Tangencia, extremos y curvaturas principales)

Sea M una superficie.

(a) Probar que, si N es otra superficie que corta a M en un único punto, entonces M y N son necesariamente tangentes en dicho punto.

(b) Probar que, si un plano afín de $\mathbb{E}^3$ que corta a M en un único punto, entonces la curvatura de Gauss de M en dicho punto es no-negativa.

(c) Supóngase que M es compacta. Probar que M posee (al menos) un punto elíptico.

(d) Supóngase que M es compacta. Probar que la curvatura de Gauss de M es no nula en todo punto si y sólo si todos los puntos de M son elípticos.

6.3.9. (Direcciones asintóticas y líneas asintóticas)

Sea M una superficie.

(a) Probar que, si M posee curvatura media igual a cero en un punto, entonces en ese punto hay (al menos) dos direcciones asintóticas mutuamente ortogonales.

(b) Sea $\alpha : I \to M$ una curva regular con trayectoria rectilínea. Probar que α define una línea asintótica.

(c) Sea $\alpha : I \to M$ una curva alabeada. Probar que α define una línea asintótica si y sólo si su plano osculador en cada punto coincide con el plano tangente a M en dicho punto.

(d) Sea $p \in M$. Estudiar qué implicaciones existen entre las siguientes afirmaciones:

(i) Hay (al menos) dos direcciones asintóticas en T_pM mutuamente ortogonales.

(ii) La curvatura media de M en p es nula.

(iii) La curvatura de Gauss de M en p es no-positiva.

(iv) Por p pasan dos rectas (o segmentos de recta) mutuamente ortogonales contenidas en M.

6.3.10. (Líneas de curvatura y líneas asintóticas)

Considérese el hiperboloide de 1 hoja M definido por la ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = r^2$ $(r > 0)$.

(a) Hallar las líneas de curvatura de M.

(b) Hallar las líneas asintóticas de M.

6.3.11. (Carácter de los puntos de una superficie)

Sea M una superficie.

(a) Estudiar el carácter (hiperbólico, parabólico, elíptico o plano) de los puntos de M cuando ésta es una de las superficies de revolución del Ejercicio 6.2.7c (cilindro, catenoide y toro).

(b) Supóngase que, en un punto $p \in M$, la aplicación de Weingarten $\mathcal{L}_p : T_pM \to T_pM$ es una isometría lineal.

(i) Probar que p no puede ser plano ni parabólico.

(ii) Probar que, si p es elíptico, entonces es umbílico.

(iii) Probar que, si p es hiperbólico, entonces la curvatura media de M en p es nula.

6.3.12. (Meridianos y paralelos en superficies de revolución)

Considérese una superficie de revolución M como las descritas en el Ejercicio 6.2.7. Supóngase que la curva generadora $\alpha : I \to \mathbb{E}^2$ está en el plano x_1x_2 de $\mathbb{E}^3$, con $\alpha_2 > 0$ y es regular. Considérese, para cada $v \in (-\pi, \pi)$, la curva (con trayectoria llamada **meridiano**) $\alpha_v : I \to M$ dada por

$$\alpha_v : I \ni u \mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u)\cos v, \alpha_2(u)\ sen\ v) \in M$$

(obsérvese que $\alpha_0 = \alpha$) y asimismo, para cada $u \in I$, la curva (con trayectoria llamada **paralelo**) $\beta_u : (-\pi, \pi) \to M$ dada por

$$\beta_u : (-\pi, \pi) \ni v \mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u)\cos v, \alpha_2(u)\ sen\ v) \in M\ .$$

(a) Probar que meridianos y paralelos se cortan siempre ortogonalmente.

(b) Probar que la curva α_v es geodésica de M si y sólo si $|\alpha'| = cte.$

(c) Probar que la curva β_u es geodésica de M si y sólo si $\frac{d\alpha_2}{du}(u) = 0$.

6.3.13. (Geodésicas, curvas planas y líneas de curvatura)

Sean M una superficie y $\alpha : I \to M$ una curva alabeada. Demostrar las siguientes afirmaciones, si se piensa que son ciertas, o dar contraejemplos, si se piensa que son falsas. ¿Qué ocurriría en cada caso si $\operatorname{Im}\alpha$ fuera rectilínea (con lo que α no sería alabeada)?

(a) Si α es geodésica y define una línea de curvatura, entonces es plana.

(b) Si α es plana y define una línea de curvatura, entonces es geodésica.

(c) Si α es geodésica y plana, entonces define una línea de curvatura.

(d) Si α es geodésica, la norma de su aceleración es constante.

Indicación: probar primero que, si α es una geodésica alabeada de M, entonces (para cualquier elección de normal unitaria local $\boldsymbol{\nu}$ en M) se verifica:

$$\boldsymbol{\nu} \circ \alpha = \pm \mathbf{N} \ ,$$

denotando por $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ el triedro de Frenet de α.

6.3.14. (Superficie de binormales de una curva alabeada)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ una curva alabeada. Supóngase que el conjunto M, unión de todas las rectas afines binormales de α, es una superficie.

(a) Encontrar una parametrización local en torno a cada punto de M.

(b) Calcular la curvatura de Gauss de M y comprobar que sólo depende de la torsión de α.

(c) Estudiar si α es geodésica de M.

6.3.15. (Esferas y planos)

Sea M una superficie conexa. Probar que *cualquiera* de las dos condiciones siguientes implica que M es un abierto de una esfera o de un plano:

(a) Todos los puntos de M son umbílicos.

(b) Todas las geodésicas de M son planas.

6.3.16. (Isometrías e isometrías locales)

(a) Sean M el plano x_1x_2 de $\mathbb{E}^3$ y $\bar{M} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$ un cilindro sobre una circunferencia. Probar que la aplicación $F : M \ni (x_1, x_2, 0) \mapsto (r\cos(\frac{x_1}{r}), r sen(\frac{x_1}{r}), x_2) \in \bar{M}$ es una isometría local. Encontrar un abierto $\mathcal{U}$ de M tal que $F|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \to F(\mathcal{U})$ sea una isometría.

(b) Sean M el plano x_1x_2 de $\mathbb{E}^3$ y $\bar{M} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a)^2 + x_3^2 = b^2,\ a > b > 0\}$ un toro. Probar (calculando su diferencial) que la aplicación $F : M \ni (x_1, x_2, 0) \mapsto ((a + b\cos x_1)\cos x_2, (a + b\cos x_1)\ sen x_2, b\ sen x_1) \in \bar{M}$ *no* es una isometría local. ¿Era esperable que no lo fuera?

(c) Sean $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1 sen\ x_3 = x_2\cos x_3\}$ un helicoide y $\bar{M} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid \cosh x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ un catenoide.

- (i) Probar que cada punto de M (respectivamente, de $\bar{M}$) posee un entorno que es isométrico a un entorno de $\bar{M}$ (respectivamente, de M).
- (ii) Probar que existe una isometría local $F : M \to \bar{M}$.
- (iii) Probar que no existe una isometría local $F : \bar{M} \to M$.

Indicación para (c-i): sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto (de longitud menor que 2π). Probar que las aplicaciones (con el mismo dominio!)

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{U} \equiv \mathbb{R} \times I \ni (u, v) \mapsto (senh u \cos v, senh u\ sen v, v) \in \mathcal{U} \subset M \\ \bar{\varphi} : \mathbb{U} \equiv \mathbb{R} \times I \ni (u, v) \mapsto (\cosh u \cos v, \cosh u\ sen v, u) \in \overline{\mathcal{U}} \subset \bar{M} \end{cases}$$

constituyen parametrizaciones locales del helicoide (tener en cuenta el Ejercicio 6.2.6a) y del catenoide (Ejercicio 6.2.7c). Aplicar el Lema 3.23 a la aplicación $\mathcal{F} := \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$.

6.3.17. (Ejemplo de superficie de revolución)

Sea el conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2\}$ y sea $p = (0, 0, 0)$ Se pide:

(a) Probar que M es una superficie de revolución.

(b) Probar que p es un punto plano de M.

(c) Encontrar todos los puntos umbílicos de M.

(d) Demostrar que el valor de la curvatura de Gauss en los puntos umbílicos (excluído p) es $\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$.

6.3.18. (De todo un poco)

Sea M una superficie. Demostrar las siguientes afirmaciones si se piensa que son ciertas, o dar contraejemplos si se piensa que son falsas:

(a) En todo punto no umbílico de M hay exactamente dos direcciones principales.

(b) Todo punto de M con una única dirección asintótica es necesariamente parabólico.

(c) Toda curva plana en M que defina una línea de curvatura y esté parametrizada por la longitud de arco es necesariamente geodésica de M.

(d) Si M es de revolución, las trayectorias de sus geodésicas son siempre meridianos o paralelos.

(e) Toda isometría de M transforma puntos elípticos en puntos elípticos.

(f) Si M es la esfera unitaria, existen curvas alabeadas $\alpha : I \to M$ con curvatura menor que dos tercios.

6.3.19. (De todo un poco)

Sea M una superficie. Demostrar las siguientes afirmaciones si se piensa que son ciertas, o dar contraejemplos si se piensa que son falsas:

(a) En todo punto no umbílico de M hay exactamente dos direcciones asintóticas.

(b) Toda geodésica de M que defina una línea asintótica tiene imagen rectilínea.

(c) En cada punto no plano de M, dos direcciones asintóticas son siempre mutuamente ortogonales.

(d) Toda isometría de M transforma puntos planos en puntos planos.

(e) Toda recta contenida en M define una línea de curvatura.

(f) (esta afirmación no tiene obviamente nada que ver con M) Hay curvas alabeadas en $\mathbb{E}^3$ con curvatura constante cuya trayectoria no es un arco de circunferencia

6.3.20. (De todo un poco)

Demostrar las siguientes afirmaciones si se piensa que son ciertas, o dar contraejemplos si se piensa que son falsas:

(a) Las isometrías entre superficies transforman líneas de curvatura en líneas de curvatura.

(b) Las superficies difeomorfas con curvatura de Gauss nula son necesariamente isométricas.

(c) Toda superficie compacta contiene puntos hiperbólicos.

(d) Toda superficie es un conjunto de nivel regular para alguna función diferenciable.

(e) Si una curva en una superfice es plana y su campo de velocidades es de norma constante, entonces dicha curva es geodésica.

6.3.21. (De todo un poco)

Demostrar las siguientes afirmaciones si se piensa que son ciertas, o dar contraejemplos si se piensa que son falsas:

(a) Dos direcciones principales en un punto no umbílico son siempre mutuamente ortogonales.

(b) Una superficie compacta no puede ser la gráfica de una función diferenciable.

(c) Todo punto de un superficie posee un entorno (en la misma) que es difeomorfo a un disco abierto del plano.

(d) Si todos los puntos de una superficie son hiperbólicos, entonces la superficie no puede ser compacta.

(e) El conjunto $\{(x, y, z) \mid \cos(xyz) = 0\}$ es una superficie.

(f) Un difeomorfismo entre superficies que transforma cada región en otra de la misma área es necesariamente una isometría.

6.3.22. (Ejemplo de superficie)

Considérese la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto (\sqrt{2}u\cos v, \sqrt{2}usenv, \frac{1}{2}u^2+v)$.

(a) Probar que el conjunto $M \equiv \operatorname{Im}\varphi$ es una superficie.

(b) Determinar el plano tangente a M en los puntos de la forma $(0,0,z)$.

(c) Probar que el conjunto de puntos parabólicos de M está constituido por las imágenes de dos curvas alabeadas.

(d) Hallar la curvatura y torsión de las dos curvas del apartado anterior.

(e) Estudiar si las curvas $\varphi(a,v)$ (para cada a fijo) y $\varphi(u,b)$ (para cada b fijo) definen líneas de curvatura de M.

(f) Estudiar si las curvas $\varphi(a,v)$ (para cada a fijo) y $\varphi(u,b)$ (para cada b fijo) son geodésicas de M.

6.3.23. (De todo un poco)

Demostrar las siguientes afirmaciones si se piensa que son ciertas, o dar contraejemplos si se piensa que son falsas:

(a) El conjunto $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+2xy=0\}$ es una superficie.

(b) Existen superficies que dejan de serlo si se les quita un punto.

(c) Las congruencias entre superficies transforman geodésicas en geodésicas.

(d) Las isometrías entre superficies transforman líneas asintóticas en líneas asintóticas.

(e) Las isometrías entre superficies transforman puntos umbílicos en puntos elípticos.

(f) Una curva en una superficie que une un punto elíptico con un punto hiperbólico pasa necesariamente por algún punto plano.

6.3.24. (De todo un poco)

Demostrar las siguientes afirmaciones si se piensa que son ciertas, o dar contraejemplos si se piensa que son falsas:

(a) Una curva (en una superficie) que une un punto parabólico con un punto hiperbólico pasa necesariamente por un punto elíptico.

(b) Un difeomorfismo entre superficies que transforma cada curva en otra de la misma longitud es necesariamente una isometría.

(c) El conjunto $\{(x, y, z) \mid xyz = 1\}$ es una superficie.

(d) Las isometrías entre superficies transforman puntos planos en puntos con curvatura de Gauss nula.

(e) Toda superficie no compacta es la gráfica de una función diferenciable.

(f) Una curva (en una superficie) que define una línea de curvatura y una línea asintótica tiene necesariamente imagen rectilínea.

6.4. GEOMETRÍA INTRÍNSECA LOCAL DE SUPERFICIES. VARIOS

6.4.1. (Transporte paralelo a lo largo de geodésicas)

Sean M una superficie, $\alpha : I \to M$ una geodésica no trivial de M y $\mathbf{V}$ un campo de vectores a lo largo de α y tangente a M. Probar que $\mathbf{V}$ es paralelo a lo largo de α si y sólo si la norma $\mid \mathbf{V} \mid$ y el ángulo que forma $\mathbf{V}$ con α' son constantes a lo largo de α.

6.4.2. (Superficie de bisectrices rectificantes de una curva alabeada)

Sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ una curva alabeada y sea $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ su triedro de Frenet. Para cada $t \in I$, llamemos **bisectriz rectificante de** α **en** t a la recta afín que pasa por $\alpha(t)$ y tiene por dirección la del vector $\vec{T}(t) + \vec{B}(t)$. Supongamos que el conjunto M, unión de todas las bisectrices rectificantes de α, constituye una superficie M.

(a) Dar una parametrización local en torno a cada punto de M.

(b) Calcular la curvatura de Gauss de M y comprobar que sólo depende de la curvatura y de la torsión de α.

(c) Demostrar que la curva α es plana si y sólo si la curvatura media de M en los puntos de la imagen de α es nula.

(d) Estudiar si α es geodésica de M.

(e) Estudiar si α define una línea de curvatura de M.

(f) Probar que, si las funciones curvatura y torsión de α coinciden, entonces cualquier recta afín contenida en M y que corte a la imagen de α es una bisectriz rectificante de α.

(g) Estudiar si el campo $\mathbf{T}+\mathbf{B}$, tangente a M, es paralelo a lo largo de α.

6.4.3. (Geodésicas en el plano, cilindro y esfera)

Probar que las siguientes curvas $\alpha : I \to M$ son geodésicas de las siguientes superficies M:

(a) $\alpha(t) := p + t\vec{\xi}$ (con $p \in M$, $\vec{\xi} \in \mathbb{E}^3$) y M un plano que contenga (de hecho, M podría ser *cualquier* superficie que contuviera) a la imagen de α.

(b) $\alpha(t) := (r\cos(at+b), r sen(at+b), ct+d)$ (con $a, b, c, d, r(>0) \in \mathbb{R}$) y $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$ (cilindro).

(c) $\alpha(t) := r\cos(at)\vec{\xi} + r sen(at)\vec{\eta}$ (con $a, r(>0) \in \mathbb{R}$ y $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{E}^3$ ortonormales) y $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$ (esfera).

(d) Probar que, en los tres casos (plano, cilindro y esfera), *todas* las geodésicas de M son de esa forma.

6.4.4. (Reparametrización de geodésicas)

Sea $\gamma : I \to M$ una geodésica de una superficie M.

(a) Supongamos que γ es no trivial y sea $f : J \to I$ un cambio de parámetro de γ. Probar que $\gamma \circ f : J \to M$ es geodésica de M si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(s) = as + b \ , \ \forall s \in J \ .$$

(b) Sean $p \equiv \gamma(t_0), \boldsymbol{\xi} \equiv \gamma'(t_0)$, para cierto $t_0 \in I$. Sea $\gamma_{\boldsymbol{\xi}}$ la geodésica maximal por $\boldsymbol{\xi}$. Probar que $\gamma(t) = \gamma_{\boldsymbol{\xi}}(t - t_0)$, $\forall t \in I$.

(c) Supóngase que $\gamma(t_0) = \gamma(t_1), \gamma'(t_0) = \gamma'(t_1)$, para ciertos $t_0, t_1 \in I$. Probar que γ es periódica, de período $t_1 - t_0$ (esto es, verifica: $\gamma(t + t_1 - t_0) = \gamma(t)$, para todo $t \in I$ tal que $t + t_1 - t_0 \in I$).

6.4.5. (Transporte paralelo en el plano)

Sea M un plano afín de $\mathbb{E}^3$. Dados dos puntos $p, q \in M$ y un vector tangente $\vec{\xi}_p \in T_pM$, probar que, para *cualquier* curva $\alpha : [a, b] \to M$ que una p y q, la imagen de $\vec{\xi}_p$ por el transporte paralelo hasta q a lo largo de α es $\vec{\xi}_q$.

6.4.6. (Transporte paralelo a lo largo de geodésicas en la esfera)

Sea la esfera $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\}$ y sea $p \equiv (0, 0, r)$ su "polo norte". Consideremos la curva (cuya trayectoria es un semimeridiano de azimut $\phi \in \mathbb{R}$)

$$\alpha_\phi : [0, \pi] \ni t \mapsto (r\ sent \cos\phi, r\ sent\ sen\phi, r\cos t) \in M\ .$$

(a) Dado $\boldsymbol{\xi} = (1, 0, 0)_p \in T_pM$, hallar $\mathbf{V}^{\boldsymbol{\xi}} \in \mathfrak{X}^{\|}_{\alpha_\phi}(M)$. Hallar el transporte paralelo de $\boldsymbol{\xi}$ de $p = \alpha_\phi(0)$ a $\alpha_\phi(\pi)$ a lo largo de α_ϕ.

(b) Dado $\boldsymbol{\eta} = (v_1, v_2, 0)_p \in T_pM$, hallar el transporte paralelo de $\boldsymbol{\eta}$ de $p = \alpha_0(0)$ a $\alpha_0(\pi)$ a lo largo de α_0.

6.4.7. (Transporte paralelo a lo largo de curvas de tangencia)

Sean M_1 y M_2 dos superficies (con derivadas covariantes ∇_1 y ∇_2) y sea $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ una curva tal que $\alpha(I) \subset M_1 \cap M_2$. Supongamos $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha$ tal que sea tangente a ambas superficies a lo largo de α.

(a) Probar con un ejemplo que $\mathbf{V}$ puede ser ∇_1-paralelo (a lo largo de α) y a la vez no ser ∇_2-paralelo (a lo largo de α).

(b) Probar que, si M_1 y M_2 son tangentes a lo largo de α, entonces $\mathbf{V}$ es ∇_1-paralelo si y sólo si es ∇_2-paralelo. En particular, α es geodésica de M_1 si y sólo si es geodésica de M_2.

6.4.8. (Transporte paralelo y reparametrizaciones)

Sean M una superficie, $\alpha : I \to M$ una curva regular y $f : J \to I$ un cambio de parámetro de α. Probar que:

(a) Un campo de vectores $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$ es paralelo a lo largo de α si y sólo si $\mathbf{V} \circ f \in \mathfrak{X}_{\alpha\circ f}(M)$ es paralelo a lo largo de $\alpha \circ f$.

(b) Dados dos puntos $p, q \in M$, el transporte paralelo de p a q a lo largo de una curva α que los une es el mismo que a lo largo de cualquier reparametrización de α que preserve la orientación.

(c) Dados dos puntos $p, q \in M$, el transporte paralelo de p a q a lo largo de una curva α que los une es el inverso del transporte paralelo de q a p a lo largo de cualquier reparametrización de α que invierta la orientación.

6.4.9. (Isometrías e isometrías locales)

(a)¿Cuáles de las siguientes aplicaciones ψ son isometrías locales?:

(i) $F : \mathbb{S}^2(1) \ni p \mapsto 2p \in \mathbb{S}^2(2)$, donde $\mathbb{S}^2(r)(\subset \mathbb{E}^3)$ es la esfera de radio r centrada en el origen.

(ii) $F : \mathbb{S}^2(r) \ni p \mapsto -p \in \mathbb{S}^2(r)$.

(iii) $F : M \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto ((a + b\frac{x_1}{r}) \cos x_3, (a + b\frac{x_1}{r}) sen x_3, b\frac{x_2}{r}) \in \bar{M}$, siendo

$$\begin{cases} M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2\} \text{ (cilindro)} \\ \bar{M} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a)^2 + x_3^2 = b^2, \ a > b > 0\} \text{ (toro)} \end{cases}$$

(b) Sean los cilindros:

$$\begin{cases} M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2\} \\ \bar{M} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = \lambda^2 r^2 \quad , \quad \lambda > 0\} \end{cases} .$$

(i) Dada una aplicación diferenciable $F : M \to \bar{M}$, probar que F no puede ser una isometría local si $\lambda \neq \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{Z}^+$.

(ii) Probar que M y $\bar{M}$ no pueden ser isométricos si $\lambda \neq 1$.

(iii) Encontrar, para todo $\lambda > 0$, abiertos $\mathcal{U}$ de M y $\overline{\mathcal{U}}$ de $\bar{M}$ isométricos (recordar el Teorema de Minding).

(c) Sean M la superficie de revolución generada (notaciones como en el Ejercicio 6.2.7) por $\operatorname{Im}\alpha$ (supuesta en el plano x_1x_3) al girar en torno al eje x_3, siendo $\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{E}^2$ la curva dada por $\alpha(t) := (t, \log t)$, y sea $\bar{M} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1 sen\ x_3 = x_2 \cos x_3\}$ un helicoide (Ejercicio 6.2.6). Encontrar un difeomorfismo entre abiertos de M y $\bar{M}$ que preserva la curvatura de Gauss pero que *no* es una isometría. Concluir que el "recíproco" del teorema egregio de Gauss (Proposición 3.24) no es cierto.

6.4.10. (Superficies simétricas respecto de un plano)

Sea M una superficie que es simétrica por reflexión respecto de un plano afín Π.

(a) Probar que toda geodésica de M que pase por un punto de Π y tenga allí una velocidad tangente a Π está necesariamente contenida en Π.

A partir de ahora, supóngase que la intersección $\Pi \cap M$ es la imagen de una curva regular $\gamma : [0, L] \to M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(L)$ (puede utilizarse, sin necesidad de demostración, que, en estas condiciones, Π no es nunca tangente a M).

(b) Sea $\boldsymbol{\nu}$ cualquier elección de normal unitaria (local) a M. Probar que $\boldsymbol{\nu} \circ \gamma$ es tangente a Π.

(c) Probar que γ define una línea de curvatura.

A partir de ahora, supóngase que $|\gamma'| = cte.$

(d) Probar que γ es geodésica.

(e) Probar que $\gamma'(0) = \gamma'(L)$.

6.4.11. (Paraboloide de revolución)

Considérese el paraboloide (elíptico) de revolución M definido por la ecuación $2z = x^2 + y^2$. Sea la curva

$$\alpha : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (\rho_0 \cos t, \rho_0 \ sent, \frac{\rho_0^2}{2}) \in M \ ,$$

donde $\rho_0 > 0$ es una constante.

(a) ¿Es α (o alguna reparametrización de α) geodésica de M?

(b) Calcular la curvatura de Gauss de M.

(c) Determinar todas las geodésicas de M que pasan por el origen $o = (0, 0, 0)$.

(d) Demostrar que toda isometría $F : M \to M$ verifica $F(\mathrm{Im}\, \alpha) = \mathrm{Im}\, \alpha$ y, en particular, deja fijo el punto o.

(e) Denótese $p = \alpha(0) = \alpha(2\pi)$. Hallar la determinación $\Theta \in (-\pi, \pi]$ del ángulo girado por un vector tangente a M en p tras su transporte paralelo de nuevo hasta p a lo largo de α.

6.4.12. (Superficie tangente a un plano a lo largo de una curva)

Sean M una superficie y Π un plano de $\mathbb{E}^3$. Supóngase que $M \cap \Pi = \operatorname{Im} \alpha$, donde $\alpha : [0,1] \to \mathbb{E}^3$ es una curva regular, parametrizada por la longitud de arco y tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$. Supóngase además que M y Π son tangentes a lo largo de α.

(a) Probar que α define una línea de curvatura y asintótica de M.

(b) Probar que los puntos de $\operatorname{Im} \alpha$ son puntos parabólicos o planos de M.

(c) Denótese $p = \alpha(0) = \alpha(1)$. Hallar el ángulo $\Theta \in (-\pi, \pi]$ que forma cualquier vector tangente a M en p con su transportado paralelo de nuevo hasta p a lo largo de α.

(d) ¿Es posible que α sea geodésica de M?

(e) Poner un ejemplo concreto de M, Π y α.

6.4.13. (Carácter de los puntos de una superficie)

Sea p un punto de una superficie M. Estudiar las implicaciones lógicas que existen entre las siguientes afirmaciones, dando una demostración (si se piensa que la posible implicación es cierta) o un contraejemplo (si se piensa que es falsa):

(a) El punto p es un punto plano de M.

(b) Por p pasan tres (segmentos de) rectas distintas contenidas en M.

(c) Todas las geodésicas de M que pasan por p son no-alabeadas a su paso por p.

(d) La curvatura de Gauss de M en p es nula.

6.4.14. (Modelos, superficie de Schwarzschild)

Sea μ un número real positivo. Considérese la superficie M obtenida al hacer girar la imagen de la curva plana $\alpha : (2\mu, \infty) \ni t \mapsto (t, 0, 2\sqrt{2\mu(t-2\mu)}) \in \mathbb{E}^3$ alrededor del eje z.

(a) Calcular la curvatura κ^α de α como curva en el plano $\mathbb{E}^2_{xz}$, esto es, como $\alpha(t) = (t, 2\sqrt{2\mu(t-2\mu)})$.

(b) Hacer un dibujo aproximado de M. Describir M como gráfica de una función diferenciable $\varsigma : (\mathbb{R}^2 \supset)\Omega \to \mathbb{R}$, dando explícitamente Ω y ς. Encontrar una parametrización local en torno a cada punto de M.

(c) Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental de M en la carta asociada a la parametrización anterior.

(d) Calcular la curvatura de Gauss de M y clasificar los puntos de M.

(e) Estudiar si α es geodésica de M, si define una línea de curvatura de M y si define una línea asintótica de M.

(f) Encontrar una base de campos (a lo largo de α y tangentes a M) paralelos (respecto de la derivada covariante en M).

Observación: La superficie "de Schwarzschild" M es la versión 2-dimensional de ciertos conjuntos de simultaneidad en la descripción relativista del sistema solar; el parámetro μ representa una longitud característica relacionada con la masa del sol.

6.4.15. (Catenoide)

Considérese la aplicación $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (\cosh u \cos v, \cosh u \; sen v, u)$.

(a) Probar que el conjunto $M \equiv \operatorname{Im} \Phi$ es una superficie.

(b) Determinar el plano tangente a M en los puntos de la forma $(x, y, 0)$.

(c) Clasificar los puntos de M.

(d) Encontrar una parametrización para las líneas asintóticas de M.

(e) Considérese la curva $\alpha : \mathbb{R} \to M, t \mapsto (\cosh t, 0, t)$. Hallar el transporte paralelo de los vectores tangentes $(0, 1, 0)_{\alpha(0)}$ y $(0, 0, 1)_{\alpha(0)}$ hasta $\alpha(1)$ a lo largo de α.

Referencias

[1] A. M. Amores. *Curso básico de curvas y superficies.* Sanz y Torres, 2001.

[2] T. M. Apostol. *Análisis matemático.* Reverté, 1979.

[3] A. F. Costa, M. Gamboa, and A. Porto. *Ejercicios de Geometría Diferencial de Curvas y superficies.* Sanz y Torres, 2005.

[4] A. F. Costa, M. Gamboa, and A. Porto. *Notas de Geometría Diferencial de Curvas y superficies.* Sanz y Torres, 2005.

[5] M. P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies.* Alhambra, 1990.

[6] J. E. Marsden. *Elementary classical analysis.* Freeman, 1974.

[7] W. S. Massey. *Introducción a la topología algebraica.* Reverté, 1972.

[8] M. Spivak. *Cálculo en variedades.* Reverté, 1970.

[9] J. A. Thorpe. *Elementary Topics in Differential Geometry.* Springer, 1979.