

# CHARLAS SOBRE RELATIVIDAD Y COSMOLOGÍA

Eduardo Aguirre

Curso 2012-13

## 0.1. Bibliografía seleccionada

MÁS O MENOS DIVULGATIVA:

- **J.V. Narlikar**, The lighter side of gravity, **Freeman, 1982**
- **E.F. Taylor, J.A. Wheeler**, Spacetime physics, **Freeman, 1992**
- **C.M. Will**, ¿Tenía razón Einstein?, **Gedisa, 1992**
- **J. Silk**, The big-bang, **Freeman, 2001**
- **K.S. Thorne**, Black holes and time warps, **Papermac, 1994** (traducción española en **Crítica-Drakontos, 1998**)
- **A. Einstein, A. Grünbaum, A.S. Eddington y otros**, La teoría de la relatividad, **Alianza, 1975**
- **L. Abbot**, El misterio de la constante cosmológica, **Investigación y Ciencia, julio 88**
- **C.J. Hogan, R.P. Kirshner, N.B. Suntzeff**, Explorando el espacio-tiempo mediante supernovas, **IC, marzo 99**
- **L.M. Krauss**, Antigravedad cosmológica, **IC, marzo 99**
- **P. Ruiz – Lapuente, A.G. Kim, N. Walton**, Supernovas y expansión acelerada del universo, **IC, marzo 99**
- **A.G. Riess, M.S. Turner**, Cuando la aceleración cambió de signo, **IC, abril 04**
- **C.H. Lineweaver, T.M. Davis**, Las paradojas de la gran explosión, **IC, mayo 05**

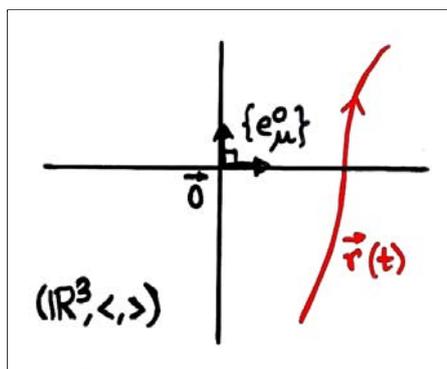
## MÁS O MENOS ESPECIALIZADA:

- **J.H. Smith**, Introducción a la Relatividad Especial, **Reverté**, 1978
- **J.J. Callahan**, The Geometry of Spacetime, **Springer**, 2000
- **Ch.W. Misner**, **K.S. Thorne**, **J.A. Wheeler**, Gravitation, **Freeman**, 1973
- **J.M. SánchezRon**, Relatividad especial - Relatividad general 1905-1923, **ICE-UAB**, 1981
- **M. Friedmann**, Fundamentos de las teorías del espacio-tiempo, **Alianza Universidad**, 1981
- **M. Berry**, Principles of cosmology and gravitation, **Cambridge U.P.**, 1976
- **B. Schutz**, Gravity, From the ground up, **Cambridge**, 2003
- **S. Weinberg**, Gravitation and Cosmology, **John Wiley**, 1972
- **W. Rindler**, Relativity, Special, General and Cosmological, **Oxford**, 2001
- **B. O'Neill**, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, **Academic Press**, 1983
- **T.M. Davis**, **C.H. Lineweaver**, Expanding Confusion: Common Misconceptions of Cosmological Horizons and the Superluminal Expansion of the Universe, **Publications of the Astronomical Society of Australia**, 2004, 21, 97-109
- **C.L. Bennet y otros**, First Year WMAP Observations: Preliminary Maps and Basic Results, <http://map.gsfc.nasa.gov>, 2003

# 1. MECÁNICA GALILEANA. SISTEMAS INERCIALES

Comenzamos con el modelo familiar del "espacio":

Espacio familiar  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ , siendo:



- (i)  $\mathbb{R}^3$ , como espacio afín (carta estándar  $(u^1, u^2, u^3)$  dada por 
$$p =: \sum_{\mu=1}^3 u^\mu(p) e_\mu^0$$
, siendo  $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$  la base estándar del espacio vectorial asociado  $V^3 \equiv \mathbb{R}^3$ )
- (ii)  $\langle, \rangle$ , producto escalar euclídeo "canónico" ( $\langle v, w \rangle := \sum_{\mu=1}^3 v^\mu w^\mu$ ) en el espacio vectorial  $V^3 \equiv \mathbb{R}^3$  (por tanto en cualquier  $T_p\mathbb{R}^3$ , Obs. 1.1)

En el "ESPACIO FAMILIAR":

- **Partícula material** (puntual):  $\tilde{r}(t) \equiv (r^1(t), r^2(t), r^3(t))$  curva (diferenciable) parametrizada por el "tiempo"

Cada partícula material posee (Obs. 1.1):

$$\begin{cases} \text{masa } m > 0 \text{ (otros parámetros?)} \\ \text{momento } \tilde{P}_{\tilde{r}} := m \dot{\tilde{r}} \text{ ("campo de vectores" sobre } \tilde{r}) \\ \text{energía cinética } E_{\tilde{r}} := \frac{1}{2} m \langle \dot{\tilde{r}}, \dot{\tilde{r}} \rangle \text{ (función } \geq 0 \text{ sobre } \tilde{r}) \end{cases}$$

Las "interacciones" de la partícula dan lugar a la noción de

**fuerza**  $\tilde{F}_{\tilde{r}}$  (campo sobre  $\tilde{r}$ , supuestamente conocido)

que verifica la **segunda ley de Newton** (dinámica):

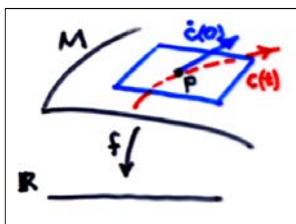
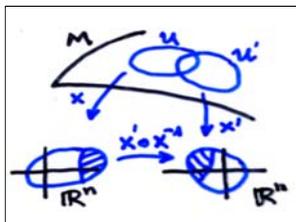
$$\boxed{\tilde{F}_{\tilde{r}} = m \ddot{\tilde{r}}} \tag{1}$$

Se dice que  $\tilde{r}(t)$  es **libre** si ( $\tilde{F}_{\tilde{r}} = 0$ , ó también)  $\ddot{\tilde{r}} = 0$

- Resulta útil pensar en términos de "espacio-tiempo"

Observación 1.1 **VARIEDADES**

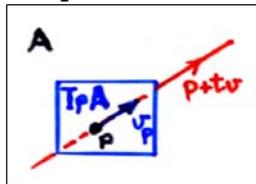
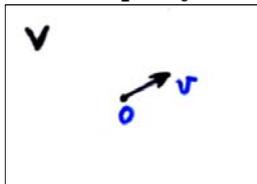
Espacio afín  $A^n \xrightarrow{\text{origen}} \mathbb{R}^n$       Espacio vectorial asociado  $V^n \xrightarrow{\text{base}} \mathbb{R}^n$



- **Variedad**  $M^n$  : espacio topológico (Hausdorff) "carteable" por homeomorfismos (*cartas*) entre abiertos de  $M$  y abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , con cambios de carta difeomorfismos (Ejemplos: espacios afines, esfera  $S^2$ )
- **Espacio tangente**  $T_p M$  : espacio vect. de velocidades  $\dot{c}(0)$  de curvas  $c: I \rightarrow M$  por el punto  $p \equiv c(0)$ , donde las velocidades se definen por

$$\dot{c}(0)(f) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(c(\epsilon)) - f(c(0))}{\epsilon}$$

Dado esp. afín  $A$  ( $\rightsquigarrow$  esp. vectorial  $V$ ), existe un isomorfismo canónico ( $\forall p \in A$ )



$$\begin{aligned} V &\rightarrow T_p A \\ v &\mapsto v_p := \dot{c}(0) \end{aligned}$$

(con  $c(t) := p + tv$ ),  
que a su vez induce

un isomorfismo canónico ( $\forall p, q \in A$ , *paralelismo a distancia*)

$$T_{pq}: T_p A \rightarrow T_q A, \quad v_p \mapsto v_q \quad (2)$$

Dados variedad  $M$ , carta  $x \equiv (x^1, \dots, x^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $p \in U$ , el conjunto  $\{\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p\}$  constituye una base de  $T_p M$

**Campo de vectores**  $X$  en  $M$ : asignación "diferenciable" de un vector tangente en cada punto. El conjunto  $\mathfrak{X}(M)$  de todos los campos es un módulo sobre el anillo  $C^\infty(M)$  de funciones diferenciables.

Dados variedad  $M$  y campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ :

- en cada carta  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  se definen  $n$  funciones  $X^1, \dots, X^n \in C^\infty(U)$  (*componentes* de  $X$  en  $x$ ) por  $X|_U =: \sum_{i=1}^n X^i \partial/\partial x^i$  y, en otra carta  $x': U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se tiene una expresión análoga con

$$X^i|_{U \cap U'} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} X'^j|_{U \cap U'} \quad (3)$$

- se definen las *curvas integrales* de  $X$  como curvas  $c(t)$  que verifican  $\dot{c} = X \circ c$ , equivalente en cada carta  $x$  al sistema de EDO's de 1er orden (en las coord.  $c^i \equiv x^i \circ c$ ):  $\frac{dc^i}{dt}(t) = X^i(c(t))$

- $\forall p \in M$ , existe una (*única* si se maximiza el intervalo de definición) curva integral  $c_p(t)$  de  $X$  tal que  $c_p(0) = p$  ■

## NOTAS:

(i) La segunda ley de Newton (1) no define a la fuerza. El conocimiento previo de  $\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{\mathbf{r}}}$  presupone el conocimiento de los sistemas físicos que interactúan con  $\tilde{\mathbf{r}}$

(ii) La segunda ley de Newton (1) conduce a:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{\mathbf{r}}} = \mathbf{0} \Rightarrow \ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = \mathbf{0}$$

esto es, las **partículas libres** siguen rectas afinmente parametrizadas (**primera ley de Newton** o **ley de inercia de Galileo**). La fuerza modifica (no "mantiene") el estado de movimiento. La masa mide la inercia

(iii) La "conservación" del momento total en las colisiones entre partículas (experimental / deducible de la segunda y "tercera" leyes de Newton):

- justifica la definición dada de momento  $\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{\mathbf{r}}} := m \dot{\tilde{\mathbf{r}}}$
- proporciona un método para determinar masas

(iv) La segunda ley de Newton (1) implica: el "trabajo" (integral de camino) realizado por la fuerza que actúa sobre una partícula a lo largo de la trayectoria de ésta es igual a la variación de su energía cinética:

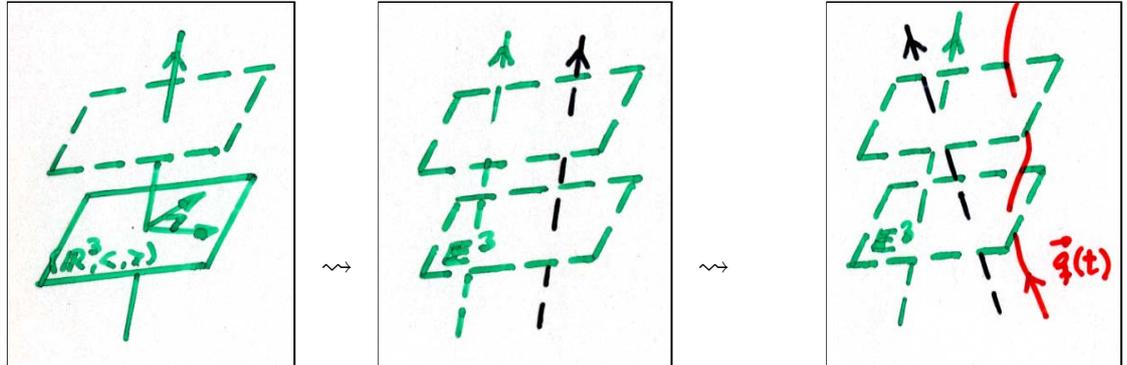
$$\langle \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{\mathbf{r}}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}} \rangle = m \langle \ddot{\tilde{\mathbf{r}}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}} \rangle = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \langle \dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}} \rangle \right)$$

(v) A partir de aquí: leyes de fuerza concretas y cálculos

(vi) Resulta útil pensar en "espacio-tiempo" (ET), ya que:

- la "luz" pone en cuestión el carácter absoluto del tiempo y sugiere una "estructura-Lorentz" para el espacio-tiempo (ver Charla 4)
- las partículas materiales "en caída libre" (esto es, sólo sometidas a la fuerza gravitatoria) ponen en cuestión la estructura afín del espacio-tiempo (ver Charla 3)

EVOLUCIÓN de las ideas de espacio-tiempo (denotamos  $\mathbb{E}^n$  al espacio euclídeo, i.e.  $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$  "olvidados" origen y base estándar):



$(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle) \times \mathbb{R}$   
ET "familiar"

$\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^{1\uparrow}$   
ET de Newton

$(\mathbb{A}^4, t: \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \langle, \rangle \text{ en } \ker t)$   
ET de Galileo

Absolutos:  
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Posición} \\ \text{Reposo} \\ \text{Simultaneidad} \end{array} \right.$

Absolutos:  
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Reposo} \\ \text{Simultaneidad} \end{array} \right.$

Absolutos:  
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Simultaneidad} \end{array} \right.$

En el ESPACIO-TIEMPO DE GALILEO (ETG):

- La función lineal (**tiempo**)  $t: \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  puede considerarse definida sobre el propio  $\mathbb{A}^4$  (en tal caso, salvo una constante aditiva)
- Dos **sucesos**  $p, p' \in \mathbb{A}^4$  se dicen "simultáneos" si  $p' - p \in \ker t$  ( $\rightsquigarrow$  "foliación" de  $\mathbb{A}^4$  por hiperplanos 3-dimensionales euclídeos). Sólo tiene sentido la "distancia" entre sucesos simultáneos

$$d_{p,p'}^2 := \langle p' - p, p' - p \rangle$$

- **Partícula material:**  $q(t)$  curva (diferenciable) con  $t$  como parámetro ( $\Leftrightarrow t(\dot{q}) = 1$ , donde  $\dot{q} \in \mathbb{V}^4$ , recordar la Obs. 1.1)

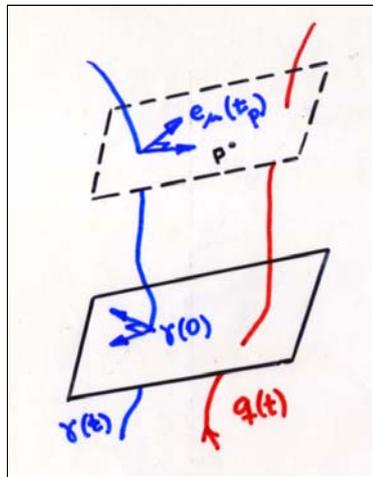
Cada partícula material posee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m > 0 \\ \text{masa-momento } P_q := m \dot{q} \\ \text{fuerza } F_q := m \ddot{q} \text{ (no es la segunda ley de Newton)} \end{array} \right.$$

Se dice que  $q(t)$  es **libre** si  $(F_q = 0, \text{ ó también } \ddot{q} = 0)$

$$(\Leftrightarrow q(t) = p + tv, \text{ con } p \in \mathbb{A}^4, v \in \mathbb{V}^4, t(v) = 1)$$

- **Sistemas de coordenadas (SC):** parejas  $\kappa \equiv (\gamma(t), \{e_\mu(t)\})$ , con



- $\gamma(t)$  partícula que representa el "origen"
- $\{e_\mu(t)\}$  3 campos de vectores sobre  $\gamma(t)$  que constituyen base ortonormal móvil de  $\ker t$  y representan los "ejes"

Cada SC  $\kappa$  asocia, a cada suceso  $p \in A^4$ , coordenadas  $(\tilde{x} \equiv (x^1, x^2, x^3), x^4)$  dadas por

$$\begin{cases} x^4(p) := t_p, \text{ donde } p - \gamma(t_p) \in \ker t \\ p - \gamma(t_p) := \sum_{\mu=1}^3 x^\mu(p) e_\mu(t_p) \end{cases}$$

En particular el SC  $\kappa$  asocia, a cada partícula  $q(t)$ , coordenadas  $(\tilde{q}(t) := \tilde{x}(q(t)), q^4(t) := x^4(q(t)))$  que verifican:

$$\boxed{q(t) - \gamma(t) = \sum_{\mu=1}^3 q^\mu(t) e_\mu(t)} \quad \text{y} \quad \boxed{q^4(t) = t},$$

y resulta (inmediato lo primero y no tanto lo segundo):

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \sum_{\mu=1}^3 \dot{q}^\mu(t) \partial/\partial x^\mu |_{q(t)} + \partial/\partial x^4 |_{q(t)} \equiv (\dot{\tilde{q}}(t), 1) \quad (\Rightarrow P_q = (m \dot{\tilde{q}}, m)) \\ \ddot{q}(t) = (\ddot{\tilde{q}}(t) + \tilde{a}_\gamma(t) + \tilde{C}(\dot{\tilde{q}}(t)), 0), \end{cases}$$

donde el término  $\tilde{a}_\gamma(t)$  se anula si  $\ddot{\gamma} = 0$  (origen libre) y el término  $\tilde{C}(\dot{\tilde{q}}(t))$  (Coriolis) se anula si  $\dot{e}_\mu = 0$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ) (ejes fijos)

- **Sistemas de coordenadas inerciales (SCI):** aquellos SC

$$\boxed{\text{con } \ddot{\gamma} = 0 \text{ y } \dot{e}_\mu = 0}$$

o también

$$\boxed{\text{tales que cualquier partícula } q(t) \text{ verifica: } \tilde{F}_q = m \ddot{\tilde{q}} \text{ (segunda ley)}}$$

o también

$$\boxed{\text{tales que verifican: } \partial/\partial x^i |_{q} = T_{pq}(\partial/\partial x^i |_p)},$$

con  $T_{pq}$  dado en (2), así los campos coordenados son "constantes".

- **Sistemas de coordenadas no rotantes (SCNR):** aquellos SC

$$\boxed{\text{con } \dot{e}_\mu = 0}$$

o también

$$\boxed{\text{tales que cualquier partícula } q(t) \text{ verifica: } \tilde{F}_q = m (\ddot{\tilde{q}} + \tilde{a}_\gamma)}$$

El "DILEMA DE LOS SCI" con partículas materiales:

- La observación de partículas materiales  $\mathbf{q}(t)$  desde un SCI (en el que  $\ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{\mathbf{q}}, 0)$ ) no permite objetivar la noción de que éste "está en reposo":

NINGUNA OBSERVACIÓN con partículas materiales  
PERMITE IDENTIFICAR LOS "SCI EN REPOSO"  
DE ENTRE TODOS LOS SCI

o más aún (Galileo):

"las leyes de la mecánica son las mismas en todos los SCI"

- En realidad, este es el motivo por el que hemos comenzado hablando del ET de Galileo  $(A^4, t : V^4 \rightarrow \mathbb{R}, <, > \text{ en ker } t)$  y no del ET de Newton  $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^{1\uparrow}$

- Identificar una clase de "SCI en reposo" TAMPOCO es posible vía experimentos con LUZ (Experimento de Michelson-Morley, ver Charla 4)

- De hecho, en presencia de gravitación, TAMPOCO es posible identificar los SCI de entre todos los SCNR (ver Charla 3)

- Pero SÍ es posible identificar los SCNR de entre todos los SC (en los primeros, el término de Coriolis se anula)

## 2. GRAVITACIÓN CLÁSICA. MAR-EAS

Para describir la gravitación en el espacio "familiar" ( $\mathbb{R}^3, \langle, \rangle$ ):

- se introduce un **potencial gravitatorio**  $\Phi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (función diferenciable, definida salvo constante aditiva), cuyo "gradiente" (cambiado de signo)  $-\tilde{\nabla}\Phi$  es el **campo gravitatorio** (Obs. 2.1)

- se postula que la fuerza que actúa sobre una partícula **en caída libre** ( $\equiv$  sólo sometida a gravitación)  $\tilde{\mathbf{r}}(t)$  es

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{\mathbf{r}}} = c_{\text{pasiva}} (-\tilde{\nabla}\Phi|_{\tilde{\mathbf{r}}}) , \quad (4)$$

con **carga gravitatoria pasiva**  $c_{\text{pasiva}} > 0$  (parámetro de la partícula)

- Pero los experimentos (Galileo, Eötvos 1890, Dicke 1960, Braginsky 1970) muestran que (si  $m$  es la masa de  $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ )

$$c_{\text{pasiva}} \simeq m (1 \pm 10^{-12}) \quad (5)$$

De (1) (segunda ley de Newton, Charla 1), (4) y (5) se sigue la **universalidad de la caída libre**:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = -\tilde{\nabla}\Phi|_{\tilde{\mathbf{r}}} \quad (6)$$

"todos los cuerpos caen en el vacío con la misma aceleración, independientemente de su masa y composición"

( $\rightsquigarrow$  al hablar del movimiento de partículas en caída libre no hará falta referirse a sus masas)

Se sigue de la regla de la cadena y de (6) que la "energía total" de una partícula en caída libre se conserva:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \langle \dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}} \rangle + m (\Phi \circ \tilde{\mathbf{r}}) \right) = m \langle \ddot{\tilde{\mathbf{r}}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}} \rangle + m \langle \tilde{\nabla}\Phi|_{\tilde{\mathbf{r}}}, \dot{\tilde{\mathbf{r}}} \rangle = 0$$

En el caso  $\Phi < \lim_{|\tilde{\mathbf{r}}| \rightarrow \infty} \Phi(\tilde{\mathbf{r}})$  y eligiendo  $\lim_{|\tilde{\mathbf{r}}| \rightarrow \infty} \Phi(\tilde{\mathbf{r}}) = 0$  (lo que fija la constante aditiva), se llega a la **velocidad de escape**, que es (el módulo de) la que necesitaría una partícula en caída libre para poder "justo escapar" ( $\equiv$  alcanzar  $|\tilde{\mathbf{r}}| \rightarrow \infty$  con  $\lim_{|\tilde{\mathbf{r}}| \rightarrow \infty} |\dot{\tilde{\mathbf{r}}}| = 0$ ):

$$v_{\text{esc}}^2(\tilde{\mathbf{r}}) := -2\Phi(\tilde{\mathbf{r}}) \quad (7)$$

Observación 2.1 MÉTRICAS RIEMANNIANAS

Dadas variedad  $M$  y función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , se define la **diferencial** en el punto  $p \equiv c(0) \in M$

$$df(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \dot{c}(0) \mapsto \dot{c}(0)f \quad \left( = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(c(\epsilon)) - f(c(0))}{\epsilon} \right)$$

• Puesto que la aplicación  $df : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  es  $C^\infty(M)$ -lineal, constituye lo que se llama una **1-forma** en  $M$ .

• Sin estructura adicional sobre  $M$  no existe el "gradiente" de  $f$ : recordar que éste debería dar lugar, en cada punto, a un vector tangente, con dirección la de la máxima (?) derivada direccional de  $f$  y con módulo (?) el de dicha derivada

**Métrica riemanniana**  $g$  en  $M$ : asignación "diferenciable" de un producto escalar euclídeo (esto es, de "índice" 0) en cada espacio tangente. En cada  $(M, g)$  existen:

- el **gradiente**  $\text{grad } f \in \mathfrak{X}(M)$  de una función (Obs. 5.1)
- la **divergencia**  $\text{div } X \in C^\infty(M)$  de un campo (Obs. 7.1)
- el **laplaciano**  $\Delta f \in C^\infty(M)$  de una función (Obs. 5.1)

En el espacio "familiar"  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ :

- el símbolo  $\langle, \rangle$  tiene un doble papel:
  - (i) como producto escalar euclídeo (en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ ) y
  - (ii) como métrica riemanniana (en la variedad afín  $\mathbb{R}^3$ ) obtenida a partir del isomorfismo canónico  $\mathbb{R}^3 \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$  (Obs. 1.1)

• en la carta estándar de  $\mathbb{R}^3$  se encuentra (estas expresiones suelen a veces tomarse como definiciones):

$$\text{grad } f = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \tilde{\nabla} f, \quad \text{div } \tilde{X} = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} \equiv \tilde{\nabla} \tilde{X}, \quad \Delta f = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial (x^\mu)^2}$$

• se define el **rotacional**  $\text{rot } \tilde{X} := \sum_{\mu, \nu, \rho=1}^3 \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \tilde{\nabla} \times \tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$

• un campo  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$  es un gradiente si ("cohomología") y sólo si (trivial) tiene rotacional nulo

• dos funciones  $f, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , con  $\lim_{|\tilde{r}| \rightarrow \infty} \tilde{\nabla} f(\tilde{r}) = 0$  y  $\text{sop}(h)$  compacto, cumplen (EDP Poisson)  $\Delta f = 4\pi h$  si ("teor. divergencia") y sólo si ("teor. Liouville") verifican  $f(\tilde{r}) = \int \frac{-h(\tilde{\xi})}{|\tilde{r}-\tilde{\xi}|} d^3 \tilde{\xi}$  ■

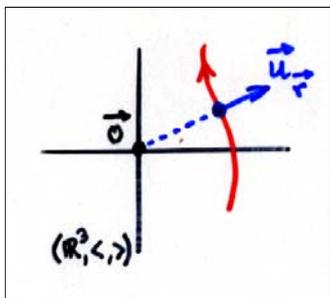
Newton postuló que el potencial (gravitatorio) creado por una partícula (de masa  $m$ ) situada "en el origen"  $\vec{0}$  viene dado (eligiendo  $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \Phi(\vec{r}) = 0$ , lo que fija la constante aditiva y hace  $\Phi < 0$ ) por

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{-G c_{\text{activa}}}{|\vec{r}|}, \quad (8)$$

con **carga gravitatoria activa**  $c_{\text{activa}} > 0$  (parámetro de la partícula) y con **constante de la gravitación**  $G \simeq 6'67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ gr}^{-1} \text{ seg}^{-2}$

- Pero los experimentos (Cavendish) muestran que

$$c_{\text{activa}} = m (1 \pm 10^{-5}) \quad (9)$$

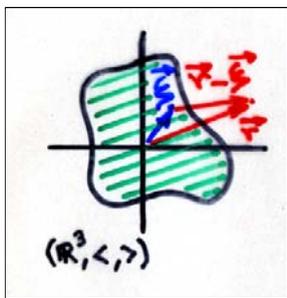


- De (6), (8) y (9) se sigue que las partículas en caída libre  $\vec{r}(t)$  verifican la **ley de la gravitación universal** (con  $\vec{r} \equiv |\vec{r}| \vec{u}_{\vec{r}}$ ):

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-Gm}{|\vec{r}|^2} \vec{u}_{\vec{r}}$$

Si el cuerpo que crea el potencial gravitatorio es "extenso" (pero acotado), la hipótesis de Newton (8) da lugar a

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{-G \rho_m(\vec{\xi})}{|\vec{r}-\vec{\xi}|} d^3 \vec{\xi}, \quad (10)$$



donde  $\rho_m : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$  es la **densidad de masa** (soporte compacto)

- Por lo dicho en Obs. 2.1, la función  $\Phi(\vec{r})$  dada en (10) es la única solución de la EDP (**ecuación de Poisson**)

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho_m \quad (11)$$

que verifica  $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{\nabla} \Phi|_{\vec{r}} = 0$

NOTAS:

(i) Postular que el potencial creado por una partícula en movimiento tiene la forma (8) supone postular una "acción a distancia" (transmisión instantánea de la interacción) (?)

(ii) Si la función  $\rho_m$  en (10) es "esféricamente simétrica" en torno al origen, también se obtiene (Newton!) en el exterior:

$$\Phi(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{-G m}{|\tilde{\mathbf{r}}|} ,$$

donde ahora  $m := \int \rho_m(\tilde{\xi}) d^3\tilde{\xi}$  (la "masa total" del cuerpo atractor)

(iii) Sobre la superficie terrestre, se sigue de (7) y de la Nota (ii) que la velocidad de escape a la atracción de la Tierra es (con  $R_\oplus$  y  $M_\oplus$  el radio y masa terrestres):

$$v_{\text{esc}}(R_\oplus) = \sqrt{2 G M_\oplus / R_\oplus} \simeq 11'2 \text{ km seg}^{-1}$$

(iv) Si el potencial  $\Phi(\tilde{\mathbf{r}})$  es "central" ( $\equiv$  sólo depende de  $|\tilde{\mathbf{r}}|$ ),  $-\tilde{\nabla} \Phi$  resulta "radial". Se sigue entonces de (6) que el "momento angular" de una partícula en caída libre se conserva:

$$\frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{r}} \times m \dot{\tilde{\mathbf{r}}}) = \tilde{\mathbf{r}} \times m \ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = -\tilde{\mathbf{r}} \times m \tilde{\nabla} \Phi|_{\tilde{\mathbf{r}}} = \mathbf{0} ,$$

y la órbita resulta plana (el plano constante que contiene a  $\tilde{\mathbf{r}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}$ )

(v) Si el potencial  $\Phi(\tilde{\mathbf{r}})$  es "de tipo  $-1/|\tilde{\mathbf{r}}|$ " (junto con el de tipo  $|\tilde{\mathbf{r}}|^2$ , el único potencial central todas cuyas órbitas acotadas cierran, Bertrand), se deducen (Newton!) las tres **leyes de Kepler** (experimentales) para las partículas en caída libre:

- las órbitas son secciones de cónicas,
- las partículas "barren" áreas iguales en tiempos iguales, y
- los cuadrados de los períodos (para órbitas acotadas, esto es, elipses) son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores

(vi) Eligiendo para el potencial gravitatorio creado por la Tierra la constante aditiva tal que  $\Phi_\oplus(|\tilde{\mathbf{r}}| = R_\oplus) = \mathbf{0}$ , se sigue de la Nota (ii) la expresión "familiar" (con  $h_\oplus \equiv |\tilde{\mathbf{r}}| - R_\oplus > \mathbf{0}$  "pequeña"):

$$\Phi_\oplus(\tilde{\mathbf{r}}) = -G M_\oplus / |\tilde{\mathbf{r}}| + G M_\oplus / R_\oplus \simeq g_\oplus h_\oplus ,$$

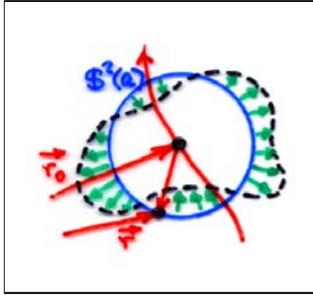
donde  $g_\oplus \equiv G M_\oplus / R_\oplus^2 \simeq 980 \text{ cm seg}^{-2}$  ("aceler. de la gravedad")

Desde los cuerpos en caída libre, la gravitación se manifiesta localmente por las MAREAS:

- Dadas dos partículas en caída libre y próximas,  $\tilde{\mathbf{r}}_0$  y  $\tilde{\mathbf{r}}$ , se sigue de (6) que la **marea** ( $\equiv$  aceleración relativa) de  $\tilde{\mathbf{r}}$  respecto de  $\tilde{\mathbf{r}}_0$  viene gobernada por el hessiano del potencial en  $\tilde{\mathbf{r}}_0$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}^\mu - \ddot{\mathbf{r}}_0^\mu = \frac{-\partial\Phi}{\partial x^\mu} \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}_0} \simeq \sum_{\nu=1}^3 \frac{-\partial^2\Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}_0} (\mathbf{r}^\nu - \mathbf{r}_0^\nu) \quad (12)$$

- Dadas una partícula en caída libre  $\tilde{\mathbf{r}}_0$  y una capa esférica (en cierto instante)  $S^2(\mathbf{a})$  (centro  $\tilde{\mathbf{r}}_0$  y radio  $\mathbf{a}$ ) de partículas en caída libre y próximas, el promedio de mareas de  $S^2(\mathbf{a})$  respecto de  $\tilde{\mathbf{r}}_0$  viene gobernado por el laplaciano del potencial en  $\tilde{\mathbf{r}}_0$

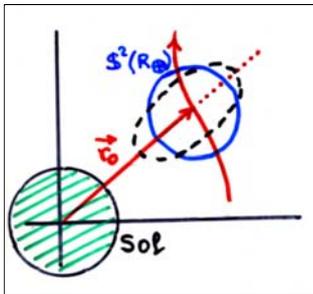


En efecto, se sigue de (12) (con  $\zeta$  el elemento de volumen en  $S^2(\mathbf{a})$ ):

$$\int \langle \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}_0, \tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_0 \rangle \zeta \simeq \sum_{\mu,\nu=1}^3 \frac{-\partial^2\Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}_0} \int (\mathbf{r}^\mu - \mathbf{r}_0^\mu) (\mathbf{r}^\nu - \mathbf{r}_0^\nu) \zeta \stackrel{!}{=} \frac{-1}{3} \Delta\Phi \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}_0} \int |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}_0|^2 \zeta = \frac{-4\pi a^4}{3} \Delta\Phi \Big|_{\tilde{\mathbf{r}}_0} \quad (13)$$

(términos "no diagonales" en la integral cancelan!)

- En cuanto al nombre "mareas":



Aproximemos (en cierto instante) la "superficie terrestre" como una capa esférica  $S^2(\mathbf{R}_\oplus)$  (centrada en  $\tilde{\mathbf{r}}_0$ ) en el campo gravitatorio del Sol, y éste como un cuerpo esféricamente simétrico (centrado en  $\tilde{\mathbf{0}}$ ) y único atractor

El conjunto de mareas sobre la capa  $S^2(\mathbf{R}_\oplus)$  respecto de  $\tilde{\mathbf{r}}_0$ :

(i) es "no trivial", ya que  $\Phi(\tilde{\mathbf{r}})$  es de tipo  $-1/|\tilde{\mathbf{r}}|$  por la simetría esférica del Sol (Nota (ii)),

(ii) posee "simetría axial" respecto del eje  $\tilde{\mathbf{r}}_0$  (misma razón), y

(iii) posee "promedio nulo", por (11) y (13)

La rotación de la Tierra en torno a su eje (que no coincide con el eje  $\tilde{\mathbf{r}}_0$ ) pone de manifiesto las mareas

### 3. CAÍDA LIBRE. CONEXIONES

En el espacio "familiar"  $(\mathbb{R}^3, <, >)$  la gravitación se describe (Ch. 2) por un potencial gravitatorio  $\Phi(\mathbf{t}) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  tal que las partículas materiales  $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{t})$  en caída libre verifican (6)

$$\ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = -\tilde{\nabla}\Phi|_{\tilde{\mathbf{r}}}$$

La transcripción de (6) al espacio-tiempo de Galileo (ETG)  $(\mathbf{A}^4, \mathbf{t} : \mathbf{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}, <, > \text{ en } \ker \mathbf{t})$  (Charla 1) debe necesariamente hacerse en términos de coordenadas (sólo después intrínsecamente)

Recordemos (Charla 1) que un sistemas de coordenadas (SC)  $\kappa \equiv (\gamma(\mathbf{t}), \{\mathbf{e}_\mu(\mathbf{t})\}_{\mu=1,2,3})$  en el ETG se dice:

• "inercial" (SCI) si  $\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) = (\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}), \mathbf{0})$  para cualquier partícula material  $\mathbf{q}(\mathbf{t})$ .

Los cambios  $\kappa \rightarrow \kappa'$  entre SCI son de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}' + \tilde{\mathbf{d}} \mathbf{t} + \tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{x}^4 = \mathbf{t} = \mathbf{x}'^4 \end{array} \right\}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\partial\tilde{\mathbf{x}} / \partial\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}} \text{ y } \partial\tilde{\mathbf{x}} / \partial\mathbf{x}'^4 = \boxed{\tilde{\mathbf{d}} (= \tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'})} \\ \partial^2\tilde{\mathbf{x}} / \partial\mathbf{x}'^4\partial\mathbf{x}'^4 = \mathbf{0} \end{array} \right\}, \quad (14)$$

con  $\mathbf{A} \in \mathbf{O}(3)$  y  $\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ .

Y se tiene:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}}'(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{d}} \mathbf{t} + \tilde{\mathbf{b}}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}'(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'} \\ \boxed{\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}'(\mathbf{t})} \end{array} \right\} \quad (15)$$

• "no rotante" (SCNR) si  $\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) = (\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}_\gamma(\mathbf{t}), \mathbf{0})$  para cualquier partícula material  $\mathbf{q}(\mathbf{t})$ .

Los cambios  $\kappa \rightarrow \kappa'$  entre SCNR son de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}' + \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{x}^4 = \mathbf{t} = \mathbf{x}'^4 \end{array} \right\}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\partial\tilde{\mathbf{x}} / \partial\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}} \text{ y } \partial\tilde{\mathbf{x}} / \partial\mathbf{x}'^4 = \dot{\tilde{\mathbf{d}}}(\mathbf{t}) (= \tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'}(\mathbf{t})) \\ \partial^2\tilde{\mathbf{x}} / \partial\mathbf{x}'^4\partial\mathbf{x}'^4 = \ddot{\tilde{\mathbf{d}}}(\mathbf{t}) (= \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_{\gamma'}(\mathbf{t}) - \tilde{\mathbf{a}}_\gamma(\mathbf{t})) \end{array} \right\}, \quad (16)$$

con  $\mathbf{A} \in \mathbf{O}(3)$ ,  $\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^3$ .

Y se tiene:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}}'(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{t}), \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}'(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'}(\mathbf{t}) \\ \boxed{\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}'(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma'}(\mathbf{t}) - \tilde{\mathbf{a}}_\gamma(\mathbf{t})} \end{array} \right\} \quad (17)$$

La transcripción obvia de (6) al ETG establece que la gravitación viene descrita por un **potencial gravitatorio**  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{A}^4)$  tal que las partículas materiales  $\mathbf{q}(t)$  en caída libre verifican:

- en los SCI:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\tilde{\nabla}\Phi|_{\mathbf{q}}, \quad (18)$$

(debido a (15) y  $\mathbf{A}(\tilde{\nabla}'\Phi) = \tilde{\nabla}\Phi$ , (18) mantiene su forma bajo (14))

- en los SCNR:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\tilde{\nabla}\Phi|_{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{a}}_\gamma, \quad (19)$$

(debido a (17) y  $\mathbf{A}(\tilde{\nabla}'\Phi) = \tilde{\nabla}\Phi$ , (19) mantiene su forma bajo (16))

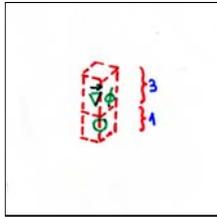
Ambas descripciones son "equivalentes" en el sentido de que se cumple (18) en los SCI si y sólo si se cumple (19) en los SCNR

Pues bien, la ecuación coordenada (18) identifica un campo de vectores (el **campo gravitatorio**)

$$\mathbf{X}^g \in \mathfrak{X}(M)$$

por la condición (para las partículas materiales  $\mathbf{q}(t)$  en caída libre):

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{X}^g|_{\mathbf{q}} \quad (20)$$



(esto es, el campo  $\mathbf{X}^g$  describe cuánto se desvían las partículas en caída libre de ser rectas afinmente parametrizadas). Las 4 componentes de  $\mathbf{X}^g$  en cada SCI son  $(-\tilde{\nabla}\Phi, 0)$

Basta en efecto comprobar dos cosas:

- que el conjunto (para cada SCI  $\kappa$ ) de 4 funciones  $(-\tilde{\nabla}\Phi, 0)$  se transforma bajo (14) como lo hacen las componentes de un campo de vectores, esto es, según (3). Y así es:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{X}^g)^i & \stackrel{?}{=} & \sum_{j=1}^4 \left( \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right) (\mathbf{X}^g)^j \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \left( \begin{array}{c} -\tilde{\nabla}\Phi \\ 0 \end{array} \right) & = & \left( \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \tilde{\mathbf{v}}_{\gamma'} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \mathbf{1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} -\tilde{\nabla}'\Phi \\ 0 \end{array} \right) \end{array}$$

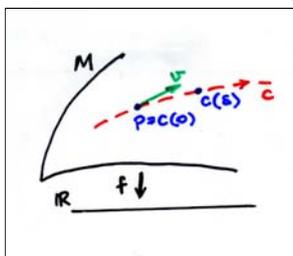
- que, para cada SCI  $\kappa$ , las coordenadas  $(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}^4)$  de las partículas materiales en caída libre verifican la versión coordenada de (20). Y así es debido a (18), los 3 casos no idénticamente nulos son:

$$\begin{array}{ccc} \ddot{\mathbf{q}}^\mu & \stackrel{?}{=} & (\mathbf{X}^g)^\mu|_{\mathbf{q}} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \ddot{\mathbf{q}} & = & -\tilde{\nabla}\Phi|_{\mathbf{q}} \end{array}$$

Digamos finalmente que se verifica:  $\mathbf{X}^g = -\text{grad}_t\Phi$  (el gradiente en cada hiperplano euclídeo de la restricción de  $\Phi$  a él, Obs. 2.1)

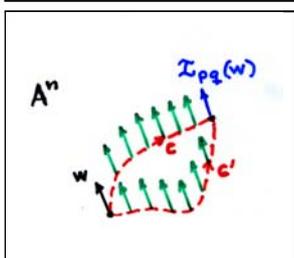
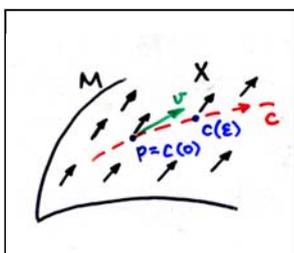
Observación 3.1 **CONEXIONES**

Ley de derivación (direccional) de funciones:



- Dados  $M, f \in C^\infty(M), p \in M, v \in T_pM$ , la definición  $v(f) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(c(\epsilon)) - f(c(0))}{\epsilon}$  ( $\forall$  curva  $c$  con  $c(0) = p$  y  $\dot{c}(0) = v$ ) tiene sentido.
- De hecho, esta era la definición de vector tangente (Obs. 1.1)

Deseable dar sentido a una ley de derivación de campos de vectores:



- Dados  $M, X \in \mathfrak{X}(M), p \in M, v \in T_pM$ , la definición  $v(X) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{X(c(\epsilon)) - X(c(0))}{\epsilon}$  no tiene sentido.

- Dárselo equivale a dar una ley de transporte  $\mathfrak{T}_c$  de vectores tangentes lo largo de curvas  $c$  en  $M$ .

- Entonces la definición

$$D_v(X) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{T}_{c(0) \rightarrow c(\epsilon)}^{-1} X(c(\epsilon)) - X(c(0))}{\epsilon}$$

- tiene sentido: cada "receta"  $D$  (versión infinitesimal de  $\mathfrak{T}$ ) es una **conexión** en  $M$ .

- En  $A^n$  hay una **conexión canónica**  $D^{\text{afin}}$ , cuya ley de transporte asociada es el "paralelismo a distancia" (2), independiente de la curva seguida. La expresión usual  $\ddot{c}$  quiere decir  $D_{\dot{c}}^{\text{afin}} \dot{c}$

Dadas variedad  $M$  y conexión  $D$ :

- en cada carta  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  se definen  $n^3$  funciones  $\Gamma_{jk}^i \in C^\infty(U)$  (coeficientes de  $D$  en  $x$ ) por  $D_{\partial/\partial x^j} \partial/\partial x^k =: \sum_{i=1}^n \Gamma_{jk}^i \partial/\partial x^i$  y, en otra carta  $x' : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se tiene una expresión análoga con

$$\Gamma_{jk}^i |_{U \cap U'} = \sum_{l,r,s=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \Gamma_{rs}^l |_{U \cap U'} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^j \partial x^k} \quad (21)$$

- se definen las **geodésicas** como curvas  $c(t)$  que verifican  $D_{\dot{c}} \dot{c} = 0$ , equivalente en cada carta  $x$  al sistema de EDO's de 2º orden (en las coordenadas  $c^i \equiv x^i \circ c$ ):

$$\frac{d^2 c^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i |_c \frac{dc^j}{dt} \frac{dc^k}{dt} = 0 \quad (22)$$

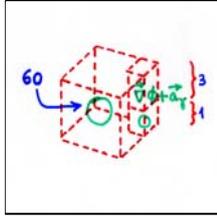
- $\forall p \in M$  y  $\forall v \in T_pM$ , existe una (única si se maximiza el intervalo de definición) geodésica  $c_v(t)$  tal que  $c_v(0) = p$  y  $\dot{c}_v(0) = v$  ■

Por otra parte, la ecuación coordenada (19) identifica, no un campo de vectores, sino una conexión (la **conexión gravitatoria**)

$$D^g \in \text{Conexiones}(M)$$

por la condición (para las partículas materiales  $q(t)$  en caída libre):

$$D_{\dot{q}}^g \dot{q} = 0 \quad (23)$$



(esto es, la conexión  $D^g$  declarada a las partículas en caída libre geodésicas). Los **64** coeficientes de  $D^g$  en cada SCNR son  $(\underbrace{0, \dots, 0}_{60 \text{ ceros}}, \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{a}_\gamma, 0)$

Basta en efecto comprobar dos cosas:

- que el conjunto (para cada SCNR  $\kappa$ ) de **64** funciones  $(0, \dots, 0, \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{a}_\gamma, 0)$  se transforma bajo (16) como lo hacen los coeficientes de una conexión, esto es, según (21). Y así es, los **3** casos no idéntic. nulos son:

$$\begin{array}{ccccccc} (\Gamma^g)_{44}^\mu & \stackrel{?}{=} & \sum_{\nu=1}^3 \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) & (\Gamma^g)^{\nu 44} & \left( \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} \right)^2 & + & \sum_{\nu=1}^3 \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) \left( \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^4 \partial x^4} \right) \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{\nabla}\Phi + \tilde{a}_\gamma & = & A & (\tilde{\nabla}'\Phi + \tilde{a}'_{\gamma'}) & 1 & + & A (\tilde{a}'_\gamma - \tilde{a}'_{\gamma'}) \end{array}$$

- que, para cada SCNR  $\kappa$ , las coordenadas  $(\tilde{q}, q^4)$  de las partículas materiales en caída libre verifican la versión coordenada (22) de (23). Y así es debido a (19), los **3** casos no idéntic. nulos son:

$$\begin{array}{ccccccc} \ddot{q}^\mu & + & (\Gamma^g)_{44}^\mu |_q & (\dot{q}^4)^2 & \stackrel{?}{=} & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ \ddot{\tilde{q}} & + & (\tilde{\nabla}\Phi |_q + \tilde{a}_\gamma) & 1 & = & 0 \end{array}$$

Digamos finalmente que se verifica:  $D^g = D^{\text{afn}} + \text{grad}_t \Phi \otimes dt \otimes dt$  (no queremos comentar aquí la notación  $\otimes$ )

Parece pues que la "culpa" de que aparezca un objeto geométrico tan "extraño" (la conexión) para describir la gravitación en el ETG la tendría el pretender describirla desde los SCNR.

¿Por qué no limitarse entonces a describirla desde los SCI, que son "mejores"? La respuesta es que, en sentido estricto, NINGUNA OBSERVACIÓN PERMITE IDENTIFICAR LOS SCI DE ENTRE TODOS LOS SCNR. Veámoslo  $\rightsquigarrow$

(A) En el ETG, reescribiendo en un SC  $\kappa \equiv (\gamma(t), \{\mathbf{e}_\mu(t)\})$  pequeño las ecs. (18) y (19) para una partícula material  $\mathbf{q}(t)$  en caída libre:

$$\begin{cases} \text{si } \kappa \text{ es un SCI: } \ddot{\mathbf{q}} = -\tilde{\nabla}\Phi|_{\mathbf{q}} \cong -\tilde{\nabla}\Phi|_{\gamma} \\ \text{si } \kappa \text{ es un SCNR: } \ddot{\mathbf{q}} = -\tilde{\nabla}\Phi|_{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma} \cong -\tilde{\nabla}\Phi|_{\gamma} - \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma} \end{cases}$$

resulta claro que hay una INCERTIDUMBRE local entre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{(a)} \quad \begin{array}{c} \text{Diagrama: caja sobre patas con } \downarrow -\tilde{\nabla}\Phi|_{\gamma} \end{array} \\ \text{(} \kappa \text{ es un SCI)} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} -\tilde{\nabla}\Phi|_{\gamma} \neq \mathbf{0} \\ \text{(hay gravitación)} \end{array} \\ \\ \text{disyuntiva si } \ddot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0} \text{ ("ascensor de Einstein")} \\ \\ \begin{array}{c} \text{(b)} \quad \begin{array}{c} \text{Diagrama: caja con } \uparrow \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma} \end{array} \\ \text{(} \kappa \text{ es un SCNR con origen acelerado)} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} -\tilde{\nabla}\Phi|_{\gamma} = \mathbf{0} \\ \text{(no hay gravitación)} \end{array} \end{array} \right.$$

y una INCERTIDUMBRE local (equivale a la anterior!) entre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{(a')} \quad \begin{array}{c} \text{Diagrama: caja sobre patas con } \downarrow -\tilde{\nabla}\Phi|_{\gamma} \text{ y } \downarrow \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma} \end{array} \\ \text{(} \kappa \text{ es un SCNR con origen en caída libre)} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} -\tilde{\nabla}\Phi|_{\gamma} \neq \mathbf{0} \\ \text{(hay gravitación)} \end{array} \\ \\ \text{disyuntiva si } \ddot{\mathbf{q}} \cong \mathbf{0} \\ \\ \begin{array}{c} \text{(b')} \quad \begin{array}{c} \text{Diagrama: caja con } \uparrow \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma} \end{array} \\ \text{(} \kappa \text{ es un SCI)} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} -\tilde{\nabla}\Phi|_{\gamma} = \mathbf{0} \\ \text{(no hay gravitación)} \end{array} \end{array} \right.$$

El "DILEMA DE LOS SCNR" con partículas materiales:

- En el ETG, la observación local de partículas materiales  $\mathbf{q}$  desde un SCNR (en el que  $\ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{a}}_{\gamma}, \mathbf{0})$ ) no permite objetivar la noción de que éste "es inercial":

NINGUNA OBSERVACIÓN local con partículas materiales  
PERMITE IDENTIFICAR LOS SCI DE ENTRE TODOS LOS SCNR

o más aún:

"las leyes de la mecánica son localmente las mismas  
en todos los SCNR con origen en caída libre"

(B) Einstein postuló la validez ampliada de estas incertidumbres (**principio de equivalencia**): en particular en el ETG,

NINGUNA OBSERVACIÓN local PERMITE IDENTIFICAR LOS SCI DE ENTRE TODOS LOS SCNR

Pero, en la situación (b), la LUZ emitida en el suelo se recibe en el techo con un desplazamiento al rojo (Doppler) dado por (!)

$$z := \frac{\nu_{em}}{\nu_{rec}} - 1 = \sqrt{\frac{1 + v_D/c}{1 - v_D/c}} - 1 = \frac{1 + v_D/c}{\sqrt{1 - v_D^2/c^2}} - 1 \simeq \frac{|\tilde{a}_\gamma| h}{c^2},$$

donde  $v_D (> 0)$  es la **velocidad Doppler** (de alejamiento) del techo-en-la-recepción respecto del suelo-en-la-emisión y  $h$  es la distancia techo-suelo.

El principio de equivalencia exigía por tanto un **desplazamiento al rojo gravitacional** en la situación (a) de la misma magnitud, que ha sido confirmado experimentalmente (Pound-Rebka-Snider, 1960-; Vessot-Levine, 1977; GPS, 1990-).

(C) Si en el ETG se elimina la restricción de que el SCNR  $\kappa$  sea pequeño,

- parece que se rompen en principio las incertidumbres (a)  $\leftrightarrow$  (b) y (a')  $\leftrightarrow$  (b'), en el sentido de que los términos de orden superior al primero en el desarrollo de Taylor de  $-\tilde{\nabla}\Phi$  en torno al origen  $\gamma$  ("mareas", ver Charla 2): (i) no se pueden desprestigiar sin más, y (ii) no se pueden "enmascarar" por la aceleración del origen, ya que se tiene:  $\tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}\Phi + \tilde{a}_\gamma) = \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla}\Phi)$ ,

- sin embargo podría ocurrir que la contribución de estos términos fuera inferior a la precisión experimental, con lo que **SUBSISTEN** las incertidumbres. En resumen:

NINGUNA OBSERVACIÓN PERMITE IDENTIFICAR LOS SCI DE ENTRE TODOS LOS SCNR

Así, en presencia de gravitación, resulta imposible identificar en el ETG:

- las partículas libres (el origen para los SCI), tan sólo las partículas en caída libre (el origen para los SCNR)
- las componentes del campo gravitatorio  $-\tilde{\nabla}\Phi$ , tan sólo su "mezcla" con la aceleración del origen de coordenadas  $-\tilde{\nabla}\Phi - \tilde{a}_\gamma$
- la conexión afín  $D^{afin}$  (Obs. 3.1), con "curvatura" (Charla 6) cero, tan sólo su "mezcla" con la gravitación en una nueva conexión  $D^{afin} + \text{grad}_t \Phi \otimes dt \otimes dt$ , con curvatura la marea

Lo anterior cuestiona el ETG y, más aún, la estructura afín en el espacio-tiempo

## 4. ALTAS VELOCIDADES. PRODUCTO ESCALAR LORENTZ

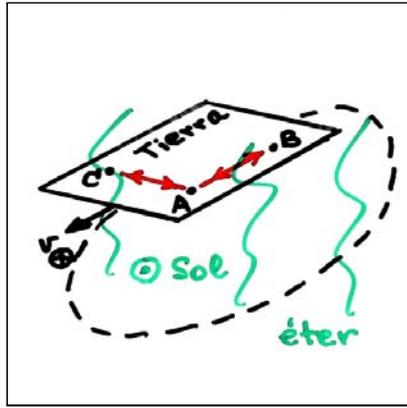
La **luz** en el ET de Galileo (Maxwell, mediados s. XIX):

- está constituida por ONDAS?: propagación de una perturbación (del **campo electromagnético**) en un medio ("éter"?)
- se propaga siguiendo **curvas "luz"  $q(t)$**  (diferenciables) que, en aquellos SCI (Charla 1) "en reposo respecto del éter", verifican

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad |\dot{\mathbf{q}}(t)| \equiv c, \quad (24)$$

con **constante de la luz  $c \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{ cm seg}^{-1}$**

Michelson-Morley (MM) intentan (1887) medir (el módulo de) la velocidad  $v_e$  del éter respecto de la Tierra, puesto que ésta



se mueve con una velocidad  $v_{\oplus} \simeq 3 \cdot 10^6 \text{ cm seg}^{-1}$  resp. del sol ( $\simeq$  respecto del éter?)

- Cálculo retrasos relativos entre ondas luminosas para trayectos iguales (2d) de ida-vuelta en direcciones paralela (ABA) y perpendicular (ACA) a la de movimiento de la Tierra:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ABA: } \left\{ \begin{array}{l} v_{AB} = c + v_e \\ v_{BA} = c - v_e \end{array} \right\} \Rightarrow t_{ABA}(v_e) = \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-1} t_{ABA}(0) \\ \text{ACA: } v_{AC} = (c^2 - v_e^2)^{1/2} = v_{CA} \Rightarrow t_{ACA}(v_e) = \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-1/2} t_{ACA}(0) \end{array} \right.$$

con  $t_{ABA}(0) = \frac{2d}{c} = t_{ACA}(0)$  (tiempo de ida-vuelta "sin éter"). Así

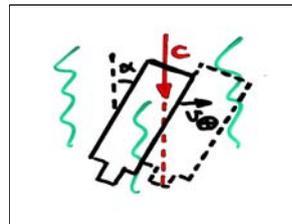
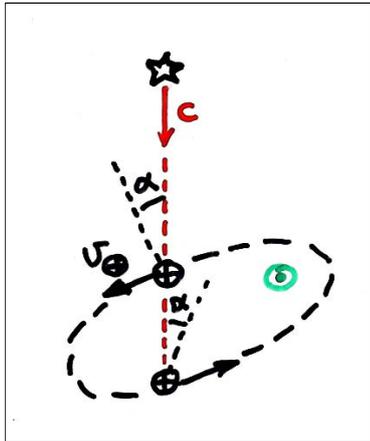
$$t_{ABA}(v_e) - t_{ACA}(v_e) \simeq \frac{v_e^2}{2c^2} t_{ABA}(0) = \frac{v_e^2 d}{c^3} \quad (25)$$

- Del valor experimental  $t_{ABA}(v_e) - t_{ACA}(v_e) \stackrel{!}{\simeq} 0$  y de (25) se deducía  $v_e \simeq 0$  ("isotropía", contra lo que se esperaba:  $v_e \simeq v_{\oplus}$ )  $\rightsquigarrow$  la propiedad (24) seguía siendo cierta en algún SCI no en reposo respecto del éter (de hecho, en muchos otros SCI, ya que el experimento daba el mismo resultado en cualquier estación del año)

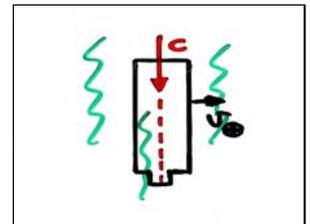
- Así pues, el resultado de MM cuestionaba el ETG

Dos "explicaciones" (famosas) del resultado de MM en el ETG:

- "La Tierra arrastra al éter" ( $\rightsquigarrow$  éter se mueve resp. del sol).  
Difícil de reconciliar con la **aberración de la luz estelar**

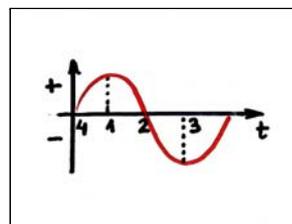
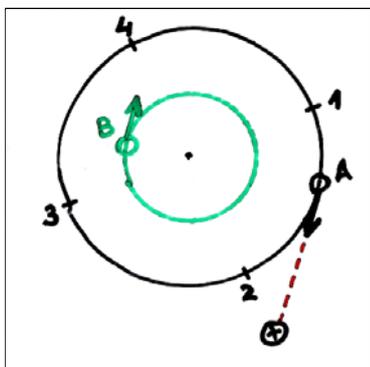


(experimental)  
Si no hay arrastre  
(o si el éter no existe)

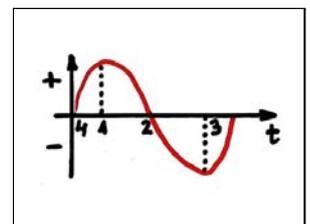


Si la Tierra  
arrastrara al éter

- "La luz consta de partículas" ( $\rightsquigarrow$  hereda la inercia del emisor).  
Difícil de reconciliar con la **observación de estrellas binarias**



(experimental)  
Si la luz consta  
de ondas



Si la luz constara  
de partículas (materiales)

El "DILEMA DE LOS SCI" con partículas materiales (Charla 1) y con luz (Michelson-Morley) conducen a que:

NINGUNA OBSERVACIÓN  
PERMITE IDENTIFICAR LOS "SCI EN REPOSO"  
DE ENTRE TODOS LOS SCI

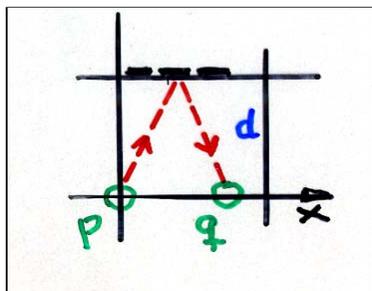
o más aún (**principio de relatividad**):

"las leyes de la mecánica y la velocidad de la luz  
son las mismas en todos los SCI"

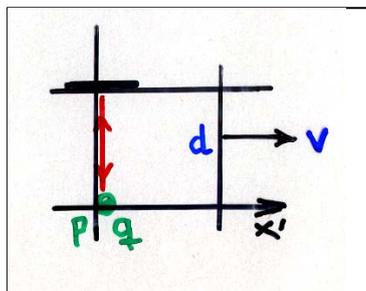
El principio de relatividad cuestiona el ETG. Veámoslo  $\rightsquigarrow$

IMAGINEMOS dos sucesos "conectados por luz":

Asignemos coordenadas desde dos SCI, con (módulo de la) velocidad relativa  $v$ , uno de ellos "comóvil" con ambos sucesos:



SCI  $\kappa$  ( $\rightsquigarrow (x, y, z, \tau)$ )



SCI  $\kappa'$  ( $\rightsquigarrow (x', y' = y, z' = z, \tau')$ )

Sucesos:  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} : \text{emisión de luz en el origen de } \kappa' \text{ (coincidente} \\ \text{entonces con el origen de } \kappa) \\ \mathbf{q} : \text{recepción, en el origen de } \kappa' \text{ ("comóvil")} \\ \text{de la luz reflejada en un espejo (fijo: } x' = 0, y' = d, z' = 0) \end{array} \right.$

Si el ET es el de Galileo (donde el tiempo es absoluto) resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_q - x_p \equiv 2 \Delta x \\ \tau_q - \tau_p \stackrel{!}{=} 2d/c \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_q - x'_p = 0 \\ \tau'_q - \tau'_p = 2d/c \end{array} \right.$$

Pero habida cuenta de MM (principio de relatividad) se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_q - x_p \equiv 2 \Delta x \\ \tau_q - \tau_p \stackrel{!}{=} 2\sqrt{d^2 + \Delta x^2} / c \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_q - x'_p = 0 \\ \tau'_q - \tau'_p = 2d/c \end{array} \right. ,$$

y esto último sugiere:

- una **dilatación de tiempo** en el SCI "no-comóvil":  $\tau_q - \tau_p > \tau'_q - \tau'_p$ .

Más concretamente:

$$v = \frac{x_q - x_p}{\tau_q - \tau_p} = \frac{\Delta x}{\sqrt{d^2 + \Delta x^2}} c, \Rightarrow \Delta x = d \frac{v}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_q - \tau_p = (\tau'_q - \tau'_p) \left(1 + \frac{\Delta x^2}{d^2}\right)^{1/2} = (\tau'_q - \tau'_p) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

( $\rightsquigarrow$  fenómeno apreciable a "altas velocidades" frente a  $c$ )

- un **producto escalar lorentziano** (Obs. 4.1) en el ET:

$$(x_q - x_p)^2 - c^2(\tau_q - \tau_p)^2 = -4d^2 = (x'_q - x'_p)^2 - c^2(\tau'_q - \tau'_p)^2$$

( $\rightsquigarrow c$  "homogeneiza" espacio y tiempo)

Observación 4.1 **PRODUCTOS ESCALARES CANÓNICOS**

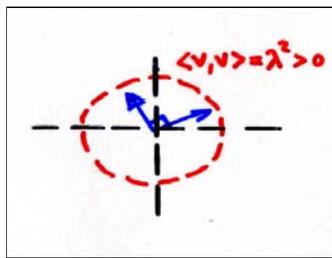
**Producto escalar lorentziano** (en un espacio vectorial)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ : forma bilineal, simétrica, no degenerada y de "índice" 1

En un esp. vect. lorentz, un vector  $\mathbf{v}$  se dice: **temporal** si  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ , **luz** si  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  y  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , **espacial** si  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$  ó  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

COMPARACIÓN entre productos escalares "canónicos" en  $\mathbb{R}^2$

**EUCLÍDEO**

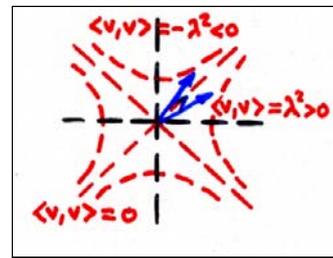
$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := v^1 w^1 + v^2 w^2$$



**LORENTZIANO**

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := v^1 w^1 - v^2 w^2$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^- \cup \mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^- \cup \mathcal{E}$$



(1) Desigualdad de Schwarz (con norma  $|\mathbf{v}| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ ):

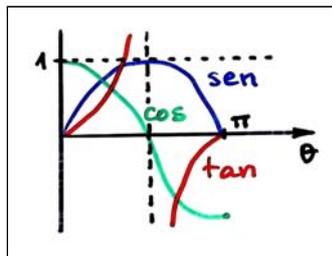
$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{T} \cup \mathcal{L}, |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \geq |\mathbf{v}| |\mathbf{w}|$$

("=" sii  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$ )

de donde se sigue:

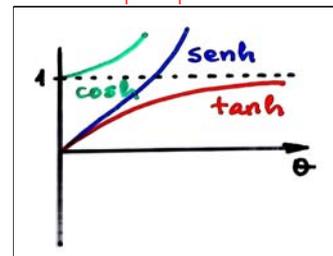
$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \exists! \theta \in [0, \pi]$$

con  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \theta$



$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{L}^+, \exists! \theta \in [0, \infty]$$

con  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -|\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cosh \theta$   
(convenio:  $|\mathbf{w}| = 0 \Leftrightarrow \theta = \infty$ )



(2) Proyecciones:

$\forall \mathbf{v} (\neq \mathbf{0})$  y  $\forall \mathbf{w}$ , existen

$$\begin{cases} \mathbf{w}^{\parallel} := \langle \mathbf{w}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \rangle \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ \mathbf{w}^{\perp} := \mathbf{w} - \mathbf{w}^{\parallel} \end{cases}$$

$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{T}$  y  $\forall \mathbf{w}$ , existen

$$\begin{cases} \mathbf{w}^{\parallel} := -\langle \mathbf{w}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \rangle \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ \mathbf{w}^{\perp} := \mathbf{w} - \mathbf{w}^{\parallel} \end{cases}$$

que verifican:

(en todo caso)

$$\begin{cases} |\mathbf{w}^{\parallel}| = |\mathbf{w}| |\cos \theta| \\ |\mathbf{w}^{\perp}| = |\mathbf{w}| |\sin \theta| \end{cases}$$

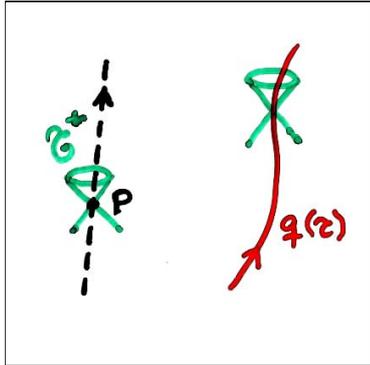
(si  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}^+$  y  $\mathbf{w} \in \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{L}^+$ )

$$\begin{cases} |\mathbf{w}^{\parallel}| = |\mathbf{w}| \cosh \theta \\ |\mathbf{w}^{\perp}| = |\mathbf{w}| \sinh \theta \end{cases} \quad \blacksquare$$

## 5. MECÁNICA MINKOWSKIANA. OBSERVACIONES RELATIVISTAS

El resultado de Michelson-Morley sugiere nuevo modelo de ET:

ET de Minkowski  $\mathbb{E}_1^{\uparrow} \equiv (\mathbb{A}^4, \eta, \uparrow)$ , siendo:



(i)  $\eta \in \mathfrak{T}_2^0(\mathbb{A}^4)$ , "métrica" (Obs. 5.1) en un espacio afín  $\mathbb{A}^4$  inducida por un producto escalar lorentziano en el espacio vectorial asociado  $\mathbb{V}^4$  (canónicamente isomorfo a cualquier  $\mathbb{T}_p\mathbb{A}^4$ , Observación 1.1)

(ii)  $\uparrow$ , elección como "futuro" de una  $(\mathcal{T}^+)$  de las dos componentes conexas del conjunto (de vectores tangentes "temporales")

$$\mathcal{T} := \{v \in \mathbb{T}\mathbb{A}^4 \mid \eta(v, v) < 0\}$$

En el ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI (ETM):

- NO existe noción absoluta de simultaneidad
- Tiene sentido el "intervalo" entre sucesos arbitrarios

$$\Delta_{p,p'}^2 := \eta(p' - p, p' - p)$$

- **Partícula material:**  $q(\tau)$  curva tal que  $\eta(\dot{q}, \dot{q}) = -c^2$  y  $\dot{q}$  futuro
- Cada partícula material posee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m > 0 \\ \text{tiempo propio } \tau \text{ (fijado por la imagen de } q) \\ \text{energía-momento } P_q := m \dot{q} \text{ (ver luego)} \\ \text{fuerza } F_q := m \ddot{q} \text{ (no es la segunda ley de Newton)} \end{array} \right.$$

Se dice que  $q(\tau)$  es libre si  $\ddot{q} = 0$

$$(\Leftrightarrow q(\tau) = p + \tau v, \text{ con } p \in \mathbb{A}^4, \eta(v, v) = -c^2 \text{ y } v \text{ futuro})$$

- **Partícula luz (o fotón):**  $q(\tau)$  curva tal que  $\eta(\dot{q}, \dot{q}) = 0$ ,  $\dot{q}$  futuro y  $\ddot{q} = 0$  ( $\rightsquigarrow$  toda partícula luz es "libre")

Cada partícula luz posee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m = 0 \text{ (ver luego)} \\ \text{energía-momento } P_q := \dot{q} \text{ (ver luego)} \end{array} \right.$$

Observación 5.1 **CAMPOS DE TENSORES. MÉTRICAS**

Dado espacio vectorial  $V$  (sobre  $\mathbb{R}$ ), se tiene:

Espacio vectorial dual  $V^* := L(V, \mathbb{R}) \rightsquigarrow$

E. v. de **tensores** (de tipo  $\binom{r}{s}$  s.  $V$ )  $T_s^r(V) := L(\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s \text{ veces}}, \mathbb{R})$

- $T_0^1(V) := L(V^*, \mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq \text{can.}} V$  , con  $\tau \mapsto t$  tal que  $\tau(\omega) =: \omega(t)$
- $T_1^0(V) := L(V, \mathbb{R}) =: V^*$
- $T_1^1(V) := L(V^* \times V, \mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq \text{can.}} L(V, V)$  , con  $\tau(\omega, v) =: \omega(t(v))$
- $T_3^1(V) := L(V^* \times V \times V \times V, \mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq \text{can.}} L(V \times V \times V, V)$  , . . .

Base  $\{e_i\}$  (de  $V$ )  $\rightsquigarrow$  Base dual  $\{\theta^i\}$  (de  $V^*$ ) tal que  $\theta^i(e_j) := \delta_j^i \rightsquigarrow$

Componentes (de  $\tau \in T_s^r(V)$  en  $\{e_i\}$  y  $\{\theta^i\}$ )  $\tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} := \tau(\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$

Trazas  $\text{tr}_b^a$  ( $a \in \{1, \dots, r\}, b \in \{1, \dots, s\}$ ) de tensores  $\binom{r}{s}$

- $\text{tr}_1^1: T_1^1(V) \rightarrow T_0^0(V) \equiv \mathbb{R}$  ,  $\tau \mapsto \sum_{i=1}^n \tau_i^i$
- $\text{tr}_2^1: T_3^1(V) \rightarrow T_2^0(V)$  ,  $\tau \mapsto \sum_{i=1}^n \tau_{i \cdot i}^i$

Las  $\text{tr}_b^a$  bien definidas:  $b = b'A \Rightarrow \tau_b = A^{-1} \tau_{b'} A \Rightarrow \text{tr}(\tau_b) = \text{tr}(\tau_{b'})$

Un producto escalar  $\langle, \rangle \in T_2^0(V)$  (Obs. 4.1) da lugar a:

- isomorfismo  $\downarrow: V \xrightarrow{\simeq} V^*$  ,  $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  ( $\rightsquigarrow$  bajada/subida índices)
- $\text{tr}_{ab}$  bien definidas ( $b = b'A \Rightarrow \langle, \rangle_b = A^T \langle, \rangle_{b'} A \Rightarrow \text{tr}(\langle, \rangle_b) \neq \text{tr}(\langle, \rangle_{b'})$ )

Dada variedad  $M \rightsquigarrow$  módulo  $\mathfrak{X}(M)$  (Obs. 1.1), se tiene:

Módulo de 1-formas  $\mathfrak{X}^*(M) := \mathcal{L}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M)) \rightsquigarrow$

Módulo de campos de tensores (de tipo  $\binom{r}{s}$  sobre  $M$ )

$\mathfrak{T}_s^r(M) := \mathcal{L}(\underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \dots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ veces}}, C^\infty(M))$

Métrica (semi)riemanniana  $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ : asignación "diferenciable" de un producto escalar (riemanniano si el "índice" es 0, euclídeo; lorentziano si el "índice" es 1) en cada espacio tangente.

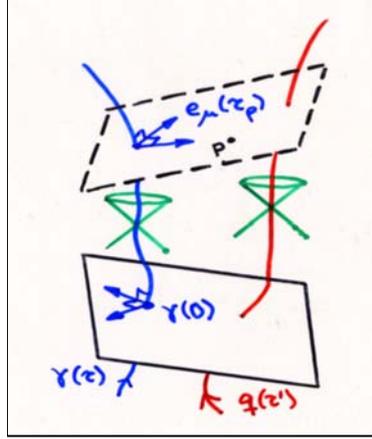
En cada  $(M, g)$ :

- la  $g$  no "metriza" a  $M$  (salvo  $g$  riemanniana y  $M$  conexa)
- existe isomorfismo  $\downarrow: \mathfrak{X}(M) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{X}^*(M)$  ,  $X \mapsto g(X, \cdot)$
- resulta  $\text{tr} g \equiv \text{tr}_{12} g = \dim(M)$
- existen el gradiente  $\text{grad} f$  de una función ( $g(\text{grad} f, Z) := df(Z) = Z(f)$ , o también  $\text{grad} f := \uparrow df$ ), la divergencia  $\text{div} X$  de un campo (Obs. 7.1) y el laplaciano  $\Delta f := \text{div}(\text{grad} f)$  de una función
- dada carta  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se definen  $n^2$  funciones (sólo  $n(n+1)/2$  independientes)  $g_{ij} \in C^\infty(U)$  (componentes de  $g$  en  $x$ ) por

$$g_{ij} := g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) , \quad (26)$$

y también funciones  $g^{ij} \in C^\infty(U)$  tales que  $(g^{ij})$  es la matriz inversa de  $(g_{ij})$  (esto es,  $\sum_{k=1}^n g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$ ) ■

- **Sistemas de coordenadas (SC):** parejas  $\kappa \equiv (\gamma(\tau), \{e_\mu(\tau)\})$ , con



$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(\tau) \text{ partícula material que} \\ \text{representa el "origen"} \\ \{e_\mu(\tau)\} \text{ 3 campos de vectores} \\ \text{sobre } \gamma(\tau) \text{ que, junto con } \dot{\gamma}(\tau)/c, \\ \text{constituyen base orton. móvil} \\ \text{de } \mathbf{V}^4 \text{ y representan los "ejes"} \end{array} \right.$

Cada SC  $\kappa$  asocia, a cada suceso  $p$  (de cierto abierto, en general no todo  $\mathbf{A}^4$ ), coordenadas ( $\tilde{x} \equiv (x^1, x^2, x^3, x^4)$ ) dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} x^4(p) := c \tau_p, \text{ con } p - \gamma(\tau_p) \perp \dot{\gamma}(\tau_p) \\ p - \gamma(\tau_p) =: \sum_{\mu=1}^3 x^\mu(p) e_\mu(\tau_p) \end{array} \right.$$

(así, las cuatro coordenadas tienen "dimensiones físicas" de longitud)

En particular el SC  $\kappa$  asocia, a cada partícula  $q(\tau')$ , coordenadas ( $\tilde{q}(\tau') := \tilde{x}(q(\tau')), q^4(\tau') := x^4(q(\tau'))$ ) que verifican:

$$\boxed{q(\tau') - \gamma(\tau_{q(\tau')}) = \sum_{\mu=1}^3 q^\mu(\tau') e_\mu(\tau_{q(\tau')})} \quad \text{y} \quad \boxed{q^4(\tau') = c \tau_{q(\tau')}} ,$$

y resulta:

$$\dot{q}(\tau') = \sum_{i=1}^4 \dot{q}^i(\tau') \partial/\partial x^i |_{q(\tau')} \equiv \dot{q}^4(\tau') \left( \partial/\partial x^4 |_{q(\tau')} + \tilde{v}_{q,\kappa}(\tau')/c \right), \quad (27)$$

donde la **velocidad relativa**  $\tilde{v}_{q,\kappa}$  está definida por

$$\tilde{v}_{q,\kappa} := d\tilde{q}/d\tau_q = c d\tilde{q}/dq^4 = c \dot{\tilde{q}}/\dot{q}^4 \quad (28)$$

- **Sistemas de coordenadas inerciales (SCI):** aquellos SC

$$\boxed{\text{con } \ddot{\gamma} = 0 \text{ y } \dot{e}_\mu = 0} \quad \text{o también} \quad \boxed{\text{tales que verifican: } \partial/\partial x^i |_q = T_{pq}(\partial/\partial x^i |_p)},$$

con  $T_{pq}$  dado en (2), así los campos coordenados son "constantes" (escribimos  $\partial/\partial x^\mu = e_\mu$  y  $\partial/\partial x^4 = \dot{\gamma}/c$ ), y por tanto ortonormales en todo punto ( $\eta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ ). Entonces se tiene:

$$\dot{q}(\tau') = \underbrace{\dot{q}^4(\tau')}_{|\dot{q}^\parallel|} \dot{\gamma}/c + \underbrace{\dot{q}^4(\tau') \tilde{v}_{q,\kappa}(\tau')/c}_{\dot{q}^\perp} \quad (29)$$

OBSERVACIONES de  $q(\tau')$  desde un SCI  $\kappa \equiv \{\gamma(\tau), \{e_\mu(\tau)\}\}$ :

• **Composición de velocidades.** Como  $|\dot{q}^\parallel| = |\dot{q}| \cosh \theta$  y  $|\dot{q}^\perp| = |\dot{q}| \sinh \theta$  (con  $\theta(\tau') \in [0, \infty]$  tal que  $\eta(\dot{q}(\tau'), \dot{\gamma}) =: -c |\dot{q}| \cosh \theta(\tau')$ , Obs. 4.1), se sigue:

$$|\tilde{v}_{q,\kappa}| = c \tanh \theta \begin{cases} < c, & \text{si } q \text{ material} \\ = c, & \text{si } q \text{ luz} \end{cases}, \quad (30)$$

lo que altera radicalmente la composición galileana de velocidades.

Experimentos confirman (30): según MM (Charla 4) el módulo de la velocidad relativa de la luz en el vacío respecto de cualquier SCI toma siempre el mismo valor.

El que "nada alcanza a la luz" es consistente con (37)

• **Dilatación de tiempo** en  $\kappa$  respecto de  $q$  material.

Se sigue de  $q^4 = c \tau|_q$ , de (29) y de la Obs. 4.1 (si  $q$  fuera luz, sería  $|\dot{q}| = 0 \neq c$  y la tercera igualdad dejaría de ser cierta):

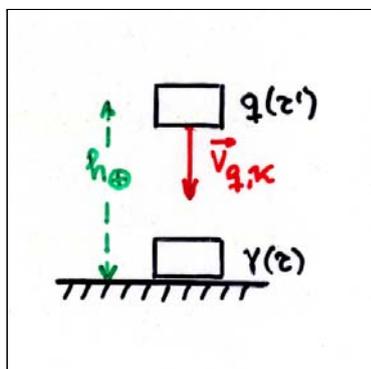
$$\frac{d\tau_q}{d\tau'} = \frac{\dot{q}^4}{c} = \frac{|\dot{q}^\parallel|}{c} = \cosh \theta \equiv (1 - \tanh^2 \theta)^{-1/2} \geq 1,$$

con ">" si y sólo si  $\kappa$  es no-comóvil con  $q$ . Y de (30) se concluye:

$$\frac{d\tau_q}{d\tau'} = \frac{\dot{q}^4}{c} = (1 - \frac{|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2}{c^2})^{-1/2}, \quad (31)$$

que modifica todas las expresiones galileanas, en particular, las de la aberración de la luz y del efecto Doppler

Experim. (1941-). Muones producidos a altura  $h_\oplus = 60 \text{ km}$ , con



$|\tilde{v}_{q,\kappa}| = 0'99975 c$  ( $\Rightarrow \Delta\tau \simeq 2 \cdot 10^{-4}$  seg) y "semivida" (comóvil)  $T \simeq 1'5 \cdot 10^{-6}$  seg (con  $T := \frac{\ln 2}{a}$  para  $N(\tau') = N(0) e^{-a\tau'}$ )

Aunque  $\Delta\tau \simeq 133 T$ , los muones detectados en tierra suponen no  $\frac{1}{2^{133}} \simeq 10^{-40}$  sino  $\frac{1}{8}$  del total emitido

Explicación: se sigue de (31) que  $\Delta\tau' = (1 - \frac{|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2}{c^2})^{1/2} \Delta\tau \simeq \frac{3}{133} \Delta\tau \simeq 3 T$

- **Energía y momento** de  $\mathbf{q}$  en  $\kappa$ . Se definen (Obs. 4.1):

$$\mathbf{P}_q(\tau') \equiv \underbrace{-\eta(\mathbf{P}_q(\tau'), \dot{\gamma}/c)}_{|\mathbf{P}_q^\parallel| =: \mathbf{E}_{q,\kappa}/c} \dot{\gamma}/c + \underbrace{\mathbf{P}_q(\tau') + \eta(\mathbf{P}_q(\tau'), \dot{\gamma}/c) \dot{\gamma}/c}_{\mathbf{P}_q^\perp =: \tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa}}, \quad (32)$$

con lo que (al ser  $\mathbf{P}_q$  un múltiplo positivo de  $\dot{\mathbf{q}}$ ) se sigue de (29):

$$\tilde{v}_{q,\kappa} = c \dot{q}^\perp / |\dot{\mathbf{q}}^\parallel| = c \mathbf{P}_q^\perp / |\mathbf{P}_q^\parallel| = c^2 \tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa} / \mathbf{E}_{q,\kappa} \quad (33)$$

- (i) Si  $\mathbf{q}$  es material, se sigue de  $\mathbf{P}_q := m\dot{\mathbf{q}}$  y (32):

$$\mathbf{E}_{q,\kappa}^2 = m^2 c^4 + c^2 |\tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa}|^2 \quad (34)$$

y también, habida cuenta de (29) y (31):

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{q,\kappa} = m c \dot{q}^4 = m c^2 (1 - \frac{|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2}{c^2})^{-1/2} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa} = m \tilde{v}_{q,\kappa} \frac{\dot{q}^4}{c} = m \tilde{v}_{q,\kappa} (1 - \frac{|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2}{c^2})^{-1/2} \end{cases}, \quad (35)$$

de donde a su vez se concluye:

$$\text{Para } |\tilde{v}_{q,\kappa}| \ll c, \text{ es } \begin{cases} \mathbf{E}_{q,\kappa} \simeq m c^2 + \frac{1}{2} m |\tilde{v}_{q,\kappa}|^2 \\ \tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa} \simeq m \tilde{v}_{q,\kappa} \end{cases} \quad (36)$$

$$\text{Para } |\tilde{v}_{q,\kappa}| \rightarrow c, \text{ es } \mathbf{E}_{q,\kappa} \rightarrow \infty \quad (37)$$

- (ii) Y si  $\mathbf{q}$  es luz, se sigue de  $\mathbf{P}_q := \dot{\mathbf{q}}$  y (32):

$$\mathbf{E}_{q,\kappa} = c |\tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa}|, \quad (38)$$

de donde a su vez se concluye: si (38) debe ser el límite de (34) cuando  $|\tilde{v}_{q,\kappa}| \rightarrow c$ , debe atribuirse masa nula a las partículas luz

Experimentos. Plena confirmación (1950-, en aceleradores):

Efectos fotoeléctrico (Einstein 1905) y Compton (1927) sugieren que, en su propagación, la luz está constituida (también) por **PARTÍCULAS** ("fotones"), cuya energía y momento verifican

$$\mathbf{E}_{q,\kappa} = h_P \nu_{q,\kappa} = c |\tilde{\mathbf{P}}_{q,\kappa}| \quad (39)$$

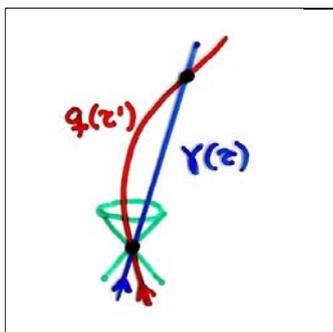
(con **cte. de Planck**  $h_P \simeq 6'6 \cdot 10^{-27}$  erg seg y **frecuencia**  $\nu_{q,\kappa}$  de la onda electromagnética asociada), lo que es consistente con (38)

Usando (35) y (39) se tiene conservación exacta de momento y energía en las colisiones (en particular, en fisión y fusión nuclear)

Finalmente, tanto los "límites galileanos" (36) como el que la energía necesaria para "acelerar" partículas a la velocidad de la luz es infinita (37) resultan acordes con los experimentos.

- **Paradoja de los gemelos.** Si dos partículas  $q(\tau')$  (material) y  $\gamma(\tau)$  (material y libre) tienen dos sucesos de coincidencia, digamos  $\gamma(0) = q(0)$  y  $\gamma(\Delta\tau) = q(\Delta\tau')$ , entonces  $\Delta\tau \geq \Delta\tau'$ .

En efecto, basta tomar un SCI con origen  $\gamma(\tau)$  y aplicar (31).



Experimento (Pound-Rebka, 1960-): dos cristales de hierro,  $\gamma(\tau)$  con temperatura (en kelvin)  $\Theta \simeq 0$  ( $\sim$  libre) y  $q(\tau')$  con  $\Theta' > \Theta$ . La radiación gamma emitida por cada cristal (misma frecuencia propia  $\frac{dN'}{d\tau'} = \frac{dN}{d\tau}$ ) se recibe con distintas frecuencias (efecto Doppler) en un SCI ligado al cristal frío ("laboratorio"). La diferencia relativa es

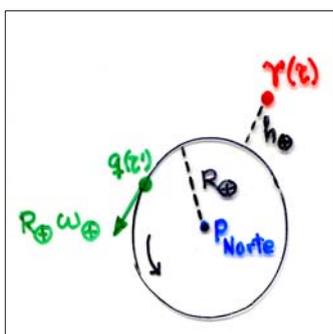
$$\left(\frac{dN'}{d\tau'} - \frac{dN}{d\tau}\right) / \frac{dN}{d\tau} = (-2'09 \pm 0'24) \cdot 10^{-15} \Theta'$$

Explicación: la "velocidad cuadrática media" de los iones del cristal caliente es ("teoría cinética")  $m_{Fe}(v^2)_{med}/2 \simeq 3k_B \Theta'/2$ , con **constante de Boltzmann**  $k_B \simeq 1'4 \cdot 10^{-16} \text{ erg kelvin}^{-1}$ . Habida cuenta de  $m_{Fe} = 57m_{pr}$  y  $m_{pr}c^2 = 1'5 \cdot 10^{-3} \text{ erg}$ , se sigue:

$$(v^2)_{med} \simeq \frac{3k_B \Theta'}{57m_{pr}} \simeq \frac{4'2 \cdot 10^{-13} \Theta'c^2}{57 \cdot 1'5} \simeq 5 \cdot 10^{-15} \Theta'c^2,$$

y de (31) se concluye:

$$\frac{dN'}{d\tau'} - \frac{dN}{d\tau} = \left(1 - \frac{(v^2)_{med}}{c^2}\right)^{1/2} \frac{dN'}{d\tau'} - \frac{dN}{d\tau} \simeq \frac{-(v^2)_{med}}{2c^2} \frac{dN}{d\tau} \simeq -2'5 \cdot 10^{-15} \Theta' \frac{dN}{d\tau}$$



Experimento (Hafele-Keating, 1972): dos relojes de cesio (precisión  $10^{-13} \text{ seg}$ ) sobre ecuador,  $\gamma(\tau)$  en avión hacia Oeste a altura  $h_{\oplus} \simeq 10 \text{ km}$  con velocidad (resp. del suelo)  $(R_{\oplus} + h_{\oplus})\omega_{\oplus}$  ( $\sim$  libre) y  $q(\tau')$  en tierra.

El retraso relativo observado es  $(\Delta\tau - \Delta\tau') / \Delta\tau = 2'3 (\pm 0'2) \cdot 10^{-12}$

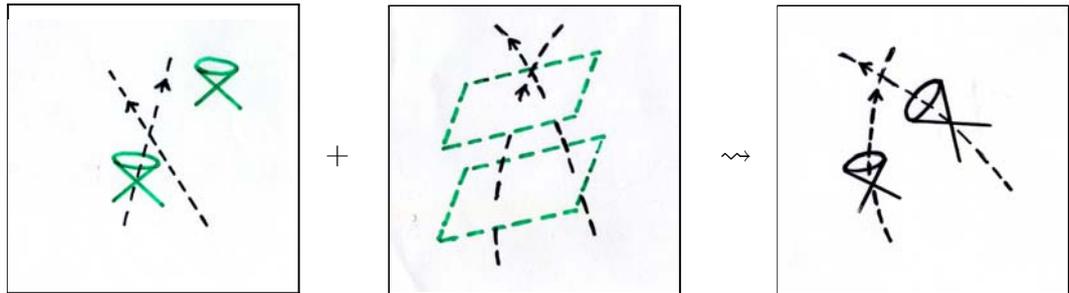
Explicación: teniendo en cuenta que  $R_{\oplus} \simeq 6'37 \cdot 10^6 \text{ m}$  y que  $|\tilde{v}_{q,\kappa}| = R_{\oplus}\omega_{\oplus} \simeq 463 \text{ m seg}^{-1}$ , se sigue de (31):

$$\Delta\tau - \Delta\tau' = \left(1 - \left(1 - \frac{|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2}{c^2}\right)^{1/2}\right) \Delta\tau \simeq \frac{|\tilde{v}_{q,\kappa}|^2}{2c^2} \Delta\tau \simeq 1'19 \cdot 10^{-12} \Delta\tau,$$

a lo que hay que añadir "retraso gravitacional" ( $g_{\oplus}$  en Charla 2)  $(g_{\oplus}h_{\oplus}/c^2) \Delta\tau \simeq 1'09 \cdot 10^{-12} \Delta\tau$ . La precisión de  $10^{-1}$  en el acuerdo teoría $\leftrightarrow$ experimento se mejoró a  $10^{-4}$  (Vessot-Levine, 1977).

## 6. GRAVITACIÓN COMO CURVATURA. LÍMITE NEWTONIANO

El ET de Minkowski (Charla 5) y las ideas sobre la caída libre (Charla 3) "sugieren" un nuevo modelo de ETs:



$$\mathbb{E}_1^{4\uparrow} \equiv (A^4, \eta, \uparrow)$$

ET Minkowski

$$(M^4, t \in C^\infty(M), \langle, \rangle \text{ en } t^{-1}(\cdot), D^g)$$

ET Galileo "curvo"

$$(M^4, g, \uparrow, D)$$

ETs Einstein

siendo:

- (i)  $M$ , variedad conexa
- (ii)  $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ , métrica lorentziana en  $M$
- (iii)  $\uparrow$ , elección como "futuro" de una  $(T^+)$  de las (dos!) componentes conexas del conjunto (de vectores tangentes "temporales")  
 $\mathcal{T} := \{v \in TM \mid g(v, v) < 0\}$
- (iv)  $D$ , conexión "de Levi-Civita" de  $(M, g)$  (Obs. 6.1)

En los ESPACIO-TIEMPOS DE EINSTEIN (ETsE):

- **Partícula material:**  $q(\tau)$  curva tal que  $g(\dot{q}, \dot{q}) = -c^2$  y  $\dot{q}$  futuro

Cada partícula material posee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m > 0 \\ \text{tiempo propio } \tau \text{ (fijado por la imagen de } q) \\ \text{energía-momento } P_q := m \dot{q} \\ \text{fuerza (no gravitacional) } F_q := m D_{\dot{q}} \dot{q} \end{array} \right.$$

Se dice que  $q(\tau)$  está en **caída libre** si  $D_{\dot{q}} \dot{q} = 0$

- **Partícula luz** (o **fotón**):  $q(\tau)$  curva tal que  $g(\dot{q}, \dot{q}) = 0$ ,  $\dot{q}$  futuro y  $D_{\dot{q}} \dot{q} = 0$  ( $\rightsquigarrow$  toda partícula luz está en "caída libre")

Cada partícula luz posee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa } m = 0 \\ \text{energía-momento } P_q := \dot{q} \end{array} \right.$$

Observación 6.1 CONEXIÓN Y CURVATURA DE LEVI-CIVITA

Dada variedad semiriemanniana  $(M^n, g)$ , existe una única conexión  $D$  (*conexión de Levi-Civita*) tal que:

(i) es "simétrica": en cualquier carta  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se verifica:  
 $D_{\partial/\partial x^j} \partial/\partial x^k = D_{\partial/\partial x^k} \partial/\partial x^j$  (equivalentemente,  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ )

(ii) es "métrica": la ley de transporte asociada (Obs. 3.1) preserva los productos escalares dados por  $g$

- En cualquier carta  $x$  se verifica:

$$\boxed{2 \Gamma_{jk}^i = \sum_{l=1}^n g^{il} (\partial g_{jl} / \partial x^k + \partial g_{lk} / \partial x^j - \partial g_{jk} / \partial x^l)} \quad (40)$$

Se define el *tensor de curvatura* (de la conexión Levi-Civita  $D$ )  $R \in \mathfrak{T}_3^1(M) \xrightarrow{\simeq \text{can.}} \mathcal{L}(\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$  por:

$$R(Z, X, Y) := (D_{[X, Y]} - D_X D_Y + D_Y D_X) Z \in \mathfrak{X}(M),$$

donde el *corchete de Lie* (de dos campos)  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$  está a su vez definido por:  $[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$

- dada carta  $x$ , se definen las  $n^4$  *componentes* (de  $R$  en  $x$ ):

$$R_{ijkl}^i := R(dx^i, \partial/\partial x^j, \partial/\partial x^k, \partial/\partial x^l) \in C^\infty(U)$$

- $R$  es "muy simétrico",  $\rightsquigarrow$  sólo  $n^2(n^2 - 1)/12$  de estas componentes (1 si  $n = 2$ , 20 si  $n = 4$ ) son independientes. Y se verifica:

$$\boxed{R_{ijkl}^i = \partial \Gamma_{kj}^i / \partial x^l - \partial \Gamma_{lj}^i / \partial x^k + \sum_{h=1}^n \Gamma_{lh}^i \Gamma_{kj}^h - \sum_{h=1}^n \Gamma_{kh}^i \Gamma_{lj}^h} \quad (41)$$

- la curvatura de Levi-Civita  $R$  controla que  $(M, g)$  sea o no *localmente isométrico* al espacio (semieuclídeo)  $\mathbb{E}_\nu^n$  ("índice"  $\nu$ ).

Más concretamente:  $R = 0$  si y sólo si existen (en torno a cada punto) bases coordenadas  $\{\partial/\partial x^i\}$  que son "*D-paralelas*" (esto es,  $\Gamma_{jk}^i = 0$ ), o equivalentemente, bases coordenadas  $\{\partial/\partial x^i\}$  que son "*g-ortonormales*" (esto es,  $g_{ij} = \pm \delta_{ij}$ )

Se define el *tensor de Ricci* (de la conexión de Levi-Civita  $D$ )  $Ric := \text{tr}_3^1(R) \in \mathfrak{T}_2^0(M)$

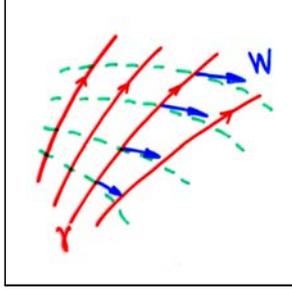
- dada carta  $x$ , se definen las  $n^2$  *componentes* (de  $Ric$  en  $x$ ):

$$\boxed{Ric_{jk} := Ric(\partial/\partial x^j, \partial/\partial x^k) = \sum_{i=1}^n R_{jki}^i \in C^\infty(U)} \quad (42)$$

- $Ric$  es simétrico,  $\rightsquigarrow$  sólo  $n(n+1)/2$  de estas componentes son independientes ■

Sea  $(M, g, \uparrow, D)$  un ETE, con curvatura  $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$  y tensor de Ricci  $Ric \in \mathfrak{T}_2^0(M)$

- La propiedad más relevante de  $R$  es que gobierna la aceleración relativa de las geodésicas próximas:



Consideremos familia a 1 parámetro de partículas "en caída libre" ( $\equiv$  geodésicas) próximas a una dada  $\gamma(\tau)$

"Infinitesimalmente" ( $\equiv$  a primer orden en el parámetro) la familia se describe por el **campo de la familia**  $W \in \mathfrak{X}(\gamma)$

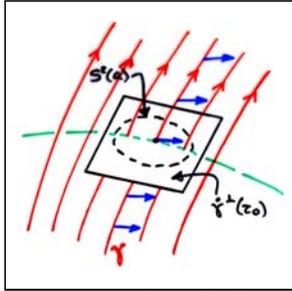
Si  $\gamma(\tau)$  es material, (no sólo  $W$  sino también)  $W^\perp := W + g(W, \dot{\gamma}/c) \dot{\gamma}/c \in \dot{\gamma}^\perp$  verifica (!) la **ecuación de Jacobi**:

$$\boxed{D_{\dot{\gamma}} D_{\dot{\gamma}} W^\perp = R(\dot{\gamma}, W^\perp, \dot{\gamma}) \equiv \mathcal{F}_{\dot{\gamma}}(W) ,}$$

que da lugar en cualquier carta a:

$$\boxed{(D_{\dot{\gamma}} D_{\dot{\gamma}} W^\perp)^i = \sum_{j,k,l=1}^4 R_{jkl}^i |_\gamma \frac{d\gamma^j}{d\tau} (W^\perp)^k \frac{d\gamma^l}{d\tau}} \quad (43)$$

- La propiedad más relevante de  $Ric$  es que gobierna la aceleración relativa promedio de las geodésicas próximas:



'Promediamos' en cierto instante  $\tau_0$  las aceleraciones relativas de familias de partículas materiales en caída libre próximas a  $\gamma$

Denotando por  $\zeta_{\tau_0}$  el elemento de área en la esfera  $S^2(a) \subset \dot{\gamma}(\tau_0)^\perp$ , se tiene (!):

$$\boxed{(\frac{1}{4\pi a^2} \int g(\mathcal{F}_{\dot{\gamma}}(x), x) \zeta_{\tau_0} =) \frac{a^2}{3} \text{tr}(\mathcal{F}_{\dot{\gamma}})(\tau_0) = -\frac{a^2}{3} Ric(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(\tau_0)}$$

(la 1ª igualdad por ser  $\mathcal{F}_{\dot{\gamma}} : \dot{\gamma}^\perp \rightarrow \dot{\gamma}^\perp$  autoadjunto, la 2ª por (43)), que da lugar en cualquier carta a (el valor  $\tau_0$  era arbitrario):

$$\boxed{\int \sum_{i,j=1}^4 g_{ij} (D_{\dot{\gamma}} D_{\dot{\gamma}} W^\perp)^i (W^\perp)^j \zeta = \frac{-4\pi a^4}{3} \sum_{i,j=1}^4 Ric_{ij} |_\gamma \frac{d\gamma^i}{d\tau} \frac{d\gamma^j}{d\tau}} \quad (44)$$

¿Cómo se relacionan estas propiedades de  $R$  y  $Ric$  con lo que conocemos (Charla 2) sobre la gravitación clásica, caracterizada por ser DÉBIL ( $\equiv$  "velocidades de escape" pequeñas frente a  $c$ ) y NO-RELATIVISTA ( $\equiv$  velocidades pequeñas frente a  $c$ )?

Sea  $(\mathbf{M}, \mathbf{g}, \uparrow, \mathbf{D})$  un ETE y sea  $\kappa \equiv (\gamma(\tau), \{\mathbf{e}_\mu(\tau)\})$  un SC (definido como en el ETM, Ch. 5) "cuasi-inercial" ( $\equiv \mathbf{D}_\dot{\gamma}\dot{\gamma} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{D}_\dot{\gamma}\mathbf{e}_\mu = \mathbf{0}$ ), con carta asociada (definición más complicada que en el ETM)  $\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2, x^3, x^4 = c\tau) : \mathbf{U} \mapsto \mathbb{R}^4$ . Se sigue (Obs. 3.1):  $\Gamma_{jk}^i|_\gamma = \mathbf{0}$

Supongamos (**límite newtoniano**) que:

(\*)  $(\mathbf{U}, \mathbf{g}|_{\mathbf{U}})$  es una "perturbación débil" del ETM ( $\equiv \mathbf{g}_{ij} = \eta_{ij} + \mathbf{h}_{ij}$ , con  $\eta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ ,  $|\mathbf{h}_{ij}| \ll 1$ )

(\*\*) todo movimiento en  $\mathbf{U}$  es "lento" ( $\equiv |\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q}, \kappa} := d\tilde{\mathbf{q}}/d\tau_{\mathbf{q}}| \ll c$ )

(\*\*\*)  $(\mathbf{U}, \mathbf{g}|_{\mathbf{U}})$  es "estacionario" ( $\equiv \frac{\partial \mathbf{h}_{ij}}{\partial x^4} = \mathbf{0}$ ); en realidad una condición algo más débil, suficiente para lo que sigue y consecuencia a su vez de (\*), (\*\*) y la ecuación de Einstein (Charla 7)

• Dada una partícula material  $\mathbf{q}(\tau')$  en caída libre y "suficientemente lenta", se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 \mathbf{q}^\mu}{d\tau'^2} + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^\mu|_{\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}^j}{d\tau'} \frac{d\mathbf{q}^k}{d\tau'} \simeq \frac{d^2 \mathbf{q}^\mu}{d\tau_{\mathbf{q}}^2} + \Gamma_{44}^\mu|_{\mathbf{q}} c^2 = \\ &= \frac{d^2 \mathbf{q}^\mu}{d\tau_{\mathbf{q}}^2} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^3 \mathbf{g}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathbf{h}_{44}}{\partial x^\nu} |_{\mathbf{q}} c^2 \simeq \frac{d^2 \mathbf{q}^\mu}{d\tau_{\mathbf{q}}^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{h}_{44}}{\partial x^\mu} |_{\mathbf{q}} c^2, \end{aligned}$$

usando  $\mathbf{D}_{\dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  y la ecuación (22) (Charla 3) de las geodésicas en la primera igualdad, (31)  $\frac{d\tau_{\mathbf{q}}}{d\tau'} = (1 - \frac{|\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{q}, \kappa}|^2}{c^2})^{-1/2}$  y "suficientemente lenta" en la segunda, la expresión (40) de los coeficientes de Levi-Civita y (\*\*\*) en la tercera, y (\*) en la cuarta.

Pues bien, si se elige (la vel. de escape se definió en (7))

$$(\Gamma_{44}^\mu \simeq) \boxed{\frac{-1}{2} \frac{\partial \mathbf{h}_{44}}{\partial x^\mu} \simeq \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}} \text{, equiv. a } \boxed{\mathbf{h}_{44} \simeq \frac{-2\Phi}{c^2}} \text{ (=: } \frac{v_{\text{esc}}^2}{c^2} \text{)} \quad (45)$$

(la equivalencia es debida a que  $\mathbf{h}_{44}$  y  $\Phi$  deben anularse a grandes distancias de todas las masas), entonces se tiene:

$$\boxed{\text{(ec. (22)) } \frac{d^2 \mathbf{q}^i}{d\tau'^2} + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i|_{\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}^j}{d\tau'} \frac{d\mathbf{q}^k}{d\tau'} = \mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 \mathbf{q}^\mu}{d\tau_{\mathbf{q}}^2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} |_{\mathbf{q}}} \text{ (ec. (6))}$$

• Dada una familia a 1 parámetro de partículas materiales en caída libre próximas a  $\gamma$  ( $\rightsquigarrow$  campo  $\mathbf{W}^\perp \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{W}^\mu}{d\tau^2} &= (\mathbf{D}_\dot{\gamma} \mathbf{D}_\dot{\gamma} \mathbf{W}^\perp)^\mu = \sum_{\nu=1}^3 \mathbf{R}_{4\nu 4}^\mu |_\gamma \mathbf{W}^\nu c^2 = \\ &= - \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial \Gamma_{44}^\mu}{\partial x^\nu} |_\gamma \mathbf{W}^\nu c^2 \simeq - \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} |_\gamma \mathbf{W}^\nu, \end{aligned}$$

usando  $\mathbf{D}_\dot{\gamma}\mathbf{e}_\mu = \mathbf{0}$  en la primera igualdad, la ecuación de Jacobi (43) y  $\gamma^j(\tau) = c\delta_4^j \tau$  en la segunda, la expresión (41) de las componentes de la curvatura y  $\Gamma_{jk}^i|_\gamma = \mathbf{0}$  en la tercera, y (45) en la cuarta.

Conclusión: si se elige (45), entonces se tiene:

$$\begin{array}{l}
 \text{(ec. (43)) } \boxed{(\mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}^{\perp})^i = \sum_{j,k,l=1}^4 \mathbf{R}_{jkl}^i |_{\gamma} \frac{d\gamma^j}{d\tau} (\mathbf{W}^{\perp})^k \frac{d\gamma^l}{d\tau}} \quad \Downarrow \approx \\
 \approx \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \mathbf{W}^{\mu}}{d\tau^2} = - \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} |_{\gamma} \mathbf{W}^{\nu}} \quad \text{(ec. (12))}
 \end{array}$$

• Finalmente, promediamos para familias de partículas materiales en caída libre próximas a  $\gamma$ . Denotando por  $\zeta_{\tau_0}$  el elemento de área en la esfera  $\mathbf{S}^2(\mathbf{a}) \subset \dot{\gamma}(\tau_0)^{\perp}$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int \sum_{\mu=1}^3 \frac{d^2 \mathbf{W}^{\mu}}{d\tau^2} \mathbf{W}^{\mu} \zeta_{\tau_0} &\simeq \int \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{g}_{ij} (\mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}^{\perp})^i (\mathbf{W}^{\perp})^j \zeta_{\tau_0} = \frac{-4\pi a^4}{3} \mathbf{Ric}_{44} |_{\gamma(\tau_0)} \mathbf{c}^2 = \\
 &= \frac{-4\pi a^4}{3} \sum_{\mu=1}^3 \mathbf{R}_{44\mu}^{\mu} |_{\gamma(\tau_0)} \mathbf{c}^2 = \frac{-4\pi a^4}{3} \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial \Gamma_{44}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} |_{\gamma(\tau_0)} \mathbf{c}^2 \simeq \frac{-4\pi a^4}{3} \Delta \Phi |_{\gamma(\tau_0)} \mathbf{a} ,
 \end{aligned}$$

usando  $\mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{e}_{\mu} = \mathbf{0}$  y (\*) en la primera igualdad, la ecuación promedio de Jacobi (44) y  $\gamma^j(\tau) = \mathbf{c} \delta_4^j \tau$  en la segunda, (42)  $\mathbf{Ric}_{jk} = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{jki}^i$  en la tercera, la expresión (41) de las componentes de la curvatura y  $\mathbf{R}_{jk}^i |_{\gamma} = \mathbf{0}$  en la cuarta, y (45) en la quinta.

Conclusión: si se elige (45), entonces se tiene ( $\tau_0$  era arbitrario):

$$\begin{array}{l}
 \text{(ec. (44)) } \boxed{\int \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{g}_{ij} (\mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{D}_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}^{\perp})^i (\mathbf{W}^{\perp})^j \zeta = \frac{-4\pi a^4}{3} \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{Ric}_{ij} |_{\gamma} \frac{d\gamma^i}{d\tau} \frac{d\gamma^j}{d\tau}} \quad \Downarrow \approx \\
 \approx \Rightarrow \boxed{\int \sum_{\mu=1}^3 \frac{d^2 \mathbf{W}^{\mu}}{d\tau^2} \mathbf{W}^{\mu} \zeta = \frac{-4\pi a^4}{3} \Delta \Phi |_{\gamma}} \quad \text{(ec. (13))}
 \end{array}$$

Lo anterior indica los siguientes límites "clásicos" para los ingredientes del ET  $(\mathbf{M}, \mathbf{g}, \uparrow, \mathbf{D})$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \text{conexión } \mathbf{D} & \rightarrow \text{ gradiente del potencial } \Phi \\
 \text{curvatura } \mathbf{R} & \rightarrow \text{ hessiano de } \Phi \\
 \text{tensor de Ricci } \mathbf{Ric} & \rightarrow \text{ laplaciano de } \Phi
 \end{array} \right.$$

(en realidad,  $\mathbf{D}$  tiene por límite la "conexión gravitatoria" en el ETG, Charla 3)

## 7. TENSIÓN-ENERGÍA. DIVERGENCIAS

En un ETE  $(M, g, \uparrow, D)$  (Charla 6), cada partícula de masa  $m \geq 0$  se representa por una curva diferenciable  $q: I \rightarrow M$  con **energía-momento**  $P \sim \dot{q}$  (futuro) tal que  $g(P, P) = -m^2 c^2$  ( $m = 0$  si la partícula es luz)

En cada suceso  $p \in M$ , cada **observador instantáneo**  $e_4 \in T_p M$  ( $\equiv$  vector tangente temporal, futuro y unitario) "atribuye" (recordar (32), Charla 5) a cada partícula  $q$  de masa  $m$  que "encuentra":

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{energía } E/c := -g(P, e_4) > 0 \quad [ML^2 T^{-2}] \\ \text{momento } \tilde{P} := P - (E/c) e_4 \in e_4^\perp \quad [MLT^{-1}] \\ \text{velocidad } \tilde{v} := c^2 \tilde{P}/E \in e_4^\perp \quad [LT^{-1}] \end{array} \right\}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = (E/c) e_4 + \tilde{P} \\ E^2 = m^2 c^4 + c^2 |\tilde{P}|^2 \end{array} \right.$$

La FUENTE DE GRAVITACIÓN:

- En la mecánica galileana es la densidad de masa
- Pero la masa  $m$  no se conserva en las colisiones relativistas, y sí lo hace la energía  $E$
- Pero la energía  $E$  no es independiente de la base ortonormal tangente, y sí lo es la energía-momento  $P$  (que también se conserva en las colisiones relativistas)
- Se busca magnitud física "ligada al ETE"  $\rightsquigarrow$  densidades
- Pero la densidad de energía-momento no es independiente de la base ortonormal tangente, y sí lo es la TENSIÓN-ENERGÍA  $\rightsquigarrow$

Sean:  $(M, g)$  un ET con partículas,  $\{E_i\}_{i=1,2,3,4}$  una base ortogonal tangente (en cierto suceso) con  $E_4$  temporal futuro ( $\rightsquigarrow$  base ortonormal  $\{e_i\}_{i=1,2,3,4}$  con  $e_4$  observador instantáneo), y sean

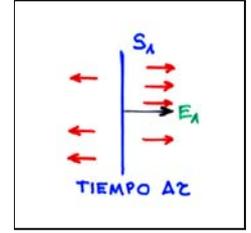
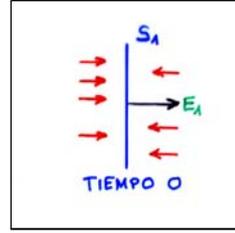
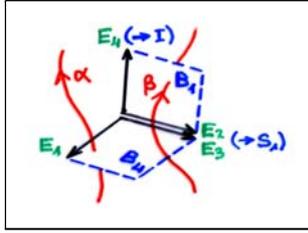
$$\left\{ \begin{array}{l} I \text{ segmento (1-dim.) generado por } E_4, \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow \text{ long}(I) = c \Delta\tau, \text{ con } \Delta\tau \text{ intervalo temporal} \\ S_\mu \text{ rectángulo (2-dim.) gen. por } \{E_1, \dots, \widehat{E}_\mu, \dots, E_3\} \ (\mu = 1, 2, 3), \rightsquigarrow \text{ area}(S_\mu) \\ B_i \text{ paralelepípedo (3-dim.) gen. por } \{E_1, \dots, \widehat{E}_i, \dots, E_4\} \ (i = 1, 2, 3, 4), \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow \text{ vol}(B_\mu) = c \Delta\tau \cdot \text{area}(S_\mu) \ (\mu = 1, 2, 3) \end{array} \right.$$

- Suponemos (para cada  $i$ )  $|E_i|$  arbitrariamente pequeño (tomaremos límites  $|E_i| \rightarrow 0$ ),  $\rightsquigarrow$  consideraremos  $I, S_\mu, B_i \subset M$

- Definimos (para cada  $i$  / notación:  $\epsilon_i \equiv g(e_i, e_i) = \pm 1$ )

$$P_{B_i}^\pm := \sum^\pm P_\gamma \quad (*) \quad \text{y} \quad P_{B_i} := P_{B_i}^+ - P_{B_i}^- \quad (**),$$

donde la suma  $\sum^\pm$  se extiende a todas las partículas  $\gamma$  que "tocan"  $B_i$  con  $g(P_\gamma, \epsilon_i e_i) \geq 0$  y donde  $P_\gamma$  es la energía-momento de  $\gamma$  en  $B_i$



(\*)  $\alpha$  contribuye a  $P_{B_4}^+$ ,  $\beta$  a  $P_{B_4}^-$

(\*\*)  $P_{B_1}^{1+} = 4$ ,  $P_{B_1}^{1-} = -3$  y  $P_{B_1}^1 = 7$

- Obsérvese que  $P_{B_\mu}$  es la energía-momento "transferida" del lado negativo de  $S_\mu$  al positivo durante el tiempo  $\Delta\tau$ , mientras que (al ser  $P_{B_4}^- = 0$ )  $P_{B_4}$  es la energía-momento "dentro" de  $B_4$

Sumando contribuciones, dividiendo por volúmenes y haciendo tender éstos a cero, se tienen **16** magnitudes  $[ML^{-1}T^{-2}]$  "medibles"

$$\epsilon_i \epsilon_j T_{ij} := c \cdot \lim_{\text{vol}(B_i) \rightarrow 0} \frac{g(P_{B_i}, \epsilon_j e_j)}{\text{vol}(B_i)} \quad (i,j=1,2,3,4), \quad (46)$$

concretamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\mu\nu} := c \cdot \lim_{\text{vol}(B_\mu) \rightarrow 0} \frac{g(P_{B_\mu}, e_\nu)}{\text{vol}(B_\mu)} = \lim_{\text{area}(S_\mu) \rightarrow 0} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{P_{B_\mu}^{\nu+} - P_{B_\mu}^{\nu-}}{\text{area}(S_\mu) \Delta\tau} = \\ \quad = \text{flujo de } \nu\text{-momento por u. área ortogonal a } e_\mu \text{ y u. tiempo} \\ T_{\mu 4} := -c \cdot \lim_{\text{vol}(B_\mu) \rightarrow 0} \frac{g(P_{B_\mu}, -e_4)}{\text{vol}(B_\mu)} = \frac{-1}{c} \cdot \lim_{\text{area}(S_\mu) \rightarrow 0} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{E_{B_\mu}^+ - E_{B_\mu}^-}{\text{area}(S_\mu) \Delta\tau} = \\ \quad = \frac{-1}{c} \cdot \text{flujo de energía por u. área ortogonal a } e_\mu \text{ y u. tiempo} \\ T_{4\nu} := -c \cdot \lim_{\text{vol}(B_4) \rightarrow 0} \frac{g(P_{B_4}, e_\nu)}{\text{vol}(B_4)} = -c \cdot \lim_{\text{vol}(B_4) \rightarrow 0} \frac{P_{B_4}^{\nu+}}{\text{vol}(B_4)} = \\ \quad = -c \cdot \text{densidad de } \nu\text{-momento} \\ T_{44} := c \cdot \lim_{\text{vol}(B_4) \rightarrow 0} \frac{g(P_{B_4}, -e_4)}{\text{vol}(B_4)} = \lim_{\text{vol}(B_4) \rightarrow 0} \frac{E_{B_4}^+}{\text{vol}(B_4)} = \text{densidad de energía} \end{array} \right.$$

Con la expresión galileana de "momento" ( $\tilde{\mathbf{P}} = m\tilde{\mathbf{v}}$ ), las **9** magnitudes  $\mathbf{T}_{\mu\nu}$  eran (algo bien conocido!) las componentes (**presiones** si  $\mu = \nu$ , **cizallas** si  $\mu \neq \nu$ ) del "tensor de tensiones" (elasticidad)

Con las expresiones (35) de "energía" y "momento" para partículas materiales (Charla 5):

$$\begin{cases} \mathbf{E} = mc^2 \left(1 - \frac{|\tilde{\mathbf{v}}|^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ \tilde{\mathbf{P}} = m\tilde{\mathbf{v}} \left(1 - \frac{|\tilde{\mathbf{v}}|^2}{c^2}\right)^{-1/2} \end{cases}$$

se comprueba inmediatamente que:

• dada otra base ortonormal  $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}_{i=1,2,3,4}$  (con  $\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^4 \mathbf{A}_{ij}\bar{\mathbf{e}}_i$ ), las magnitudes  $\mathbf{T}_{ij}$  están relacionadas con las  $\bar{\mathbf{T}}_{ij}$  por la expresión:

$$\mathbf{T}_{ij} = \sum_{k,l=1}^4 \mathbf{A}_{ki}\bar{\mathbf{T}}_{kl}\mathbf{A}_{lj} ,$$

con lo que las  $\mathbf{T}_{ij}$  resultan ser las componentes en  $\{\mathbf{e}_i\}$  de cierto

$$\mathbf{T} \in \mathfrak{T}_2^0(\mathbf{M}) \quad (\text{tensión-energía}) ,$$

lo que debe ser visto como una "ley básica de la naturaleza"

•  $\mathbf{T}$  es simétrico ( $\rightsquigarrow$  sólo **10** componentes independientes), con lo que que, en cada suceso  $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$ , el tensor  $\mathbf{T}(\mathbf{p}) \in (\mathbf{T}_p\mathbf{M})_2^0$  puede reconstruirse completamente a partir de las densidades de energía medidas por **4** observadores instantáneos (en  $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$ ) "que formen base" ( $\equiv$  todos en movimiento relativo)

La "ley de conservación" (experimental) de momento y energía en las colisiones (Charla 5) se modela, en el ETE de Minkowski (en el que la existencia de campos de observadores **D**-paralelos permite "exportar" dicha ley a regiones finitas) por (Obs. 7.1)

$$\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0} \tag{47}$$

A su vez, el que (47) no involucre ingredientes típicos del ETE de Minkowski sugiere fuertemente (!) su validez en cualquier modelo de ETE, lo que a su vez:

- (i) restringe la manera en la que la tensión-energía "genera" curvatura (Ecuación de Einstein), y
- (ii) contiene ecuaciones de movimiento para la materia

La expresión concreta de  $\mathbf{T}$  depende del "modelo de materia" que se postule sobre el ETE. Dos ejemplos:

- el "vacío" (en cuyo caso es  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ ), como ocurre en el ET de Schwarzschild usado para describir el sistema solar
- un "fluido perfecto", como ocurre en los ET de Robertson-Walker usados en cosmología

Observación 7.1 DIVERGENCIAS

Dada var. semiriemanniana  $(M, g)$  ( $\rightsquigarrow$  elem. de volumen local  $\Omega$ ), la **divergencia** de  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es la tasa de expansión del volumen comóvil por u. de volumen:

$$\text{div}X(c(t)) := \lim_{\mathcal{V}_{\mathcal{D}_t} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{V}_{\mathcal{D}_t}} \frac{d\mathcal{V}_{\mathcal{D}_t}}{dt}(t), \quad (48)$$

donde  $c(t)$  es curva int. de  $X$  (Obs. 1.1) y  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}_t} := \int_{\mathcal{D}_t} \Omega$  es el "volumen" de un "dominio regular"  $\mathcal{D}_t$  ( $\equiv$  unión de abierto "orientable" con su borde suave  $\partial\mathcal{D}_t$ ) compacto comóvil en torno a  $c(t)$

• De la expresión  $(d(i_X \Omega) =) L_X \Omega = (\text{div} X) \Omega$  (donde  $i_X$  y  $L_X$  denotan el "producto interior" y la "derivada-Lie"), equivalente a (48), se sigue (via Stokes) el **teor. de la divergencia** (o de Gauss)

$$\int_{\mathcal{D}} (\text{div}X) \Omega = \int_{\partial\mathcal{D}} d(i_X \Omega) \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial\mathcal{D}} i_X \Omega = \int_{\partial\mathcal{D}} g(X, \nu) \partial\Omega, \quad (49)$$

donde  $\mathcal{D}$  es cualquier dominio regular compacto fijo y  $\nu$  es la normal unitaria exterior a su borde  $\partial\mathcal{D}$ . Ello conduce (teorema del valor medio) a la interpretación de  $\text{div}X(p)$  como la tasa de flujo al exterior de un volumen en torno a p por u. de volumen:

$$\text{div}X(p) = \lim_{\mathcal{V}_{\mathcal{D}} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{V}_{\mathcal{D}}} \int_{\partial\mathcal{D}} g(X, \nu) \partial\Omega, \quad (50)$$

De ahí el decir que p es fuente/sumidero cuando  $\text{div}X(p) \gtrless 0$

• De (48) también se sigue (cambio de variables) el **teorema del transporte** (para cualquier función diferenciable  $f$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} f \Omega &\stackrel{\text{c.v.}}{=} \int_{\mathcal{D}_0} \frac{d}{dt} \Phi_t^*(f \Omega) \stackrel{!}{=} \int_{\mathcal{D}_0} \Phi_t^*(L_X(f \Omega)) \stackrel{\text{c.v.}}{=} \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} L_X(f \Omega) = \int_{\mathcal{D}_t} (Xf \Omega + f L_X \Omega) = \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} (Xf + f \text{div} X) \Omega = \int_{\mathcal{D}_t} \text{div}(fX) \Omega \end{aligned}, \quad (51)$$

donde  $\Phi$  es el "flujo" de  $X$  (colección de sus curvas integrales).

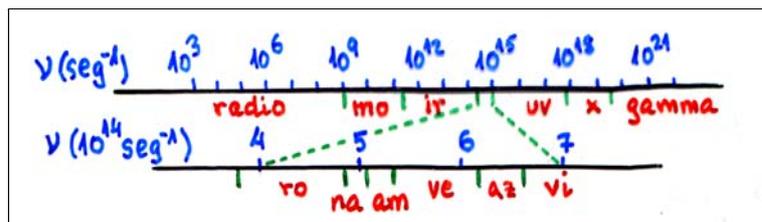
De ahí el decir que  $\int_{\mathcal{D}_t} f \Omega$  se conserva cuando  $\text{div}(fX) = 0$  (en particular,  $\mathcal{V}_{\mathcal{D}_t}$  se conserva cuando  $\text{div}X = 0$ , lo que ya sabíamos)

Existe una forma alternativa (que no vamos a detallar) de definir **divX** en términos de la conexión de Levi-Civita  $D$  de  $(M, g)$

Ello permite, vía el isomorfismo  $\downarrow: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M), X \mapsto g(X, \cdot)$  (Obs. 5.1), definir "divergencias" (una por cada índice) de campos de tensores arbitrarios. En particular, para campos  $\tau \in \mathfrak{T}_2^0(M)$  simétricos hay una única divergencia  $\text{div}\tau \in C^\infty(M)$  ■

## 8. DATOS COSMOLÓGICOS

Muchos datos vía radiación electromagnética (1920's → 1960's → 1990's). Los más importantes y precisos: "ley empírica de Hubble" y medidas de la "radiación de fondo". Los más imprecisos: modelos de materia para la tensión-energía a gran escala.



Advertencia: No se pueden discutir datos experimentales sin usar tentativamente algún modelo teórico / No se puede escoger un modelo teórico sin referencia a datos experimentales.

El **cosmos** ( $\equiv$  ET a gran escala) "observable desde la Tierra" ( $\equiv$  hasta el "horizonte de partículas" si no hay "restricciones"):

- Tiene radio  $\simeq 10^{10}$  años luz y contiene  $\simeq 10^{11}$  galaxias
- A escalas de  $\gtrsim 10^8$  años luz, la distribución de galaxias es aproximadamente isótropa ( $\rightsquigarrow$  promedios), con velocidades individuales (respecto de estos promedios) del orden  $\lesssim 10^{-2} c$  (la de la Tierra respecto del centro de nuestra galaxia es del orden  $< 10^{-3} c$ ), con **constante de la luz**  $c \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{ cm seg}^{-1}$
- Galaxia típica: masa  $\simeq 10^{45} \text{ gr}$  ( $\simeq 10^{-1}$  años luz en "unidades geométricas"), radio  $\simeq 10^4$  años luz y contiene  $\simeq 10^9$  estrellas.
- Materia visible: hidrógeno ( $\simeq 90\%$  átomos y  $\simeq 70\%$  masa), helio ( $\simeq 10\%$  y  $\simeq 30\%$ ) y rastros de mismos elem. que en Tierra

**LEY EMPÍRICA DE HUBBLE:** Para cada galaxia observada desde la Tierra:

- En base a: (i) la estructura del espectro de la radiación recibida, y (ii) la hipótesis de que la correspondencia entre dicho espectro y los procesos que lo generan (transiciones de electrones atómicos entre distintos niveles de energía) es la misma allí/entonces que aquí/ahora, se estima cuáles son dichos procesos
- Se observa un desplazamiento relativo uniforme (usualmente hacia frecuencias menores) de todo el espectro, lo que permite asignar a la galaxia un **desplazamiento de frecuencia**

$$z := \frac{\nu_{em}}{\nu_{rec}} - 1$$

(usualmente "al rojo",  $z > 0$ ), donde  $\nu_{em}$  es cualquier **frecuencia de emisión** y  $\nu_{rec}$  la correspondiente **frecuencia de recepción**.

Advertencia: la interpretación de este  $z$  como un "efecto Doppler" permite asignar a la galaxia una **velocidad-Doppler**

$$v_D := \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} c = \left( z - \frac{1}{2}z^2 + \mathcal{O}(z^4) \right) c, \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{\frac{1 + v_D/c}{1 - v_D/c}} - 1$$

(usualmente  $v_D > 0$ , "recesión cosmológica", Slipher 1920's), que corresponde a un movimiento "radial" del emisor respecto del receptor (ambos "libres") en el ET de Minkowski. Esta interpretación (según la cual  $\lim_{v_D \rightarrow +c} z = \infty$ ) es fuente de enormes confusiones.

• En base a: (i) la **luminosidad absoluta**  $L$  (potencia emitida, supuesta conocida) y (ii) la **luminosidad aparente**  $L_0$  (potencia recibida por unidad de área del receptor),

se atribuye a la galaxia una **distancia-luminosidad**

$$d_L := \sqrt{\frac{L}{4\pi L_0}}, \quad (52)$$

que corresponde a la distancia del emisor (en la emisión) respecto del receptor (ambos "libres") en el ET de Minkowski.

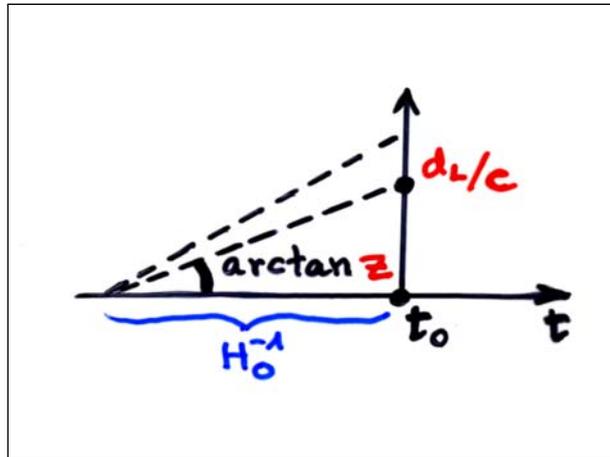
Advertencia: sólo desde mitad 1990's se dispone de indicadores de distancias "fiables": las Supernovas tipo Ia (se cree conocer su  $L$  con un error  $\lesssim 10\%$ )

• La **ley empírica de Hubble** (1920's) establece que (ahora)

$$d_L \simeq cH_0^{-1}z \quad (\text{para } z \lesssim 0'1) \quad , \quad (53)$$

con **cte. de Hubble** ( $1 \text{ Mpc} \simeq 3'1 \cdot 10^{19} \text{ km} \simeq 3'26 \cdot 10^6 \text{ años luz}$ )

$$H_0 \simeq 71 \text{ Km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \text{ (WMAP03)}, \quad \Rightarrow \quad H_0^{-1} \simeq 13'8 \cdot 10^9 \text{ años} \quad (54)$$



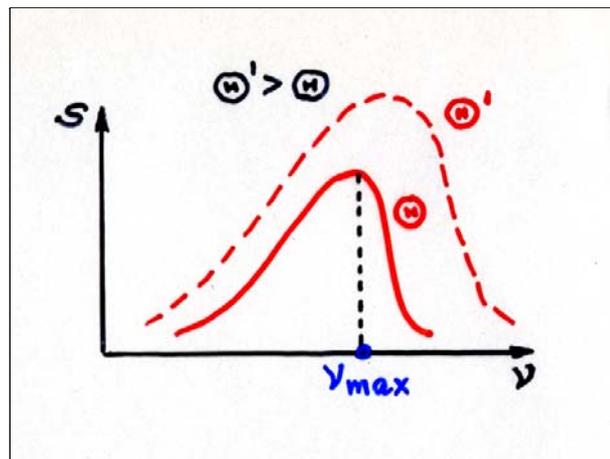
## RADIACIÓN DE FONDO (Penzias-Wilson, 1965)

- No proviene de fuentes identificables
- Su **espectro de energía  $\mathcal{S}$**  (energía por u. de volumen, por u. de ángulo sólido y por u. de intervalo de frecuencia) es, descontado el movimiento de la Tierra respecto del promedio de galaxias, muy isótropo.
- Además  $\mathcal{S}$  depende sólo de la frecuencia  $\nu$  y de la temperatura  $\Theta$  a través de la **ley de Planck** (típica del equilibrio térmico materia-radiación):

$$\mathcal{S}(\nu, \Theta) = \frac{2h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/k_B\Theta} - 1} \quad (\Rightarrow \nu_{\max} \simeq 5'0 \text{ k}_B\Theta/h, \text{ ley de Wien} ) ,$$

con **constante de Planck**  $h \simeq 6'6 \cdot 10^{-27} \text{ erg seg}$  y **constante de Boltzmann**  $k_B \simeq 1'4 \cdot 10^{-16} \text{ erg kelvin}^{-1}$

- Posee  $\nu_{\max} \simeq 2'9 \cdot 10^{11} \text{ seg}^{-1}$  (microondas), correspondiente (ley de Wien) a una temperatura  $\Theta \simeq 2'7 \text{ kelvin}$  (COBE 1992)



- En base a: (i) la hipótesis de que se trata de radiación remanente de una época más caliente de "desacoplo" (fin del equilibrio) materia-radiación con temperatura (la de formación estable de átomos de hidrógeno neutros)  $\Theta \simeq 3 \cdot 10^3 \text{ kelvin}$  y (ii) la ley de Wien, se atribuye a la radiación de fondo un desplazamiento de frecuencia (WMAP):  $z \simeq 1090$ .

- Pero se han detectado (COBE) anisotropías, con máxima desviación respecto a la media de  $\simeq 10^{-5} \text{ kelvin}$  y tamaño angular de  $\simeq 2 \text{ grados}$  (COBE, WMAP) entre dos consecutivos de estos máximos. El estudio de estas anisotropías (importantes para explicar la posterior formación de galaxias) está dando (en el marco de los modelos de Friedmann) información muy valiosa.

**DENSIDAD DE ENERGÍA Y PRESIÓN:** en la hipótesis de que la tensión-energía a gran escala corresponde esencialmente a la de un "fluido perfecto de galaxias" con propiedades de "isotropía desde la Tierra" y "homogeneidad" ( $\equiv$  todas las galaxias típicas tienen la misma "historia"), se extrapolan al cosmos los datos de nuestra "celdillas cósmica" (de tamaño  $\simeq 10^8$  años luz):

• En cuanto a la densidad de energía (comóvil, ahora)  $\rho_0$ , definiendo la **densidad crítica** (por el momento, "crítica" es sólo un nombre)

$$\rho_0^c := 3c^2 H_0^2 / 8\pi G \simeq 8'4 \cdot 10^{-9} \text{ erg cm}^{-3}$$

(correspondiente, en la hipótesis de materia "lenta", a una "densidad crítica de masa"  $3H_0^2/8\pi G \simeq 0'9 \cdot 10^{-29} \text{ gr cm}^{-3}$ ), y denotando  $\Omega_0 \equiv \rho_0/\rho_0^c$ , se tiene:

$$\Omega_0 \equiv \underbrace{\Omega_0^{\text{rad}}}_{\simeq 10^{-5}} + \underbrace{\Omega_0^{\text{mat. ord.}}}_{\simeq 6 \cdot 10^{-2}} + \underbrace{\Omega_0^{\text{mat. osc.}}}_{\simeq 2 \cdot 10^{-1} \leftrightarrow 3 \cdot 10^{-1}} < 0'4 \quad (55)$$

(en particular  $\rho_0^{\text{rad}} \simeq 10^{-3} \rho_0^{\text{mat. ord.}} \simeq 10^{-4} \rho_0^{\text{mat}}$ ), donde:

- (i)  $\Omega_0^{\text{rad}}$  se debe esencialmente a la radiación de fondo
- (ii)  $\Omega_0^{\text{mat. ord.}}$  se debe a neutrinos ( $\Omega_0^{\text{neutrino}} \lesssim 1'5 \cdot 10^{-2}$ , WMAP) más materia bariónica ( $\Omega_0^{\text{mat. bariónica}} \simeq 4'4 \cdot 10^{-2}$ , WMAP). Esta última se determina en base a la abundancia observada de deuterio y a los cálculos de la nucleosíntesis en la gran explosión, e incluye materia visible ( $\Omega_0^{\text{visible}} \lesssim 1'0 \cdot 10^{-2}$ , WMAP) y materia no visible (formada quizás por enanas marrones)
- (iii)  $\Omega_0^{\text{mat. osc.}}$  (de naturaleza desconocida) se estima en base a las velocidades orbitales de estrellas en las galaxias y de éstas en los cúmulos (que precisarían de una fuente adicional de densidad de energía atractora para ser explicadas).

Por otra parte, las observaciones de la anisotropía de la radiación de fondo (COBE, WMAP) indican, en el marco de los "modelos de Friedmann" (Charla 10), que

$$\Omega_0^{\text{total?}} = 1'02 (\pm 0'02) \rightsquigarrow$$

¿dónde está "la mayor parte" de la densidad de energía?.

• En cuanto a la presión (comóvil, ahora)  $p_0$ , se tiene:

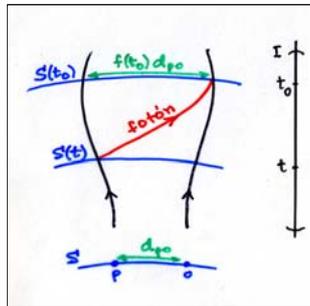
$$p_0/\rho_0^c \equiv \underbrace{p_0^{\text{rad}}/\rho_0^c}_{\simeq 3 \cdot 10^{-6}} + \underbrace{p_0^{\text{mat. ord.}}/\rho_0^c}_{\simeq 6 \cdot 10^{-8}} + \underbrace{p_0^{\text{mat. osc.}}/\rho_0^c}_{???} \quad (56)$$

(en particular  $p_0^{\text{mat. ord.}} \simeq 10^{-2} p_0^{\text{rad}} \simeq 10^{-7} p_0^{\text{mat}}$ , usando (55) en la segunda), pero nada se sabe de  $p_0^{\text{mat. osc.}}$ .

# 9. LEY DE HUBBLE EN ESPACIO-TIEMPOS DE ROBERTSON-WALKER

Los ETs de Einstein utilizados en cosmología son los **ETs de Robertson-Walker** (ETsRW):

$$I \times_f S \equiv (M = I \times S, g = -c^2 dt^2 + f^2(t)g_S) , \text{ siendo}$$



(i)  $(I, -c^2 dt^2)$ , intervalo real riemanniano "definido negativo" ( $t_0 \in I$  "ahora")

(ii)  $(S, g_S)$ , variedad 3-dim. riemann. con **curvatura cte.  $k$**  ( $= -1, 0$  ó  $1$ ) ( $o \in S$  "aquí")

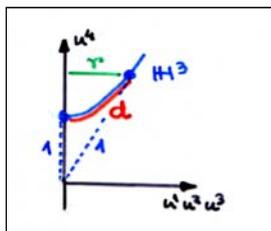
(iii)  $f (> 0) \in C^\infty(I)$  [L] (**factor de escala**) "modula" a  $g_S$  (notación:  $f_0 \equiv f(t_0), f'_0 \equiv f'(t_0), \dots$ )

- Un ETE  $(M, g, \uparrow, D)$  (Ch. 6) en el que  $\exists t \in C^\infty(M)$  tal que:
  - es creciente en cualquier dirección futura (equivalentemente: el campo  $-\text{grad } t$  es temporal futuro)
  - proporciona el "tiempo propio" de las curvas integrales de  $-\text{grad } t$  (equivalentemente:  $g(\text{grad } t, \text{grad } t) = -c^2$ ) y toma los mismos valores sobre todas ellas
  - sus hipersuperficies de nivel son "localmente isótropas" es esencialmente (!) un ETRW.

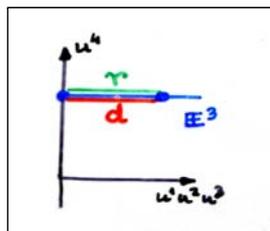
• Existe una única variedad riemanniana de curvatura cte.  $k$  ( $= -1, 0$  ó  $1$ ) prototipo ("completa", "conexa" y "simpl. conexa"):

$$\begin{cases} \mathbb{H}^3 := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{\mu=1}^3 (p^\mu)^2 - (p^4)^2 = -1, p^4 > 0\} & \text{para } k = -1 \\ \mathbb{E}^3 := (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle) \text{ ("olvidados" origen y base estándar)} & \text{para } k = 0 \\ \mathbb{S}^3 := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{\mu=1}^3 (p^\mu)^2 + (p^4)^2 = 1\} & \text{para } k = 1 \end{cases}$$

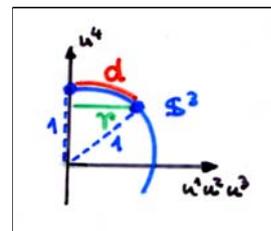
Dibujando cada prototipo  $S$  en el semiplano  $(r := (\sum_{\mu=1}^3 (u^\mu)^2)^{1/2}, u^4)$  desde cualquier  $q \in S$  como "vértice", cada punto  $p \in S$  representa una 2-esfera euclídea de radio  $r(p) = \eta(d_{pq})$ , por tanto de área  $4\pi\eta^2(d_{pq})$ , con la función  $\eta$  dada en la figura



$$\eta(d) := \sinh d$$



$$\eta(d) := d$$



$$\eta(d) := \sin d$$

En un ETRW  $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$  (ingredientes básicos:  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{f}$ ):

- El que  $\mathbf{f}(t)$  tenga "dimensión"  $[\mathbf{L}]$  (lo que implica, al ser  $[\mathbf{g}] = [\mathbf{L}^2]$ , que  $\mathbf{g}_s$  es "adimensional") mientras que  $\mathbf{t}$  tiene "dimensión"  $[\mathbf{T}]$  se "gestiona" sobreentendiendo  $\mathbf{f}(t) \equiv \lambda \phi(\nu t)$  (para ciertas constantes  $\lambda(> 0)$   $[\mathbf{L}]$ ,  $\nu(> 0)$   $[\mathbf{T}^{-1}]$  y cierta función  $\phi(> 0) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{I})$ )

- Las galaxias "típicas" se representan por curvas integrales de  $\partial/\partial t = -\text{grad } t$  (que es (!) "geodésico", esto es,  $\mathbf{D}_{\partial/\partial t} \partial/\partial t = \mathbf{0}$ ), correspondientes a puntos fijos  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{S}$  y con **distancia propia**

$$d_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\mathbf{S}(t)} = \mathbf{f}(t) d_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \quad (57)$$

- Cada hipersuperficie  $\mathbf{S}(t) \equiv \{t\} \times \mathbf{S}$  resulta ser (!) "homotética" a  $(\mathbf{S}, \mathbf{g}_s)$  (con factor  $1/\mathbf{f}(t)$ ), por tanto de curvatura constante  $\mathbf{k}/\mathbf{f}^2(t)$ , por tanto "loc. homogénea" ( $\rightsquigarrow$  "principio cosmológico: todas las galaxias típicas tienen la misma historia") y "loc. isótropa"

#### LEY DE HUBBLE EN LOS ETRW:

Cualquier ET de Robertson-Walker  $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$  incorpora y "refina" la ley empírica de Hubble (53)

$$d_L \simeq c H_0^{-1} z \quad (\text{para } z \lesssim 0'1)$$

(con  $H_0 > 0$  la constante de Hubble, ver (54)). Para ello, basta

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{definir la función de Hubble } \boxed{\mathbf{H} := \mathbf{f}'/\mathbf{f}} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{I}) \quad [\mathbf{T}^{-1}] \\ \text{identificar (no es una notación!) } \boxed{\mathbf{H}(t_0) \equiv H_0} \end{array} \right. \quad (58)$$

Veámoslo en detalle. Sean  $\mathbf{p}$  (emisor, "allí") y  $\mathbf{o}$  (receptor, "aquí") dos galaxias típicas que intercambian fotones, con emisión en torno a  $\mathbf{t}$  ("entonces") y recepción en torno a  $\mathbf{t}_0$  ("ahora"). Se tiene:

- El DESPLAZAMIENTO DE FRECUENCIA viene dado (!) por la "relación de tamaños" del cosmos entre emisión y recepción (no es un efecto Doppler!):

$$1+z := \frac{\nu_{\text{em}}}{\nu_{\text{rec}}} \stackrel{!}{=} \frac{\mathbf{f}_0}{\mathbf{f}(t)} \quad , \quad \Rightarrow \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{-\mathbf{f}_0 \mathbf{H}(t)}{\mathbf{f}(t)} \quad , \quad (59)$$

usando la definición (58) en la implicación.

- La DISTANCIA EN  $\mathbf{S}$  (adimensional) entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{o}$  verifica (!):

$$\boxed{d_{\mathbf{p}\mathbf{o}} \stackrel{!}{=} c \int_t^{t_0} \frac{dt}{\mathbf{f}(t)} = c \int_t^{t_0} \frac{-dz(t)}{\mathbf{f}_0 \mathbf{H}(t)} = c \int_0^z \frac{dz}{\mathbf{f}_0 \mathbf{H}(t(z))}} \quad (60)$$

(para  $\mathbf{k} = 1$ , siempre que sea  $c \int_t^{t_0} \frac{dt}{\mathbf{f}(t)} \leq \pi$ ), usando (59) en la 2ª igualdad, y la hipótesis (?) de que  $\mathbf{f}$  es estrictamente creciente entre  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t}_0$  (lo es en torno a  $\mathbf{t}_0$  por la identif. (58)) en la tercera.

- La DISTANCIA-LUMINOSIDAD se definió por (52)

$$d_L := \sqrt{\frac{L}{4\pi L_0}} \quad , \quad \text{con}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L := dE^{\text{em}}/dt |_{\mathbf{t}} \text{ luminosidad absoluta} \\ \quad \text{(potencia emitida, supuesta conocida)} \\ L_0 := \frac{1}{A_0} dE^{\text{rec}}/dt |_{\mathbf{t}_0} \text{ luminosidad aparente} \\ \quad \text{(potencia recibida por unidad de área } A_0 \text{ del receptor)} \end{array} \right.$$

Pero la potencia recibida "corrige" a la emitida por tres factores:

(i) un  $(1+z)^{-1}$ , que (para  $z > 0$ ) corresponde por (59)  $\frac{f_0}{f} = 1+z$  a la disminución de energía (de los fotones) debida a la expansión

(ii) otro  $(1+z)^{-1}$ , que corresponde (!) al aumento del tiempo de recepción (de los fotones) debido a la expansión (identificado experimentalmente en las "curvas de luz" de las supernovas!)

(iii) el cociente entre el área  $A_0$  del receptor y el área  $4\pi f_0^2 \eta^2(d_{po})$  de la 2-esfera en  $S(\mathbf{t}_0)$  de radio  $f_0 d_{po}$  (en la que "se distribuye uniformemente" la energía emitida)

Así se tiene:

$$L_0 = \frac{dE^{\text{rec}}/dt |_{\mathbf{t}_0}}{A_0} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{dE^{\text{em}}/dt |_{\mathbf{t}}}{4\pi f_0^2 \eta^2(d_{po})} = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi f_0^2 \eta^2(d_{po})} \quad , \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d_L = (1+z) f_0 \eta(d_{po})} \quad , \quad (61)$$

con lo que  $d_L$  "distorsiona" la distancia propia actual  $f_0 d_{po}$  entre las galaxias  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{o}$  en la medida en que es  $z \neq 0$  ó  $k \neq 0$

La ley de Hubble en un ETRW es (por definición) la dependencia  $d_L(z)$  resultante de sustituir (60)  $d_{po} = c \int_0^z \frac{dz}{f_0 H(t(z))}$  en (61):

$$\boxed{d_L = (1+z) f_0 \eta\left(c \int_0^z \frac{dz}{f_0 H(t(z))}\right)} \quad (62)$$

(para  $k = 1$ , siempre que sea  $c \int_0^z \frac{dz}{f_0 H(t(z))} \leq \pi$ ), usando la hipótesis (?) de que  $f$  es estrictamente creciente entre  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t}_0$

Pues bien, resulta que:

(i) el primer término del desarrollo de Taylor de la ley de Hubble (62) en torno a  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  es común para todos los modelos y reproduce la ley empírica de Hubble (53)  $\mathbf{d}_L \simeq c\mathbf{H}_0^{-1} \mathbf{z}$

(ii) los siguientes términos del desarrollo dependen del modelo (a través de las derivadas del factor de escala  $\mathbf{f}$ ) y "refinan" (53)

En efecto (no vamos a desarrollar directamente (62)):

• Desarrollando en (61)  $\mathbf{d}_L = (1 + \mathbf{z}) \mathbf{f}_0 \eta(\mathbf{d}_{po})$  la función  $\eta(\mathbf{d}_{po})$  en torno a  $\mathbf{d}_{po} = \mathbf{0}$ , se obtiene:

$$\mathbf{d}_L = (1 + \mathbf{z}) \mathbf{f}_0 [\mathbf{d}_{po} + \mathcal{O}(\mathbf{d}_{po}^3)]$$

• Desarrollando en (60)  $\mathbf{d}_{po} = c \int_t^{t_0} \frac{dt}{f(t)} \equiv c\mathbf{J}_t$  la integral  $\mathbf{J}_{t(f)} = \int_f^{f_0} \frac{df}{ff'}$  (como función de  $\mathbf{f}$ , suponiendo de nuevo que  $\mathbf{f}$  es estrictamente creciente entre  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t}_0$ ) en torno a  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0$ , y teniendo en cuenta que

$$\frac{d\mathbf{J}_t}{df} = \frac{-1}{ff'} , \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{J}_t}{df^2} = \frac{d(ff')/df}{f^2f'^2} = \frac{1}{f^2f'} \left(1 + \frac{ff''}{f'^2}\right) , \text{ etc.}$$

se obtiene ( $\mathbf{J}_{t(f)} |_{f_0} = \mathbf{0}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{po} &= c \left[ \frac{d\mathbf{J}_{t(f)}}{df} \Big|_{f_0} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{J}_{t(f)}}{df^2} \Big|_{f_0} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)^2 + \mathcal{O}((\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)^3) \right] = \\ &= \frac{c}{f'_0} \left[ \left(1 - \frac{\mathbf{f}}{f_0}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_0 f''_0}{f'^2_0}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{f}}{f_0}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mathbf{f}}{f_0}\right)^3\right) \right] = \\ &= \frac{c}{f'_0} \left[ \left(\frac{\mathbf{z}}{1+\mathbf{z}}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_0 f''_0}{f'^2_0}\right) \left(\frac{\mathbf{z}}{1+\mathbf{z}}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mathbf{z}}{1+\mathbf{z}}\right)^3\right) \right] , \end{aligned}$$

usando (59)  $\frac{f_0}{f} = 1 + \mathbf{z}$  en la última igualdad

• Y sustituyendo esta última expresión en la anterior (y usando la identificación (58)  $f'_0/f_0 \equiv \mathbf{H}_0$ ) se concluye:

$$\boxed{\mathbf{d}_L = c\mathbf{H}_0^{-1} \left[ \mathbf{z} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_0 f''_0}{f'^2_0}\right) \mathbf{z}^2 + \mathcal{O}(\mathbf{z}^3) \right]} , \quad (63)$$

que efectivamente incorpora y "refina" (53)

Siempre se ha dado por sentado que el llamado **parámetro de deceleración** (adimensional!)  $\mathbf{q} \equiv -f_0 f''_0/f'^2_0$  sería positivo (gravedad "atractora"). Sin embargo, recientes observaciones (finales de 1990's, Charla 10) indican (sin apenas lugar a dudas) que actualmente LA EXPANSIÓN SE ACELERA (ver Charla 10):

$$-\mathbf{q} \equiv f_0 f''_0/f'^2_0 \simeq 0'60 (> 0)$$

## 10. LEY DE HUBBLE EN MODELOS DE FRIEDMANN. MODELO $\Lambda$ CDM

Sea  $\mathbf{I} \times_f \mathbf{S}$  un ERTW que además verifica (F1), (F2) y (F3)

• Por (F2), el ETRW incorpora la ley empírica de Hubble (53), vía (58)  $\mathbf{H} := f'/f$  y  $\mathbf{H}(t_0) \equiv H_0 > 0$ , en la **ley de Hubble** (62)

$$\mathbf{d}_L = (1+z) f_0 \eta \left( c \int_0^z \frac{dz}{f_0 \mathbf{H}(t(z))} \right)$$

(para  $k = 1$ , siempre que sea  $c \int_0^z \frac{dz}{f_0 \mathbf{H}(t(z))} \leq \pi$ ), usando la hipótesis de que  $f(t)$  es estrictamente creciente entre  $t$  y  $t_0$ . Aquí  $\eta(\psi) := \sinh \psi$ ,  $\psi$  ó  $\sin \psi$ , según sea  $k = -1, 0$  ó  $1$

• Por (F1), la densidad  $\rho$  cumple  $\rho + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} = \frac{3c^2}{8\pi G} \left( \frac{f'^2}{f^2} + \frac{c^2 k}{f^2} \right)$  (\*). Ello da lugar, por (F2) y usando la definición  $\rho_0^c := \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}$  y las notaciones  $\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_0^c}$ ,  $\Omega_{\Lambda 0} \equiv \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G \rho_0^c} = \frac{c^2 \Lambda}{3H_0^2}$ , a la relación

$$\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} = 1 + c^2 k / f_0^2,$$

que permite expresar  $f_0$  en (62) (si  $k = -1$  ó  $1$ , únicos casos en que interesa hacerlo) en función de "observables" como sigue:

$$f_0 \equiv H_0^{-1} f'_0 = c H_0^{-1} |1 - (\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0})|^{-1/2} \quad (64)$$

• Por (F3), la densidad de energía  $\rho$  satisface (!)  $\rho f^3 = \rho_0 f_0^3$  (sin incluir radiación; si se incluyera, habría que usar  $\rho^{\text{rad}} f^4 = \rho_0^{\text{rad}} f_0^4$  y  $\rho^{\text{mat}} f^3 = \rho_0^{\text{mat}} f_0^3$  por separado). Ello permite, por (F1) y (F2), expresar  $\mathbf{H}(t(z))$  en (62) en función de "observables" como sigue:

$$\begin{aligned} \left( \frac{f'}{f_0} \right)^2 &= \frac{-c^2 k}{f_0^2} + \frac{8\pi G}{3c^2} \left( \rho + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \right) \left( \frac{f}{f_0} \right)^2 = \\ &= \left( \left( \frac{f'_0}{f_0} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3c^2} \left( \rho_0 + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \right) \right) + \frac{8\pi G}{3c^2} \left( \rho + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \right) \left( \frac{f}{f_0} \right)^2 = \\ &= \left( \frac{f'_0}{f_0} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3c^2} \left( \rho_0 + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \right) + \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 \frac{f_0}{f} + \frac{c^2 \Lambda}{3} \left( \frac{f}{f_0} \right)^2 = \\ &= H_0^2 \left( 1 - (\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0}) + \Omega_0 \frac{f_0}{f} + \Omega_{\Lambda 0} \left( \frac{f}{f_0} \right)^2 \right), \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{H}(t) &\equiv \frac{f_0 f'(t)}{f(t) f_0} = \frac{f_0}{f(t)} H_0 \left( 1 + \Omega_0 \left( \frac{f_0}{f(t)} - 1 \right) + \Omega_{\Lambda 0} \left( \left( \frac{f(t)}{f_0} \right)^2 - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{H}(t(z)) &= H_0 (1+z) \left( 1 + \Omega_0 z + \Omega_{\Lambda 0} \left( \frac{1}{(1+z)^2} - 1 \right) \right)^{1/2} \quad (65) \end{aligned}$$

usando (\*) en la 1ª y 2ª igualdades,  $\rho f^3 = \rho_0 f_0^3$  en la 3ª, las citadas notaciones en la 4ª, y (59)  $1+z = f_0/f(t)$  en la 2ª implicación

LA LEY DE HUBBLE EN LOS MODELOS DE FRIEDMANN (62)+(64)+(65) convierte la dependencia  $\mathbf{d}_L(z)$  en una función exclusiva de  $z$ ,  $H_0$ ,  $\Omega_0$  y  $\Omega_{\Lambda 0}$

## MÁS OBSERVACIONES:

- Como ya vimos (Charla 8), las observaciones de galaxias y cúmulos de galaxias indican

$$\boxed{0'2 < \Omega_0 < 0'4} \quad (66)$$

- Desde principios de 1990's las observaciones de la anisotropía de la radiación de fondo (COBE) indican (!), en el marco de los espacio-tiempos de Robertson-Walker, que la geometría de cada hipersuperficie  $S(t)$  es euclídea, esto es,  $k = 0$ . En términos de los observables  $\Omega_0$  y  $\Omega_{\Lambda 0}$ , y habida cuenta de  $\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} = 1 + \frac{c^2 k}{f_0^2}$ , las citadas observaciones indican (WMAP)

$$\boxed{\Omega_0^{\text{total?}} \equiv \Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0?} = 1'02 (\pm 0'02)} \quad (67)$$

- A finales de 1990's dos equipos independientes han cotejado la dependencia  $d_L(z)$  de la ley de Hubble en los modelos de Friedmann (62)+(64)+(65) con muestras de varias decenas de supernovas tipo Ia lejanas ( $0'2 \lesssim z \lesssim 0'8$ ).

El análisis estadístico de las observaciones (HZT-Riess 98, SCP-Perlmutter 99) indica una distancia-luminosidad mayor ( $\equiv$  luminosidad aparente menor, en un  $\approx 25\%$ ) de la "máxima" que tendrían tomando en  $d_L(z)$  el valor  $\Lambda = 0$  (el aceptado hasta la fecha, compatible con la cota observacional previa:  $|\Lambda| \leq 10^{-55} \text{ cm}^{-2}$ ).

Y los valores que mejor ajustan estas observaciones con las restricciones (66) y (67) son (WMAP):

$$\boxed{\Omega_0 = 0'27 (\pm 0'04)} \quad \text{y} \quad \boxed{\Omega_{\Lambda 0} = 0'73 (\pm 0'04)} \quad (68)$$

Se sigue de  $\frac{-1}{2}(\Omega_0 + 3p_0/\rho_0^c) + \Omega_{\Lambda 0} = \frac{f_0 f_0''}{f_0^2}$  con  $p_0 = 0$  y de (68) que LA EXPANSIÓN ACTUAL SE ACELERA (parámetro de "deceleración" negativo!):

$$\frac{f_0 f_0''}{f_0^2} = \frac{-1}{2} \Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} \simeq 0'60 (> 0) \quad (69)$$

Y se sigue de  $\Omega_{\Lambda 0} = \frac{c^2 \Lambda}{3H_0^2}$  y (68) una cte. cosmológica POSITIVA:

$$\Lambda = \frac{3H_0^2}{c^2} \Omega_{\Lambda 0} \simeq 0'73 \frac{3H_0^2}{c^2}$$

con valor, habida cuenta de (54)  $H_0^{-1} \simeq 13'8 \cdot 10^9$  años:

$$\boxed{\Lambda \simeq 1'15 \cdot 10^{-20} \text{ años luz}^{-2} \simeq 1'3 \cdot 10^{-56} \text{ cm}^{-2}} \quad (70)$$

Recordemos que, en el marco de los modelos de Friedmann:

- La respuesta a: "EL COSMOS ¿ES "ABIERTO" ( $k = -1$ ), "PLANO" ( $k = 0$ ) O "CERRADO" ( $k = 1$ )?" venía dada por la expresión  $\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} = 1 + c^2 k / f_0'^2$ :

$$k = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} \begin{Bmatrix} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{LINEA VERDE})$$

- La respuesta a: "LA EXPANSIÓN ACTUAL ( $f_0' > 0$ ) ¿SE FRENA ( $f_0'' < 0$ ), MANTIENE VELOCIDAD ( $f_0'' = 0$ ) O SE ACELERA ( $f_0'' > 0$ )" venía dada por  $\frac{-1}{2}(\Omega_0 + 3p_0/\rho_0^c) + \Omega_{\Lambda 0} = \frac{f_0 f_0''}{f_0'^2}$  con  $p_0 = 0$ :

$$f_0'' \begin{Bmatrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} \begin{Bmatrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{LINEA AZUL})$$

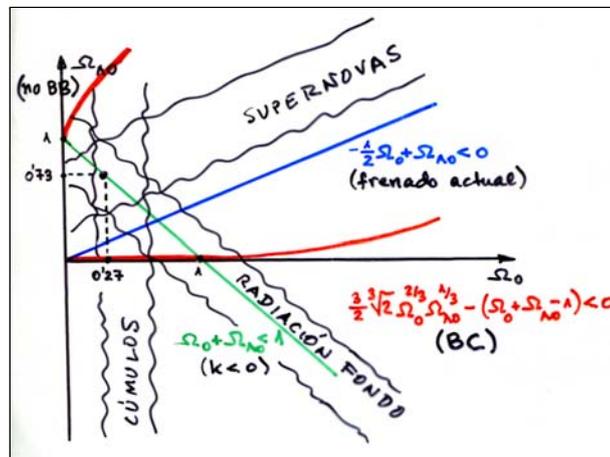
- Pues bien, la respuesta a: "EXPANSIÓN SIEMPRE ¿SI ( $f' > 0$ ) O NO?" viene dada por (!):

$$f' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega_{\Lambda 0} \geq 0 & , \text{ si } k = -1 \text{ ó } k = 0 & (\text{LINEA ROJA}) \\ \Omega_{\Lambda 0} > 0 \text{ y } \frac{3}{2} \sqrt{2} \Omega_0^{2/3} \Omega_{\Lambda 0}^{1/3} - (\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} - 1) \geq 0 & , \text{ si } k = 1 \end{cases}$$

Si esta última respuesta es SI, el modelo posee (!): gran explosión (BB), aceleración positiva desde cierto  $t_{\text{cambio}}$  (quizás infinito),  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$  (salvo un caso límite) y horizonte de sucesos (salvo dos casos límite).

Si esta última respuesta es NO, la expansión (!): se detiene en el futuro y hay gran implosión (BC) ó se detiene en el pasado y no hay gran explosión

En un diagrama ( $\Omega_0, \Omega_{\Lambda 0}$ ) la situación observacional actual es la siguiente:

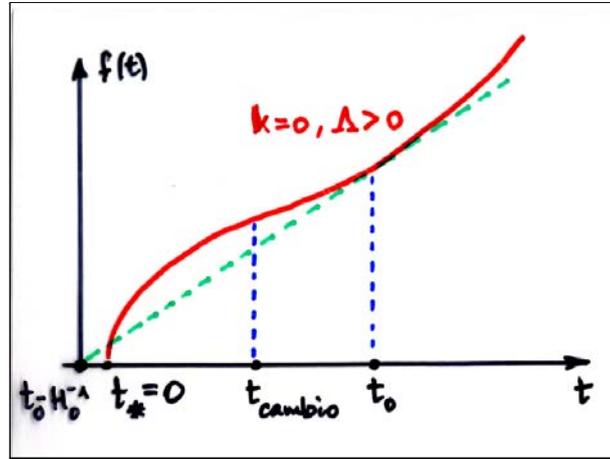


### MODELO $\Lambda$ CDM:

Si como indican  $\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} = 1 + c^2 k / f_0^2$  y (68) es  $k = 0$ , la ec. de Friedmann queda:  $f'^2 = \frac{A}{f} + \frac{c^2 \Lambda f^2}{3}$ , que se integra elementalmente.

Y si como indica (70) es  $\Lambda > 0$ , la solución (unívocamente determinada por  $\Lambda$ ,  $A > 0$  y  $H_0 > 0$ )

$$f(t) = (3A/2c^2\Lambda)^{1/3} \left( \cosh(\sqrt{3c^2\Lambda} t) - 1 \right)^{1/3} \quad (71)$$



- posee expansión siempre, con  $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) := \sqrt{c^2 \Lambda / 3}$
- posee gran explosión (y por tanto, horizonte de partículas)
- posee aceleración positiva desde cierto  $t_{\text{cambio}}$  finito, con  $f''$  creciente y  $\lim_{t \rightarrow \infty} f f'' / f'^2 = 1$
- alcanza  $f = \infty$  en tiempo infinito y posee horizonte de sucesos

Con los valores (68)  $\Omega_0 \simeq 0'27$  y  $\Omega_{\Lambda 0} \simeq 0'73$  (modelo  $\Lambda$ CDM), el modelo predice:

- una edad del cosmos  $t_0 \simeq 13'7 \cdot 10^9$  años (excelente acuerdo con WMAP y con la edad de los cúmulos)
- un valor  $t_{\text{cambio}} \simeq 7'1 \cdot 10^9$  años  $< t_0$  (acuerdo? con los datos de la Supernova Ia SN1997ff con  $z \simeq 1'7$ )
- un horizonte de partículas  $d_{\text{phor}} \simeq 47'6 \cdot 10^9$  años luz, que se aleja (ahora) a velocidad  $d'_{\text{phor}} \simeq 4'4 c$
- un horizonte de sucesos  $d_{\text{ehor}} \simeq 15'5 \cdot 10^9$  años luz, que se aleja (ahora) a velocidad  $d'_{\text{ehor}} \simeq 0'1 c$  con  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_{\text{ehor}}(t) \simeq 16'1 \cdot 10^9$  años luz.

Habida cuenta de la expansión acelerada del cosmos, cantidades crecientes de estructuras cósmicas (actualmente observables) irán escapando a nuestra observación (en el sentido de que sus señales llegarán progresivamente desplazadas al rojo, hasta imposibilitar su observación)