

GEOMETRÍA, RELATIVIDAD Y CONSTANTE COSMOLÓGICA

Eduardo Aguirre

Estas notas se publican bajo una licencia
CREATIVE COMMONS en la modalidad
Reconocimiento – NoComercial –
CompartirIgual (by-nc-sa): No se permite
un uso comercial de la obra original ni de las
posibles obras derivadas, la distribución de
las cuales se debe hacer con una licencia igual
a la que regula la obra original
(ver <http://es.creativecommons.org/blog/licencias/>).

Curso 2009-10

Postgrado en Educación Matemática
Facultad de C.C. Matemáticas, U.C.M.

0.1. Bibliografía seleccionada

MÁS O MENOS DIVULGATIVA:

- **J.V. Narlikar**, The lighter side of gravity, **Freeman, 1982**
- **E.F. Taylor, J.A. Wheeler**, Spacetime physics, **Freeman, 1992**
- **C.M. Will**, ¿Tenía razón Einstein?, **Gedisa, 1992**
- **J. Silk**, The big-bang, **Freeman, 2001**
- **K.S. Thorne**, Black holes and time warps, **Papermac, 1994** (traducción española en **Crítica-Drakontos, 1998**)
- **A. Einstein, A. Grünbaum, A.S. Eddington y otros**, La teoría de la relatividad, **Alianza, 1975**
- **L. Abbot**, El misterio de la constante cosmológica, **Investigación y Ciencia, julio 88**
- **C.J. Hogan, R.P. Kirshner, N.B. Suntzeff**, Explorando el espacio-tiempo mediante supernovas, **IC, marzo 99**

- **L.M. Krauss**, Antigravedad cosmológica, **IC**, marzo 99
- **P. Ruiz – Lapuente**, **A.G. Kim**, **N. Walton**, Supernovas y expansión acelerada del universo, **IC**, marzo 99
- **A.G. Riess**, **M.S. Turner**, Cuando la aceleración cambió de signo, **IC**, abril 04
- **C.H. Lineweaver**, **T.M. Davis**, Las paradojas de la gran explosión, **IC**, mayo 05

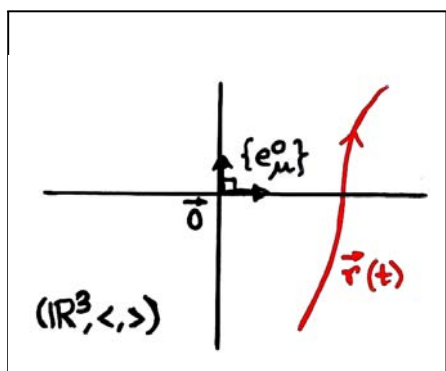
MÁS O MENOS ESPECIALIZADA:

- **J.H. Smith**, Introducción a la Relatividad Especial, **Reverté**, 1978
- **J.J. Callahan**, The Geometry of Spacetime, **Springer**, 2000
- **Ch.W. Misner**, **K.S. Thorne**, **J.A. Wheeler**, Gravitation, **Freeman**, 1973
- **J.M. SánchezRon**, Relatividad especial - Relatividad general 1905-1923, **ICE-UAB**, 1981
- **M. Friedmann**, Fundamentos de las teorías del espacio-tiempo, **Alianza Universidad**, 1981
- **M. Berry**, Principles of cosmology and gravitation, **Cambridge U.P.**, 1976
- **B. Schutz**, Gravity, From the ground up, **Cambridge**, 2003
- **S. Weinberg**, Gravitation and Cosmology, **John Wiley**, 1972
- **W. Rindler**, Relativity, Special, General and Cosmological, **Oxford**, 2001
- **B. O'Neill**, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, **Academic Press**, 1983
- **T.M. Davis**, **C.H. Lineweaver**, Expanding Confusion: Common Misconceptions of Cosmological Horizons and the Superluminal Expansion of the Universe, **Publications of the Astronomical Society of Australia**, 2004, 21, 97-109
- **C.L. Bennet y otros**, First Year WMAP Observations: Preliminary Maps and Basic Results, <http://map.gsfc.nasa.gov>, 2003

1. MECÁNICA GALILEANA. SISTEMAS INERCIALES

Comenzamos con el modelo familiar del "espacio":

Espacio familiar $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$, siendo:



- (i) \mathbb{R}^3 , como espacio afín (carta estándar (u^1, u^2, u^3) dada por
$$p =: \sum_{\mu=1}^3 u^\mu(p) e_\mu^0$$
, siendo $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$ la base estándar del espacio vectorial asociado $V^3 \equiv \mathbb{R}^3$)
- (ii) \langle, \rangle , producto escalar euclídeo "canónico" ($\langle v, w \rangle := \sum_{\mu=1}^3 v^\mu w^\mu$) en el espacio vectorial $V^3 \equiv \mathbb{R}^3$ (por tanto en cualquier $T_p\mathbb{R}^3$, Obs. 1.1)

En el "ESPACIO FAMILIAR":

- **Partícula material** (puntual): $\tilde{r}(t) \equiv (r^1(t), r^2(t), r^3(t))$ curva (diferenciable) parametrizada por el "tiempo"

Cada partícula material posee (Obs. 1.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m > 0 \text{ (otros parámetros?)} \\ \text{momento } \tilde{P}_{\tilde{r}} := m \dot{\tilde{r}} \text{ ("campo de vectores" sobre } \tilde{r}) \\ \text{energía cinética } E_{\tilde{r}} := \frac{1}{2} m \langle \dot{\tilde{r}}, \dot{\tilde{r}} \rangle \text{ (función } \geq 0 \text{ sobre } \tilde{r}) \end{array} \right.$$

Las "interacciones" de la partícula dan lugar a la noción de

fuerza $\tilde{F}_{\tilde{r}}$ (campo sobre \tilde{r} , supuestamente conocido)

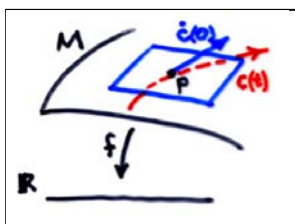
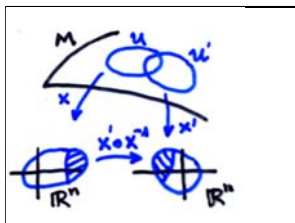
que verifica la **segunda ley de Newton** (dinámica):

$$\boxed{\tilde{F}_{\tilde{r}} = m \ddot{\tilde{r}}} \tag{1}$$

- Resulta útil pensar en términos de "espacio-tiempo"

Observación 1.1 **VARIEDADES**

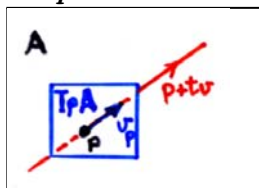
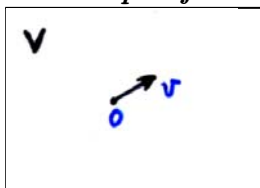
Espacio afín $A^n \xrightarrow{\text{origen}} \mathbb{R}^n$ Espacio vectorial asociado $V^n \xrightarrow{\text{base}} \mathbb{R}^n$



- **Variedad** M^n : espacio topológico (Hausdorff) "carteable" por homeomorfismos (*cartas*) entre abiertos de M y abiertos de \mathbb{R}^n , con cambios de carta difeomorfismos (Ejemplos: espacios afines, esfera S^2)
- **Espacio tangente** $T_p M$: espacio vect. de velocidades $\dot{c}(0)$ de curvas $c: I \rightarrow M$ por el punto $p \equiv c(0)$, donde las velocidades se definen por

$$\dot{c}(0)(f) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(c(\epsilon)) - f(c(0))}{\epsilon}$$

Dado esp. afín A (\rightsquigarrow esp. vectorial V), existe un isomorfismo canónico ($\forall p \in A$)



$$V \rightarrow T_p A$$

$$v \mapsto v_p := \dot{c}(0)$$

(con $c(t) := p + tv$),
que a su vez induce

un isomorfismo canónico ($\forall p, q \in A$, *paralelismo a distancia*)

$$T_{pq}: T_p A \rightarrow T_q A, \quad v_p \mapsto v_q \quad (2)$$

Dados variedad M , carta $x \equiv (x^1, \dots, x^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $p \in U$, el conjunto $\{\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p\}$ constituye una base de $T_p M$

Campo de vectores X en M : asignación "diferenciable" de un vector tangente en cada punto. El conjunto $\mathfrak{X}(M)$ de todos los campos es un módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ de funciones diferenciables.

Dados variedad M y campo $X \in \mathfrak{X}(M)$:

- en cada carta $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ se definen n funciones $X^1, \dots, X^n \in C^\infty(U)$ (*componentes* de X en x) por $X|_U =: \sum_{i=1}^n X^i \partial/\partial x^i$ y, en otra carta $x': U' \rightarrow \mathbb{R}^n$, se tiene una expresión análoga con

$$X^i|_{U \cap U'} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} X'^j|_{U \cap U'} \quad (3)$$

- se definen las *curvas integrales* de X como curvas $c(t)$ que verifican $\dot{c} = X \circ c$, equivalente en cada carta x al sistema de EDO's de 1er orden (en las coord. $c^i \equiv x^i \circ c$): $\frac{dc^i}{dt}(t) = X^i(c(t))$

- $\forall p \in M$, existe una (*única* si se maximiza el intervalo de definición) curva integral $c_p(t)$ de X tal que $c_p(0) = p$ ■

NOTAS:

(i) La segunda ley de Newton (1) no define a la fuerza. El conocimiento previo de $\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{r}}$ presupone el conocimiento de los sistemas físicos que interaccionan con \tilde{r}

(ii) La segunda ley de Newton (1) conduce a:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{r}} = 0 \Rightarrow \ddot{\tilde{r}} = 0$$

esto es, las **partículas libres** siguen rectas afinmente parametrizadas (**primera ley de Newton** o **ley de inercia de Galileo**). La fuerza modifica (no "mantiene") el estado de movimiento, la masa mide la inercia

(iii) La "conservación" del momento total en las colisiones entre partículas (experimental / deducible de la segunda y tercera leyes de Newton):

- justifica la definición de momento $\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{r}} := m \dot{\tilde{r}}$
- proporciona un método para determinar masas

(iv) La segunda ley de Newton (1) implica: el "trabajo" (integral de camino) realizado por la fuerza que actúa sobre una partícula a lo largo de su trayectoria es igual a la variación de su energía cinética:

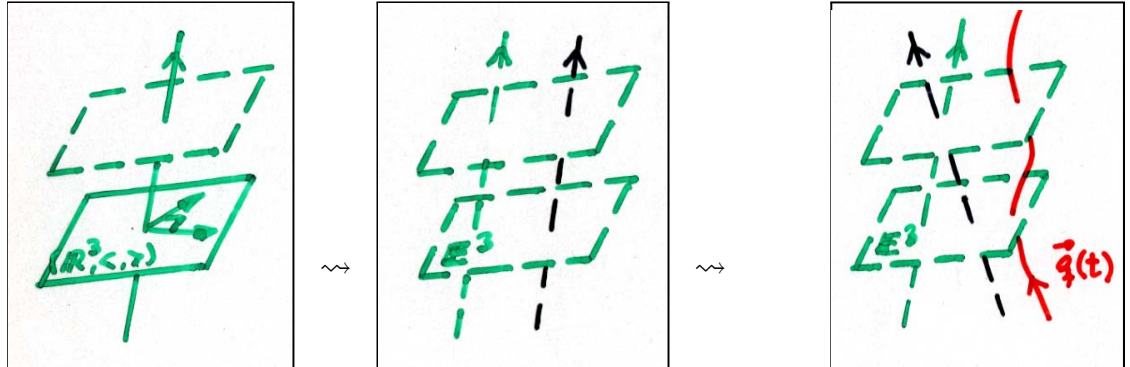
$$\langle \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{r}}, \dot{\tilde{r}} \rangle = m \langle \ddot{\tilde{r}}, \dot{\tilde{r}} \rangle = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \langle \dot{\tilde{r}}, \dot{\tilde{r}} \rangle \right)$$

(v) A partir de aquí: leyes de fuerza concretas y cálculos

(vi) Resulta útil pensar en "espacio-tiempo" (ET), ya que:

- la "luz" pone en cuestión el carácter absoluto del tiempo y sugiere una "estructura-Lorentz" para el espacio-tiempo (ver Charla 3)
- las partículas materiales "en caída libre" ponen en cuestión la estructura afín del espacio-tiempo (ver Charla 6)

EVOLUCIÓN de las ideas de espacio-tiempo (denotamos \mathbb{E}^n al espacio euclídeo, i.e. $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ "olvidados" origen y base estándar):



$(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle) \times \mathbb{R}$
ET "familiar"

$\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^{1\uparrow}$
ET de Newton

$(\mathbb{A}^4, t: \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \langle, \rangle \text{ en } \ker t)$
ET de Galileo

Absolutos:
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Posición} \\ \text{Reposo} \\ \text{Simultaneidad} \end{array} \right.$

Absolutos:
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Reposo} \\ \text{Simultaneidad} \end{array} \right.$

Absolutos:
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Simultaneidad} \end{array} \right.$

En el ESPACIO-TIEMPO DE GALILEO (ETG):

- La función lineal (**tiempo**) $t: \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ puede considerarse definida sobre el propio \mathbb{A}^4 (en tal caso, salvo una constante aditiva)

- Dos sucesos $p, p' \in \mathbb{A}^4$ se dicen "simultáneos" si $p' - p \in \ker t$ (\rightsquigarrow "foliación" de \mathbb{A}^4 por hiperplanos 3-dimensionales euclídeos). Sólo tiene sentido la "distancia" entre sucesos simultáneos

$$d_{p,p'}^2 := \langle p' - p, p' - p \rangle$$

- **Partícula material:** $q(t)$ curva (diferenciable) con t como parámetro ($\Leftrightarrow t(\dot{q}) = 1$, Obs. 1.1)

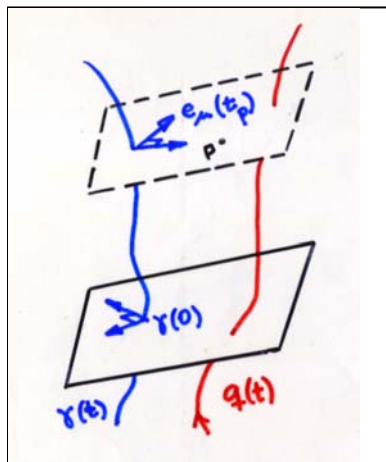
Cada partícula material posee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m > 0 \\ \text{masa-momento } P_q := m \dot{q} \\ \text{fuerza } F_q := m \ddot{q} \text{ (no es la segunda ley de Newton)} \end{array} \right.$$

Se dice que $q(t)$ es libre si $\ddot{q} = 0$

$$(\Leftrightarrow q(t) = p + tv, \text{ con } p \in \mathbb{A}^4, v \in \mathbb{V}^4, t(v) = 1)$$

- **Sistemas de coordenadas (SC):** parejas $\kappa \equiv (\gamma(t), \{e_\mu(t)\})$, con



- $\gamma(t)$ partícula que representa el "origen"
- $\{e_\mu(t)\}$ 3 campos de vectores sobre $\gamma(t)$ que constituyen base ortonormal móvil de $\ker t$ y representan los "ejes"

Cada SC κ asocia, a cada suceso $p \in A^4$, coordenadas $(\tilde{x} \equiv (x^1, x^2, x^3), x^4)$ dadas por

$$\begin{cases} p - \gamma(t_p) =: \sum_{\mu=1}^3 x^\mu(p) e_\mu(t_p) \\ x^4(p) := t_p, \text{ donde } p - \gamma(t_p) \in \ker t \end{cases}$$

En particular el SC κ asocia, a cada partícula $q(t)$, coordenadas $(\tilde{q}(t) := \tilde{x}(q(t)), q^4(t) := x^4(q(t)))$ que verifican:

$$\boxed{q(t) - \gamma(t) = \sum_{\mu=1}^3 q^\mu(t) e_\mu(t)} \quad \text{y} \quad \boxed{q^4(t) = t},$$

y resulta (inmediato):

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \sum_{\mu=1}^3 \dot{q}^\mu(t) \partial/\partial x^\mu |_{q(t)} + \partial/\partial x^4 |_{q(t)} \equiv (\tilde{\dot{q}}(t), 1) \quad (\Rightarrow P_q = (m \dot{\tilde{q}}, m)) \\ \ddot{q}(t) = (\ddot{\tilde{q}}(t) + \tilde{a}_\gamma(t) + \tilde{C}(\dot{\tilde{q}}(t)), 0), \end{cases}$$

donde el término $\tilde{a}_\gamma(t)$ se anula si la partícula-origen $\gamma(t)$ es libre y el término $\tilde{C}(\dot{\tilde{q}}(t))$ (Coriolis) se anula si los ejes $\{e_\mu(t)\}$ son fijos

- **Sistemas de coordenadas inerciales (SCI):** aquellos SC

$$\boxed{\text{con } \ddot{\gamma} = 0 \text{ y } \dot{e}_\mu = 0}$$

o también

$$\boxed{\text{tales que cualquier partícula } q(t) \text{ verifica: } \tilde{F}_q = m \ddot{\tilde{q}} \text{ (segunda ley)}}$$

o también

$$\boxed{\text{tales que los campos coordenados } \{\partial/\partial x^i\} \text{ verifican: } \partial/\partial x^i |_q = T_{pq}(\partial/\partial x^i |_p),}$$

con T_{pq} dado en (2), así los campos coordenados son "constantes".

- **Sistemas de coordenadas no rotantes (SCNR):** aquellos SC

$$\boxed{\text{con } \dot{e}_\mu = 0}$$

o también

$$\boxed{\text{tales que cualquier partícula } q(t) \text{ verifica: } \tilde{F}_q = m (\ddot{\tilde{q}} + \tilde{a}_\gamma)}$$

El "DILEMA DE LOS SCI" con partículas materiales:

- La observación de partículas materiales $\mathbf{q}(t)$ desde un SCI (en el que $\ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{\mathbf{q}}, 0)$) no permite objetivar la noción de que éste "está en reposo":

NINGUNA OBSERVACIÓN con partículas materiales
PERMITE IDENTIFICAR LOS "SCI EN REPOSO"
DE ENTRE TODOS LOS SCI

o más aún (Galileo):

"las leyes de la mecánica son las mismas en todos los SCI"

- En realidad, este es el motivo por el que hemos comenzado hablando del ET de Galileo $(A^4, t : V^4 \rightarrow \mathbb{R}, <, > \text{ en ker } t)$ y no del ET de Newton $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^{1\uparrow}$

- Identificar una clase de "SCI en reposo" TAMPOCO es posible vía experimentos con LUZ (Experimento de Michelson-Morley, ver Charla 3)

- De hecho, en presencia de gravitación, TAMPOCO es posible identificar los SCI de entre todos los SCNR (ver Charla 6)

- Pero SÍ es posible identificar los SCNR de entre todos los SC (en los primeros, el término de Coriolis se anula)

2. GRAVITACIÓN CLÁSICA. MAR-EAS

Para describir la gravitación en el espacio "familiar" ($\mathbb{R}^3, \langle, \rangle$):

- se introduce un **potencial gravitatorio** $\Phi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (función diferenciable, definida salvo constante aditiva), cuyo "gradiente" (cambiado de signo) $-\tilde{\nabla}\Phi$ es el **campo gravitatorio** (Obs. 2.1)

- se postula que la **fuerza que actúa sobre una partícula en caída libre** (\equiv sólo sometida a gravitación) $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ es

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{\mathbf{r}}} = c_{\text{pasiva}} (-\tilde{\nabla}\Phi |_{\tilde{\mathbf{r}}}) , \quad (4)$$

con **carga gravitatoria pasiva** $c_{\text{pasiva}} > 0$ (parámetro de la partícula)

- Pero los experimentos (Galileo, Eötvös 1890, Dicke 1960, Braginsky 1970) muestran que

$$c_{\text{pasiva}} \simeq m (1 \pm 10^{-12}) \quad (5)$$

De (4), (5) y (1) (segunda ley de Newton, Charla 1) se sigue la **universalidad de la caída libre**:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = -\tilde{\nabla}\Phi |_{\tilde{\mathbf{r}}} \quad (6)$$

"todos los cuerpos caen en el vacío con la misma aceleración, independientemente de su masa y composición"

(\rightsquigarrow al hablar del movimiento de partículas en caída libre no hará falta referirse a sus masas)

Se sigue de la regla de la cadena y de (6) que la "energía total" de una partícula en caída libre se conserva:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \langle \dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}} \rangle + m (\Phi \circ \tilde{\mathbf{r}}) \right) = m \langle \ddot{\tilde{\mathbf{r}}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}} \rangle + m \langle \tilde{\nabla}\Phi |_{\tilde{\mathbf{r}}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}} \rangle = 0$$

En el caso $\Phi < \lim_{|\tilde{\mathbf{r}}| \rightarrow \infty} \Phi(\tilde{\mathbf{r}})$ y eligiendo $\lim_{|\tilde{\mathbf{r}}| \rightarrow \infty} \Phi(\tilde{\mathbf{r}}) = 0$ (lo que fija la constante aditiva), se llega a la **velocidad de escape**, que es (el módulo de) la que necesitaría una partícula en caída libre para poder "justo escapar" (\equiv alcanzar $|\tilde{\mathbf{r}}| \rightarrow \infty$ con $\lim_{|\tilde{\mathbf{r}}| \rightarrow \infty} |\dot{\tilde{\mathbf{r}}}| = 0$):

$$v_{\text{esc}}^2(\tilde{\mathbf{r}}) := -2\Phi(\tilde{\mathbf{r}}) \quad (7)$$

Observación 2.1 MÉTRICAS RIEMANNIANAS

Dadas variedad M y función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, se define la **diferencial** en el punto $p \equiv c(0) \in M$

$$df(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \dot{c}(0) \mapsto \dot{c}(0)f \quad \left(= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(c(\epsilon)) - f(c(0))}{\epsilon} \right)$$

• Puesto que la aplicación $df : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ es $C^\infty(M)$ -lineal, constituye lo que se llama una **1-forma** en M .

• Sin estructura adicional sobre M no existe el "gradiente" de f : recordar que éste debería dar lugar, en cada punto, a un vector tangente, con dirección la de la máxima (?) derivada direccional de f y con módulo (?) el de dicha derivada

Métrica riemanniana g en M : asignación "diferenciable" de un producto escalar euclídeo (esto es, de "índice" 0) en cada espacio tangente. En cada (M, g) existen:

- el **gradiente** $\text{grad } f \in \mathfrak{X}(M)$ de una función (Obs. 4.1)
- la **divergencia** $\text{div } X \in C^\infty(M)$ de un campo (Obs. 8.1)
- el **laplaciano** $\Delta f \in C^\infty(M)$ de una función (Obs. 4.1)

En el espacio "familiar" $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$:

- el símbolo \langle, \rangle tiene un doble papel:
 - (i) como producto escalar euclídeo (en el espacio vectorial \mathbb{R}^3) y
 - (ii) como métrica riemanniana (en la variedad afín \mathbb{R}^3) obtenida a partir del isomorfismo canónico $\mathbb{R}^3 \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$ (Obs. 1.1)

• en la carta estándar de \mathbb{R}^3 se encuentra (estas expresiones suelen a veces tomarse como definiciones):

$$\text{grad } f = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \tilde{\nabla} f, \quad \text{div } \tilde{X} = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} \equiv \tilde{\nabla} \tilde{X}, \quad \Delta f = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial (x^\mu)^2}$$

• se define el **rotacional** $\text{rot } \tilde{X} := \sum_{\mu, \nu, \rho=1}^3 \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \tilde{\nabla} \times \tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$

• un campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ es un gradiente si ("cohomología") y sólo si (trivial) tiene rotacional nulo

• dos funciones $f, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, con $\lim_{|\tilde{r}| \rightarrow \infty} \tilde{\nabla} f(\tilde{r}) = 0$ y $\text{sop}(h)$ compacto, cumplen la ecuación $\Delta f = 4\pi h$ si ("teor. divergencia") y sólo si ("teor. Liouville") verifican $f(\tilde{r}) = \int \frac{-h(\tilde{\xi})}{|\tilde{r}-\tilde{\xi}|} d^3 \tilde{\xi}$ ■

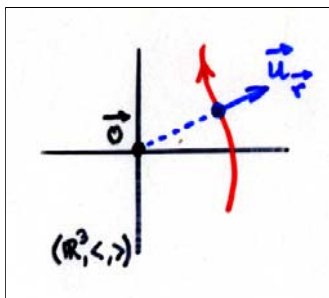
Newton postuló que el potencial (gravitatorio) creado por una partícula (de masa m) situada "en el origen" $\vec{0}$ viene dado (eligiendo $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \Phi(\vec{r}) = 0$, lo que fija la constante aditiva y hace $\Phi < 0$) por

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{-G c_{\text{activa}}}{|\vec{r}|}, \quad (8)$$

con **carga gravitatoria activa** $c_{\text{activa}} > 0$ (parámetro de la partícula) y con **constante de la gravitación** $G \simeq 6'67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ gr}^{-1} \text{ seg}^{-2}$

- Pero los experimentos (Cavendish) muestran que

$$c_{\text{activa}} = m (1 \pm 10^{-5}) \quad (9)$$

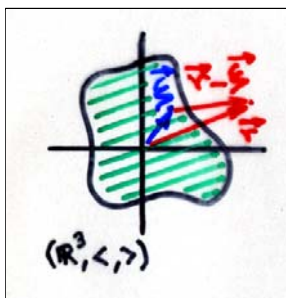


- De (6), (8) y (9) se sigue que las partículas en caída libre $\vec{r}(t)$ verifican la **ley de la gravitación universal** (con $\vec{r} \equiv |\vec{r}| \vec{u}_{\vec{r}}$):

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-Gm}{|\vec{r}|^2} \vec{u}_{\vec{r}}$$

Si el cuerpo que crea el potencial gravitatorio es "extenso" (pero acotado), la hipótesis de Newton (8) da lugar a

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{-G \rho_m(\vec{\xi})}{|\vec{r}-\vec{\xi}|} d^3 \vec{\xi}, \quad (10)$$



donde $\rho_m : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ es la **densidad de masa** (soporte compacto)

- Por lo dicho en Obs. 2.1, la expresión (10) es la única solución de la EDP (**ecuación de Poisson**)

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho_m \quad (11)$$

que verifica $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{\nabla} \Phi|_{\vec{r}} = 0$

NOTAS:

(i) Postular que el potencial creado por una partícula en movimiento tiene la forma (8) supone postular una "acción a distancia" (transmisión instantánea de la interacción) (?)

(ii) Si la función ρ_m en (10) es "esféricamente simétrica" en torno al origen, también se obtiene (Newton!) en el exterior:

$$\Phi(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{-G m}{|\tilde{\mathbf{r}}|} ,$$

donde ahora $m := \int \rho_m(\tilde{\xi}) d^3\tilde{\xi}$ (la "masa total" del cuerpo atractor)

(iii) Sobre la superficie terrestre, se sigue de (7) y de la (ii) que la velocidad de escape a la atracción de la Tierra es (con R_\oplus y M_\oplus el radio y masa terrestres):

$$v_{\text{esc}}(R_\oplus) = \sqrt{2 G M_\oplus / R_\oplus} \simeq 11'2 \text{ km seg}^{-1}$$

(iv) Si el potencial $\Phi(\tilde{\mathbf{r}})$ es "central" (\equiv sólo depende de $|\tilde{\mathbf{r}}|$), $-\tilde{\nabla} \Phi$ resulta "radial". Se sigue entonces de (6) que el "momento angular" de una partícula en caída libre se conserva:

$$\frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{r}} \times m \dot{\tilde{\mathbf{r}}}) = \tilde{\mathbf{r}} \times m \ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = -\tilde{\mathbf{r}} \times m \tilde{\nabla} \Phi|_{\tilde{\mathbf{r}}} = \mathbf{0} ,$$

y la órbita resulta plana (el plano constante que contiene a $\tilde{\mathbf{r}}$ y $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}$)

(v) Si el potencial $\Phi(\tilde{\mathbf{r}})$ es "de tipo $-1/|\tilde{\mathbf{r}}|$ " (junto con el de tipo $|\tilde{\mathbf{r}}|^2$, el único potencial central todas cuyas órbitas acotadas cierran, Bertrand), se deducen (Newton!) las tres **leyes de Kepler** (experimentales) para las partículas en caída libre:

- las órbitas son secciones de cónicas,
- las partículas "barren" áreas iguales en tiempos iguales, y
- los cuadrados de los períodos (para órbitas acotadas, \rightsquigarrow elipses) son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores

(vi) Eligiendo para el potencial gravitatorio creado por la Tierra $\Phi_\oplus(|\tilde{\mathbf{r}}| = R_\oplus) = \mathbf{0}$, se sigue de (ii) la expresión "familiar" (con $h_\oplus \equiv |\tilde{\mathbf{r}}| - R_\oplus > \mathbf{0}$ "pequeña"):

$$\Phi_\oplus(\tilde{\mathbf{r}}) = -G M_\oplus / |\tilde{\mathbf{r}}| + G M_\oplus / R_\oplus \simeq g_\oplus h_\oplus ,$$

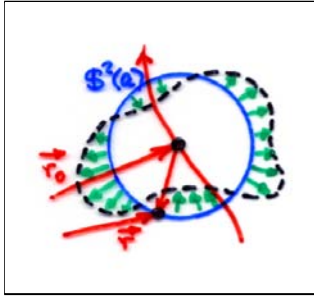
donde $g_\oplus \equiv G M_\oplus / R_\oplus^2 \simeq 980 \text{ cm seg}^{-2}$ ("aceler. de la gravedad")

Desde los cuerpos en caída libre, la gravitación se manifiesta localmente por las MAREAS:

- Dadas dos partículas en caída libre y próximas, $\tilde{\mathbf{r}}_0$ y $\tilde{\mathbf{r}}$, se sigue de (6) que la **marea** (\equiv aceleración relativa) de $\tilde{\mathbf{r}}$ respecto de $\tilde{\mathbf{r}}_0$ viene gobernada por el hessiano del potencial en $\tilde{\mathbf{r}}_0$:

$$\ddot{\mathbf{r}}^\mu - \ddot{\mathbf{r}}_0^\mu = \frac{-\partial\Phi}{\partial x^\mu} \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}_0} \simeq \sum_{\nu=1}^3 \frac{-\partial^2\Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}_0} (\mathbf{r}^\nu - \mathbf{r}_0^\nu) \quad (12)$$

- Dadas una partícula en caída libre $\tilde{\mathbf{r}}_0$ y una capa esférica (en cierto instante) $S^2(\mathbf{a})$ (centro $\tilde{\mathbf{r}}_0$ y radio \mathbf{a}) de partículas en caída libre y próximas, el promedio de mareas de $S^2(\mathbf{a})$ respecto de $\tilde{\mathbf{r}}_0$ viene gobernado por el laplaciano del potencial en $\tilde{\mathbf{r}}_0$



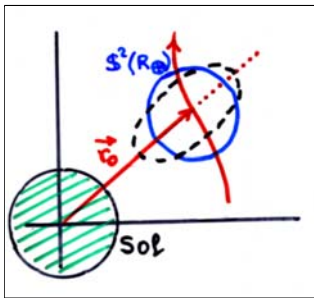
En efecto, se sigue de (12) (con ζ el elemento de volumen en $S^2(\mathbf{a})$):

$$\int \langle \ddot{\tilde{\mathbf{r}}} - \ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_0, \tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_0 \rangle \zeta \simeq - \sum_{\nu=1}^3 \int \frac{-\partial^2\Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}_0} (\mathbf{r}^\mu - \mathbf{r}_0^\mu) (\mathbf{r}^\nu - \mathbf{r}_0^\nu) \zeta =$$

$$= \frac{-1}{3} \Delta\Phi \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}_0} \int |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_0|^2 \zeta = \frac{-4\pi a^4}{3} \Delta\Phi \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}_0} \quad (13)$$

(términos "no diagonales" en la integral cancelan!)

- En cuanto al nombre "mareas":



Aproximemos (en cierto instante) la "superficie terrestre" como una capa esférica $S^2(\mathbf{R}_\oplus)$ (centrada en $\tilde{\mathbf{r}}_0$) en el campo gravitatorio del Sol, y éste como un cuerpo esféricamente simétrico (centrado en $\tilde{\mathbf{0}}$) y único atractor

El conjunto de mareas de la capa $S^2(\mathbf{R}_\oplus)$ respecto de $\tilde{\mathbf{r}}_0$:

- (i) es "no trivial", ya que $\Phi(\tilde{\mathbf{r}})$ es de tipo $-1/|\tilde{\mathbf{r}}|$ por la simetría esférica del Sol (Nota (ii)),
- (ii) posee "simetría axial" respecto del eje $\tilde{\mathbf{r}}_0$ (misma razón), y
- (iii) posee "promedio nulo", por (11)

La rotación de la Tierra en torno a su eje (que no coincide con el eje $\tilde{\mathbf{r}}_0$) pone de manifiesto las mareas

3. ALTAS VELOCIDADES. PRODUCTO ESCALAR LORENTZ

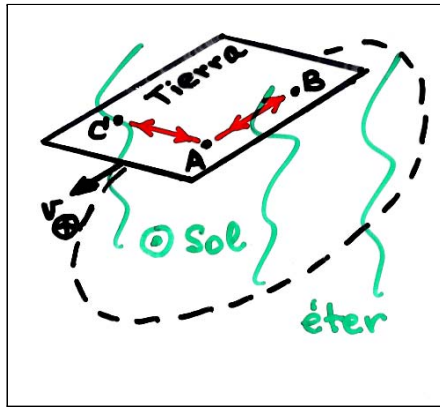
La luz en el ET de Galileo (Maxwell, mediados s. XIX):

- está constituida por ONDAS?: propagación de una perturbación (variaciones del campo electromagnético) en un medio ("éter"?)
- se propaga siguiendo curvas "luz" $q(t)$ (diferenciables) que, en aquellos SCI (Charla 1) "en reposo respecto del éter", verifican

$$\ddot{q}(t) = 0 \quad \text{y} \quad |\dot{q}(t)| \equiv c, \quad (14)$$

con constante de la luz $c \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{ cm seg}^{-1}$

Michelson-Morley (MM) intentaron (1887) medir (en módulo)



la velocidad v_e del éter respecto de la Tierra, puesto que ésta se mueve con una velocidad $v_{\oplus} \simeq 3 \cdot 10^6 \text{ cm seg}^{-1}$ resp. del sol (\simeq respecto del éter?)

- Cálculo retrasos relativos entre ondas luminosas para trayectos iguales (2d) de ida-vuelta en direcciones paralela (ABA) y perpendicular (ACA) a la de movimiento de la Tierra:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ABA: } \left\{ \begin{array}{l} v_{AB} = c + v_e \\ v_{BA} = c - v_e \end{array} \right\} \Rightarrow t_{ABA}(v_e) = \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-1} t_{ABA}(0) \\ \text{ACA: } v_{AC} = (c^2 - v_e^2)^{1/2} = v_{CA} \Rightarrow t_{ACA}(v_e) = \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-1/2} t_{ACA}(0) \end{array} \right. ,$$

con $t_{ABA}(0) = \frac{2d}{c} = t_{ACA}(0)$ (tiempo de ida-vuelta "sin éter"). Así

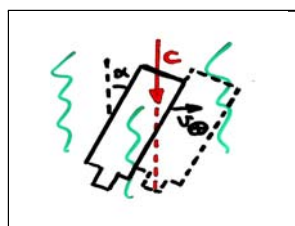
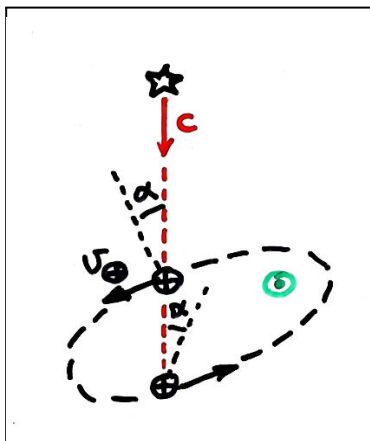
$$t_{ABA}(v_e) - t_{ACA}(v_e) \simeq \frac{v_e^2}{2c^2} t_{ABA}(0) = \frac{v_e^2 d}{c^3} \quad (15)$$

- Del valor experimental $t_{ABA}(v_e) - t_{ACA}(v_e) \simeq 0$ y de (15) se deducía $v_e \simeq 0$ ("isotropía", contra lo que se esperaba: $v_e \simeq v_{\oplus}$) \rightsquigarrow la propiedad (14) seguía siendo cierta en algún SCI no en reposo respecto del éter (de hecho, en muchos otros SCI, ya que el experimento daba el mismo resultado en cualquier estación del año)

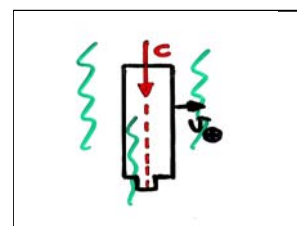
- Así pues, el resultado de MM cuestionaba el ETG

Dos "explicaciones" (famosas) del resultado de MM en el ETG:

- "La Tierra arrastra al éter" (\rightsquigarrow éter se mueve resp. del sol).
Difícil de reconciliar con la **aberración de la luz estelar**

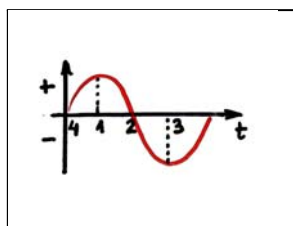
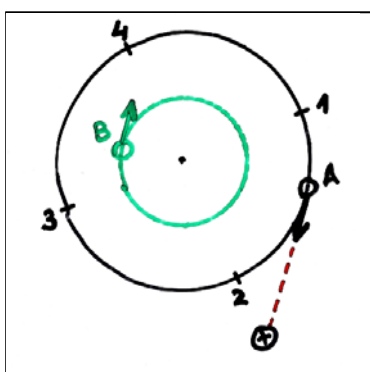


(experimental)
Si no hay arrastre
(o si el éter no existe)

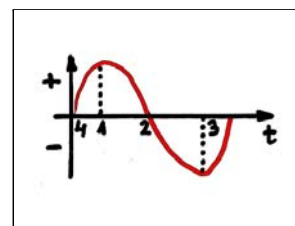


Si la Tierra
arrastrara al éter

- "La luz consta de partículas" (\rightsquigarrow hereda la inercia del emisor).
Difícil de reconciliar con la **observación de estrellas binarias**



(experimental)
Si la luz consta de
ondas



Si la luz constara de
partículas (materiales)

El "DILEMA DE LOS SCI" con partículas materiales (Charla 1) y con luz (MM) conducen a que:

NINGUNA OBSERVACIÓN
PERMITE IDENTIFICAR LOS "SCI EN REPOSO"
DE ENTRE TODOS LOS SCI

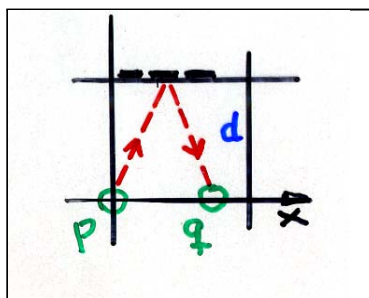
o más aún (**principio de relatividad**):

"las leyes de la mecánica y la velocidad de la luz
son las mismas en todos los SCI"

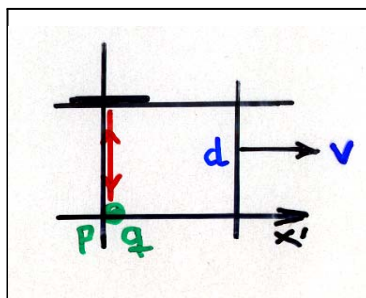
El principio de relatividad cuestiona el ETG. Veámoslo \rightsquigarrow

IMAGINEMOS dos sucesos "conectados por luz":

Asignemos coordenadas desde dos SCI, con (módulo de la) velocidad relativa v , uno de ellos "comóvil" con ambos sucesos:



SCI κ ($\rightsquigarrow (x, y, z, \tau)$)



SCI κ' ($\rightsquigarrow (x', y' = y, z' = z, \tau')$)

Sucesos: $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} : \text{emisión de luz en el origen de } \kappa' \text{ (coincidente} \\ \text{entonces con el origen de } \kappa) \\ \mathbf{q} : \text{recepción, en el origen de } \kappa' \text{ ("comóvil")} \text{ de la luz} \\ \text{reflejada en un espejo (fijo } x' = 0, y' = d, z' = 0) \end{array} \right.$

Si el ET es el de Galileo (donde el tiempo es absoluto) resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_q - x_p \equiv 2 \Delta x \\ \tau_q - \tau_p = 2d/c \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_q - x'_p = 0 \\ \tau'_q - \tau'_p = 2d/c \end{array} \right.$$

Pero habida cuenta de MM (principio de relatividad) se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_q - x_p \equiv 2 \Delta x \\ \tau_q - \tau_p = 2\sqrt{d^2 + \Delta x^2}/c \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_q - x'_p = 0 \\ \tau'_q - \tau'_p = 2d/c \end{array} \right. ,$$

y esto último sugiere:

• una **dilatación de tiempo** en el SCI "no-comóvil": $\tau_q - \tau_p > \tau'_q - \tau'_p$.
Más concretamente:

$$v = \frac{x_q - x_p}{\tau_q - \tau_p} = \frac{\Delta x}{\sqrt{d^2 + \Delta x^2}} c, \Rightarrow \Delta x = d \frac{v}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_q - \tau_p = (\tau'_q - \tau'_p) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

(\rightsquigarrow fenómeno apreciable a "altas velocidades" frente a c)

• un **producto escalar lorentziano** (Obs. 3.1) en el ET:

$$(x_q - x_p)^2 - c^2(\tau_q - \tau_p)^2 = -4d^2 = (x'_q - x'_p)^2 - c^2(\tau'_q - \tau'_p)^2$$

($\rightsquigarrow c$ "homogeneiza" espacio y tiempo)

Observación 3.1 **PRODUCTOS ESCALARES CANÓNICOS**

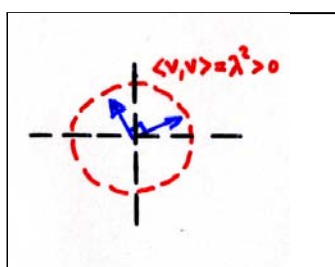
Producto escalar lorentziano (en un espacio vectorial) $\langle \cdot, \cdot \rangle$: forma bilineal, simétrica, no degenerada y de "índice" 1

En un esp. vect. lorentz, un vector \mathbf{v} se dice: **temporal** si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$, **luz** si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, **espacial** si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ ó $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

COMPARACIÓN entre productos escalares "canónicos" en \mathbb{R}^2

EUCLÍDEO

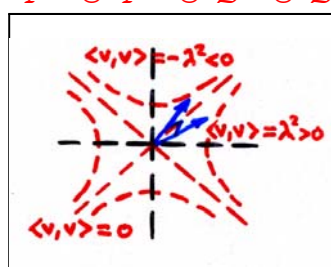
$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := v^1 w^1 + v^2 w^2$$



LORENTZIANO

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := v^1 w^1 - v^2 w^2$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^- \cup \mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^- \cup \mathcal{E}$$



(1) Desigualdad de Schwarz (con norma $|\mathbf{v}| := \sqrt{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|}$):

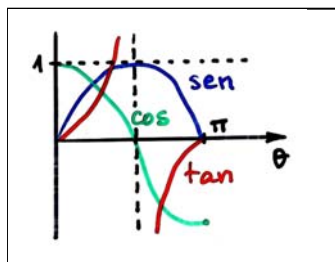
$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{T} \cup \mathcal{L}, |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \geq |\mathbf{v}| |\mathbf{w}|$$

("=" sii $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$)

de donde se sigue:

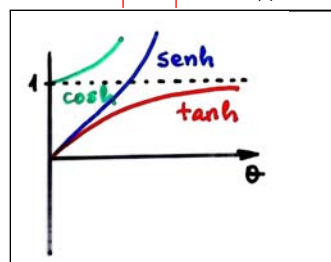
$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \exists! \theta \in [0, \pi]$$

con $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \theta$



$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{L}^+, \exists! \theta \in [0, \infty]$$

con $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -|\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cosh \theta$
(convenio: $|\mathbf{w}| = 0 \Leftrightarrow \theta = \infty$)



(2) Proyecciones:

$\forall \mathbf{v} (\neq \mathbf{0})$ y $\forall \mathbf{w}$, existen

$$\begin{cases} \mathbf{w}^{\parallel} := \langle \mathbf{w}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \rangle \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ \mathbf{w}^{\perp} := \mathbf{w} - \mathbf{w}^{\parallel} \end{cases}$$

$\forall \mathbf{v} (\neq \mathbf{0}) \in \mathcal{T} \cup \mathcal{E}$ y $\forall \mathbf{w}$, existen

$$\begin{cases} \mathbf{w}^{\parallel} := \mp \langle \mathbf{w}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \rangle \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ \mathbf{w}^{\perp} := \mathbf{w} - \mathbf{w}^{\parallel} \end{cases}$$

que verifican:

(en todo caso)

$$\begin{cases} |\mathbf{w}^{\parallel}| = |\mathbf{w}| |\cos \theta| \\ |\mathbf{w}^{\perp}| = |\mathbf{w}| |\sin \theta| \end{cases}$$

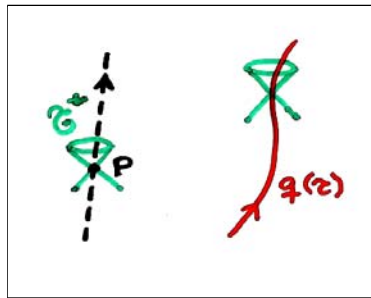
(si $\mathbf{v} \in \mathcal{T}^+$ y $\mathbf{w} \in \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{L}^+$)

$$\begin{cases} |\mathbf{w}^{\parallel}| = |\mathbf{w}| \cosh \theta \\ |\mathbf{w}^{\perp}| = |\mathbf{w}| \sinh \theta \end{cases} \quad \blacksquare$$

4. MECÁNICA MINKOWSKIANA. OBSERVACIONES RELATIVISTAS

El resultado de Michelson-Morley sugiere nuevo modelo de ET:

ET de Minkowski $\mathbb{E}_1^{\uparrow} \equiv (\mathbb{A}^4, \eta, \uparrow)$, siendo:



(i) $\eta \in \mathfrak{T}_2^0(\mathbb{A}^4)$, "métrica" (Obs. 4.1) en un espacio afín \mathbb{A}^4 inducida por un producto escalar lorentziano en el espacio vectorial asociado \mathbb{V}^4 (canónicamente isomorfo a cualquier $\mathbb{T}_p\mathbb{A}^4$, Observación 1.1)

(ii) \uparrow , elección como "futuro" de una (\mathcal{T}^+) de las dos componentes conexas del conjunto (de vectores tangentes "temporales")

$$\mathcal{T} := \{v \in \mathbb{T}\mathbb{A}^4 \mid \eta(v, v) < 0\}$$

En el ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI (ETM):

- NO existe noción absoluta de simultaneidad
- Tiene sentido el "intervalo" entre sucesos arbitrarios

$$\Delta_{p,p'}^2 := \eta(p' - p, p' - p)$$

- **Partícula material:** $q(\tau)$ curva tal que $\eta(\dot{q}, \dot{q}) = -c^2$ y \dot{q} futuro
- Cada partícula material posee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m > 0 \\ \text{tiempo propio } \tau \text{ (fijado por la imagen de } \mathbf{q}) \\ \text{energía-momento } \mathbf{P}_q := m \dot{\mathbf{q}} \text{ (ver luego)} \\ \text{fuerza } \mathbf{F}_q := m \ddot{\mathbf{q}} \text{ (no es la segunda ley de Newton)} \end{array} \right.$$

Se dice que $q(\tau)$ es libre si $\ddot{\mathbf{q}} = 0$

$$(\Leftrightarrow \mathbf{q}(\tau) = \mathbf{p} + \tau \mathbf{v}, \text{ con } \mathbf{p} \in \mathbb{A}^4, \eta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -c^2 \text{ y } \mathbf{v} \text{ futuro})$$

- **Partícula luz (o fotón):** $q(\tau)$ curva tal que $\eta(\dot{q}, \dot{q}) = 0$, \dot{q} futuro y $\ddot{\mathbf{q}} = 0$ (\rightsquigarrow toda partícula luz es "libre")

Cada partícula luz posee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m = 0 \text{ (ver luego)} \\ \text{energía-momento } \mathbf{P}_q := \dot{\mathbf{q}} \text{ (ver luego)} \end{array} \right.$$

Observación 4.1 **CAMPOS DE TENSORES. MÉTRICAS**

Dado espacio vectorial \mathbf{V} (sobre \mathbb{R}), se tiene:

Espacio vectorial dual $\mathbf{V}^* := \mathbf{L}(\mathbf{V}, \mathbb{R}) \rightsquigarrow$

E. v. de **tensores** (de tipo $\binom{r}{s}$ s. \mathbf{V}) $\mathbf{T}_s^r(\mathbf{V}) := \mathbf{L}(\underbrace{\mathbf{V}^* \times \dots \times \mathbf{V}^*}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{\mathbf{V} \times \dots \times \mathbf{V}}_{s \text{ veces}}, \mathbb{R})$

- $\mathbf{T}_0^1(\mathbf{V}) := \mathbf{L}(\mathbf{V}^*, \mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq \text{can.}} \mathbf{V}$, con $\tau \mapsto \mathbf{t}$ tal que $\tau(\omega) =: \omega(\mathbf{t})$
- $\mathbf{T}_1^0(\mathbf{V}) := \mathbf{L}(\mathbf{V}, \mathbb{R}) =: \mathbf{V}^*$
- $\mathbf{T}_1^1(\mathbf{V}) := \mathbf{L}(\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq \text{can.}} \mathbf{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$, con $\tau(\omega, \mathbf{v}) =: \omega(\mathbf{t}(\mathbf{v}))$
- $\mathbf{T}_3^1(\mathbf{V}) := \mathbf{L}(\mathbf{V}^* \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq \text{can.}} \mathbf{L}(\mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}, \mathbf{V})$, . . .

Base $\{\mathbf{e}_i\}$ (de \mathbf{V}) \rightsquigarrow Base dual $\{\epsilon^i\}$ (de \mathbf{V}^*) tal que $\epsilon^i(\mathbf{e}_j) := \delta_j^i \rightsquigarrow$

Componentes (de $\tau \in \mathbf{T}_s^r(\mathbf{V})$ en $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\epsilon^i\}$) $\tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} := \tau(\epsilon^{i_1}, \dots, \epsilon^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s})$

Trazas tr_b^a ($a \in \{1, \dots, r\}, b \in \{1, \dots, s\}$) de tensores $\binom{r}{s}$

- $\text{tr}_1^1: \mathbf{T}_1^1(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbf{T}_0^0(\mathbf{V}) \equiv \mathbb{R}$, $\tau \mapsto \sum_{i=1}^n \tau_i^i$
- $\text{tr}_2^1: \mathbf{T}_3^1(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbf{T}_2^0(\mathbf{V})$, $\tau \mapsto \sum_{i=1}^n \tau_{i \cdot i}^i$

Las tr_b^a bien definidas: $b = b' \mathbf{A} \Rightarrow \tau_b = \mathbf{A}^{-1} \tau_{b'} \mathbf{A} \Rightarrow \text{tr}(\tau_b) = \text{tr}(\tau_{b'})$

Un producto escalar $\langle, \rangle \in \mathbf{T}_2^0(\mathbf{V})$ (Obs. 3.1) da lugar a:

- isomorfismo $\mathbf{V} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{V}^*$, $\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle$ (\rightsquigarrow bajada/subida índices)
- tr_{ab} bien definidas ($b = b' \mathbf{A} \Rightarrow \langle, \rangle_b = \mathbf{A}^T \langle, \rangle_{b'} \mathbf{A} \Rightarrow \text{tr}(\langle, \rangle_b) \neq \text{tr}(\langle, \rangle_{b'})$)

Dada variedad $\mathbf{M} \rightsquigarrow$ módulo $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$ (Obs. 1.1), se tiene:

Módulo de 1-formas $\mathfrak{X}^*(\mathbf{M}) := \mathcal{L}(\mathfrak{X}(\mathbf{M}), \mathbf{C}^\infty(\mathbf{M})) \rightsquigarrow$

Módulo de campos de tensores (de tipo $\binom{r}{s}$ sobre \mathbf{M})

$$\mathfrak{T}_s^r(\mathbf{M}) := \mathcal{L}(\underbrace{\mathfrak{X}^*(\mathbf{M}) \times \dots \times \mathfrak{X}^*(\mathbf{M})}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \dots \times \mathfrak{X}(\mathbf{M})}_{s \text{ veces}}, \mathbf{C}^\infty(\mathbf{M}))$$

Métrica (semi)riemanniana $\mathbf{g} \in \mathfrak{T}_2^0(\mathbf{M})$: asignación "diferenciable" de un producto escalar (riemanniano si el "índice" es 0, euclídeo; lorentziano si el "índice" es 1) en cada espacio tangente.

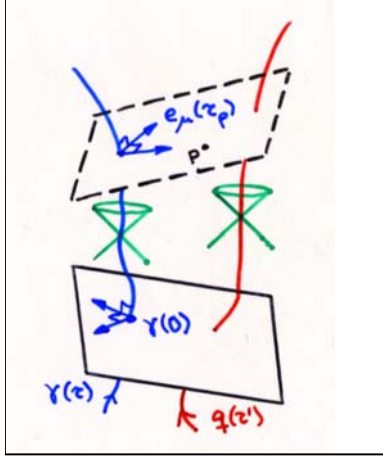
En cada (\mathbf{M}, \mathbf{g}) :

- la \mathbf{g} no "metriza" a \mathbf{M} (salvo \mathbf{g} riemanniana y \mathbf{M} conexa)
- existe isomorfismo $\mathfrak{X}(\mathbf{M}) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{X}^*(\mathbf{M})$, $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{X}, \cdot)$
- resulta $\text{tr} \mathbf{g} \equiv \text{tr}_{12} \mathbf{g} = \dim(\mathbf{M})$
- existen el gradiente $\text{grad} f$ de una función (definido por la condición $\mathbf{g}(\text{grad} f, \mathbf{Z}) := \text{df}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}(f)$), la divergencia $\text{div} \mathbf{X}$ de un campo (Obs. 8.1) y el laplaciano $\Delta f := \text{div}(\text{grad} f)$ de una función
- dada carta $\mathbf{x} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, se definen n^2 funciones (sólo $n(n+1)/2$ independientes) $\mathbf{g}_{ij} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{U})$ (componentes de \mathbf{g} en \mathbf{x}) por

$$\mathbf{g}_{ij} := \mathbf{g}(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) , \quad (16)$$

y también funciones $\mathbf{g}^{ij} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{U})$ tales que (\mathbf{g}^{ij}) es la matriz inversa de (\mathbf{g}_{ij}) (esto es, $\sum_{k=1}^n \mathbf{g}^{ik} \mathbf{g}_{kj} = \delta_j^i$) ■

- **Sistemas de coordenadas (SC):** parejas $\kappa \equiv (\gamma(\tau), \{e_\mu(\tau)\})$, con



$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(\tau) \text{ partícula material que} \\ \text{representa el "origen"} \\ \{e_\mu(\tau)\} \text{ 3 campos de vectores} \\ \text{sobre } \gamma(\tau) \text{ que, junto con } \dot{\gamma}(\tau)/c, \\ \text{constituyen base orton. móvil} \\ \text{de } \mathbf{V}^4 \text{ y representan los "ejes"} \end{array} \right.$

Cada SC κ asocia, a cada suceso \mathbf{p} (de cierto abierto, en general no todo \mathbf{A}^4), coordenadas $(\tilde{\mathbf{x}} \equiv (x^1, x^2, x^3), x^4)$ dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} - \gamma(\tau_p) =: \sum_{\mu=1}^3 x^\mu(\mathbf{p}) e_\mu(\tau_p) \\ x^4(\mathbf{p}) := c\tau_p, \text{ con } \mathbf{p} - \gamma(\tau_p) \perp \dot{\gamma}(\tau_p) \end{array} \right.$$

$([x^4] = [x^\mu] = [L])$, homogeneizamos el tiempo con la longitud vía c

En particular el SC κ asocia, a cada partícula $\mathbf{q}(\tau')$, coordenadas $(\tilde{\mathbf{q}}(\tau') := \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{q}(\tau')), q^4(\tau') := x^4(\mathbf{q}(\tau')))$ que verifican:

$$\boxed{\mathbf{q}(\tau') - \gamma(\tau_{\mathbf{q}(\tau')}) = \sum_{\mu=1}^3 q^\mu(\tau') e_\mu(\tau_{\mathbf{q}(\tau')})} \quad \text{y} \quad \boxed{q^4(\tau') = c\tau_{\mathbf{q}(\tau')}} ,$$

y resulta:

$$\dot{\mathbf{q}}(\tau') = \sum_{i=1}^4 \dot{q}^i(\tau') \partial/\partial x^i |_{\mathbf{q}(\tau')} \equiv \dot{q}^4(\tau') (\partial/\partial x^4 |_{\mathbf{q}(\tau')} + \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa}(\tau')/c), \quad (17)$$

donde la **velocidad relativa** $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa}$ está definida por

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa} := d\tilde{\mathbf{q}}/d\tau_{\mathbf{q}} = c d\tilde{\mathbf{q}}/dq^4 = c \dot{\tilde{\mathbf{q}}}/\dot{q}^4 \quad (18)$$

- **Sistemas de coordenadas inerciales (SCI):** aquellos SC

con $\ddot{\gamma} = 0$ y $\dot{e}_\mu = 0$ o también

t.q. que los campos coordenados $\{\partial/\partial x^i\}$ verifican: $\partial/\partial x^i |_{\mathbf{q}} = T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\partial/\partial x^i |_{\mathbf{p}})$,

con $T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ dado en (2), así los campos coordenados son "constantes" (y por tanto ortonormales en todo punto). Entonces se tiene:

$$\dot{\mathbf{q}}(\tau') = \underbrace{\dot{q}^4(\tau')}_{|\dot{q}^\parallel|} \dot{\gamma}/c + \underbrace{\dot{q}^4(\tau') \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa}(\tau')/c}_{\dot{q}^\perp} \quad (19)$$

OBSERVACIONES de $\mathbf{q}(\tau')$ desde un SCI $\kappa \equiv \{\gamma(\tau), \{e_\mu(\tau)\}\}$:

- **Composición de velocidades.** Puesto que $|\dot{q}^\parallel| = |\dot{\mathbf{q}}| \cosh \theta$ y $|\dot{q}^\perp| = |\dot{\mathbf{q}}| \sinh \theta$ (con $\theta(\tau') \in [0, \infty]$ tal que $\eta(\dot{\mathbf{q}}(\tau'), \dot{\gamma}) =: -c |\dot{\mathbf{q}}| \cosh \theta(\tau')$, Obs. 3.1), se sigue:

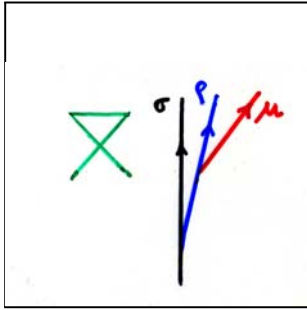
$$\boxed{|\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa}| = c \tanh \theta \left\{ \begin{array}{l} < c, \text{ si } \mathbf{q} \text{ material} \\ = c, \text{ si } \mathbf{q} \text{ luz} \end{array} \right.}, \quad (20)$$

lo que altera radicalmente la composición galileana de velocidades:

Un cohete ρ abandona una estación espacial σ (ambos libres) con velocidad $v_1 > 0$ ("hacia adelante") relativa a la estación, y un astronauta μ abandona el cohete con velocidad $v_2 > 0$ (también "hacia adelante", para simplificar) relativa al cohete. Se sigue de (20) que la velocidad v del astronauta relativa a la estación es (los parámetros θ resultan aditivos en 1 dimensión espacial!!):

$$v = c \tanh(\theta_1 + \theta_2) = c \frac{\tanh \theta_1 + \tanh \theta_2}{1 + \tanh \theta_1 \tanh \theta_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}, \quad (21)$$

que proporciona el conocido límite galileano $v = v_1 + v_2$ (si $v_1, v_2 \ll c$)



Experimentos confirman (20):
Según MM (Charla 3) el módulo de la velocidad relativa de la luz en el vacío respecto de cualquier SCI toma siempre el mismo valor
El que "nada alcanza a la luz" es consistente con (28)

• **Dilatación de tiempo** en κ respecto de q material.

Se sigue de $q^4 = c \tau|_q$, de (19) y de la Obs. 3.1:

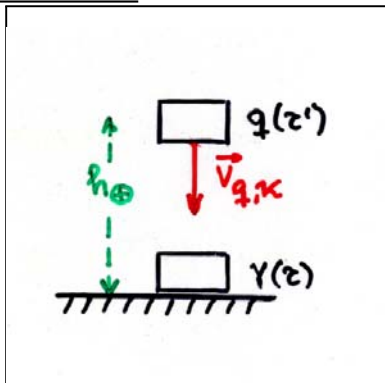
$$\frac{d\tau_q}{d\tau'} = \frac{\dot{q}^4}{c} = \frac{|\dot{q}^{\parallel}|}{c} = \cosh \theta \equiv (1 - \tanh^2 \theta)^{-1/2} \geq 1$$

(si q fuera luz, la tercera igualdad dejaría de ser cierta), con ">" si y sólo si κ es no-comóvil con q . Y de (20) se concluye:

$$\frac{d\tau_q}{d\tau'} = \frac{\dot{q}^4}{c} = \left(1 - \frac{|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (22)$$

que modifica todas las expresiones galileanas, en particular las de la aberración de la luz y del efecto Doppler (Charla 5)

Experim. (1941-). Muones producidos a altura $h_{\oplus} = 60 \text{ km}$, con



$|\tilde{v}_{q,\kappa}| = 0.99975 c$ ($\Rightarrow \Delta\tau \simeq 2 \cdot 10^{-4} \text{ seg}$)
y "semivida" (comóvil) $T \simeq 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ seg}$
(con $T := \frac{\ln 2}{a}$ para $N(\tau') = N(0) e^{-a\tau'}$)

Aunque $\Delta\tau \simeq 133 T$, los muones detectados en tierra suponen no $\frac{1}{2^{133}} \simeq 10^{-40}$ sino $\frac{1}{8}$ del total emitido

Explicación: se sigue de (22) que $\Delta\tau' = \left(1 - \frac{|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2}{c^2}\right)^{1/2} \Delta\tau \simeq \frac{3}{133} \Delta\tau \simeq 3 T$

- **Energía y momento** de \mathbf{q} en κ . Se definen (Obs. 3.1):

$$\mathbf{P}_q(\tau') \equiv \underbrace{-\eta(\mathbf{P}_q(\tau'), \dot{\gamma}/c)}_{|\mathbf{P}_q^\parallel| =: \mathbf{E}_{q,\kappa}/c} \dot{\gamma}/c + \underbrace{\mathbf{P}_q(\tau') + \eta(\mathbf{P}_q(\tau'), \dot{\gamma}/c) \dot{\gamma}/c}_{\mathbf{P}_q^\perp =: \tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa}}, \quad (23)$$

con lo que (al ser \mathbf{P}_q un múltiplo positivo de $\dot{\mathbf{q}}$) se sigue de (19):

$$\tilde{\mathbf{v}}_{q,\kappa} = c \dot{\mathbf{q}}^\perp / |\dot{\mathbf{q}}^\parallel| = c \mathbf{P}_q^\perp / |\mathbf{P}_q^\parallel| = c^2 \tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa} / \mathbf{E}_{q,\kappa} \quad (24)$$

- (i) Si \mathbf{q} es material, se sigue de $\mathbf{P}_q := m\dot{\mathbf{q}}$ y (23):

$$\mathbf{E}_{q,\kappa}^2 = m^2 c^4 + c^2 |\tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa}|^2 \quad (25)$$

y también, habida cuenta de (19) y (22):

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{q,\kappa} = m c \dot{\mathbf{q}}^4 = m c^2 (1 - \frac{|\tilde{\mathbf{v}}_{q,\kappa}|^2}{c^2})^{-1/2} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa} = m \tilde{\mathbf{v}}_{q,\kappa} \frac{\dot{\mathbf{q}}^4}{c} = m \tilde{\mathbf{v}}_{q,\kappa} (1 - \frac{|\tilde{\mathbf{v}}_{q,\kappa}|^2}{c^2})^{-1/2} \end{cases}, \quad (26)$$

de donde a su vez se concluye:

$$\text{Para } |\tilde{\mathbf{v}}_{q,\kappa}| \ll c, \text{ es } \begin{cases} \mathbf{E}_{q,\kappa} \simeq m c^2 + \frac{1}{2} m |\tilde{\mathbf{v}}_{q,\kappa}|^2 \\ \tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa} \simeq m \tilde{\mathbf{v}}_{q,\kappa} \end{cases} \quad (27)$$

$$\text{Para } |\tilde{\mathbf{v}}_{q,\kappa}| \rightarrow c, \text{ es } \mathbf{E}_{q,\kappa} \rightarrow \infty \quad (28)$$

- (ii) Y si \mathbf{q} es luz, se sigue de $\mathbf{P}_q := \dot{\mathbf{q}}$ y (23):

$$\mathbf{E}_{q,\kappa} = c |\tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa}|, \quad (29)$$

de donde a su vez se concluye: si (29) debe ser el límite de (25) cuando $|\tilde{\mathbf{v}}_{q,\kappa}| \rightarrow c$, debe atribuirse masa nula a las partículas luz

Experimentos. Plena confirmación (1950-, en aceleradores):

Efectos fotoeléctrico (Einstein 1905) y Compton (1927) sugieren que, en su propagación, la luz está constituida (también) por **PARTÍCULAS** ("fotones"), cuya energía y momento verifican

$$\mathbf{E}_{q,\kappa} = h_P \nu_{q,\kappa} = c |\tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa}| \quad (30)$$

(con **cte. de Planck** $h_P \simeq 6'6 \cdot 10^{-27}$ erg seg y **frecuencia** $\nu_{q,\kappa}$ de la onda electromagnética asociada), lo que es consistente con (29)

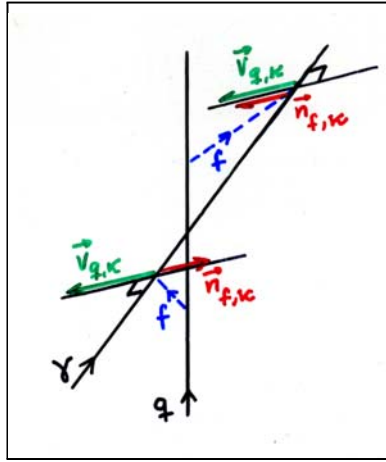
Usando (26) y (30) se tiene conservación exacta de momento y energía en las colisiones (en particular, en fisión y fusión nuclear)

Finalmente, tanto los "límites galileanos" (27) como el que la energía necesaria para "acelerar" partículas a la velocidad de la luz es infinita (28) resultan acordes con los experimentos.

5. MÁS OBSERVACIONES RELATIVISTAS

En el ETM \mathbb{E}_1^{\uparrow} (Charla 4), prosigamos con más OBSERVACIONES de $\mathbf{q}(\tau')$ desde un SCI $\kappa \equiv \{\gamma(\tau), \{\mathbf{e}_\mu(\tau)\}\}$:

- **Efecto Doppler.** Sea $\mathbf{q}(\tau')$ material y libre (simplificación).



Supongamos que $\mathbf{q}(\tau')$ "emite" un fotón \mathbf{f} con energía (respecto de un SCI ligado a \mathbf{q}) dada por (23):

$$\mathbf{E}_{\text{em}} := -\eta(\mathbf{P}_f, \dot{\mathbf{q}})$$

Y supongamos que $\gamma(\tau)$ "recibe" el fotón \mathbf{f} con energía (respecto de κ) dada también por (23): $\mathbf{E}_{\text{rec}} := -\eta(\mathbf{P}_f, \dot{\gamma})$

El efecto Doppler es la relación que hay entre $\mathbf{E}_{\text{em}}/\mathbf{E}_{\text{rec}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa}$ (\equiv velocidad de \mathbf{q} respecto de κ , que es constante al haber supuesto \mathbf{q} libre)

Se deduce por una parte de (19) y $\dot{\mathbf{q}}^4 = |\dot{\mathbf{q}}^\parallel| = c \cosh \theta$ (con $\theta \in [0, \infty]$ tal que $\eta(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\gamma}) =: -c^2 \cosh \theta$), y por otra de (23) y (29):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^4 (\dot{\gamma}/c + \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa}/c) = \cosh \theta (\dot{\gamma} + \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa}) \\ \mathbf{P}_f =: \mathbf{E}_{\text{rec}} \dot{\gamma}/c^2 + \tilde{\mathbf{P}}_{f,\kappa} = \mathbf{E}_{\text{rec}}/c (\dot{\gamma}/c - \tilde{\mathbf{n}}_{f,\kappa}) \end{cases}$$

(para cierto $\tilde{\mathbf{n}}_{f,\kappa} (\perp \dot{\gamma})$ unitario, "dirección de recepción" de \mathbf{f}). Y se sigue (ya que de (20) se sigue $\cosh \theta = 1 / \sqrt{1 - |\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa}|^2/c^2}$):

$$\begin{aligned} \eta(\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa} \tilde{\mathbf{n}}_{f,\kappa}) &= \eta(\dot{\mathbf{q}}/\cosh \theta - \dot{\gamma}, -c\mathbf{P}_f/\mathbf{E}_{\text{rec}} + \dot{\gamma}/c) = \\ &= \frac{-c}{\mathbf{E}_{\text{rec}} \cosh \theta} \underbrace{\eta(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{P}_f)}_{-\mathbf{E}_{\text{em}}} + \frac{1}{c \cosh \theta} \underbrace{\eta(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\gamma})}_{-c^2 \cosh \theta} + \frac{c}{\mathbf{E}_{\text{rec}}} \underbrace{\eta(\dot{\gamma}, \mathbf{P}_f)}_{-\mathbf{E}_{\text{rec}}} - \frac{1}{c} \underbrace{\eta(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}_{-c^2} = \\ &= c \left(\frac{\mathbf{E}_{\text{em}}}{\mathbf{E}_{\text{rec}} \cosh \theta} - 1 \right), \Rightarrow \frac{\mathbf{E}_{\text{em}}}{\mathbf{E}_{\text{rec}}} = \frac{1 + \eta(\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{f,\kappa})/c}{\sqrt{1 - |\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa}|^2/c^2}} \end{aligned}$$

Si el movimiento de \mathbf{q} respecto de γ es "radial" ($\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa} \sim \tilde{\mathbf{n}}_{f,\kappa}$), resulta $\eta(\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa}, \tilde{\mathbf{n}}_{f,\kappa}) = \pm |\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q},\kappa}| =: \mathbf{v}_D$ (**velocidad Doppler**, $\mathbf{v}_D > 0$ si hay "alejamiento" y $\mathbf{v}_D < 0$ si hay "acercamiento"). Y se concluye

$$\boxed{\frac{\mathbf{E}_{\text{em}}}{\mathbf{E}_{\text{rec}}} = \frac{1 + \mathbf{v}_D/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_D^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1 + \mathbf{v}_D/c}{1 - \mathbf{v}_D/c}}} \quad (31)$$

Observación 5.1 **TRIGONOMETRÍA LORENTZ**

Dados $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{E}_1^{4\uparrow}$ (espacio-tiempo de Minkowski), existe una única curva $\sigma_{\mathbf{p}\mathbf{q}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}_1^{4\uparrow}$ entre \mathbf{p} y \mathbf{q} tal que $\ddot{\sigma}_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, a saber: $\sigma_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(s) := \mathbf{p} + s(\mathbf{q} - \mathbf{p})$.

Notaciones:

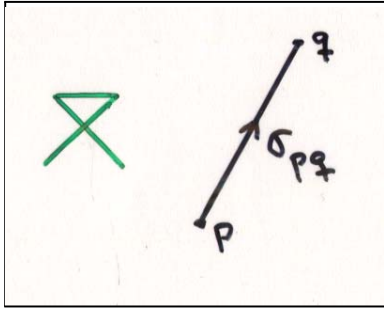
$$\tilde{\mathbf{p}\mathbf{q}} \equiv \dot{\sigma}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(0) \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{E}_1^{4\uparrow} \quad \text{y} \quad \mathbf{pq} \equiv |\tilde{\mathbf{p}\mathbf{q}}| := \sqrt{|\eta(\tilde{\mathbf{p}\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}\mathbf{q}})|} \geq 0$$

En cualquier SCI $\kappa \rightsquigarrow (x^1, x^2, x^3, x^4)$ se tiene:

$$\tilde{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \sum_1^4 (x^i(\mathbf{q}) - x^i(\mathbf{p})) \partial/\partial x^i|_{\mathbf{p}}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{pq} = \sqrt{|\sum_1^3 (x^\mu(\mathbf{q}) - x^\mu(\mathbf{p}))^2 - (x^4(\mathbf{q}) - x^4(\mathbf{p}))^2|}$$

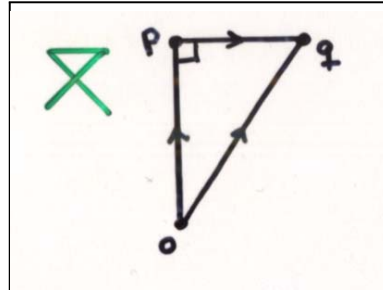
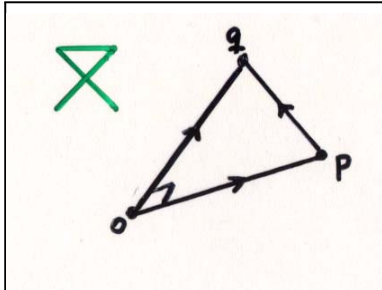
• Sean $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{E}_1^{4\uparrow}$, con $\tilde{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ temporal futuro. Entonces \mathbf{pq} es c veces el tiempo propio transcurrido para la única partícula (material) libre $\omega(\tau)$ entre \mathbf{p} y \mathbf{q} .



En efecto: $\sigma_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(s)$ es reparametrización de $\omega(\tau)$ (i.e. $\sigma_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(s) = \omega(\mathbf{h}(s))$), \Rightarrow
 $\Rightarrow \dot{\sigma}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(s) = \frac{d\mathbf{h}}{ds}(s) (\dot{\omega}(\mathbf{h}(s)))$, y se tiene:

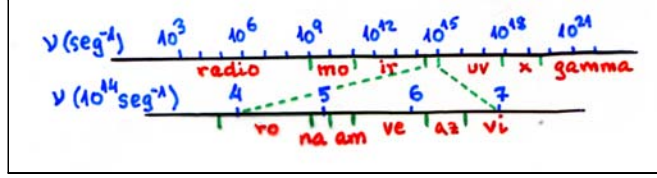
$$\begin{aligned} c \Delta\tau &\equiv \int_0^{\Delta\tau} |\dot{\omega}(\tau)| d\tau = \\ &= \int_0^1 |\dot{\omega}(\mathbf{h}(s))| \left| \frac{d\mathbf{h}}{ds}(s) \right| ds = \\ &= \int_0^1 |\dot{\sigma}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(s)| ds = |\dot{\sigma}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(0)| \equiv \mathbf{pq} \end{aligned}$$

• Sean $\mathbf{o}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{E}_1^{4\uparrow}$, con $\tilde{\mathbf{o}\mathbf{p}}$ espacial y $\tilde{\mathbf{o}\mathbf{q}}$ temporal. Entonces cualesquiera dos de las tres afirmaciones: (i) $\tilde{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ es luz, (ii) $\tilde{\mathbf{o}\mathbf{p}} \perp \tilde{\mathbf{o}\mathbf{q}}$ y (iii) $\mathbf{op} = \mathbf{oq}$, implican la tercera (demostración muy sencilla!)



• Sean $\mathbf{o}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{E}_1^{4\uparrow}$, con $\tilde{\mathbf{o}\mathbf{p}}$ y $\tilde{\mathbf{o}\mathbf{q}}$ temporales futuros (o ambos temporales pasados) y $\tilde{\mathbf{o}\mathbf{p}} \perp \tilde{\mathbf{p}\mathbf{q}}$. Entonces se verifica: (i) $\mathbf{oq}^2 = \mathbf{op}^2 - \mathbf{pq}^2$, (ii) $\mathbf{op} = \mathbf{oq} \cosh \theta$ y (iii) $\mathbf{pq} = \mathbf{oq} \sinh \theta$, con $\theta \in [0, \infty]$ tal que (Obs. 3.1) $\eta(\tilde{\mathbf{o}\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{o}\mathbf{q}}) =: -\mathbf{op} \mathbf{oq} \cosh \theta$ (demostración muy sencilla!) ■

La **frecuencia** ν y la **longitud de onda** λ de la luz verifican (en el vacío) $c = \lambda\nu$, lo que da lugar al siguiente **espectro**:



Se sigue de (30) y (31) un **desplazamiento de frecuencia** entre el emisor q y el receptor γ (libres y en movimiento relativo "radial")

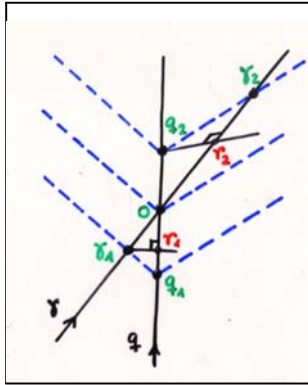
$$z := \frac{\nu_{em}}{\nu_{rec}} - 1 = \frac{E_{em}/h}{E_{rec}/h} - 1 = \sqrt{\frac{1+v_D/c}{1-v_D/c}} - 1, \quad (32)$$

con lo que el desplazamiento es "al rojo" ($\equiv z > 0$) si hay alejamiento y "al violeta" ($\equiv z < 0$) si hay acercamiento.

Ejemplo: para $v_D/c = 3/5$ y $\nu_{em} = 7'6 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1}$ (extremo violeta), resultaría $z = 1$, esto es $\nu_{rec} = 3'8 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1}$ (extremo rojo).

Pues bien, usando la Observación 5.1 resulta posible obtener directamente (32), lo que refuerza la hipótesis (30). Veámoslo.

Supongamos que $q(\tau')$ "emite" una onda electromagnética con frecuencia (respecto de un SCI ligado a q) ν_{em} , esto es, con un "pico" en la emisión cada $oq_2 = 1/\nu_{em} = oq_1$ segundos (figura).



Y supongamos que $\gamma(\tau)$ "recibe" la onda con frecuencia (respecto de κ) ν_{rec} , esto es, con un "pico" en la recepción, cada $o\gamma_{\{1\}^2} = 1/\nu_{rec}$ segundos (elección "superior" para la fase de alejamiento e "inferior" para la de acercamiento).

Pero se sigue de (20)

$$\begin{cases} \cosh \theta \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2/c^2}} \\ \sinh \theta \equiv \frac{\tanh \theta}{\sqrt{1-\tanh^2 \theta}} = \frac{|\tilde{v}_{q,\kappa}|/c}{\sqrt{1-|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2/c^2}}, \end{cases}$$

con lo que se tiene (Obs. 5.1):

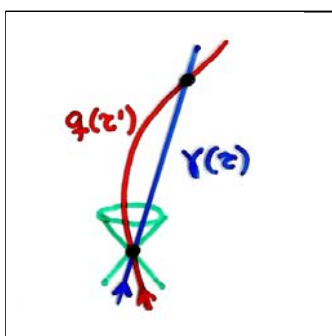
$$\begin{cases} o\gamma_2 = or_2 + r_2\gamma_2 = or_2 + r_2oq_2 = oq_2 (\cosh \theta + \sinh \theta) = oq_2 \frac{1+|\tilde{v}_{q,\kappa}|/c}{\sqrt{1-|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2/c^2}} = \\ = oq_2 \sqrt{\frac{1+|\tilde{v}_{q,\kappa}|/c}{1-|\tilde{v}_{q,\kappa}|/c}} \\ oq_1 = or_1 + r_1oq_1 = or_1 + r_1\gamma_1 = o\gamma_1 (\cosh \theta + \sinh \theta) = o\gamma_1 \frac{1+|\tilde{v}_{q,\kappa}|/c}{\sqrt{1-|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2/c^2}} = \\ = o\gamma_1 \sqrt{\frac{1+|\tilde{v}_{q,\kappa}|/c}{1-|\tilde{v}_{q,\kappa}|/c}}, \Rightarrow o\gamma_1 = oq_1 \sqrt{\frac{1-|\tilde{v}_{q,\kappa}|/c}{1+|\tilde{v}_{q,\kappa}|/c}}, \end{cases}$$

de donde en efecto se concluye:

$$z := \frac{\nu_{em}}{\nu_{rec}} - 1 = \frac{o\gamma_{\{1\}^2}}{oq_{\{1\}^2}} - 1 = \sqrt{\frac{1\pm|\tilde{v}_{q,\kappa}|/c}{1\mp|\tilde{v}_{q,\kappa}|/c}} - 1 = \sqrt{\frac{1+v_D/c}{1-v_D/c}} - 1$$

- **Paradoja de los gemelos.** Si dos partículas $q(\tau')$ (material) y $\gamma(\tau)$ (material y libre) tienen dos sucesos de coincidencia, digamos $\gamma(0) = q(0)$ y $\gamma(\Delta\tau) = q(\Delta\tau')$, entonces $\Delta\tau \geq \Delta\tau'$.

En efecto, basta tomar un SCI con origen $\gamma(\tau)$ y aplicar (22).



Experimento (Pound-Rebka, 1960-): dos cristales de hierro, $\gamma(\tau)$ con temperatura $\Theta \simeq 0$ (\sim libre) y $q(\tau')$ con $\Theta' > \Theta$. La radiación gamma emitida por cada cristal (misma frecuencia propia $\frac{dN'}{d\tau'} = \frac{dN}{d\tau}$) se recibe con distintas frecuencias (efecto Doppler) en un SCI ligado al más frío ("laboratorio"). La diferencia relativa es

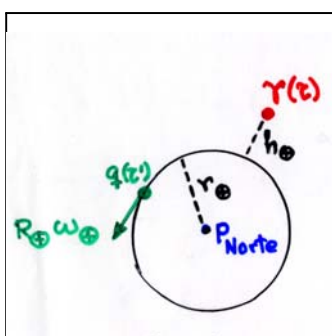
$$\left(\frac{dN'}{d\tau} - \frac{dN}{d\tau}\right) / \frac{dN}{d\tau} = (-2'09 \pm 0'24) \cdot 10^{-15} \Theta'$$

Explicación: la "velocidad cuadrática media" de los iones del cristal caliente es ("teoría cinética") $m_{Fe}(v^2)_{med}/2 \simeq 3k_B \Theta'/2$, con **constante de Boltzmann** $k_B \simeq 1'4 \cdot 10^{-16} \text{ erg kelvin}^{-1}$. Habida cuenta de $m_{Fe} = 57m_{pr}$ y $m_{pr}c^2 = 1'5 \cdot 10^{-3} \text{ erg}$, se sigue:

$$(v^2)_{med} \simeq \frac{3k_B \Theta'}{57m_{pr}} \simeq \frac{4'2 \cdot 10^{-13} \Theta' c^2}{57 \cdot 1'5} \simeq 5 \cdot 10^{-15} \Theta' c^2,$$

y de (22) se concluye:

$$\frac{dN'}{d\tau} - \frac{dN}{d\tau} = \left(1 - \frac{(v^2)_{med}}{c^2}\right)^{1/2} \frac{dN'}{d\tau'} - \frac{dN}{d\tau} \simeq \frac{-(v^2)_{med}}{2c^2} \frac{dN}{d\tau} \simeq -2'5 \cdot 10^{-15} \Theta' \frac{dN}{d\tau}$$



Experimento (Hafele-Keating, 1972): dos relojes de cesio (precisión 10^{-13} seg) sobre ecuador, $\gamma(\tau)$ en avión hacia Oeste a altura $h_{\oplus} \simeq 10 \text{ km}$ con velocidad (resp. del suelo) $(R_{\oplus} + h_{\oplus})\omega_{\oplus}$ (\sim libre) y $q(\tau')$ en tierra.

El retraso relativo observado es $(\Delta\tau - \Delta\tau') / \Delta\tau = 2,3 (\pm 0'2) \cdot 10^{-12}$

Explicación: habida cuenta del valor $R_{\oplus} \simeq 6'37 \cdot 10^6 \text{ m}$ y de que $|\tilde{v}_{q,\kappa}| = R_{\oplus}\omega_{\oplus} \simeq 463 \text{ m seg}^{-1}$, se sigue de (22):

$$\Delta\tau - \Delta\tau' = \left(1 - \left(1 - \frac{|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2}{c^2}\right)^{1/2}\right) \Delta\tau \simeq \frac{|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2}{2c^2} \Delta\tau \simeq 1'19 \cdot 10^{-12} \Delta\tau,$$

a lo que hay que sumar un "retraso gravitacional" de magnitud $(g_{\oplus} h_{\oplus} / c^2) \Delta\tau \simeq 1'09 \cdot 10^{-12} \Delta\tau$ (Charla 6). La concordancia de 10^{-1} entre teoría y experimento se mejoró a 10^{-4} (Vessot-Levine, 1977).

6. CAÍDA LIBRE. CONEXIONES

En el espacio "familiar" $(\mathbb{R}^3, <, >)$ la gravitación se describe (Ch. 2) por un potencial gravitatorio $\Phi(\mathbf{t}) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que las partículas materiales $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{t})$ en caída libre verifican (6)

$$\ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = -\tilde{\nabla}\Phi|_{\tilde{\mathbf{r}}}$$

La transcripción de (6) al espacio-tiempo de Galileo (ETG) $(\mathbf{A}^4, \mathbf{t} : \mathbf{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}, <, > \text{ en } \ker \mathbf{t})$ (Charla 1) debe necesariamente hacerse en términos de coordenadas (sólo después intrínsecamente)

Recordemos (Charla 1) que un sistemas de coordenadas (SC) $\kappa \equiv (\gamma(\mathbf{t}), \{\mathbf{e}_\mu(\mathbf{t})\}_{\mu=1,2,3})$ en el ETG se dice:

• "inercial" (SCI) si $\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) = (\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}), \mathbf{0})$ para cualquier partícula material $\mathbf{q}(\mathbf{t})$.

Los cambios $\kappa \rightarrow \kappa'$ entre SCI son de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}' + \tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'}\mathbf{t} + \tilde{\mathbf{d}} \\ \mathbf{x}^4 = \mathbf{t} = \mathbf{x}'^4 \end{array} \right\}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial\tilde{\mathbf{x}} / \partial\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \partial\tilde{\mathbf{x}} / \partial\mathbf{x}'^4 = \tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'} \\ \partial^2\tilde{\mathbf{x}} / \partial\mathbf{x}'^4\partial\mathbf{x}'^4 = \mathbf{0} \end{array} \right\}, \quad (33)$$

con $\mathbf{A} \in \mathbf{O}(3)$, $\tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'} \in \mathbb{R}^3$, $\tilde{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^3$.

Y se tiene:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}}'(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'}\mathbf{t} + \tilde{\mathbf{d}}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}'(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'} \\ \boxed{\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}'(\mathbf{t})} \end{array} \right\} \quad (34)$$

• "no rotante" (SCNR) si $\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) = (\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}_\gamma(\mathbf{t}), \mathbf{0})$ para cualquier partícula material $\mathbf{q}(\mathbf{t})$.

Los cambios $\kappa \rightarrow \kappa'$ entre SCNR son de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}' + \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{x}^4 = \mathbf{t} = \mathbf{x}'^4 \end{array} \right\}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial\tilde{\mathbf{x}} / \partial\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \partial\tilde{\mathbf{x}} / \partial\mathbf{x}'^4 = \dot{\tilde{\mathbf{d}}}(\mathbf{t}) \quad (= \tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'}(\mathbf{t})) \\ \partial^2\tilde{\mathbf{x}} / \partial\mathbf{x}'^4\partial\mathbf{x}'^4 = \ddot{\tilde{\mathbf{d}}}(\mathbf{t}) \quad (= \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{\gamma'}(\mathbf{t}) - \tilde{\mathbf{a}}_\gamma(\mathbf{t})) \end{array} \right\}, \quad (35)$$

con $\mathbf{A} \in \mathbf{O}(3)$, $\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^3$.

Y se tiene:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}}'(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{t}), \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}'(\mathbf{t}) + \dot{\tilde{\mathbf{d}}}(\mathbf{t}) \\ \boxed{\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}'(\mathbf{t}) + \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{\gamma'}(\mathbf{t}) - \tilde{\mathbf{a}}_\gamma(\mathbf{t})} \end{array} \right\} \quad (36)$$

La transcripción obvia de (6) al ETG establece que la gravitación viene descrita por un **potencial gravitatorio** $\Phi \in C^\infty(A^4)$ tal que las partículas materiales $q(t)$ en caída libre verifican:

- en los SCI:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\tilde{\nabla}\Phi|_q, \quad (37)$$

(resulta inmediato que (37) mantiene su forma bajo cambios (33))

- en los SCNR:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\tilde{\nabla}\Phi|_q - \tilde{\mathbf{a}}_\gamma, \quad (38)$$

(resulta inmediato que (38) mantiene su forma bajo cambios (35))

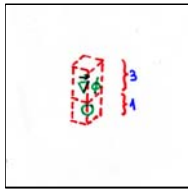
Ambas descripciones son "equivalentes" en el sentido de que se cumple (37) en los SCI si y sólo si se cumple (38) en los SCNR

Pues bien, la ecuación coordenada (37) identifica un campo de vectores (el **campo gravitatorio**)

$$\mathbf{X}^g \in \mathfrak{X}(M)$$

por la condición (para las partículas materiales $q(t)$ en caída libre):

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{X}^g|_q \quad (39)$$



(esto es, el campo \mathbf{X}^g describe cuánto se desvían las partículas en caída libre de ser rectas afinmente parametrizadas). Las 4 componentes de \mathbf{X}^g en cada SCI son $(-\tilde{\nabla}\Phi, 0)$

Basta en efecto comprobar dos cosas:

- que el conjunto (para cada SCI κ) de 4 funciones $(-\tilde{\nabla}\Phi, 0)$ se transforma bajo (33) como lo hacen las componentes de un campo de vectores, esto es, según (3). Y así es:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{X}^g)^i & \stackrel{?}{=} & \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right) (\mathbf{X}^g)^j \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \left(\begin{array}{c} -\tilde{\nabla}\Phi \\ 0 \end{array} \right) & = & \left(\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \mathbf{1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -\tilde{\nabla}'\Phi \\ 0 \end{array} \right) \end{array}$$

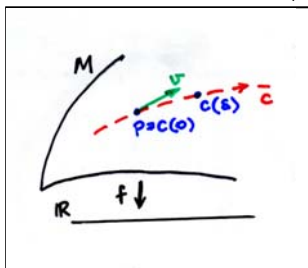
- que, para cada SCI κ , las coordenadas $(\tilde{\mathbf{q}}, q^4)$ de las partículas materiales en caída libre verifican la versión coordenada de (39). Y así es debido a (37), los 3 casos no idénticamente nulos son:

$$\begin{array}{ccc} \ddot{\mathbf{q}}^\mu & \stackrel{?}{=} & (\mathbf{X}^g)^\mu|_q \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} & = & -\tilde{\nabla}\Phi|_q \end{array}$$

Digamos finalmente que se verifica: $\mathbf{X}^g = -\text{grad}_t \Phi$ (el gradiente en cada hiperplano euclídeo de la restricción de Φ a él, Obs. 2.1)

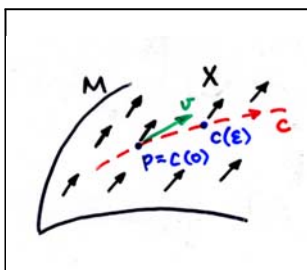
Observación 6.1 **CONEXIONES**

Ley de derivación (direccional) de funciones:



- Dados M , $f \in C^\infty(M)$, $p \in M$, $v \in T_p M$, la definición $v(f) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(c(\epsilon)) - f(c(0))}{\epsilon}$ (\forall curva c con $c(0) = p$ y $\dot{c}(0) = v$) tiene sentido.
- De hecho, esta era la definición de vector tangente (Obs. 1.1)

Deseable dar sentido a una ley de derivación de campos de vectores:

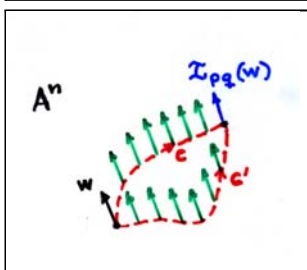


- Dados M , $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$, $v \in T_p M$, la definición $v(X) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{X(c(\epsilon)) - X(c(0))}{\epsilon}$ no tiene sentido.

- Dársele equivale a dar una ley de transporte \mathfrak{T}_c de vectores tangentes lo largo de curvas c en M .
- Entonces la definición

$$D_v(X) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{T}_{c(0) \rightarrow c(\epsilon)}^{-1} X(c(\epsilon)) - X(c(0))}{\epsilon}$$

tiene sentido: cada "receta" D (versión infinitesimal de \mathfrak{T}) es una **conexión** en M .



- En A^n hay una conexión canónica D^{afin} , cuya ley de transporte asociada es el "paralelismo a distancia" (2), independiente de la curva seguida. La expresión usual \ddot{c} quiere decir $D_{\dot{c}}^{\text{afin}} \dot{c}$

Dadas variedad M y conexión D :

- en cada carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ se definen n^3 funciones $\Gamma_{jk}^i \in C^\infty(U)$ (coeficientes de D en x) por $D_{\partial/\partial x^j} \partial/\partial x^k =: \sum_{i=1}^n \Gamma_{jk}^i \partial/\partial x^i$ y, en otra carta $x' : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$, se tiene una expresión análoga con

$$\Gamma_{jk}^i |_{U \cap U'} = \sum_{l,r,s=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \Gamma_{rs}^l |_{U \cap U'} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^j \partial x^k} \quad (40)$$

- se definen las **geodésicas** como curvas $c(t)$ que verifican $D_{\dot{c}} \dot{c} = 0$, equivalente en cada carta x al sistema de EDO's de 2º orden (en las coordenadas $c^i \equiv x^i \circ c$):

$$\frac{d^2 c^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i |_c \frac{dc^j}{dt} \frac{dc^k}{dt} = 0 \quad (41)$$

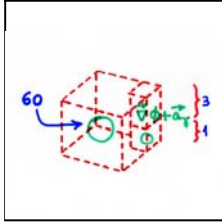
- $\forall p \in M$ y $\forall v \in T_p M$, existe una (única si se maximiza el intervalo de definición) geodésica $c_v(t)$ tal que $c_v(0) = p$ y $\dot{c}_v(0) = v$ ■

Por otra parte, la ecuación coordenada (38) identifica, no un campo de vectores, sino una conexión (la **conexión gravitatoria**)

$$D^g \in \text{Conexiones}(M)$$

por la condición (para las partículas materiales $q(t)$ en caída libre):

$$\boxed{D_{\dot{q}}^g \dot{q} = 0} \quad (42)$$



(esto es, la conexión D^g declara a las partículas en caída libre geodésicas). Los **64** coeficientes de D^g en cada SCNR son $(\underbrace{0, \dots, 0}_{60 \text{ ceros}}, \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{a}_\gamma, 0)$

Basta en efecto comprobar dos cosas:

- que el conjunto (para cada SCNR κ) de **64** funciones $(0, \dots, 0, \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{a}_\gamma, 0)$ se transforma bajo (35) como lo hacen los coeficientes de una conexión, esto es, según (40). Y así es, los **3** casos no idénticamente nulos son:

$$\begin{array}{ccccccc} (D^g)_{44}^\mu & \stackrel{?}{=} & \sum_{\nu=1}^3 & \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right) & (D^g)_{44}^{\nu\nu} & \left(\frac{\partial x'^4}{\partial x^4}\right)^2 & + \sum_{\nu=1}^3 \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right) \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^4 \partial x^4}\right) \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{a}_\gamma & = & & A & (\tilde{\nabla}'\Phi + \tilde{a}'_{\gamma'}) & 1 & + A (\tilde{a}'_\gamma - \tilde{a}'_{\gamma'}) \end{array}$$

- que, para cada SCNR κ , las coordenadas (\tilde{q}, q^4) de las partículas materiales en caída libre verifican la versión coordenada de (42). Y así es debido a (38), los **3** casos no idénticamente nulos son:

$$\begin{array}{ccccccc} \ddot{q}^\mu & + & (D^g)_{44}^\mu |_q & (\dot{q}^4)^2 & \stackrel{?}{=} & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \ddot{\tilde{q}} & + & (\tilde{\nabla}\Phi |_q + \tilde{a}_\gamma) & 1 & = & 0 \end{array}$$

Digamos finalmente que se verifica: $D^g = D^{\text{afin}} + \text{grad}_t \Phi \otimes dt \otimes dt$ (no queremos comentar aquí la notación \otimes)

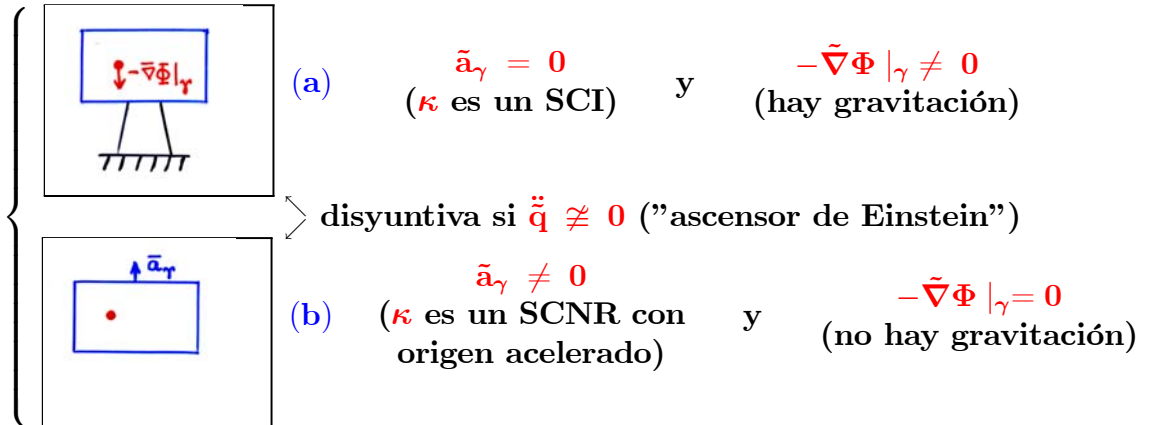
Parece pues que la "culpa" de que aparezca un objeto geométrico tan "extraño" (la conexión) para describir la gravitación en el ETG la tendría el pretender describirla desde los SCNR.

¿Por qué no limitarse entonces a describirla desde los SCI, que son "mejores"? La respuesta es que, en sentido estricto, **NINGUNA OBSERVACIÓN PERMITE IDENTIFICAR LOS SCI DE ENTRE TODOS LOS SCNR**. Veámoslo \rightsquigarrow

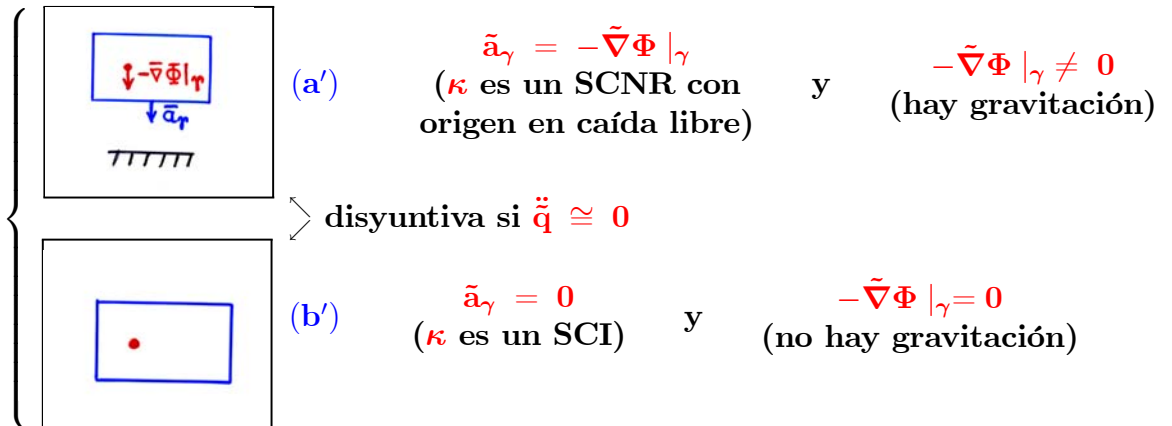
(A) En el ETG, reescribiendo en un SC $\kappa \equiv (\gamma(t), \{e_\mu(t)\})$ pequeño las ecs. (37) y (38) de una partícula material $q(t)$ en caída libre:

$$\begin{cases} \text{si } \kappa \text{ es un SCI: } \ddot{\mathbf{q}} = -\tilde{\nabla}\Phi|_q \cong -\tilde{\nabla}\Phi|_\gamma \\ \text{si } \kappa \text{ es un SCNR: } \ddot{\mathbf{q}} = -\tilde{\nabla}\Phi|_q - \tilde{\mathbf{a}}_\gamma \cong -\tilde{\nabla}\Phi|_\gamma - \tilde{\mathbf{a}}_\gamma, \end{cases}$$

resulta claro que hay una INCERTIDUMBRE local entre:



y una INCERTIDUMBRE local (equivale a la anterior!) entre:



El "DILEMA DE LOS SCNR" con partículas materiales:

- En el ETG, la observación local de partículas materiales q desde un SCNR (en el que $\ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{a}}_\gamma, 0)$) no permite objetivar la noción de que éste "es inercial":

NINGUNA OBSERVACIÓN local con partículas materiales
PERMITE IDENTIFICAR LOS "SCI" DE ENTRE TODOS LOS SCNR

o más aún:

"las leyes de la mecánica son localmente las mismas
en todos los SCNR con origen en caída libre"

(B) Einstein postuló la validez ampliada de estas incertidumbres (**principio de equivalencia**): en particular en el ETG,

NINGUNA OBSERVACIÓN local PERMITE IDENTIFICAR LOS SCI DE ENTRE TODOS LOS SCNR

Pero, en la situación (b), la LUZ emitida en el suelo se recibe en el techo con un desplazamiento al rojo (Doppler) dado por (32)

$$z := \frac{\nu_{em}}{\nu_{rec}} - 1 = \sqrt{\frac{1 + v_D/c}{1 - v_D/c}} - 1 = \frac{1 + v_D/c}{\sqrt{1 - v_D^2/c^2}} - 1 \simeq \frac{|\tilde{a}_\gamma| h}{c^2},$$

donde $v_D (> 0)$ es la velocidad-Doppler (de alejamiento) del techo-en-la-recepción respecto del suelo-en-la-emisión y h es la distancia techo-suelo.

El principio de equivalencia exigía por tanto un **desplazamiento al rojo gravitacional** en la situación (a) de la misma magnitud, lo que ha sido confirmado experimentalmente (Pound-Rebka-Snider, 1960-; Vessot-Levine, 1977; GPS, 1990-).

(C) Si en el ETG se elimina la restricción de que el SCNR κ sea pequeño,

- aunque parece que se rompen en principio las incertidumbres (a) \leftrightarrow (b) y (a') \leftrightarrow (b'), en el sentido de que los términos de orden superior al primero en el desarrollo de Taylor de $-\tilde{\nabla}\Phi$ en torno al origen γ ("mareas", ver Charla 2): (i) no se pueden despreciar sin más, y (ii) no se pueden "enmascarar" por la aceleración del origen, ya que se tiene: $\tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}\Phi + \tilde{a}_\gamma) = \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}\Phi)$,

- sin embargo podría ocurrir que la contribución de estos términos fuera inferior a la precisión experimental, con lo que **SUBSISTEN** las incertidumbres. En resumen:

NINGUNA OBSERVACIÓN PERMITE IDENTIFICAR LOS SCI DE ENTRE TODOS LOS SCNR

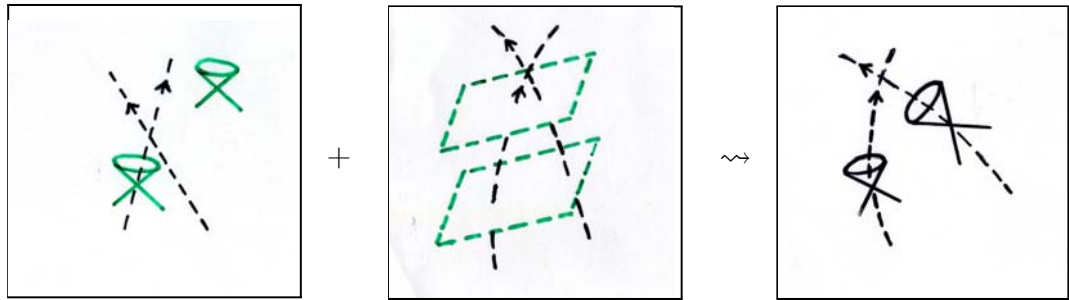
Así, en presencia de gravitación, resulta imposible identificar en el ETG:

- las partículas libres (el origen para los SCI), tan sólo las partículas en caída libre (el origen para los SCNR)
- las componentes del campo gravitatorio $-\tilde{\nabla}\Phi$, tan sólo su "mezcla" con la aceleración del origen de coordenadas $-\tilde{\nabla}\Phi - \tilde{a}_\gamma$
- la conexión afín D^{afin} (con "curvatura" cero), tan sólo su "mezcla" con la gravitación en una conexión $D^{afin} + grad_t\Phi \otimes dt \otimes dt$ con curvatura la marea (Charla 7)

Lo anterior cuestiona el ETG y, más aún, la estructura afín en el espacio-tiempo

7. GRAVITACIÓN COMO CURVATURA. LÍMITE NEWTONIANO

El ET de Minkowski (Charla 4) y las ideas sobre la caída libre (Charla 6) 'sugieren' un nuevo modelo de ETs:



$$\mathbb{E}_1^{\uparrow} \equiv (A^4, \eta, \uparrow)$$

ET Minkowski

+

$$(M^4, t \in C^\infty(M), \langle, \rangle \text{ en } t^{-1}(\cdot), D^g)$$

ET Galileo "curvo"

≈

$$(M^4, g, \uparrow, D)$$

ETs Einstein

siendo:

- (i) M , variedad conexa
- (ii) $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, métrica lorentziana en M
- (iii) \uparrow , elección como "futuro" de una (T^+) de las (dos!) componentes conexas del conjunto (de vectores tangentes "temporales")

$$T := \{v \in TM \mid g(v, v) < 0\}$$

- (iv) D , conexión "de Levi-Civita" de (M, g) (Obs. 7.1)

En los ESPACIO-TIEMPOS DE EINSTEIN (ETsE):

- **Partícula material:** $q(\tau)$ curva tal que $g(\dot{q}, \dot{q}) = -c^2$ y \dot{q} futuro

Cada partícula material posee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m > 0 \\ \text{tiempo propio } \tau \text{ (fijado por la imagen de } q) \\ \text{energía-momento } P_q := m \dot{q} \\ \text{fuerza (no gravitacional) } F_q := m D_{\dot{q}} \dot{q} \end{array} \right.$$

Se dice que $q(\tau)$ está en **caída libre** si $D_{\dot{q}} \dot{q} = 0$

- **Partícula luz** (o **fotón**): $q(\tau)$ curva tal que $g(\dot{q}, \dot{q}) = 0$, \dot{q} futuro y $D_{\dot{q}} \dot{q} = 0$ (\rightsquigarrow toda partícula luz está en "caída libre")

Cada partícula luz posee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m = 0 \\ \text{energía-momento } P_q := \dot{q} \end{array} \right.$$

Observación 7.1 **CONEXIÓN Y CURVATURA DE LEVI-CIVITA**

Dada variedad semiriemanniana (M^n, g) , existe una única conexión D (*conexión de Levi-Civita*) tal que:

(i) es "simétrica": en cualquier carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, se verifica:
 $D_{\partial/\partial x^i} \partial/\partial x^k = D_{\partial/\partial x^k} \partial/\partial x^i$ (equivalentemente, $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$)

(ii) es "métrica": la ley de transporte asociada (Obs. 6.1) preserva los productos escalares dados por g

- En cualquier carta x se verifica:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il} (\partial_{g_{jl}}/\partial x^k + \partial_{g_{lk}}/\partial x^j - \partial_{g_{jk}}/\partial x^l) \quad (43)$$

Se define el *tensor de curvatura* (de la conexión Levi-Civita D) $R \in \mathfrak{T}_3^1(M) \xrightarrow{\simeq \text{can.}} \mathcal{L}(\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ por:

$$R(Z, X, Y) := (D_{[X, Y]} - D_X D_Y + D_Y D_X) Z \in \mathfrak{X}(M),$$

donde el *corchete de Lie* (de dos campos) $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ está a su vez definido por: $[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$

- dada carta x , se definen las n^4 *componentes* (de R en x):

$$R_{jkl}^i := R(dx^i, \partial/\partial x^j, \partial/\partial x^k, \partial/\partial x^l) \in C^\infty(U)$$

• R es "muy simétrico", \rightsquigarrow sólo $n^2(n^2 - 1)/12$ de estas componentes (1 si $n = 2$, 20 si $n = 4$) son independientes. Y se verifica:

$$R_{ijkl}^i = \partial \Gamma_{kj}^i / \partial x^l - \partial \Gamma_{lj}^i / \partial x^k + \sum_{h=1}^n \Gamma_{lh}^i \Gamma_{kj}^h - \sum_{h=1}^n \Gamma_{kh}^i \Gamma_{lj}^h \quad (44)$$

• la curvatura de Levi-Civita R controla que (M, g) sea o no *localmente isométrico al espacio (semieuclicídeo) \mathbb{E}_ν^n* ("índice" ν).

Más concretamente: $R = 0$ si y sólo si existen (en torno a cada punto) bases coordenadas $\{\partial/\partial x^i\}$ que son "*D-paralelas*" (esto es, $\Gamma_{jk}^i = 0$), o equivalentemente, bases coordenadas $\{\partial/\partial x^i\}$ que son "*g-ortonormales*" (esto es, $g_{ij} = \pm \delta_{ij}$)

Se define el *tensor de Ricci* (de la conexión de Levi-Civita D) $Ric := \text{tr}_3^1(R) \in \mathfrak{T}_2^0(M)$

- dada carta x , se definen las n^2 *componentes* (de Ric en x):

$$Ric_{jk} := Ric(\partial/\partial x^j, \partial/\partial x^k) = \sum_{i=1}^n R_{jki}^i \in C^\infty(U) \quad (45)$$

• Ric es simétrico, \rightsquigarrow sólo $n(n+1)/2$ de estas componentes son independientes ■

NOTAS:

(i) El que exista alguna métrica lorentziana sobre M restringe (!) a M . Y el que sean dos las componentes conexas de T restringe (!) al par (M, g)

(ii) El modelo postula que (análogamente a lo que ocurre en el ETG, Charla 6), la caída libre es geodésica para una cierta conexión ("gravitatoria") no afín (\equiv con curvatura, ver luego).

La elección de la conexión de Levi-Civita como conexión gravitatoria destaca por su simplicidad

(iii) Los distintos ETsE ($M^4, g_{++++}, \uparrow, D$) (en realidad, distintos "modelos locales" del espacio-tiempo supuestamente existente) no tienen por qué tener propiedades particulares de "homogeneidad", isotropía, etc. (ello dependerá de la gravitación existente, "distinta" en unas y otras regiones/épocas)

(iv) El "marco" descrito por las tres teorías físicas "clásicas" (\equiv no cuánticas) es:

<u>Teoría</u>	<u>Espacio-tiempo</u>	<u>Gravitación</u>	<u>Velocidades</u>
Relatividad general	ETsEinstein	arbitraria	arbitrarias
Relatividad especial	ETMinkowski	despreciable	arbitrarias
Física galileana	ETGalileo	débil	pequeñas

El ET de Minkowski es un caso particular de los ETsE (en cuyo caso esta Charla "revierte" en la Charla 4). El ET de Galileo es un "límite" (pero no un caso particular) de los anteriores.

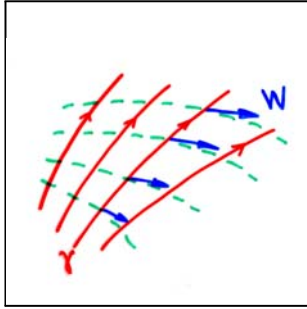
(v) Los alcances e intensidades relativas de las cuatro (!) interacciones fundamentales son:

<u>Interacción</u>	<u>Alcance</u>	<u>Intensidad relativa</u>
Fuerte	10^{-13} cm	1
Electromagnética	∞	$7 \cdot 10^{-3}$
Débil	10^{-16} cm	$5 \cdot 10^{-7}$
Gravitación	∞	$6 \cdot 10^{-39}$

Pero la gravitación "se acumula", y por tanto a gran escala domina (\rightsquigarrow la "ausencia de gravitación" sólo puede ser tomada en serio localmente).

Sea (M, g, \uparrow, D) un ETE, con curvatura $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ y tensor de Ricci $Ric \in \mathfrak{T}_2^0(M)$

• La propiedad más relevante de R es que gobierna la aceleración relativa de las geodésicas próximas:



Consideremos familia a 1 parámetro de partículas "en caída libre" (\equiv geodésicas) próximas a una dada $\gamma(\tau)$.

"Infinitesimalmente" (\equiv a primer orden en el parámetro) la familia se describe por el **campo de la familia** $W \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

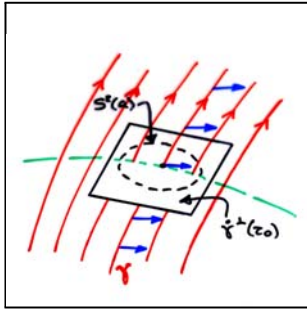
Si $\gamma(\tau)$ es material, (no sólo W sino también) $W^\perp := W + g(W, \dot{\gamma}/c)\dot{\gamma}/c \in \dot{\gamma}^\perp$ verifica (!) la **ecuación de Jacobi**:

$$D_{\dot{\gamma}} D_{\dot{\gamma}} W^\perp = R(\dot{\gamma}, W^\perp, \dot{\gamma}) \equiv \mathcal{F}_{\dot{\gamma}}(W) ,$$

que da lugar en cualquier carta a:

$$(D_{\dot{\gamma}} D_{\dot{\gamma}} W^\perp)^i = \sum_{j,k,l=1}^4 R_{jkl}^i \Big|_\gamma \frac{d\gamma^j}{d\tau} (W^\perp)^k \frac{d\gamma^l}{d\tau} \quad (46)$$

• La propiedad más relevante de Ric es que gobierna la aceleración relativa promedio de las geodésicas próximas:



Consideremos familia a 1 parámetro de partículas materiales en caída libre próximas a una dada $\gamma(\tau)$ (\rightsquigarrow campo $W^\perp \in \mathfrak{X}(\gamma)$) con velocidad relativa nula en cierto τ_0 (i.e. $D_{\dot{\gamma}} W^\perp(\tau_0) = 0$)

Consideremos otras familias (próximas a $\gamma(\tau)$) con velocidad nula en τ_0

Denotando por ζ_{τ_0} el elemento de área en la esfera $S^2(a) \subset \dot{\gamma}(\tau_0)^\perp$, se tiene (!):

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int g(\mathcal{F}(x), x) \zeta_{\tau_0} = \frac{a^2}{3} \text{tr}(\mathcal{F}_{\dot{\gamma}})(\tau_0) = -\frac{a^2}{3} Ric(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(\tau_0)$$

(la 1ª igualdad por ser $\mathcal{F}_{\dot{\gamma}} : \dot{\gamma}^\perp \rightarrow \dot{\gamma}^\perp$ autoadjunto, la 2ª por (46)), que da lugar en cualquier carta a (el valor τ_0 era arbitrario):

$$\int \sum_{i,j=1}^4 g_{ij} (D_{\dot{\gamma}} D_{\dot{\gamma}} W^\perp)^i (W^\perp)^j \zeta = \frac{-4\pi a^4}{3} \sum_{i,j=1}^4 Ric_{ij} \Big|_\gamma \frac{d\gamma^i}{d\tau} \frac{d\gamma^j}{d\tau} \quad (47)$$

¿Cómo se relacionan estas propiedades de R y Ric con lo que conocemos (Charla 2) sobre la gravitación clásica, caracterizada por ser DÉBIL (\equiv "velocidades de escape" pequeñas frente a c) y NO-RELATIVISTA (\equiv velocidades pequeñas frente a c)?

Sea $(\mathbf{M}, \mathbf{g}, \uparrow, \mathbf{D})$ un ETE y sea $\kappa \equiv (\gamma(\tau), \{\mathbf{e}_\mu(\tau)\})$ un SC (definido como en el ETM, Ch. 4) "cuasi-inercial" ($\equiv \mathbf{D}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{D}_{\dot{\gamma}}\mathbf{e}_\mu = \mathbf{0}$), con carta asociada (definición más complicada que en el ETM) $\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2, x^3, x^4 = c\tau) : \mathbf{U} \mapsto \mathbb{R}^4$. Se sigue (Obs. 6.1): $\Gamma_{jk}^i |_\gamma = 0$

Supongamos (**límite newtoniano**) que:

(*) $(\mathbf{U}, \mathbf{g} |_{\mathbf{U}})$ es una "perturbación débil" del ETM ($\equiv \mathbf{g}_{ij} = \eta_{ij} + \mathbf{h}_{ij}$, con $\eta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$, $|\mathbf{h}_{ij}| \ll 1$)

(**) todo movimiento en \mathbf{U} es "lento" ($\equiv |\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q}, \kappa} := d\tilde{\mathbf{q}}/d\tau_{\mathbf{q}}| \ll c$)

(***) $(\mathbf{U}, \mathbf{g} |_{\mathbf{U}})$ es "estacionario" ($\equiv \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^4} = \mathbf{0}$); en realidad una condición algo más débil, suficiente para lo que sigue y consecuencia a su vez de (*), (**) y la ecuación de Einstein (Charla 8)

• Dada una partícula material $\mathbf{q}(\tau')$ en caída libre y "suficientemente lenta", se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 \mathbf{q}^\mu}{d\tau'^2} + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^\mu |_{\mathbf{q}} \frac{dq^j}{d\tau'} \frac{dq^k}{d\tau'} \simeq \frac{d^2 \mathbf{q}^\mu}{d\tau_q^2} + \Gamma_{44}^\mu |_{\mathbf{q}} c^2 = \\ &= \frac{d^2 \mathbf{q}^\mu}{d\tau_q^2} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^3 \mathbf{g}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathbf{h}_{44}}{\partial x^\nu} |_{\mathbf{q}} c^2 \simeq \frac{d^2 \mathbf{q}^\mu}{d\tau_q^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{h}_{44}}{\partial x^\mu} |_{\mathbf{q}} c^2, \end{aligned}$$

usando $\mathbf{D}_{\dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ y la ecuación (41) de las geodésicas en la primera igualdad, "cuasi-inercial", (22) $\frac{d\tau_{\mathbf{q}}}{d\tau'} = (1 - \frac{|\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q}, \kappa}|^2}{c^2})^{-1/2}$ y "suficientemente lenta" en la segunda, la expresión (43) de los coeficientes de Levi-Civita y (***) en la tercera, y (*) en la cuarta.

Conclusión: si se elige

$$(\Gamma_{44}^\mu \simeq) \boxed{\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{h}_{44}}{\partial x^\mu} \simeq \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}}, \text{ equivalente a } \boxed{\mathbf{h}_{44} \simeq \frac{2\Phi}{c^2}} \quad (=: \frac{-\mathbf{v}_{\text{esc}}^2}{c^2}) \quad (48)$$

(equivalencia debida a que \mathbf{h}_{44} y Φ se anulan a grandes distancias de todas las masas / \mathbf{v}_{esc} se definió en (7)), entonces se tiene:

$$\boxed{\text{(ec. (41)) } \frac{d^2 \mathbf{q}^i}{d\tau'^2} + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i |_{\mathbf{q}} \frac{dq^j}{d\tau'} \frac{dq^k}{d\tau'} = \mathbf{0}} \quad \simeq \quad \boxed{\frac{d^2 \mathbf{q}^\mu}{d\tau_q^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} |_{\mathbf{q}}} \quad \text{(ec. (6))}$$

• Dada una familia a 1 parámetro de partículas materiales en caída libre próximas a γ (\rightsquigarrow campo $\mathbf{W}^\perp \in \mathfrak{X}(\gamma)$), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{W}^\mu}{d\tau'^2} &= (\mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}^\perp)^\mu = \sum_{\nu=1}^3 \mathbf{R}_{4\nu 4}^\mu |_\gamma \mathbf{W}^\nu c^2 = \\ &= -\sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial \Gamma_{44}^\mu}{\partial x^\nu} |_\gamma \mathbf{W}^\nu c^2 \simeq -\sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} |_\gamma \mathbf{W}^\nu, \end{aligned}$$

usando $\mathbf{D}_{\dot{\gamma}}\mathbf{e}_\mu = \mathbf{0}$ en la primera igualdad, la ecuación de Jacobi (46) y $\gamma^j = c\delta_4^j \tau$ en la segunda, la expresión (44) de las componentes de la curvatura y $\Gamma_{jk}^i |_\gamma = \mathbf{0}$ en la tercera, y (48) en la cuarta.

Conclusión: si se elige (48), entonces se tiene:

$$\begin{array}{l}
 \text{(ec. (46)) } \boxed{(\mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}^{\perp})^i = \sum_{j,k,l=1}^4 \mathbf{R}_{jkl}^i |_{\gamma} \frac{d\gamma^j}{d\tau} (\mathbf{W}^{\perp})^k \frac{d\gamma^l}{d\tau}} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 \mathbf{W}^{\mu}}{d\tau^2} = - \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} |_{\gamma} \mathbf{W}^{\nu}} \quad \text{(ec. (12))}
 \end{array}$$

• Finalmente, supongamos que la velocidad relativa de la familia es nula en cierto τ_0 (i.e. $\mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}^{\perp}(\tau_0) = \mathbf{0}$) y consideremos otras familias (próximas a γ) con velocidad nula en τ_0 . Denotando por ζ_{τ_0} el elemento de área en la esfera $\mathbf{S}^2(\mathbf{a}) \subset \dot{\gamma}(\tau_0)^{\perp}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int \sum_{\mu=1}^3 \frac{d^2 \mathbf{W}^{\mu}}{d\tau^2} \mathbf{W}^{\mu} \zeta_{\tau_0} &= \int \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{g}_{ij} (\mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}^{\perp})^i (\mathbf{W}^{\perp})^j \zeta_{\tau_0} = \frac{-4\pi a^4}{3} \mathbf{Ric}_{44} |_{\gamma(\tau_0)} c^2 = \\
 &= \frac{-4\pi a^4}{3} \sum_{i=1}^4 \mathbf{R}_{44i}^i |_{\gamma(\tau_0)} c^2 \simeq \frac{-4\pi a^4}{3} \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial \Gamma_{44}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} |_{\gamma(\tau_0)} c^2 \simeq \frac{-4\pi a^4}{3} \Delta \Phi |_{\gamma(\tau_0)} ,
 \end{aligned}$$

usando $\mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{e}_{\mu} = \mathbf{0}$ en la primera igualdad, la ecuación promedio de Jacobi (47) y $\gamma^j = c \delta_4^j \tau$ en la segunda, (45) $\mathbf{Ric}_{jk} = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{jki}^i$ en la tercera, la expresión (44) de las componentes de la curvatura y $\Gamma_{jk}^i |_{\gamma} = \mathbf{0}$ en la cuarta, y (48) en la quinta.

Conclusión: si se elige (48), entonces se tiene (τ_0 era arbitrario):

$$\begin{array}{l}
 \text{(ec. (47)) } \boxed{\int \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{g}_{ij} (\mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}^{\perp})^i (\mathbf{W}^{\perp})^j \zeta = \frac{-4\pi a^4}{3} \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{Ric}_{ij} |_{\gamma} \frac{d\gamma^i}{d\tau} \frac{d\gamma^j}{d\tau}} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \quad \boxed{\int \sum_{\mu=1}^3 \frac{d^2 \mathbf{W}^{\mu}}{d\tau^2} \mathbf{W}^{\mu} \zeta = \frac{-4\pi a^4}{3} \Delta \Phi |_{\gamma}} \quad \text{(ec. (13))}
 \end{array}$$

Lo anterior indica los siguientes límites "clásicos" para los ingredientes del ET $(\mathbf{M}, \mathbf{g}, \uparrow, \mathbf{D})$:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \text{conexión } \mathbf{D} & \rightarrow \text{ gradiente del potencial } \Phi \\
 \text{curvatura } \mathbf{R} & \rightarrow \text{ hessiano de } \Phi \\
 \text{tensor de Ricci } \mathbf{Ric} & \rightarrow \text{ laplaciano de } \Phi
 \end{array} \right.$$

(en realidad, \mathbf{D} tiene por límite la "conexión gravitatoria" en el ETG, Charla 6)

8. TENSIÓN-ENERGÍA. ECUACIÓN DE EINSTEIN

En un ETE (M, g, \uparrow, D) (Charla 7), cada partícula de masa $m \geq 0$ se representa por una curva diferenciable $q: I \rightarrow M$ con energía-momento $P \sim \dot{q}$ (futuro) tal que $g(P, P) = -m^2 c^2$ ($m = 0$ si la partícula es luz)

En cada suceso $p \in M$, cada observador instantáneo $e_4 \in T_p M$ (\equiv vector tangente temporal, futuro y unitario) "atribuye" (recordar (23), Charla 4) a cada partícula q de masa m que "encuentra":

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{energía } E/c := -g(P, e_4) > 0 \quad [ML^2T^{-2}] \\ \text{momento } \tilde{P} := P - (E/c) e_4 \in e_4^\perp \quad [MLT^{-1}] \\ \text{velocidad } \tilde{v} := c^2 \tilde{P}/E \in e_4^\perp \quad [LT^{-1}] \end{array} \right\}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = (E/c) e_4 + \tilde{P} \\ E^2 = m^2 c^4 + c^2 |\tilde{P}|^2 \end{array} \right.$$

La FUENTE DE GRAVITACIÓN:

- En la mecánica galileana es la densidad de masa
- Pero la masa m no se conserva en las colisiones relativistas, y sí lo hace la energía E
- Pero la energía E no es independiente de la base ortonormal tangente, y sí lo es la energía-momento P (que también se conserva en las colisiones relativistas)
- Pero la densidad de energía-momento no es independiente de la base ortonormal tangente, y sí lo es la TENSIÓN-ENERGÍA \rightsquigarrow

Sean: (M, g) un ET con partículas, $\{E_i\}_{i=1,2,3,4}$ una base ortogonal tangente (en cierto suceso) con E_4 temporal futuro (\rightsquigarrow base ortonormal $\{e_i\}_{i=1,2,3,4}$ con e_4 observador instantáneo), y sean

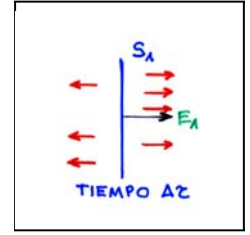
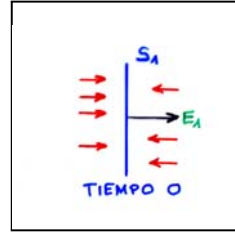
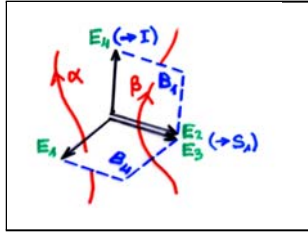
$$\left\{ \begin{array}{l} I \text{ segmento (1-dim.) generado por } E_4, \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow \text{ long}(I) = c \Delta\tau, \text{ con } \Delta\tau \text{ intervalo temporal} \\ S_\mu \text{ rectángulo (2-dim.) gen. por } \{E_1, \dots, \widehat{E}_\mu, \dots, E_3\} \ (\mu = 1, 2, 3), \rightsquigarrow \text{ area}(S_\mu) \\ B_i \text{ paralelepípedo (3-dim.) gen. por } \{E_1, \dots, \widehat{E}_i, \dots, E_4\} \ (i = 1, 2, 3, 4), \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow \text{ vol}(B_\mu) = c \Delta\tau \cdot \text{area}(S_\mu) \ (\mu = 1, 2, 3) \end{array} \right.$$

- Suponemos (para cada i) $|E_i|$ arbitrariamente pequeño (tomaremos límites $|E_i| \rightarrow 0$), \rightsquigarrow consideraremos $I, S_\mu, B_i \subset M$

- Definimos (para cada i / notación: $\epsilon_i \equiv g(e_i, e_i) = \pm 1$)

$$P_{B_i}^\pm := \sum^\pm P_\gamma \quad (*) \quad \text{y} \quad P_{B_i} := P_{B_i}^+ - P_{B_i}^- \quad (**),$$

donde la suma \sum^\pm se extiende a todas las partículas γ que "tocan" B_i con $g(P_\gamma, \epsilon_i e_i) \geq 0$ y donde P_γ es la energía-momento de γ en B_i



(*) α contribuye a $P_{B_4}^+$, β a $P_{B_4}^-$

(**) $P_{B_1}^{1+} = 4$, $P_{B_1}^{1-} = -3$ y $P_{B_1}^1 = 7$

- Obsérvese que P_{B_μ} es la energía-momento "transferida" del lado negativo de S_μ al positivo durante el tiempo $\Delta\tau$, mientras que (al ser $P_{B_4}^- = 0$) P_{B_4} es la energía-momento "dentro" de B_4

Sumando contribuciones, dividiendo por volúmenes y haciendo tender éstos a cero, se tienen **16** magnitudes $[ML^{-1}T^{-2}]$ "medibles"

$$\epsilon_i \epsilon_j T_{ij} := c \cdot \lim_{\text{vol}(B_i) \rightarrow 0} \frac{g(P_{B_i}, \epsilon_j e_j)}{\text{vol}(B_i)} \quad (i,j=1,2,3,4), \quad (49)$$

concretamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\mu\nu} := c \cdot \lim_{\text{vol}(B_\mu) \rightarrow 0} \frac{g(P_{B_\mu}, e_\nu)}{\text{vol}(B_\mu)} = \lim_{\text{area}(S_\mu) \rightarrow 0} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{P_{B_\mu}^{\nu+} - P_{B_\mu}^{\nu-}}{\text{area}(S_\mu) \Delta\tau} = \\ \quad = \text{flujo de } \nu\text{-momento por u. área ortogonal a } e_\mu \text{ y u. tiempo} \\ T_{\mu 4} := -c \cdot \lim_{\text{vol}(B_\mu) \rightarrow 0} \frac{g(P_{B_\mu}, -e_4)}{\text{vol}(B_\mu)} = \frac{-1}{c} \cdot \lim_{\text{area}(S_\mu) \rightarrow 0} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{E_{B_\mu}^+ - E_{B_\mu}^-}{\text{area}(S_\mu) \Delta\tau} = \\ \quad = \frac{-1}{c} \cdot \text{flujo de energía por u. área ortogonal a } e_\mu \text{ y u. tiempo} \\ T_{4\nu} := -c \cdot \lim_{\text{vol}(B_4) \rightarrow 0} \frac{g(P_{B_4}, e_\nu)}{\text{vol}(B_4)} = -c \cdot \lim_{\text{vol}(B_4) \rightarrow 0} \frac{P_{B_4}^{\nu+}}{\text{vol}(B_4)} = \\ \quad = -c \cdot \text{densidad de } \nu\text{-momento} \\ T_{44} := c \cdot \lim_{\text{vol}(B_4) \rightarrow 0} \frac{g(P_{B_4}, -e_4)}{\text{vol}(B_4)} = \lim_{\text{vol}(B_4) \rightarrow 0} \frac{E_{B_4}^+}{\text{vol}(B_4)} = \text{densidad de energía} \end{array} \right.$$

Con la expresión galileana de "momento" ($\tilde{\mathbf{P}} = m\tilde{\mathbf{v}}$), las **9** magnitudes $\mathbf{T}_{\mu\nu}$ eran (algo bien conocido!) las componentes (**presiones** si $\mu = \nu$, **cizallas** si $\mu \neq \nu$) del "tensor de tensiones" (elasticidad)

Con las expresiones (26) de "energía" y "momento" para partículas materiales:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = mc^2 \left(1 - \frac{|\tilde{\mathbf{v}}|^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ \tilde{\mathbf{P}} = m\tilde{\mathbf{v}} \left(1 - \frac{|\tilde{\mathbf{v}}|^2}{c^2}\right)^{-1/2} \end{cases}$$

se comprueba inmediatamente que:

• dada otra base ortonormal $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}_{i=1,2,3,4}$ (con $\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^4 A_{ij}\bar{\mathbf{e}}_i$), las magnitudes \mathbf{T}_{ij} están relacionadas con las $\bar{\mathbf{T}}_{ij}$ por la expresión:

$$\mathbf{T}_{ij} = \sum_{k,l=1}^4 A_{ki}\bar{\mathbf{T}}_{kl}A_{lj} ,$$

con lo que las \mathbf{T}_{ij} resultan ser las componentes en $\{\mathbf{e}_i\}$ de un cierto (campo de) tensor(es)

$$\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_2^0(\mathbf{M}) \quad (\text{tensión-energía}) ,$$

lo que debe ser visto como una "ley básica de la naturaleza"

• \mathbf{T} es simétrico (\rightsquigarrow sólo **10** componentes independientes), con lo que que, en cada suceso $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$, el tensor $\mathbf{T}(\mathbf{p}) \in (\mathbf{T}_p\mathbf{M})_2^0$ puede reconstruirse completamente a partir de las densidades de energía medidas por **4** observadores instantáneos (en $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$) "que formen base" (\equiv todos en movimiento relativo)

Por razones físicas, los EXPERIMENTOS (que establecen las "leyes de conservación" de energía y momento en el ETM, Charla 4) sugieren (!) que \mathbf{T} debe verificar (Obs. 8.1):

$$\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0} , \quad (50)$$

lo que a su vez:

- (i) restringe la manera en la que la tensión-energía "genera" curvatura (Ecuación de Einstein), y
- (ii) contiene ecs. de movimiento para la materia (Charla 9)

La expresión concreta de \mathbf{T} depende del "modelo de materia" que se postule sobre el ETE. Dos ejemplos:

- el "vacío" (en cuyo caso es $\mathbf{T} = \mathbf{0}$), como ocurre en el ET de Schwarzschild usado para describir el sistema solar
- un "fluido perfecto" (Charla 9), como ocurre en los ET de Robertson-Walker usados en cosmología (Charla 12)

Observación 8.1 **DIVERGENCIA. TENSOR DE EINSTEIN**

Dada var. semiriemanniana (M, g) , la **divergencia** de $X \in \mathfrak{X}(M)$ es la tasa de expansión de un volumen comóvil por u. de volumen:

$$\operatorname{div} X(c(t)) := \lim_{\mathcal{V}_{D_t} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{V}_{D_t}} \frac{d\mathcal{V}_{D_t}}{dt}(t), \quad (51)$$

donde $c(t)$ es curva int. de X (Obs. 1.1) y $\mathcal{V}_{D_t} := \int_{D_t} \Omega$ es el "volumen" de un "dominio regular" D_t (\equiv unión de abierto "orientable" con su borde suave ∂D_t) compacto y comóvil en torno a $c(t)$.

- De (51) se sigue (!) el **teorema de la divergencia** (o de Gauss):

$$\int_D (\operatorname{div} X) \Omega \stackrel{\forall D}{=} \int_{\partial D} g(X, \nu) \partial \Omega, \quad (52)$$

donde D es un dominio regular compacto (fijo) y ν es la normal unitaria exterior a su borde ∂D , que a su vez conduce (teor. del valor medio) a la interpretación de $\operatorname{div} X(p)$ como la tasa de flujo al exterior de un volumen en torno a p por u. de volumen:

$$\operatorname{div} X(p) = \lim_{\mathcal{V}_D \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{V}_D} \int_{\partial D} g(X, \nu) \partial \Omega, \quad (53)$$

y de ahí el decir que p es fuente/sumidero cuando $\operatorname{div} X(p) \gtrless 0$

- De (51) también se sigue (!) el **teor. del transporte** ($\forall f \in C^\infty(M)$):

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f \Omega \stackrel{\forall D_t}{=} \int_{D_t} \operatorname{div}(fX) \Omega, \quad (54)$$

y de ahí el decir que $\int_{D_t} f \Omega$ se conserva cuando $\operatorname{div}(fX) = 0$ (en particular, \mathcal{V}_{D_t} se conserva cuando $\operatorname{div} X = 0$, lo que ya sabíamos)

Existe una forma alternativa (que no vamos a detallar) de definir $\operatorname{div} X$ en términos de la conexión de Levi-Civita D

Lo anterior permite, vía el isomorfismo $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M), X \mapsto g(X, \cdot)$ (Obs. 4.1), definir "divergencias" (una por cada índice) de campos de tensores arbitrarios. En particular, para campos $\tau \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ simétricos hay una única divergencia $\operatorname{div} \tau \in C^\infty(M)$.

Resulta: $\operatorname{div} g = 0$ y también: $\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} d(\operatorname{tr} \operatorname{Ric})$, con $\operatorname{tr} \equiv \operatorname{tr}_{12}$ definida en Obs. 4.1.

A partir del tensor Ric (Obs. 7.1), se define el **tensor de Einstein** $\operatorname{Ein} := \operatorname{Ric} - \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \operatorname{Ric}) g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, que:

- es simétrico (\rightsquigarrow sólo $n(n+1)/2$ componentes independientes)
- es "algebraicamente equivalente" a Ricci: $\operatorname{Ein} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ric} = 0$
- posee divergencia nula: $\operatorname{div} \operatorname{Ein} = 0$ ■

Einstein postuló que, en un ETE (M, g, \uparrow, D) , la tensión-energía T correspondiente a las partículas que hay en M es la "fuente" de la gravitación (esto es, de la curvatura).

La **ecuación de Einstein** (1915)

$$\mathbf{Ein} := \boxed{\mathbf{Ric} - \frac{1}{2}(\text{tr Ric}) \mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}} , \quad (55)$$

con **constante de la luz** $c \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{ cm seg}^{-1}$ y **constante de la gravitación** $G \simeq 6'67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ gr}^{-1} \text{ seg}^{-2}$:

- prescribe cómo "la tensión-energía curva la geometría" (o mejor, cómo la naturaleza restringe el par (T, g))

- constituye, en cualquier sistema de coordenadas $(x^i) : U \mapsto \mathbb{R}^4$, un sistema de 10 EDP's de 2º orden, no lineales e "hiperbólicas", en las componentes g_{ij} de la métrica. Al tener ambos miembros de (55) divergencia nula, las 10 ecuaciones no son independientes

- tiene por miembro izquierdo el campo de tensores $\binom{0}{2}$ "más general posible" (Lovelock) que:

- (i) depende sólo de la métrica g y de sus derivadas (usando la conexión de Levi-Civita D) hasta el orden 2,

- (ii) es compatible (al ser $\text{div Ein} = 0$, Obs. 8.1) con la propiedad "experimental" (50) $\text{div T} = 0$, y

- (iii) hace a la métrica "plana" ($R = 0$) compatible con el "vacío" ($T = 0$). En 1918 Einstein modificó su ecuación eliminando esta última exigencia (Charla 9)

- incluye en su miembro derecho el factor constante $\frac{8\pi G}{c^4}$, que hace a la ecuación "dimensionalmente correcta". En efecto, en cualquier carta $(x^1, x^2, x^3, x^4 \equiv ct)$, y puesto que $[x^i] = [L]$ y $[g] = [L^2]$, se tiene:

$$\begin{aligned} [g_{ij}] = [g^{ij}] = [L^0] , & \Rightarrow [\partial g_{ij} / \partial x^k] = [\Gamma_{jk}^i] = [L^{-1}] , \Rightarrow \\ \Rightarrow [\partial \Gamma_{jk}^i / \partial x^l] = [R_{jkl}^i] = [\text{Ric}_{ij}] = [\text{tr Ric}] = [L^{-2}] , \end{aligned}$$

usando la expresión (43) de los coeficientes de Levi-Civita en la primera implicación, y la expresión (44) de las componentes de la curvatura y (45) $\text{Ric}_{jk} = \sum_{i=1}^n R_{jki}^i$ en la segunda. Con lo que la ecuación en coordenadas queda:

$$\underbrace{\text{Ric}_{ij} - \frac{1}{2}(\text{tr Ric}) g_{ij}}_{[L^{-2}]} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}}_{[M^{-1}L^{-1}T^2]} \cdot \underbrace{T_{ij}}_{[ML^{-1}T^{-2}]}$$

Einstein propuso inicialmente la ecuación

$$\text{Ric} = k\mathbf{T}$$

(con k constante a determinar).

Pero la propiedad "experimental" (50) $\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0}$ y el resultado "geométrico" $\text{div } \text{Ric} = \frac{1}{2}d(\text{tr } \text{Ric})$ (Obs. 8.1) llevaban a la conclusión (experimentalmente falsa, en general) de que la función $\text{tr } \mathbf{T} \in C^\infty(\mathbf{M})$ debía ser constante

Finalmente Einstein propuso la ecuación

$$\boxed{\text{Ein} = k\mathbf{T}} \quad (\Rightarrow \text{tr } \text{Ric} = -k \text{tr } \mathbf{T}) \quad , \Rightarrow \quad \text{Ric} = k(\mathbf{T} - \frac{1}{2}(\text{tr } \mathbf{T})\mathbf{g}) \quad , \quad (56)$$

y determinó la constante k imponiendo que el límite newtoniano fuera la ecuación de Poisson (11) $\Delta \Phi = 4\pi G \rho_m$ (con Φ el potencial gravitatorio y ρ_m la densidad de masa, Charla 2), lo que en particular aseguraba la "homogeneidad dimensional" de (56).

Veamos en detalle dicho "ajuste":

Sea $\kappa \equiv (\gamma(\tau), \{e_\mu(\tau)\})$ un SC "cuasi-inercial" (Charla 7), con carta asociada $\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2, x^3, x^4 = c\tau) : \mathbf{U} \mapsto \mathbb{R}^4$.

Supongamos (límite newtoniano, Charla 7) que:

(*) $(\mathbf{U}, \mathbf{g} |_{\mathbf{U}})$ es una "perturbación débil" del ETM

(**) todo movimiento en \mathbf{U} es "lento"

(***) $(\mathbf{U}, \mathbf{g} |_{\mathbf{U}})$ es "estacionario"

Entonces se tiene:

$$\frac{\Delta \Phi}{c^2} \simeq \text{Ric}_{44} = k(\mathbf{T}_{44} - \frac{1}{2}(\text{tr } \mathbf{T})\mathbf{g}_{44}) \simeq k(1 + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{44})\rho_m c^2 \simeq \frac{k}{2}\rho_m c^2 \quad ,$$

usando $\text{Ric}_{44} \simeq \frac{\Delta \Phi}{c^2}$ (Charla 7) en la primera igualdad, (56) en la segunda, $\text{tr } \mathbf{T} \simeq -\mathbf{T}_{44} \simeq -\rho_m c^2$ (consecuencia de (**)) en la tercera, y $\mathbf{g}_{44} \simeq -1$ (Charla 7) en la cuarta.

Y habida cuenta de la ec. de Poisson (11), se concluye: $k = 8\pi G/c^4$, que es el factor que figura en la ec. de Einstein (55)

9. FLUIDOS PERFECTOS. CONSTANTE COSMOLÓGICA

En un ETE (M, g, \uparrow, D) (Ch. 7), un **fluido perfecto** es (un modelo de "materia" para el que existe) una tripleta (Z, ρ, p) tal que:

- (i) $Z \in \mathfrak{X}(M)$ (futuro y con $g(Z, Z) = -c^2$) es un campo de vectores cuyas curvas integrales son partículas "promedio" del fluido
- (ii) $\rho, p \in C^\infty(M)$ son la **densidad de energía comóvil** y **presión comóvil** del fluido (respectivamente)
- (iii) la tensión-energía $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ del modelo es (no queremos comentar aquí la notación \otimes)

$$\boxed{T = (\rho + p)g(Z/c, \cdot) \otimes g(Z/c, \cdot) + pg} \quad (\Rightarrow \text{tr } T = -\rho + 3p) \quad (57)$$

- Dos peculiaridades de (57). En cada $m \in M$:

(i) Para cualquier campo de tensores $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ simétrico, la aplic. lineal $\bar{T} \in T_1^1(T_m M) \xrightarrow{\cong} L(T_m M, T_m M)$ ("subida de índices", Obs. 4.1) resulta "autoadjunta" ($\equiv g(\bar{T}v, w) = g(v, \bar{T}w)$), lo que NO implica en general ($T_m M$ no es euclídeo) que \bar{T} sea diagonalizable. En un fluido perfecto, $Z(m)$ resulta ser un autovector temporal de \bar{T} (autovalor $-\rho(m)$), con lo que \bar{T} es diagonalizable

(ii) la restricción de \bar{T} al hiperplano euclídeo $Z(m)^\perp \subset T_m M$ es isótropa (\equiv posee un autovalor triple $p(m)$)

- Físicamente, un fluido perfecto es una colección finita (muy grande) de flujos de partículas con colisiones (entre partículas de distintos flujos), tal que los observadores "centro de masas" (en cada colisión) generan un campo de vectores con isotropía espacial

- Sustituyendo en la ecuación de Einstein (55)

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}(\text{tr Ric})g = \frac{8\pi G}{c^4}T \quad (\Rightarrow \text{tr Ric} = \frac{-8\pi G}{c^4}\text{tr } T)$$

(la implicación usa $\text{tr } g = 4$, Obs. 4.1) la ec. (57), se encuentra:

$$\text{Ric} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T - \frac{1}{2}(-\rho + 3p)g\right), \Rightarrow \boxed{\text{Ric}\left(\frac{Z}{c}, \frac{Z}{c}\right) = \frac{4\pi G}{c^4}(\rho + 3p)} \quad (58)$$

- Todos los fluidos perfectos "conocidos" verifican

$$\rho > 0 \quad \text{y} \quad \rho \geq 3p \geq 0 \quad (\Rightarrow \underline{\rho + 3p > 0}), \quad (59)$$

con casos extremos $\rho = 3p > 0$ (**radiación**) y $\rho > p = 0$ (**polvo**)

Observación 9.1 **FLUIDOS PERFECTOS NEWTONIANOS**

En el espacio "familiar" $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ (Charla 1), un **fluido perfecto newtoniano** se define como (un modelo de "materia" para el que existe) una tripleta $(\tilde{\mathbf{v}}, \rho_m, \mathbf{p})$ (dependiente del tiempo) tal que:

- (i) $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ es el **campo de velocidades** promedio del fluido
- (ii) $\rho_m, \mathbf{p} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ son la **densidad de masa comóvil** y la **presión comóvil** del fluido (respectivamente)
- (iii) la fuerza realizada por el resto del fluido sobre cada "dominio regular" \mathcal{D}_t (\equiv unión de abierto "orientable" con su borde suave $\partial\mathcal{D}_t$) compacto y **comóvil** es ortogonal al borde $\partial\mathcal{D}_t$ (\equiv viscosidad comóvil nula) y viene dada por

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\partial\mathcal{D}_t}^{\text{resto}} := - \int_{\partial\mathcal{D}_t} \mathbf{p} \tilde{\nu} \partial\Omega = - \int_{\mathcal{D}_t} \tilde{\nabla} \mathbf{p} \Omega \quad (60)$$

($\tilde{\nu}$ es la normal unitaria exterior al borde $\partial\mathcal{D}_t$), donde la segunda igualdad es debida a que, para todo campo constante $\tilde{\mathbf{k}}$ y usando el teorema de la divergencia (52), se tiene:

$$\langle \tilde{\mathbf{k}}, \int_{\partial\mathcal{D}_t} \mathbf{p} \tilde{\nu} \partial\Omega \rangle = \int_{\mathcal{D}_t} \tilde{\nabla}(\mathbf{p}\tilde{\mathbf{k}}) \Omega = \langle \tilde{\mathbf{k}}, \int_{\mathcal{D}_t} \tilde{\nabla} \mathbf{p} \Omega \rangle$$

El fluido se dice **estacionario** si la tripleta $(\tilde{\mathbf{v}}, \rho_m, \mathbf{p})$ es independiente del tiempo, **incompresible** si $\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$, e **irrotacional** (\equiv no turbulento) si $\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ (para las notaciones, ver Obs. 2.1)

En $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$, el teorema del transporte (54) para el campo $\tilde{\mathbf{v}}$ se escribe (para toda $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, quizás dependiente del tiempo):

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{f} \Omega \stackrel{\forall \mathcal{D}_t}{=} \int_{\mathcal{D}_t} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \tilde{\nabla}(\mathbf{f}\tilde{\mathbf{v}}) \right) \Omega, \quad (61)$$

y de ahí se sigue:

- la equivalencia (para cualquier fluido) entre la **conservación de la masa** y la **ecuación de continuidad**:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho_m \Omega \stackrel{\forall \mathcal{D}_t}{=} 0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \tilde{\nabla}(\rho_m \tilde{\mathbf{v}}) = 0} \quad (62)$$

- la equivalencia (para fluidos perfectos en un potencial newtoniano Φ) entre la 2ª ley de Newton (1) y la **ecuación de Euler**:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} (\rho_m \tilde{\mathbf{v}}) \Omega \stackrel{\forall \mathcal{D}_t}{=} - \int_{\mathcal{D}_t} (\rho_m \tilde{\nabla} \Phi) \Omega + \tilde{\mathbf{F}}_{\partial\mathcal{D}_t}^{\text{resto}}} \Leftrightarrow \boxed{\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{v}^\mu}{\partial t} + \langle \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\nabla} \mathbf{v}^\mu \rangle \right) = - \left(\rho_m \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^\mu} \right)}, \quad (63)$$

usando para llegar a ella (60) y la ec. de continuidad (62) ■

Las proyecciones de la ec. (50) $\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0}$ paralela y ortogonal al campo \mathbf{Z} dan lugar (!) a las **ecuaciones de los fluidos perfectos** (!):

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\mathbf{Z}(\rho) = -(\rho + \mathbf{p}) \text{div } \mathbf{Z}} , \Leftrightarrow \text{div}(\rho \mathbf{Z}) = -\mathbf{p} \text{div } \mathbf{Z} \\ \boxed{(\rho + \mathbf{p}) \mathbf{D}_Z \mathbf{Z} = -c^2 (\text{grad } \mathbf{p})^\perp} \equiv -((\mathbf{Z}\mathbf{p})\mathbf{Z} + c^2 \text{grad } \mathbf{p}) \end{array} \right. \quad (64)$$

La combinación del teor. del transporte (54) con la ec. (64a)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho \Omega = \int_{\mathcal{D}_t} \text{div}(\rho \mathbf{Z}) \Omega = - \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{p} (\text{div} \mathbf{Z}) \Omega \quad (65)$$

pone de manifiesto que (en general) "la energía comóvil NO se conserva" (el modelo de "materia" intercambia energía-momento con la gravitación, "secuestrada" en la geometría!!)

Veamos el límite newtoniano de las ecuaciones (64).

Sea $\kappa \equiv (\gamma(\tau), \{\mathbf{e}_\mu(\tau)\})$ un SC "cuasi-inercial" (Charla 7), con carta asociada $\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2, x^3, x^4 = c\tau) : \mathbf{U} \mapsto \mathbb{R}^4$.

Supongamos (**límite newtoniano**) que: (*) $(\mathbf{U}, \mathbf{g} |_{\mathbf{U}})$ es una "perturbación débil" del ETM, (**) todo movimiento en \mathbf{U} es "lento" y (***) $(\mathbf{U}, \mathbf{g} |_{\mathbf{U}})$ es "estacionario".

Entonces se tiene:

$$\mathbf{Z} \simeq c \left(1 + \frac{|\tilde{\mathbf{Z}}|^2}{c^2}\right)^{1/2} \partial / \partial x^4 + \tilde{\mathbf{Z}} \simeq \partial / \partial \tau + \tilde{\mathbf{Z}} , \quad (66)$$

usando $\mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = -c^2$ y (*) en la primera igualdad, y $x^4 = c\tau$ y (**) en la segunda. De donde se deduce que:

- el límite de (64a) es la ec. de continuidad (62). En efecto:

$$0 \simeq \mathbf{Z}(\rho_m) + \rho_m \text{div} \mathbf{Z} \simeq \frac{\partial \rho_m}{\partial \tau} + \tilde{\mathbf{Z}}(\rho_m) + \rho_m \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{Z}} = \frac{\partial \rho_m}{\partial \tau} + \tilde{\nabla}(\rho_m \tilde{\mathbf{Z}}) ,$$

usando (64a) y $\rho + \mathbf{p} \simeq \rho \simeq \rho_m c^2$ (consecuencia de (**)) en la primera igualdad, y (66), (***) y "sufic. lento" en la segunda.

- el límite de (64b) es la ec. de Euler (63). En efecto:

$$\begin{aligned} 0 &\simeq \rho_m c^2 (\mathbf{D}_Z \mathbf{Z})^\mu + (\mathbf{Z}\mathbf{p})\mathbf{Z}^\mu + c^2 (\text{grad } \mathbf{p})^\mu \simeq \\ &\simeq \rho_m c^2 (\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^\mu) + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}) + \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tau} + \sum_{\nu=1}^3 \mathbf{Z}^\nu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^\nu}\right) \mathbf{Z}^\mu + c^2 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^\mu} \simeq \\ &\simeq \rho_m c^2 \left(\frac{\partial \mathbf{Z}^\mu}{\partial \tau} + \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}^\mu) + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}\right) + c^2 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^\mu} , \end{aligned}$$

usando (64b) y $\rho + \mathbf{p} \simeq \rho \simeq \rho_m c^2$ (consecuencia de (**)) en la primera igualdad, (**), (48), (66) y (*) en la segunda, y (**) y (66) en la tercera.

En 1918 Einstein modificó la ecuación (55) en la forma

$$\boxed{\text{Ric} - \frac{1}{2}(\text{trRic})\mathbf{g} + \Lambda\mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathbf{T}} , \quad (67)$$

para cierta $\Lambda \in \mathbb{R}$ (**constante cosmológica**) [L^{-2}] (a ajustar).

El motivo fue el deseo de obtener un modelo cosmológico "estático" (parecía lo razonable en aquel momento) sin recurrir a valores negativos para la presión del "fluido de galaxias" (ver Charla 12).

La posterior evidencia de "expansión cosmológica" (1920's) llevó a Einstein a considerar un "error" dicha modificación.

Hay que hacer notar que añadir un término $\Lambda\mathbf{g}$ en el miembro izquierdo (de la ecuación de Einstein):

- no es descartable "en principio", pero implica (si $\Lambda \neq 0$) que la métrica "plana" ($\mathbf{R} = \mathbf{0}$) deja de ser compatible (vía la ecuación) con el "vacío" ($\mathbf{T} = \mathbf{0}$)

- es equivalente a añadir en el miembro derecho la tensión-energía de un fluido perfecto con $\mathbf{p} = -\rho$. En efecto:

(\Rightarrow) Un término de la forma $\Lambda\mathbf{g}$ a la izquierda da lugar (cambiándolo de miembro) a una tensión-energía

$$\mathbf{T}_\Lambda := \frac{-c^4\Lambda}{8\pi G}\mathbf{g}$$

a la derecha, que corresponde (57) a un fluido perf. $(\mathbf{Z}_\Lambda, \rho_\Lambda, \mathbf{p}_\Lambda)$ con

$$\mathbf{p}_\Lambda := \frac{-c^4\Lambda}{8\pi G} =: -\rho_\Lambda \quad (68)$$

(\Leftarrow) En un fluido perfecto $(\mathbf{Z}, \rho, \mathbf{p})$ con $\mathbf{p} = -\rho$, cuya tensión-energía (57) es $\mathbf{T} = -\rho\mathbf{g}$, cualquier campo (temporal futuro) puede hacer el papel de \mathbf{Z} (cualquier vector tangente es autovector de $\bar{\mathbf{T}} = -\rho\text{Id}$).

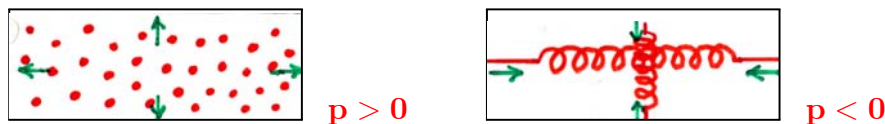
Puesto que un tal fluido "no posee inercia" (esto es, $\rho + \mathbf{p} = \mathbf{0}$), se sigue de (64b) que $(\text{grad } \mathbf{p})^\perp = \mathbf{0}$ ("homogeneidad espacial") y de (64a) que $\mathbf{Z}(\rho) = \mathbf{0}$.

Pero al ser \mathbf{Z} arbitrario, se concluye ("homogeneidad"):

$$\mathbf{p} (= -\rho) = -k \in \mathbb{R} ,$$

con lo que la tensión-energía $\mathbf{T} = -k\mathbf{g}$ da lugar (cambiándola de miembro) a un término de la forma $\frac{8\pi Gk}{c^4}\mathbf{g}$ a la izquierda.

Advertencia: aunque desconocidos, pueden concebirse (!) fluidos perfectos con $p < 0$:



• genera (en cualquier suceso y dirección temporal) una repulsión promedio si $\Lambda > 0$ (y una atracción promedio si $\Lambda < 0$). En efecto: En efecto: usando la ec. de Einstein (67) en el "vacío"

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}(\text{trRic})g + \Lambda g = 0 \quad (\Rightarrow \text{tr Ric} = 4\Lambda)$$

(la implicación usa $\text{tr } g = 4$, Obs. 4.1), se encuentra:

$$\text{Ric} = \Lambda g ;$$

así, dada cualquier partícula material en caída libre γ , el "promedio" $\text{tr}(\mathcal{F}_\gamma)$ de aceleraciones relativas a γ (de familias a 1 parámetro de partículas materiales en caída libre próximas, Charla 7) verifica:

$$\text{tr}(\mathcal{F}_\gamma) = -\text{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \Lambda c^2 , \quad (69)$$

usando la ecuación promedio de Jacobi (47) en la primera igualdad, y $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -c^2$ en la segunda.

• es equivalente (por lo dicho antes) a una **tensión-energía del vacío** (al ser la residual cuando $\mathbf{T} = 0$) $\mathbf{T}_\Lambda := \frac{-c^4 \Lambda}{8\pi G} g$

Ahora bien, predicciones "cuánticas" de un valor para Λ resultan inmensamente superiores (en un factor $> 10^{50}$) a lo que, hasta mitad de los 1990's, era la cota superior ($|\Lambda| \leq 10^{-55} \text{ cm}^{-2}$) puesta por las observaciones cosmológicas (esto se conoce como el "problema de la constante cosmológica").

Aparte de esta discrepancia teórica (no resuelta), hasta mitad de los 1990's las observaciones eran compatibles con el valor $\Lambda = 0$, y este era el valor de referencia aceptado.

10. DATOS COSMOLÓGICOS

Gran cantidad de datos (hitos: 1920's → 1960's → 1990's). Los más importantes y precisos: la "ley empírica de Hubble" y las medidas de la "radiación de fondo". Los más imprecisos: los modelos de materia con los que se establece la tensión-energía a gran escala.

Advertencia: No se pueden discutir datos experimentales sin usar tentativamente algún modelo teórico / No se puede escoger un modelo teórico sin referencia a datos experimentales.

PRIMEROS DATOS: El **cosmos** (\equiv ET a gran escala) "observable desde la Tierra" (\equiv hasta el "horizonte de partículas" si no hay "restricciones" a la observación, Obs. 11.1):

- Tiene radio $\simeq 10^{10}$ años luz y contiene $\simeq 10^{11}$ galaxias
- A escalas de $\gtrsim 10^8$ años luz, la distribución de galaxias es aproximadamente isótropa (\rightsquigarrow promedios), con velocidades individuales (respecto de estos promedios) del orden $\lesssim 10^{-2} c$ (la de la Tierra respecto del centro de nuestra galaxia es del orden $< 10^{-3} c$, con **constante de la luz** $c \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{ cm seg}^{-1}$)
- Una galaxia típica tiene masa $\simeq 10^{45} \text{ gr}$ ($\simeq 10^{-1}$ años luz en "unidades geométricas"), radio $\simeq 10^4$ años luz y contiene $\simeq 10^9$ estrellas.
- La materia visible consta de hidrógeno ($\simeq 90\%$ en átomos, $\simeq 70\%$ en masa), helio ($\simeq 10\%$ en átomos, $\simeq 30\%$ en masa) y rastros de los mismos elementos que en la Tierra

LEY EMPÍRICA DE HUBBLE: Para cada galaxia observada desde la Tierra:

- En base a: (i) la estructura del espectro de la radiación recibida, y (ii) la hipótesis de que la correspondencia entre dicha estructura y los procesos que la generan (esencialmente, transiciones de electrones atómicos entre los distintos niveles de energía) es la misma allí/entonces que aquí/ahora, se estima cuáles son dichos procesos

- Se observa un desplazamiento relativo uniforme (usualmente hacia frecuencias menores) de todo el espectro, lo que permite asignar a la galaxia un **desplazamiento de frecuencia**

$$z := \frac{\nu_{\text{em}}}{\nu_{\text{rec}}} - 1$$

(usualmente "al rojo", $z > 0$), donde ν_{em} es cualquier **frecuencia de emisión** y ν_{rec} la correspondiente **frecuencia de recepción**.

Advertencia: la interpretación de este z como un "efecto Doppler" permite asignar a la galaxia una **velocidad-Doppler**

$$v_D := \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} c = \left(z - \frac{1}{2}z^2 + \mathcal{O}(z^4) \right) c, \Rightarrow z = \sqrt{\frac{1 + v_D/c}{1 - v_D/c}} - 1$$

(usualmente $v_D > 0$, "recesión cosmológica", Slipher 1920's), que corresponde a un movimiento "radial" del emisor respecto del receptor (ambos "libres") en el ET de Minkowski. Esta interpretación (según la cual $\lim_{v_D \rightarrow +c} z = \infty$) es fuente de enormes confusiones.

- En base a: (i) la **luminosidad absoluta** L (potencia emitida, supuesta conocida) y (ii) la **luminosidad aparente** L_0 (potencia recibida por unidad de área del receptor),
se atribuye a la galaxia una **distancia-luminosidad**

$$d_L := \sqrt{\frac{L}{4\pi L_0}}, \quad (70)$$

que corresponde a la distancia del emisor (en la emisión) respecto del receptor (ambos "libres") en el ET de Minkowski.

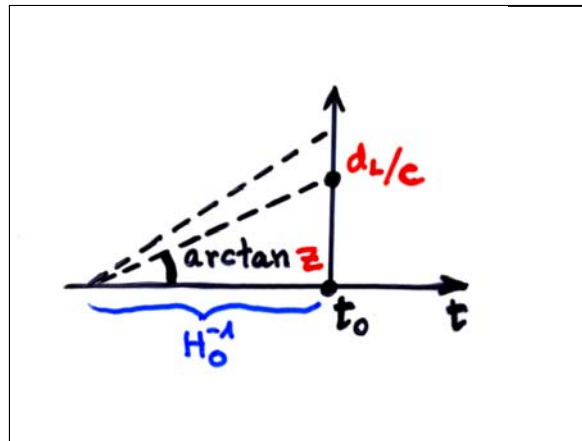
Advertencia: sólo desde mitad 1990's se dispone de indicadores de distancias "fiables": las Supernovas tipo Ia (se cree conocer su L con un error $\lesssim 10\%$)

- La **ley empírica de Hubble** (1920's) establece que (ahora)

$$d_L \simeq cH_0^{-1} z \quad (\text{para } z \lesssim 0'1) \quad , \quad (71)$$

con **cte. de Hubble** ($1 \text{ Mpc} \simeq 3'1 \cdot 10^{19} \text{ km} \simeq 3'26 \cdot 10^6 \text{ años luz}$)

$$H_0 \simeq 71 \text{ Km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \text{ (WMAP03)}, \Rightarrow H_0^{-1} \simeq 13'8 \cdot 10^9 \text{ años} \quad (72)$$



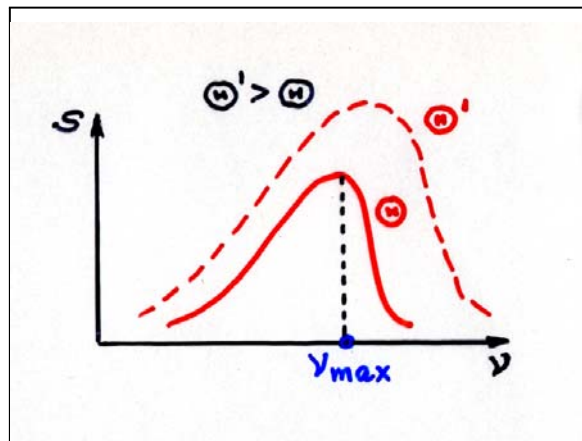
RADIACIÓN DE FONDO (Penzias-Wilson, 1965)

- No proviene de fuentes identificables
- Su **espectro de energía** \mathcal{S} (energía por u. de volumen, por u. de ángulo sólido y por u. de intervalo de frecuencia) es, descontado el movimiento de la Tierra respecto del promedio de galaxias, muy isótropo.
- Además \mathcal{S} depende sólo de la frecuencia ν y de la temperatura Θ a través de la **ley de Planck** (típica del equilibrio térmico materia-radiación):

$$\mathcal{S}(\nu, \Theta) = \frac{2h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/k_B\Theta} - 1} \quad (\Rightarrow \nu_{\max} \simeq 2.8 k_B\Theta/h, \text{ ley de Wien}) ,$$

con **constante de Planck** $h \simeq 6.6 \cdot 10^{-27}$ erg seg y **constante de Boltzmann** $k_B \simeq 1.4 \cdot 10^{-16}$ erg kelvin⁻¹

- Posee $\nu_{\max} \simeq 1.6 \cdot 10^{11}$ seg⁻¹ (microondas), correspondiente (ley de Wien) a una temperatura $\Theta \simeq 2.7$ kelvin (COBE 1992)



- En base a: (i) la hipótesis de que se trata de radiación remanente de una época más caliente de "desacoplo" (fin del equilibrio) materia-radiación con temperatura (la de formación estable de átomos de hidrógeno neutros) $\Theta \simeq 3 \cdot 10^3$ kelvin y (ii) la ley de Wien, se atribuye a la radiación de fondo un desplazamiento de frecuencia (WMAP): $z \simeq 1090$.

- Pero se han detectado (COBE) anisotropías, con máxima desviación respecto a la media de $\simeq 10^{-5}$ kelvin y tamaño angular de $\simeq 2$ grados (COBE, WMAP) entre dos consecutivos de estos máximos. El estudio de estas anisotropías (importantes para explicar la posterior formación de galaxias) está dando (en el marco de los modelos de Friedmann) información muy valiosa.

DENSIDAD DE ENERGÍA Y PRESIÓN: en la hipótesis de que la tensión-energía a gran escala corresponde esencialmente a la de un "fluido de galaxias" con propiedades de "isotropía desde la Tierra" y "homogeneidad" (\equiv todas las galaxias típicas tienen la misma "historia"), se extrapolan al cosmos los datos de nuestra "celdillas cósmica" (de tamaño $\simeq 10^8$ años luz):

• En cuanto a la densidad de energía (comóvil, ahora) ρ_0 , definiendo la **densidad crítica** (por el momento, "crítica" es sólo un nombre)

$$\rho_0^c := 3c^2 H_0^2 / 8\pi G \simeq 8'4 \cdot 10^{-9} \text{ erg cm}^{-3}$$

(correspondiente, en la hipótesis de materia "lenta", a una "densidad crítica de masa" $3H_0^2/8\pi G \simeq 0'9 \cdot 10^{-29} \text{ gr cm}^{-3}$), y denotando $\Omega_0 \equiv \rho_0 / \rho_0^c$, se tiene:

$$\Omega_0 \equiv \underbrace{\Omega_0^{\text{rad}}}_{\simeq 10^{-5}} + \underbrace{\Omega_0^{\text{mat. ord.}}}_{\simeq 6 \cdot 10^{-2}} + \underbrace{\Omega_0^{\text{mat. osc.}}}_{\simeq 2 \cdot 10^{-1} \leftrightarrow 3 \cdot 10^{-1}} < 0'4 \quad (73)$$

(en particular $\rho_0^{\text{rad}} \simeq 10^{-3} \rho_0^{\text{mat. ord.}} \simeq 10^{-4} \rho_0^{\text{mat}}$), donde:

- (i) Ω_0^{rad} se debe esencialmente a la radiación de fondo
- (ii) $\Omega_0^{\text{mat. ord.}}$ se debe a neutrinos ($\Omega_0^{\text{neutrino}} \lesssim 1'5 \cdot 10^{-2}$, WMAP) más materia bariónica ($\Omega_0^{\text{mat. bariónica}} \simeq 4'4 \cdot 10^{-2}$, WMAP). Esta última se determina en base a la abundancia observada de deuterio y a los cálculos de la nucleosíntesis en la gran explosión, e incluye materia visible ($\Omega_0^{\text{visible}} \lesssim 1'0 \cdot 10^{-2}$, WMAP) y materia no visible (formada quizás por enanas marrones)
- (iii) $\Omega_0^{\text{mat. osc.}}$ (de naturaleza desconocida) se estima en base a las velocidades orbitales de estrellas en las galaxias y de éstas en los cúmulos (que precisarían de una fuente adicional de densidad de energía atractora para ser explicadas).

Por otra parte, las observaciones de la anisotropía de la radiación de fondo (COBE, WMAP) indican, en el marco de los "modelos de Friedmann" (Charla 14), que

$$\Omega_0^{\text{total?}} = 1'02 (\pm 0'02) \rightsquigarrow$$

¿dónde está "la mayor parte" de la densidad de energía?.

• En cuanto a la presión (comóvil, ahora) p_0 , se tiene:

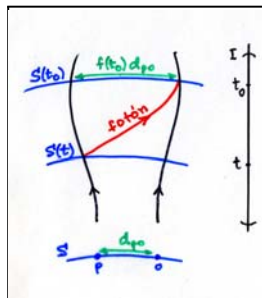
$$p_0 / \rho_0^c \equiv \underbrace{p_0^{\text{rad}} / \rho_0^c}_{\simeq 3 \cdot 10^{-6}} + \underbrace{p_0^{\text{mat. ord.}} / \rho_0^c}_{\simeq 6 \cdot 10^{-8}} + \underbrace{p_0^{\text{mat. osc.}} / \rho_0^c}_{???} \quad (74)$$

(en particular $p_0^{\text{mat. ord.}} \simeq 10^{-2} p_0^{\text{rad}} \simeq 10^{-7} \rho_0^{\text{mat}}$, usando (73) en la segunda), pero nada se sabe de $p_0^{\text{mat. osc.}}$.

11. LEY DE HUBBLE EN ESPACIO-TIEMPOS DE ROBERTSON-WALKER

Los ETs de Einstein utilizados en cosmología son los **ETs de Robertson-Walker** (ETsRW):

$$\mathbb{I} \times_f \mathbb{S} \equiv (\mathbb{M} = \mathbb{I} \times \mathbb{S}, g = -c^2 dt^2 + f^2(t)g_S) , \text{ siendo}$$



(i) $(\mathbb{I}, -c^2 dt^2)$, intervalo real riemanniano "definido negativo" ($t_0 \in \mathbb{I}$ "ahora")

(ii) (\mathbb{S}, g_S) , variedad 3-dim. riemann. con **curvatura cte. k** ($= -1, 0$ ó 1) ($o \in \mathbb{S}$ "aquí")

(iii) $f (> 0) \in C^\infty(\mathbb{I})$ [L] (**factor de escala**) "modula" a g_S (notación: $f_0 \equiv f(t_0)$, $f'_0 \equiv f'(t_0)$, ...)

• Un ETE $(\mathbb{M}, g, \uparrow, \mathbb{D})$ (Ch. 7) en el que $\exists t \in C^\infty(\mathbb{M})$ tal que:

(i) es creciente en cualquier dirección futura (equivalentemente: el campo $-\text{grad } t$ es temporal futuro)

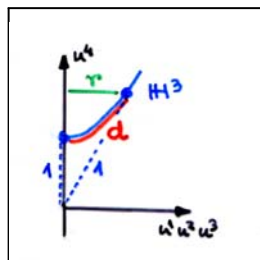
(ii) proporciona el "tiempo propio" de las curvas integrales de $-\text{grad } t$ (equivalentemente: $g(\text{grad } t, \text{grad } t) = -c^2$) y toma los mismos valores sobre todas ellas

(iii) sus hipersuperficies de nivel son "localmente isótropas" es esencialmente (!) un ETRW.

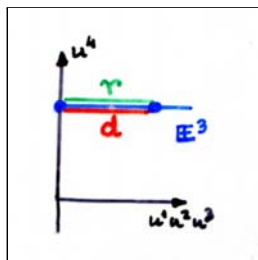
• Existe una única variedad riemanniana de curvatura cte. **k** ($= -1, 0$ ó 1) prototipo ("completa", "conexa" y "simpl. conexa"):

$$\begin{cases} \mathbb{H}^3 := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{\mu=1}^3 (p^\mu)^2 - (p^4)^2 = -1, p^4 > 0\} & \text{para } k = -1 \\ \mathbb{E}^3 := (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle) \text{ ("olvidados" origen y base estándar)} & \text{para } k = 0 \\ \mathbb{S}^3 := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{\mu=1}^3 (p^\mu)^2 + (p^4)^2 = 1\} & \text{para } k = 1 \end{cases}$$

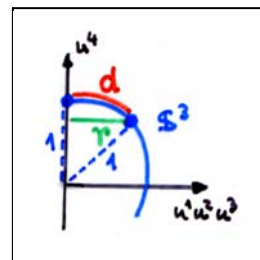
Dibujando cada prototipo \mathbb{S} en el semiplano ($r := (\sum_{\mu=1}^3 (u^\mu)^2)^{1/2}, u^4$) desde cualquier $q \in \mathbb{S}$ como "vértice", cada punto $p \in \mathbb{S}$ representa una 2-esfera euclídea de radio $r(p) = \eta(d_{pq})$, con d_{pq} la distancia riemanniana en \mathbb{S} desde q y con η dada en la figura



$$\eta(d_{pq}) := \sinh d_{pq}$$



$$\eta(d_{pq}) := d_{pq}$$



$$\eta(d_{pq}) := \sin d_{pq}$$

En un ETRW $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ (ingredientes básicos: \mathbf{k} y \mathbf{f}):

- El que $\mathbf{f}(t)$ tenga "dimensión" $[\mathbf{L}]$ (lo que implica, al ser $[\mathbf{g}] = [\mathbf{L}^2]$, que \mathbf{g}_s es "adimensional") mientras que \mathbf{t} tiene "dimensión" $[\mathbf{T}]$ se "gestiona" sobreentendiendo $\mathbf{f}(t) \equiv \lambda \phi(\nu t)$ (para ciertas constantes $\lambda(> 0)$ $[\mathbf{L}]$, $\nu(> 0)$ $[\mathbf{T}^{-1}]$ y cierta función $\phi(> 0) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{I})$)

- Las galaxias "típicas" se representan por curvas integrales de $\partial/\partial t = -\mathbf{grad} \mathbf{t}$ (que es (!) "geodésico", esto es, $\mathbf{D}_{\partial/\partial t} \partial/\partial t = \mathbf{0}$), correspondientes a puntos fijos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{S}$ y con **distancia propia**

$$d_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\mathbf{S}(t)} = \mathbf{f}(t) d_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \quad (75)$$

- Cada hipersuperficie $\mathbf{S}(t) \equiv \{\mathbf{t}\} \times \mathbf{S}$ resulta ser (!) "homotética" a $(\mathbf{S}, \mathbf{g}_s)$ (con factor $1/\mathbf{f}(t)$), por tanto de curvatura constante $\mathbf{k}/\mathbf{f}^2(t)$, por tanto "loc. homogénea" (\rightsquigarrow "principio cosmológico: todas las galaxias típicas tienen la misma historia") y "loc. isótropa"

LEY DE HUBBLE EN LOS ETRW:

Cualquier ET de Robertson-Walker $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ incorpora y "refina" la ley empírica de Hubble (71)

$$d_L \simeq c \mathbf{H}_0^{-1} z \quad (\text{para } z \lesssim 0'1)$$

(con $\mathbf{H}_0 > 0$ la constante de Hubble, ver (72)). Para ello, basta

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{definir la función de Hubble } \boxed{\mathbf{H} := \mathbf{f}'/\mathbf{f}} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{I}) \quad [\mathbf{T}^{-1}] \\ \text{identificar (no es una notación!) } \boxed{\mathbf{H}(t_0) \equiv \mathbf{H}_0} \end{array} \right. \quad (76)$$

Veámoslo en detalle. Sean \mathbf{p} (emisor, "allí") y \mathbf{o} (receptor, "aquí") dos galaxias típicas que intercambian fotones, con emisión en torno a \mathbf{t} ("entonces") y recepción en torno a \mathbf{t}_0 ("ahora"). Se tiene:

- El DESPLAZAMIENTO DE FRECUENCIA viene dado (!) por la "relación de tamaños" del cosmos entre emisión y recepción (no es un efecto Doppler!):

$$z := \frac{\nu_{em}}{\nu_{rec}} - 1 \stackrel{!}{=} \frac{\mathbf{f}_0}{\mathbf{f}(t)} - 1 \quad , \quad \Rightarrow \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{-\mathbf{f}_0 \mathbf{H}(t)}{\mathbf{f}(t)} \quad , \quad (77)$$

usando la definición (76) en la implicación.

- La DISTANCIA EN \mathbf{S} (adimensional) entre \mathbf{p} y \mathbf{o} verifica (!):

$$\boxed{d_{\mathbf{p}\mathbf{o}} \stackrel{!}{=} c \int_t^{t_0} \frac{dt}{\mathbf{f}(t)} = c \int_t^{t_0} \frac{-dz(t)}{\mathbf{f}_0 \mathbf{H}(t)} = c \int_0^z \frac{dz}{\mathbf{f}_0 \mathbf{H}(t(z))}} \quad (78)$$

(para $\mathbf{k} = 1$, siempre que sea $c \int_t^{t_0} \frac{dt}{\mathbf{f}(t)} \leq \pi$), usando (77) en la segunda igualdad y la hipótesis de que $\mathbf{f}(t)$ es estrictamente creciente entre \mathbf{t} y \mathbf{t}_0 ("ahora" lo es, por la identificación (76)) en la tercera.

- La DISTANCIA-LUMINOSIDAD se definió por (70)

$$d_L := \sqrt{\frac{L}{4\pi L_0}} \quad , \quad \text{con}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L := dE^{\text{em}}/dt \big|_t \text{ luminosidad absoluta} \\ \quad \text{(potencia emitida, supuesta conocida)} \\ L_0 := \frac{1}{A_0} dE^{\text{rec}}/dt \big|_{t_0} \text{ luminosidad aparente} \\ \quad \text{(potencia recibida por unidad de área } A_0 \text{ del receptor)} \end{array} \right.$$

Pero la potencia recibida "corrige" a la emitida por tres factores:

(i) un $(1+z)^{-1}$, que (para $z > 0$) corresponde por (77) $\frac{f_0}{f} = 1+z$ a la disminución de energía (de los fotones) debida a la expansión

(ii) otro $(1+z)^{-1}$, que corresponde (Charla 5!) al aumento del tiempo de recepción (de los fotones) debido a la expansión (identificado experimentalmente en las "curvas de luz" de las supernovas!)

(iii) el cociente entre el área A_0 del receptor y el área de la 2-esfera en $S(t_0)$ de radio $f_0 d_{po}$ (en la que "se distribuye uniformemente" la energía emitida), que es igual (ver antes) al área $4\pi f_0^2 \eta^2(d_{po})$ de la 2-esfera euclídea de radio $f_0 \eta(d_{po})$

Así se tiene:

$$\begin{aligned} dE^{\text{rec}}/dt \big|_{t_0} &= \frac{dE^{\text{em}}/dt \big|_t}{(1+z)^2} \frac{A_0}{4\pi f_0^2 \eta^2(d_{po})} \quad , \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow L_0 &= \frac{L}{(1+z)^2 4\pi f_0^2 \eta^2(d_{po})} \quad , \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{d_L = (1+z) f_0 \eta(d_{po})} \quad , \quad (79) \end{aligned}$$

con lo que d_L "distorsiona" la distancia propia actual $f_0 d_{po}$ entre las galaxias p y o en la medida en que es $z \neq 0$ ó $k \neq 0$

La ley de Hubble en un ETRW es (por definición) la dependencia $d_L(z)$ resultante de sustituir (78) $d_{po} = c \int_0^z \frac{dz}{f_0 H(t(z))}$ en (79):

$$\boxed{d_L = (1+z) f_0 \eta\left(c \int_0^z \frac{dz}{f_0 H(t(z))}\right)} \quad (80)$$

(para $k = 1$, siempre que sea $c \int_0^z \frac{dz}{f_0 H(t(z))} \leq \pi$), usando la hipótesis de que $f(t)$ es estrictamente creciente entre t y t_0

Pues bien, resulta que:

(i) el primer término del desarrollo de Taylor de la ley de Hubble (80) en torno a $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ es común para todos los modelos y reproduce la ley empírica de Hubble (71) $\mathbf{d}_L \simeq c\mathbf{H}_0^{-1} \mathbf{z}$

(ii) los siguientes términos del desarrollo dependen del modelo (a través de las derivadas del factor de escala \mathbf{f}) y "refinan" (71)

En efecto:

• Desarrollando en (78) $\mathbf{d}_{po} = c \int_t^{t_0} \frac{dt}{f(t)} \equiv c\mathbf{J}_t$ la integral $\mathbf{J}_{t(f)} = \int_f^{f_0} \frac{df}{ff'}$ (como función de \mathbf{f} , suponiendo de nuevo que $\mathbf{f}(t)$ es estrictamente creciente entre \mathbf{t} y \mathbf{t}_0) en torno a $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0$, y teniendo en cuenta que

$$\frac{d\mathbf{J}_t}{d\mathbf{f}} = \frac{d\mathbf{J}_t}{dt} \frac{dt}{d\mathbf{f}} = \frac{-1}{ff'} , \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{J}_t}{d\mathbf{f}^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{J}_t}{d\mathbf{f}} \right) \frac{dt}{d\mathbf{f}} = \frac{d(-1/ff')}{dt} \frac{1}{f'} = \frac{1}{f^2 f'} \left(1 + \frac{ff''}{f'^2} \right) ,$$

se obtiene ($\mathbf{J}_{t(f_0)} = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{po} &= c \left[\frac{d\mathbf{J}_{t(f)}}{d\mathbf{f}} \Big|_{f_0} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{J}_{t(f)}}{d\mathbf{f}^2} \Big|_{f_0} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)^2 + \mathcal{O}((\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)^3) \right] = \\ &= \frac{c}{f'_0} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{f}}{f_0} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_0 f''_0}{f'^2_0} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{f}}{f_0} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mathbf{f}}{f_0} \right)^3 \right) \right] = \\ &= \frac{c}{f'_0} \left[\left(\frac{\mathbf{z}}{1+\mathbf{z}} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_0 f''_0}{f'^2_0} \right) \left(\frac{\mathbf{z}}{1+\mathbf{z}} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mathbf{z}}{1+\mathbf{z}} \right)^3 \right) \right] , \end{aligned}$$

usando (77) $\frac{f_0}{f} = 1 + \mathbf{z}$ en la última igualdad

• Desarrollando en (79) $\mathbf{d}_L = (1 + \mathbf{z}) f_0 \eta(\mathbf{d}_{po})$ la función $\eta(\mathbf{d}_{po})$ en torno a $\mathbf{d}_{po} = \mathbf{0}$, se obtiene:

$$\mathbf{d}_L = (1 + \mathbf{z}) f_0 [\mathbf{d}_{po} + \mathcal{O}(\mathbf{d}_{po}^3)]$$

• Y sustituyendo la penúltima expresión en la última (y usando la identificación (76) $f'_0/f_0 \equiv \mathbf{H}_0$) se concluye:

$$\boxed{\mathbf{d}_L = c \mathbf{H}_0^{-1} \left[\mathbf{z} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_0 f''_0}{f'^2_0} \right) \mathbf{z}^2 + \mathcal{O}(\mathbf{z}^3) \right]} , \quad (81)$$

que efectivamente incorpora y "refina" (71)

Siempre se ha dado por sentado que el llamado **parámetro de deceleración** (adimensional!) $-f_0 f''_0/f'^2_0$ sería positivo (gravedad "atractora"). Sin embargo, recientes observaciones (finales de 1990's, Charla 14) indican (sin apenas lugar a dudas) que actualmente LA EXPANSIÓN SE ACELERA (ver Charla 14):

$$f_0 f''_0/f'^2_0 \simeq 0'60 (> 0)$$

Observación 11.1 **HORIZONTES EN LOS ETsRW**

En un ET de Robertson-Walker

$$\mathbf{I} \times_f \mathbf{S} \equiv (\mathbf{M} = \mathbf{I} \times \mathbf{S}, \mathbf{g} = -c^2 dt^2 + f^2(t)g_S)$$

• Se llama **distancia de Hubble** d_{Hubble} a la distancia propia actual de aquellas galaxias típicas (suponiendo que existan) que se están alejando de nosotros (ahora) a la velocidad de la luz:

$$c = \frac{d(d_{\text{po}}^{\text{S}(t)})}{dt}(t_0) = f'_0 d_{\text{po}} = H_0 f_0 d_{\text{po}} =: H_0 d_{\text{Hubble}}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d_{\text{Hubble}} = c H_0^{-1}}, \quad (82)$$

usando (75) $d_{\text{pq}}^{\text{S}(t)} = f(t) d_{\text{pq}}$ en la segunda igualdad, y la definición e identificación (76) $\mathbf{H} := f'/f$ con $\mathbf{H}(t_0) \equiv H_0$ en la tercera

Una distancia de Hubble: (i) no contradice la relatividad, (ii) (si es finita) verifica (!) $d'_{\text{Hubble}} = c(1 - f_0 f''_0 / f_0'^2)$, y (iii) no es un horizonte (si $f_0 f''_0 / f_0'^2 < 1$, d_{Hubble} crece y fotones que están "más allá" podrían luego quedar "más acá")

• Se llama **horizonte de partículas** d_{phor} al supremo de la distancia propia actual de galaxias típicas de cuyas características en un pasado podríamos ahora tener noticia. Se tiene:

$$d_{\text{phor}} := f_0 c \int_{\text{inf I}}^{t_0} \frac{dt}{f(t)} = c \int_{\text{inf I}}^{t_0} \frac{-dz(t)}{H(t)} = c \int_0^{\lim_{t \rightarrow \text{inf I}} z(t)} \frac{dz}{H(t(z))} \quad (83)$$

(para $k = 1$, siempre que sea $c \int_{\text{inf I}}^{t_0} \frac{dt}{f(t)} \leq \pi$), usando (75) y (78) en la primera igualdad, (77) en la segunda y la hipótesis de que $f(t)$ es estrictamente creciente entre t y t_0 en la tercera

El horizonte de partículas: (i) es la distancia (a escala actual) recorrida por la luz desde el comienzo, (ii) marca el límite de nuestro universo observable (si no hay "restricciones" a la observación), y (iii) (si es finito) verifica (!) $d'_{\text{phor}} = c + H_0 d_{\text{phor}}$ ($\Rightarrow d_{\text{phor}}$ crece)

• Se llama **horizonte de sucesos** d_{ehor} al supremo de la distancia propia actual de galaxias típicas de cuyas características actuales podríamos tener noticia en un futuro:

$$d_{\text{ehor}} := f_0 c \int_{t_0}^{\text{sup I}} \frac{dt}{f(t)} \quad (84)$$

(para $k = 1$, siempre que sea $c \int_{t_0}^{\text{sup I}} \frac{dt}{f(t)} \leq \pi$), usando (75) y (78).

El horizonte de sucesos: (i) es la distancia (a escala actual) que puede recorrer la luz hasta el final, y (ii) (si es finito y $k \neq 1$) verifica (!) $d'_{\text{ehor}} = -c + H_0 d_{\text{ehor}}$

En la Charla 14 volveremos sobre estos horizontes ■

12. COSMOLOGÍA DE ROBERTSON-WALKER. SINGULARIDADES

Sea $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S} \equiv (\mathbf{M} = \mathbf{I} \times \mathbf{S}, \mathbf{g} = -c^2 dt^2 + f^2(t) \mathbf{g}_S)$ un ETRW, con función de Hubble (76) $\mathbf{H} := f'/f \in C^\infty(\mathbf{I})$

Cálculos (!) dan (para cualesquiera $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \perp \partial/\partial t$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ric}(\partial/\partial t, \partial/\partial t) = -3f''/f \\ \text{Ric}(\mathbf{X}, \partial/\partial t) = 0 \\ \text{Ric}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (2f'^2/c^2 f^2 + 2k/f^2 + f''/c^2 f) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ \text{tr Ric} = 6(f'^2/c^2 f^2 + k/f^2 + f''/c^2 f) \end{array} \right. \quad (85)$$

Se sigue de (85) que $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ verifica la ecuación de Einstein con constante cosmológica (67) $\text{Ric} - \frac{1}{2}(\text{tr Ric})\mathbf{g} + \Lambda \mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}$ si y sólo si (!) la tensión-energía \mathbf{T} "corresponde" (en el sentido de la ec. (57) $\mathbf{T} = (\rho + \mathbf{p})\mathbf{g}(\mathbf{Z}/c, \cdot) \otimes \mathbf{g}(\mathbf{Z}/c, \cdot) + \mathbf{p}\mathbf{g}$) a un fluido perfecto (Charla 9) $(\mathbf{Z}, \rho, \mathbf{p})$ (**fluido de Robertson-Walker**), con

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\mathbf{Z} := \partial/\partial t} \\ \boxed{\rho + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} := \frac{3c^2}{8\pi G} \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{c^2 k}{f^2} \right) = \frac{3c^2 H^2}{8\pi G} \left(1 + \frac{c^2 k}{f^2} \right)} \\ \boxed{\mathbf{p} - \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} := \frac{-c^2}{8\pi G} \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{c^2 k}{f^2} + \frac{2f''}{f} \right) = \frac{-c^2 H^2}{8\pi G} \left(1 + \frac{c^2 k}{f^2} + \frac{2ff''}{f'^2} \right)} \end{array} \right. \quad (86)$$

(las segundas igualdades, allí donde $\mathbf{H} \neq 0$; nótese que ρ y \mathbf{p} resultan constantes en cada hipersuperficie $\mathbf{S}(t)$). En tal caso:

- Las ecuaciones de los fluidos perfectos (64)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho' = -(\rho + \mathbf{p}) \text{div } \partial/\partial t \\ (\rho + \mathbf{p}) \mathbf{D}_{\partial/\partial t} \partial/\partial t = -c^2 (\text{grad } \mathbf{p})^\perp \end{array} \right.$$

equivalen (al ser (!) $\text{div } \partial/\partial t = 3f'/f$, $\mathbf{D}_{\partial/\partial t} \partial/\partial t = 0$ y \mathbf{p} constante en cada hipersuperficie $\mathbf{S}(t)$) a la ecuación ("dinámica")

$$\boxed{\rho' = -3(\rho + \mathbf{p})f'/f} \quad (\Leftrightarrow (\rho f^3)' = -\mathbf{p}(f^3)'), \quad (87)$$

que pone de manifiesto que (en general) "la energía NO se conserva": si $\mathbf{p} > 0$, el trabajo realizado por la presión al expandirse es positivo y la "energía comóvil" decrece (recordar (65) en Ch. 9)

• Si se impone $\mathbf{f} = \text{cte.}$ y $\mathbf{p} = 0$, se sigue de (86c): $\Lambda = k/f^2$ y luego de (86b): $\rho = c^4 \Lambda / 4\pi G$. Si además se exige $\rho > 0$, se obtiene el **modelo estático de Einstein**:

$$k = 1 \quad \text{y} \quad f = 1/\sqrt{\Lambda}$$

CONSECUENCIAS inmediatas de (86). Teniendo en cuenta:

- (i) la identificación (76) $\mathbf{H}(t_0) \equiv \mathbf{H}_0 > 0$
- (ii) la definición de **densidad crítica** (ya introducida en Ch. 10)

$$\rho_0^c := \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \quad (88)$$

- (iii) las notaciones (la primera, ya introducida en la Charla 10)

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_0^c} \quad \text{y} \quad \Omega_{\Lambda 0} \equiv \frac{c^4 \Lambda / 8\pi G}{\rho_0^c} = \frac{c^2 \Lambda}{3H_0^2}, \quad \text{se sigue:} \quad (89)$$

- De la expresión de ρ en (86) allí donde $\mathbf{H} \neq 0$:

$$\rho + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} = \frac{3c^2 H^2}{8\pi G} \left(1 + \frac{c^2 k}{f'^2}\right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} = 1 + \frac{c^2 k}{f_0'^2}}, \quad (90)$$

que permite (si $k = -1$ ó 1) expresar f_0' en función de "observables" (ver Charla 14)

Así la respuesta a la pregunta: "EL COSMOS, ¿ES "ABIERTO" ($k = -1$), "PLANO" ($k = 0$) O "CERRADO" ($k = 1$)?" es:

$$k = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} \begin{Bmatrix} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{Bmatrix} \quad (91)$$

(aquí se aprecia la razón del nombre "densidad crítica" para ρ_0^c : es el valor de la densidad de energía comóvil actual que, para $\Lambda = 0$, corresponde a $k = 0$)

- De las expresiones de ρ y p en (86) allí donde $\mathbf{H} \neq 0$:

$$\frac{-1}{2}(\rho + 3p) + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} = \frac{3c^2 H^2}{8\pi G} \frac{f f''}{f'^2}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{-1}{2}(\Omega_0 + \frac{3p_0}{\rho_0^c}) + \Omega_{\Lambda 0} = \frac{f_0 f_0''}{f_0'^2}}, \quad (92)$$

que pone de manifiesto que $(\rho + 3p) > 0$ genera atracción (así ocurre con todos los fluidos perfectos "conocidos", recordar (59)) mientras que $\Lambda > 0$ genera repulsión (una propiedad general de la constante cosmológica, recordar (69))

Y la respuesta a la pregunta: "LA EXPANSIÓN ACTUAL ($f_0' > 0$), ¿SE FRENA ($f_0'' < 0$), MANTIENE VELOCIDAD ($f_0'' = 0$) O SE ACELERA ($f_0'' > 0$)?" es:

$$f_0'' \begin{Bmatrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \left(\Omega_0 + \frac{3p_0}{\rho_0^c}\right) + \Omega_{\Lambda 0} \begin{Bmatrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{Bmatrix} \quad (93)$$

Definiciones de SINGULARIDADES:

Se dice que el ETRW $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$:

Es **pasado-incompleto** si verifica (i) : $t_* \equiv \inf \mathbf{I}$ es finito

Posee **singularidad inicial** (SI) si verifica (i) y (ii) : $\lim_{t \rightarrow t_*} \mathbf{H}(t) = \infty$

Posee **gran explosión** (\equiv "big-bang", (BB)) si verifica (i) y

$$(iii): \lim_{t \rightarrow t_*} \mathbf{f}(t) = \mathbf{0}, \lim_{t \rightarrow t_*} \mathbf{f}'(t) = \infty$$

Posee **singularidad inicial física** (SFI) si verifica (i), (ii) y (iv) : $\lim_{t \rightarrow t_*} \rho(t) = \infty$

Algunas implicaciones inmediatas (escribiendo $\mathbf{f}(t) \equiv \lambda \phi(\nu t)$, para ciertas $\lambda(> 0)$ [L], $\nu(> 0)$ [T⁻¹] y $\phi(> 0) \in C^\infty(\mathbf{I})$, Ch. 11):

- (i) no implica nada (\mathbf{I} puede no ser "maximal")
- (ii) $\not\Rightarrow$ (i). Ejemplo: $\mathbb{R} \times_{\lambda \exp(-(\nu t)^2)} \mathbf{S} (\Rightarrow \mathbf{f}'(t) = -2\lambda\nu^2 t \exp(-(\nu t)^2))$
- (iii) \Rightarrow (ii) (obvio)
- (iii) $\not\Rightarrow$ (i). Ejemplo: $\mathbb{R} \times_{\lambda (\exp \nu t)^{2/3}} \mathbf{S} (\Rightarrow \mathbf{f}'(t) = 2/3 \cdot \lambda \nu (\exp \nu t)^{-1/3})$
- (i) + (ii) $\not\Rightarrow$ (iii). Ejs.: $(0, \infty) \times_{\lambda (1+(\nu t)^{2/3})} \mathbf{S} (\Rightarrow \mathbf{f}'(t) = 2/3 \cdot \lambda \nu (\nu t)^{-1/3})$, $(0, \infty) \times_{\lambda \operatorname{arcsenh}(\nu t)} \mathbf{S} (\Rightarrow \mathbf{f}'(t) = \lambda \nu (1 + (\nu t)^2)^{-1/2})$ y $(0, \infty) \times_{\lambda \nu t} \mathbf{S} (\Rightarrow \mathbf{f}'(t) = \lambda \nu)$

Las implicaciones con (iv) tienen en cuenta (86), escrita como

$$\rho = \mathbf{A}(\mathbf{f}'^2 + \mathbf{c}^2 \mathbf{k})/\mathbf{f}^2 + \mathbf{B} \quad (\text{con } \mathbf{A}(> 0) \text{ y } \mathbf{B} \text{ constantes}):$$

- (iv) $\not\Rightarrow$ (iii) (consecuencia del ejemplo que sigue y de que (iii) \Rightarrow (ii))
- (iv) $\not\Rightarrow$ (ii). Ejemplo: $\mathbb{R} \times_{\lambda \exp((\nu t)^2)} \mathbf{S} (\Rightarrow \mathbf{f}'(t) = 2\lambda\nu^2 t \exp((\nu t)^2))$
- (iv) $\not\Rightarrow$ (i). Ejemplos: $\mathbb{R} \times_{\lambda \exp(\mp(\nu t)^2)} \mathbf{S}$ (ver antes)
- (ii) \Rightarrow (iv) si $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ ó $\mathbf{1}$ (obvio), pero
- (i) + (ii) $\not\Rightarrow$ (iv) si $\mathbf{k} = -\mathbf{1}$. Ejemplo: $(0, \infty) \times_{\mathbf{c}t} \mathbf{S}$ (ver antes)
- (iii) \Rightarrow (iv) (obvio)

De todo lo anterior se sigue:

$$(BB) \Rightarrow (SFI) \stackrel{k=0,1}{\Leftrightarrow} (SI)$$

"Dualmente", se dice que el ETRW $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$:

Es **futuro-incompleto** si verifica (i'): $t^* \equiv \sup \mathbf{I}$ es finito

Posee **singularidad final** (SF) si verifica (i') y (ii'): $\lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{H}(t) = -\infty$

Posee **gran implosión** (\equiv "big-crunch", (BC)) si verifica (i') y

$$(iii)': \lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{f}(t) = \mathbf{0}, \lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{f}'(t) = -\infty$$

Posee **singul. final física** (SFF) si verifica (i'), (ii') y (iv)': $\lim_{t \rightarrow t^*} \rho(t) = \infty$

Y se siguen las implicaciones análogas:

$$(BC) \Rightarrow (SFF) \stackrel{k=0,1}{\Leftrightarrow} (SF)$$

Primer teorema (SINGULARIDADES INICIAL/FINAL):

Sea $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ un ETRW que verifica la ec. de Einstein (67), con la definición (76) $\mathbf{H} := f'/f$ y la identificación (76) $\mathbf{H}(t_0) \equiv \mathbf{H}_0 > 0$.

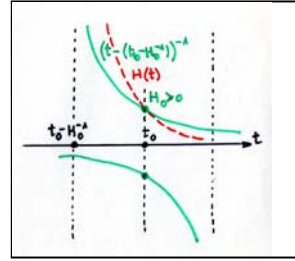
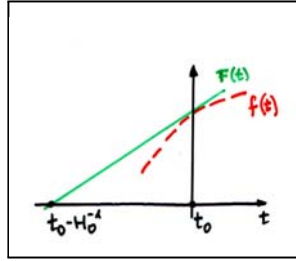
Considérese la desigualdad

$$\frac{-1}{2}(\rho + 3p) + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} < 0 \quad (94)$$

(i) Si (94) se verifica hacia el pasado de t_0 , entonces $t_0 - \mathbf{H}_0^{-1} < t_* < t_0$, con lo que $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ es pasado-incompleto y (si \mathbf{I} es "maximal") posee singularidad inicial

(ii) Si (94) se verifica hacia el futuro de t_0 , entonces: o bien $f' > 0$, o bien f posee un máximo después de t_0 , en cuyo caso $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ es futuro-incompleto y (si \mathbf{I} es "maximal") posee singularidad final

Demostración. Se tiene $f'_0 =: f_0 \mathbf{H}_0 > 0$ y, donde (94) se verifica, $f'' < 0$ (usando (92))



(i) La gráfica de $f(t)$ queda estrictamente "por debajo" de la de $\mathbf{F}(t) \equiv f_0 + f'_0(t - t_0)$ ($\Rightarrow \mathbf{F}(t_0 - \mathbf{H}_0^{-1}) = 0$), con lo que $t_0 - \mathbf{H}_0^{-1} < t_* < t_0$

Además, de la definición (76) y de la hipótesis se sigue la inEDO: $\mathbf{H}' = f''/f - \mathbf{H}^2 < -\mathbf{H}^2$, cuya solución $\mathbf{H}(t)$ (habida cuenta de la solución de la correspondiente EDO $\mathbf{H}' = -\mathbf{H}^2$, ver segunda figura) para $\mathbf{H}_0 > 0$ debe verificar (si \mathbf{I} es "maximal") $\lim_{t \rightarrow t_*} \mathbf{H}(t) = \infty$

(ii) Tras el máximo de f (si existe) será $f' < 0$, y el argumento anterior se aplica para concluir (segunda figura) lo que se afirma

Comentario. Las observ. (Ch. 14) sugieren (con ρ_0^c dado en (88)):

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 \simeq 0 \text{ y } \rho_0 \simeq 0'27 \rho_0^c \\ c^4 \Lambda / 8\pi G \simeq 0'73 \rho_0^c \end{array} \right\}, \Rightarrow \frac{-1}{2}(\rho_0 + 3p_0) + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \simeq 0'60 \rho_0^c > 0$$

Al ser $\Lambda > 0$, se complican las conclusiones. Pero muchas otras observaciones (radiación de fondo, abundancia de elementos, ...) y modelos de física de partículas indican que (94) se verificó hacia el pasado de cierto $t_1 < t_0$ (con $\mathbf{H}(t_1) > 0$), con lo que una singularidad inicial (o algo muy próximo a dicho "límite") tuvo probablemente lugar

Segundo teorema (GRAN EXPLOSIÓN/IMPLOSIÓN):

Sea $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ un ETRW que verifica la ec. de Einstein (67), con la definición (76) $\mathbf{H} := f'/f$ y la identificación (76) $\mathbf{H}(t_0) \equiv \mathbf{H}_0 > 0$.

Supongamos \mathbf{I} "maximal" y que $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ no posee singularidades no-físicas (innecesario decir esto último, si $\mathbf{k} = 0$ ó 1). Considérense las desigualdades (con $\mathbf{a}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}$)

$$\bar{\rho} > 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{-1}{3} < \right) \mathbf{a} \leq \frac{\bar{\mathbf{p}}}{\bar{\rho}} \leq \mathbf{A} , \quad (95)$$

donde $\bar{\rho} \equiv \rho + c^4 \Lambda / 8\pi G$ y $\bar{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p} - c^4 \Lambda / 8\pi G$

(i) Si (95) se verifica hacia el pasado de t_0 , entonces (!) $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ posee gran explosión

(ii) Si (95) se verifica hacia el futuro de t_0 y $\mathbf{k} = -1$ ó 0 , entonces (!) $f' > 0$ ($\Rightarrow \sup \mathbf{I} = \infty$, con lo que no hay singularidad final), $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$

(iii) Si (95) se verifica hacia el futuro de t_0 y $\mathbf{k} = 1$, entonces (!) $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ posee gran implosión

Ambas desigualdades para el cociente $\bar{\mathbf{p}}/\bar{\rho}$ en (95) son necesarias para garantizar gran explosión/implosión. Ejemplos:

- $(0, \infty) \times_{\lambda(1+(\nu t)^{2/3})} \mathbf{S}$ ($\Rightarrow f'(t) = 2/3 \cdot \lambda \nu (\nu t)^{-1/3}$) posee singularidad inicial (necesariamente física si $\mathbf{k} = 0$) pero no posee gran explosión ($\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{f}(t) = \lambda > 0$). Por lo demás, $\mathbf{H} > 0$, $(0, \infty)$ es "maximal" y (para $\mathbf{k} = 0$) se sigue (!) de (86)

$$\frac{\bar{\mathbf{p}}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{3} (\nu t)^{-2/3} ,$$

que incumple la segunda desigualdad (no tiene cota superior)

- $(0, \infty) \times_{\lambda \operatorname{arcsenh}(\nu t)} \mathbf{S}$ ($\Rightarrow f'(t) = \lambda \nu (1 + (\nu t)^2)^{-1/2}$) posee singularidad inicial (necesariamente física si $\mathbf{k} = 0$) pero no posee gran explosión ($\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{f}(t) = \lambda \nu < \infty$). Por lo demás, $\mathbf{H} > 0$, $(0, \infty)$ es "maximal" y (para $\mathbf{k} = 0$) se sigue (!) de (86)

$$\frac{\bar{\mathbf{p}}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2\nu t \operatorname{arcsenh}(\nu t)}{(1 + (\nu t)^2)^{1/2}} - 1 \right) ,$$

que incumple ambas desigualdades (y de hecho, es la primera la responsable de que el modelo no posea gran explosión)

Comentario: Para $\Lambda = 0$ (algo sobreentendido hasta mitad de los 1990's), este teorema es clave. Para Λ no necesariamente cero, el análisis de si se verifican o no las desigualdades del enunciado se hace prolijo y la importancia del teorema disminuye. Con la hipótesis adicional $\rho > \mathbf{p} = 0$, ver Charla 13

13. MODELOS DE FRIEDMANN

Intentamos describir el cosmos mediante un cierto ETRW $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ (Charla 11, con el intervalo \mathbf{I} maximal) tal que:

(F1) verifica la ec. de Einstein (67) $\mathbf{Ric} - \frac{1}{2}(\text{trRic})\mathbf{g} + \Lambda\mathbf{g} = \frac{8\pi\mathbf{G}}{c^4}\mathbf{T}$, lo que implica (Charla 12) que su tensión-energía \mathbf{T} "corresponde" (en el sentido de (57) $\mathbf{T} = (\rho + \mathbf{p})\mathbf{g}(\mathbf{Z}/c, \cdot) \otimes \mathbf{g}(\mathbf{Z}/c, \cdot) + \mathbf{p}\mathbf{g}$) a un fluido perfecto ($\mathbf{Z} = \partial/\partial t, \rho, \mathbf{p}$) verificando (86)

$$\rho + \frac{c^4\Lambda}{8\pi\mathbf{G}} = \frac{3c^2}{8\pi\mathbf{G}}\left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{c^2\mathbf{k}}{f^2}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{p} - \frac{c^4\Lambda}{8\pi\mathbf{G}} = \frac{-c^2}{8\pi\mathbf{G}}\left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{c^2\mathbf{k}}{f^2} + \frac{2f''}{f}\right)$$

(con $\mathbf{k} = -1, 0$ ó 1 la "curvatura cte." de la var. riemanniana \mathbf{S})

(F2) incorpora (Charla 11) la ley empírica de Hubble (71), vía (76) $\mathbf{H} := f'/f$ y $\mathbf{H}(t_0) \equiv \mathbf{H}_0 > 0$, en la ley de Hubble (80)

Deseamos obtener los parámetros básicos del modelo (las constantes \mathbf{k} y Λ , la función $f(t)$ y el intervalo \mathbf{I}) en base a "observables cosmológicos" (la constante de Hubble \mathbf{H}_0 , el "parámetro de deceleración" $-f_0 f_0''/f_0'^2$ y los datos sobre ρ_0 y \mathbf{p}_0), basados a su vez en medidas de z (para distintos objetos) y de la radiación de fondo

Una relación $\mathbf{p}(\rho)$ (?) podría sustituirse en (87) $\rho' = -3(\rho + \mathbf{p})f'/f$ para dar $\rho(f)$, que podría sustituirse en la expresión (86) de ρ para dar una EDO en la función (desconocida) $f(t)$. A este respecto:

- El no-dato (74) $\mathbf{p}_0^{\text{mat. osc.}} = ???$ es consistente ("nada se sabe") con la hipótesis simplificadora (CDM) $\boxed{\mathbf{p}_0^{\text{mat. osc.}} = 0}$

- Lo anterior y los datos (73,74) $\mathbf{p}_0^{\text{mat. ord.}} \simeq 10^{-2}\mathbf{p}_0^{\text{rad}} \simeq 10^{-7}\rho_0^{\text{mat}}$ indican que la presión es actualmente irrelevante

- Si radiación ($\mathbf{p}^{\text{rad}} = \rho^{\text{rad}}/3$) y materia ($\mathbf{p}^{\text{mat}} \ll \rho^{\text{mat}}$ en torno a "ahora" t_0) evolucionan "independientemente" (\equiv interflujos de energía no modifican las densidades de energía, "razonable" en buena parte de la historia), entonces (87) da lugar a dos ecs. independientes (la segunda, en torno a "ahora"):

$$\begin{cases} \rho^{\text{rad}'} = -4\rho^{\text{rad}}f'/f, \Rightarrow \boxed{\frac{8\pi\mathbf{G}}{3c^2}\rho^{\text{rad}}f^4 = \mathbf{A}^{\text{rad}}} (\text{cte.} > 0) [\text{L}^4\text{T}^{-2}] \\ \rho^{\text{mat}'} \simeq -3\rho^{\text{mat}}f'/f, \Rightarrow \boxed{\frac{8\pi\mathbf{G}}{3c^2}\rho^{\text{mat}}f^3 \simeq \mathbf{A}^{\text{mat}}} (\text{cte.} > 0) [\text{L}^3\text{T}^{-2}], \end{cases} \quad (96)$$

de donde se sigue que, cuando la presión es relevante (i.e. $f/f_0 \ll 1$), \mathbf{p}^{rad} domina a \mathbf{p}^{mat} . Lo que sugiere la hipótesis $\boxed{\mathbf{p}^{\text{mat}} = 0} \rightsquigarrow$

Un **modelo de Friedmann** es un ETRW $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$ con (F1), (F2) y

(F3) $(\partial/\partial t, \rho, \mathbf{p})$ consta de un fluido de radiación más un polvo ($\rho^{\text{mat}} > 3\mathbf{p}^{\text{mat}} = \mathbf{0}$) de materia que evolucionan independientemente

• En un tal modelo, las ecs. (96) son exactas. Sustituyendo $\rho \equiv \rho^{\text{rad}} + \rho^{\text{mat}}$ en (86) $\rho + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} = \frac{3c^2}{8\pi G} (\frac{f'^2}{f^2} + \frac{c^2 \mathbf{k}}{f^2})$ se obtiene la EDO:

$$f'^2 + c^2 \mathbf{k} = \frac{A^{\text{rad}}}{f^2} + \frac{A^{\text{mat}}}{f} + \frac{c^2 \Lambda}{3} f^2, \quad (97)$$

con solución unívocamente determinada por $\Lambda, \mathbf{k}, A^{\text{rad}} > 0$ y $A^{\text{mat}} > 0$ (más el "valor inicial" $H_0 > 0$). El análisis detallado es prolijo

• Pero el dato (73) $\rho_0^{\text{rad}} \simeq 10^{-4} \rho_0^{\text{mat}}$ conduce, usando (96), a la relación $A^{\text{rad}}/f_0^2 \simeq 10^{-4} A^{\text{mat}}/f_0$. Lo que indica que (en buena parte de la historia) se puede prescindir del término de radiación en (97), lo que da lugar a la **ecuación de Friedmann**:

$$\boxed{f'^2 + c^2 \mathbf{k} = \frac{A}{f} + \frac{c^2 \Lambda}{3} f^2}, \quad (98)$$

con solución unívocamente determinada por $\Lambda, \mathbf{k}, A > 0$ y $H_0 > 0$

SOLUCIONES CON $\Lambda = 0$ (sobreentendido hasta los 1990's)

En esta hipótesis, la ecuación de Friedmann (98) queda:

$$\boxed{f'^2 + c^2 \mathbf{k} = \frac{A}{f}}, \quad (99)$$

que se integra elementalmente. Todas las soluciones:

• poseen "gran explosión" para cierto $t_* < t_0$: previsible, ya que las desigualdades (94) y (95) en los dos teoremas de singularidades (Charla 12) se cumplen aquí trivialmente

• poseen "horizonte de partículas": consecuencia de que t_* es finito, lo que no permite (aún) la "comunicación" entre regiones "inicialmente desconectadas" (recordar que f' tiende a infinito en la gran explosión), Charla 14

• poseen "expansión siempre" (i.e. $f' > 0$) si $\mathbf{k} = -1$ ó $\mathbf{0}$, y "gran implosión" si $\mathbf{k} = 1$: de nuevo previsible por el segundo teorema de singularidades

• no poseen (salvo si $\mathbf{k} = 1$, por la finitud de la máxima distancia propia) "horizonte de sucesos" (Obs. 11.1): consecuencia del carácter siempre frenado de la expansión, que permite a la luz "ir ganando terreno" y (si el tiempo de vida del cosmos lo permite) "comunicar" cualquier suceso a cualquier observador, Ch. 14

• predicen una edad actual $\gtrsim 10^{10}$ años (que es compatible con la antigüedad estimada de los cúmulos) sólo si $\Omega_0 \lesssim 0'12$ ($\Rightarrow \mathbf{k} = -1$), que es incompatible con el dato observacional (73) $\Omega_0 > 0'20$

Específicamente: recordando las notaciones (88) $\rho_0^c := \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}$ y (89) $\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_0^c}$, y tomando $t_* = 0$ ($\rightsquigarrow t_0$ es la "edad del cosmos"), las soluciones, determinadas por (96) $A \equiv \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 f_0^3 = \Omega_0 H_0^2 f_0^3$ y por el valor (72) $H_0^{-1} \simeq 13'8 \cdot 10^9$ años, son:

• Para $k = 0$:
$$f(t) = \sqrt[3]{9/4} A/c^2 \cdot (c^3 t/A)^{2/3}, \text{ con } t \in (0, \infty)$$

En este caso (**modelo de Einstein-de Sitter**) debe ser (91) $\Omega_0 = 1$ (excesivo frente al dato observacional (73) $\Omega_0 < 0'4$), lo que implica $A = H_0^2 f_0^3$ (ello no determina A)

Y se tiene la predicción (escasa frente a la edad de los cúmulos):

$$H := f'/f = 2/3t, \Rightarrow t_0 = 2H_0^{-1}/3 \simeq 9'2 \cdot 10^9 \text{ años}$$

• Para $k = 1$:
$$\begin{cases} t(\vartheta) = A/2c^3 \cdot (\vartheta - \text{sen } \vartheta) \\ f(\vartheta) = A/2c^2 \cdot (1 - \text{cos } \vartheta) \end{cases}, \text{ con } \vartheta \in (0, 2\pi)$$

En este caso debe ser (91) $\Omega_0 > 1$ (muy excesivo!!).

Elijiendo $\Omega_0 = 2$, la ec. (86) da la predicción (muy escasa!!):

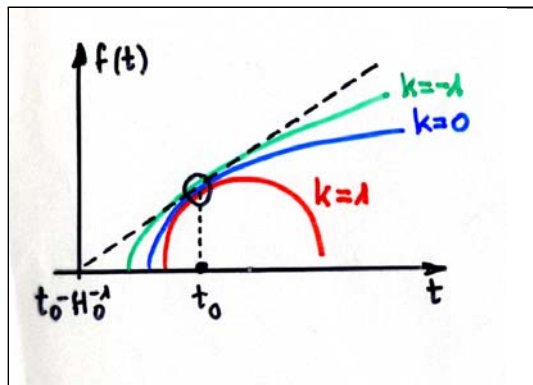
$$\begin{aligned} \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2 (1 + \frac{c^2}{f_0^2}) = \rho_0 = 2\rho_0^c, &\Rightarrow f_0 = cH_0^{-1}, \Rightarrow A = 2c^3 H_0^{-1}, \Rightarrow \\ \Rightarrow \vartheta_0 = \pi/2, &\Rightarrow t_0 = (\pi/2 - 1)H_0^{-1} \simeq 7'9 \cdot 10^9 \text{ años} \end{aligned}$$

• Para $k = -1$:
$$\begin{cases} t(\chi) = A/2c^3 \cdot (\text{senh } \chi - \chi) \\ f(\chi) = A/2c^2 \cdot (\text{cosh } \chi - 1) \end{cases}, \text{ con } \chi \in (0, \infty)$$

En este caso debe ser (91) $\Omega_0 < 1$

Elijiendo $\Omega_0 = 0'1$ (muy escaso!! frente al dato (73) $\Omega_0 > 0'20$), la ec. (86) da la predicción (ajustada a la edad de los cúmulos):

$$\begin{aligned} \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2 (1 - \frac{c^2}{f_0^2}) = \rho_0 = 0'1\rho_0^c, &\Rightarrow f_0 = \frac{\sqrt{10}}{3} H_0^{-1}, \Rightarrow \\ \Rightarrow A = \frac{\sqrt{10}}{27} c^3 H_0^{-1}, &\Rightarrow \eta_0 \simeq 3'64, \Rightarrow \\ \Rightarrow t_0 = \frac{\sqrt{10}}{54} (6\sqrt{10} - 3'64) H_0^{-1} &\simeq 12'4 \cdot 10^9 \text{ años} \end{aligned}$$



SOLUCIONES CON Λ NO necesariamente nula:

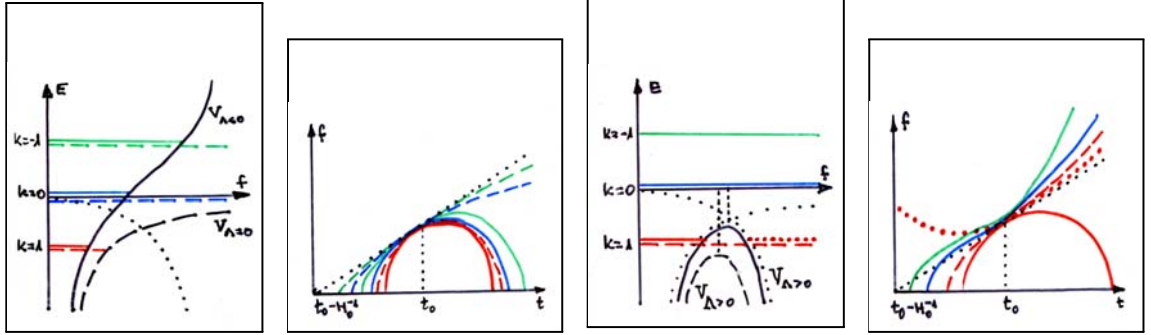
La ec. de Friedmann (98) es una "ecuación de la energía"

$$\boxed{f'^2 = -c^2 k + \left(\frac{\Lambda}{f} + \frac{c^2 \Lambda f^2}{3}\right) \equiv E - V_\Lambda(f)} \quad , \quad (100)$$

cuyo "potencial" $V_\Lambda(f)$ posee (sólo para $\Lambda > 0$) un punto crítico (máximo) en $f_*^\Lambda \equiv \left(\frac{3\Lambda}{2c^2\Lambda}\right)^{1/3}$ con $V_\Lambda(f_*^\Lambda) = -\left(\frac{9c^2\Lambda^2\Lambda}{4}\right)^{1/3}$

Las soluciones $f(t)$ de (100), determinadas por Λ , k , $\Lambda > 0$ y $H_0 > 0$, y que "recorrerán" (!) los puntos $(f, E = -c^2 k)$ tales que:

- (1) NO queden "por debajo" de la gráfica de $V_\Lambda(f)$
- (2) sean compatibles con la condición inicial $f'_0 > 0$
- (3) para $\Lambda \leq 0$ sea $f'' < 0$, y para $\Lambda > 0$ sea $f'' \leq 0 \Leftrightarrow f \leq f_*^\Lambda$



• poseen gran explosión (y por tanto, horizonte de partículas) en cierto $t_* < t_0$, SALVO en el caso

$$\frac{4}{9c^2\Lambda^2} \geq \Lambda > 0 \quad , \quad k = 1 \quad , \quad f_0 > f_*^\Lambda \quad , \quad (101)$$

en el cual existe $t_{\min} < t_0$ con $\lim_{t \rightarrow t_{\min}} f(t) > 0$ y $\lim_{t \rightarrow t_{\min}} f'(t) = 0$; si t_{\min} es finito, $f(t)$ resulta simétrica en torno a t_{\min} ("rebote")

• poseen expansión siempre (con aceleración positiva desde cierto t_{cambio} , quizás infinito; y, salvo un caso límite, con $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$), SALVO en los casos

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda < 0 \\ \Lambda = 0 \quad , \quad k = 1 \\ \frac{4}{9c^2\Lambda^2} > \Lambda > 0 \quad , \quad k = 1 \quad , \quad f_0 < f_*^\Lambda \quad \text{ó} \quad f_0 > f_*^\Lambda \end{array} \right. ; \quad (102)$$

en los tres primeros casos, la expansión se detiene en el futuro: existe $t_{\max} > t_0$ (finito) con $\lim_{t \rightarrow t_{\max}} f(t) > 0$ y $\lim_{t \rightarrow t_{\max}} f'(t) = 0$, y poseen "gran implosión" en cierto $t^* > t_0$; en el cuarto se detiene en el pasado ("rebote")

• poseen horizonte de sucesos, SALVO en los casos

$$\Lambda = 0 \quad , \quad k = -1 \quad \text{ó} \quad 0 \quad , \quad (103)$$

en los que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ pero $t_{\text{cambio}} = \infty$ (expansión siempre "frenada")

14. LEY DE HUBBLE EN MODELOS DE FRIEDMANN. MODELO Λ CDM

Sea $\mathbf{I} \times_{\mathbf{f}} \mathbf{S}$ un ERTW que además verifica (F1), (F2) y (F3)

• Por (F2), el ETRW incorpora la ley empírica de Hubble (71), vía (76) $\mathbf{H} := \mathbf{f}'/\mathbf{f}$ y $\mathbf{H}(\mathbf{t}_0) \equiv \mathbf{H}_0 > 0$, en la ley de Hubble (80)

$$\mathbf{d}_L = (1+z) \mathbf{f}_0 \eta \left(c \int_0^z \frac{dz}{\mathbf{f}_0 \mathbf{H}(\mathbf{t}(z))} \right)$$

(para $\mathbf{k} = 1$, siempre que sea $c \int_0^z \frac{dz}{\mathbf{f}_0 \mathbf{H}(\mathbf{t}(z))} \leq \pi$), usando la hipótesis de que $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ es estrictamente creciente entre \mathbf{t} y \mathbf{t}_0 . Aquí $\eta(\psi) := \operatorname{senh}\psi$, ψ ó $\operatorname{sen}\psi$, según sea $\mathbf{k} = -1, 0$ ó 1

• Por (F1), la dens. de energía ρ cumple (86) $\rho + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} = \frac{3c^2}{8\pi G} \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{c^2 k}{f^2} \right)$. Ello da lugar, por (F2) y usando la definición (88) $\rho_0^c := \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}$ y las notaciones (89) $\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_0^c}$, $\Omega_{\Lambda 0} \equiv \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G \rho_0^c} = \frac{c^2 \Lambda}{3H_0^2}$, a la relación (90)

$$\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} = 1 + c^2 k / f_0'^2,$$

que permite expresar \mathbf{f}_0 en (80) (si $\mathbf{k} = -1$ ó 1 , únicos casos en que interesa hacerlo) en función de "observables" como sigue:

$$\mathbf{f}_0 \equiv \mathbf{H}_0^{-1} \mathbf{f}'_0 = c \mathbf{H}_0^{-1} |1 - (\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0})|^{-1/2} \quad (104)$$

• Por (F3), la densidad de energía ρ satisface (96) $\rho \mathbf{f}^3 = \rho_0 \mathbf{f}_0^3$ (sin incluir radiación; si se incluyera, habría que usar $\rho^{\text{rad}} \mathbf{f}^4 = \rho_0^{\text{rad}} \mathbf{f}_0^4$ y $\rho^{\text{mat}} \mathbf{f}^3 = \rho_0^{\text{mat}} \mathbf{f}_0^3$ por separado). Ello permite, por (F1) y (F2), expresar $\mathbf{H}(\mathbf{t}(z))$ en (80) en función de "observables" como sigue:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f'}{f_0} \right)^2 &= \frac{-c^2 k}{f_0^2} + \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\rho + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \right) \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 = \\ &= \left(\left(\frac{f'_0}{f_0} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\rho_0 + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \right) \right) + \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\rho + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \right) \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{f'_0}{f_0} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\rho_0 + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \right) + \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 \frac{f_0}{f} + \frac{c^2 \Lambda}{3} \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 = \\ &= \mathbf{H}_0^2 \left(1 - (\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0}) + \Omega_0 \frac{f_0}{f} + \Omega_{\Lambda 0} \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right), \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{t}) &\equiv \frac{f_0}{f(\mathbf{t})} \frac{f'(\mathbf{t})}{f_0} = \frac{f_0}{f(\mathbf{t})} \mathbf{H}_0 \left(1 + \Omega_0 \left(\frac{f_0}{f(\mathbf{t})} - 1 \right) + \Omega_{\Lambda 0} \left(\left(\frac{f(\mathbf{t})}{f_0} \right)^2 - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{t}(z)) &= \mathbf{H}_0 (1+z) \left(1 + \Omega_0 z + \Omega_{\Lambda 0} \left(\frac{1}{(1+z)^2} - 1 \right) \right)^{1/2} \quad (105) \end{aligned}$$

usando (86) en la primera y segunda igualdades, (96) en la tercera, (88) y (89) en la cuarta, y (77) $1+z = f_0/f(\mathbf{t})$ en la 2ª implicación

LA LEY DE HUBBLE EN LOS MODELOS DE FRIEDMANN (80)+(104)+(105) convierte la dependencia $\mathbf{d}_L(z)$ en una función exclusiva de z , \mathbf{H}_0 , Ω_0 y $\Omega_{\Lambda 0}$

MÁS OBSERVACIONES:

- Como ya vimos (Charla 10), las observaciones de galaxias y cúmulos de galaxias indican

$$\boxed{0'2 < \Omega_0 < 0'4} \quad (*)$$

- Desde principios de 1990's las observaciones de la anisotropía de la radiación de fondo (COBE) indican (!), en el marco de los espacio-tiempos de Robertson-Walker, que la geometría de cada hipersuperficie $S(t)$ es euclídea, esto es, $k = 0$. En términos de los observables Ω_0 y $\Omega_{\Lambda 0}$, y habida cuenta de (90) $\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} = 1 + \frac{c^2 k}{f_0^2}$, las citadas observaciones indican (WMAP)

$$\boxed{\Omega_0^{\text{total?}} \equiv \Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0?} = 1'02 (\pm 0'02)} \quad (**)$$

- A finales de 1990's dos equipos independientes han cotejado la dependencia $d_L(z)$ de la ley de Hubble en los modelos de Friedmann (80)+(104)+(105) con muestras de varias decenas de supernovas tipo Ia lejanas ($0'2 \lesssim z \lesssim 0'8$).

El análisis estadístico de las observaciones (HZT-Riess 98, SCP-Perlmutter 99) indica una distancia-luminosidad mayor (\equiv luminosidad aparente menor, un $\simeq 25\%$) de la "máxima" que tendrían tomando en $d_L(z)$ el valor $\Lambda = 0$ (el aceptado hasta la fecha, compatible con la cota observacional previa: $|\Lambda| \leq 10^{-55} \text{ cm}^{-2}$, Ch. 9).

Y los valores que mejor ajustan estas observaciones con las restricciones (*) y (**) son (WMAP):

$$\boxed{\Omega_0 = 0'27 (\pm 0'04)} \quad \text{y} \quad \boxed{\Omega_{\Lambda 0} = 0'73 (\pm 0'04)} \quad (106)$$

Se sigue de (92) $-\frac{1}{2}(\Omega_0 + 3p_0/\rho_0^c) + \Omega_{\Lambda 0} = \frac{f_0 f_0''}{f_0'^2}$ con $p_0 = 0$ y (106) que LA EXPANSIÓN ACTUAL SE ACELERA (parámetro de "deceleración" negativo!):

$$\frac{f_0 f_0''}{f_0'^2} = -\frac{1}{2}\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} \simeq 0'60 (> 0) \quad (107)$$

Y se sigue de (89) $\Omega_{\Lambda 0} = \frac{c^2 \Lambda}{3H_0^2}$ y (106) una cte. cosmológica POSITIVA:

$$\Lambda = \frac{3H_0^2}{c^2}\Omega_{\Lambda 0} \simeq 0'73 \frac{3H_0^2}{c^2}$$

con valor, habida cuenta de (72) $H_0^{-1} \simeq 13'8 \cdot 10^9$ años:

$$\boxed{\Lambda \simeq 1'15 \cdot 10^{-20} \text{ años luz}^{-2} \simeq 1'3 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}} \quad (108)$$

Recordemos que, en el marco de los modelos de Friedmann:

- La respuesta a: "EL COSMOS ¿ES "ABIERTO" ($k = -1$), "PLANO" ($k = 0$) O "CERRADO" ($k = 1$)?" venía dada por (90):

$$k = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} \begin{Bmatrix} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{LINEA VERDE})$$

- La respuesta a: "LA EXPANSIÓN ACTUAL ($f'_0 > 0$) ¿SE FRENA ($f''_0 < 0$), MANTIENE VELOCIDAD ($f''_0 = 0$) O SE ACELERA ($f''_0 > 0$)" venía dada por (92) con $p_0 = 0$:

$$f''_0 \begin{Bmatrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} \begin{Bmatrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{LINEA AZUL})$$

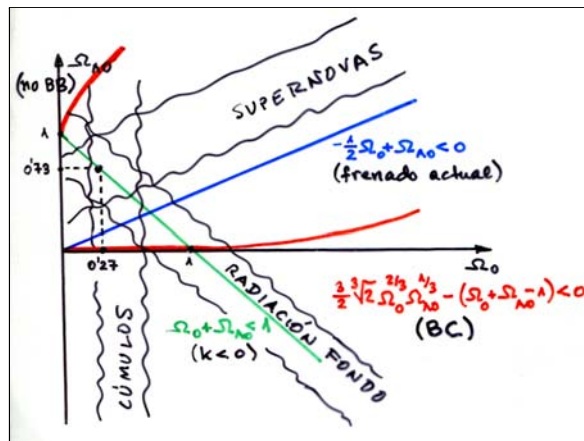
- Pues bien, la respuesta a: "EXPANSIÓN SIEMPRE ¿SÍ ($f' > 0$) O NO?" viene dada por (!):

$$f' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega_{\Lambda 0} \geq 0 & , \text{ si } k = -1 \text{ ó } k = 0 & (\text{LINEA ROJA}) \\ \Omega_{\Lambda 0} > 0 \text{ y } \frac{3}{2} \sqrt{2} \Omega_0^{2/3} \Omega_{\Lambda 0}^{1/3} - (\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} - 1) \geq 0 & , \text{ si } k = 1 \end{cases}$$

Si esta última respuesta es SI, el modelo posee (Charla 13): gran explosión (BB), aceleración positiva desde cierto t_{cambio} (quizás infinito), $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ (salvo un caso límite) y horizonte de sucesos (salvo dos casos límite).

Si esta última respuesta es NO, la expansión (Charla 13): se detiene en el futuro y hay gran implosión (BC) ó se detiene en el pasado y no hay gran explosión

En un diagrama ($\Omega_0, \Omega_{\Lambda 0}$) la situación observacional actual es la siguiente:

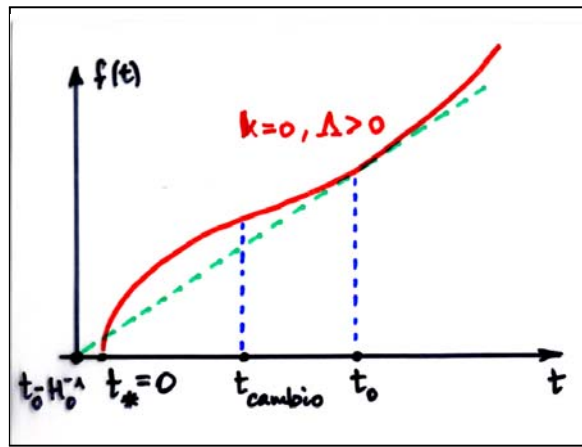


MODELO Λ CDM:

Si como indican (91) y (106) es $k = 0$, la ec. de Friedmann (98) queda: $f'^2 = \frac{\Lambda}{f} + \frac{c^2 \Lambda f^2}{3}$, que se integra elementalmente.

Y si como indica (108) es $\Lambda > 0$, la solución (unívocamente determinada por Λ , $\Lambda > 0$ y $H_0 > 0$)

$$f(t) = (3\Lambda/2c^2\Lambda)^{1/3} \left(\cosh(\sqrt{3c^2\Lambda} t) - 1 \right)^{1/3} \quad (109)$$



- posee expansión siempre, con $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) := \sqrt{\Lambda/3}$
- posee gran explosión (y por tanto, horizonte de partículas)
- posee aceleración positiva desde cierto t_{cambio} finito, con f'' creciente y $\lim_{t \rightarrow \infty} f''/f' = 1$
- alcanza $f = \infty$ en tiempo infinito y posee horizonte de sucesos

Con los valores (106) $\Omega_0 \simeq 0'27$ y $\Omega_{\Lambda 0} \simeq 0'73$ (modelo Λ CDM), el modelo predice:

- una edad del cosmos $t_0 \simeq 13'7 \cdot 10^9$ años (excelente acuerdo con WMAP y con la edad de los cúmulos)
- un valor $t_{\text{cambio}} \simeq 7'1 \cdot 10^9$ años $< t_0$ (acuerdo? con los datos de la Supernova Ia SN1997ff con $z \simeq 1'7$)
- un horizonte de partículas $d_{\text{phor}} \simeq 47'6 \cdot 10^9$ años luz, que se aleja (ahora) a velocidad (Obs. 11.1) $d'_{\text{phor}} \simeq 4'4 c$
- un horizonte de sucesos $d_{\text{ehor}} \simeq 15'5 \cdot 10^9$ años luz, que se aleja (ahora) a velocidad (Obs. 11.1) $d'_{\text{ehor}} \simeq 0'1 c$ y tiene por límite $\lim_{t \rightarrow \infty} d_{\text{ehor}}(t) \simeq 16'1 \cdot 10^9$ años luz. Habida cuenta de este límite finito y de la expansión acelerada del cosmos, cantidades crecientes de estructuras cósmicas (actualmente observables) irán escapando a nuestra observación