

# RELATIVIDAD Y COSMOLOGIA

## EJERCICIOS PROPUESTOS

Curso 2012 - 13

### 1. TEORÍA DE VARIEDADES

### 2. TENSORES

### 3. VARIEDADES SEMIRIEMANNIANAS

#### 3.1. (Torsión)

Sea  $(M, D)$  una variedad con conexión. Probar que la aplicación  $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definida por  $T(X, Y) := [X, Y] - D_X Y + D_Y X$  define un campo de tensores  $\binom{1}{2}$  sobre  $M$ , llamado la *torsión de  $D$*  (en el caso de una variedad semi-riemanniana, la propiedad (D4) del Teorema 3.11 asegura que la conexión de Levi-Civita posee torsión cero).

#### 3.2. (Diferencial covariante en coordenadas)

Sea  $(M, g)$  una variedad semiriemanniana. Dados un campo de tensores  $A \in \mathfrak{T}_2^1(M)$  y una carta  $(U, x)$  en  $M$ , deducir la expresión:  $A_{jk;l}^i = \partial_{x^l} A_{jk}^i + \sum_m \{A_{jk}^m \Gamma_{ml}^i - A_{mk}^i \Gamma_{jl}^m - A_{jm}^i \Gamma_{kl}^m\}$ .

#### 3.3. (Transporte paralelo y reparametrizaciones)

Sean  $(M, g)$  una variedad semiriemanniana,  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva y sea  $\alpha \circ h : J \rightarrow M$  una reparametrización de  $\alpha$ . Si  $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , entonces  $Z \circ h \in \mathfrak{X}(\alpha \circ h)$ .

(a) Probar que:  $(Z \circ h)' = \frac{dh}{dt}(Z' \circ h)$ .

(b) Probar que:  $(Z \circ h)'' = \frac{d^2 h}{dt^2}(Z' \circ h) + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2(Z'' \circ h)$ .

### 3.4. (Simetrías de la curvatura)

Sean  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana y  $D$  su conexión de Levi-Civita.

- (a) Probar que las simetrías de un campo de tensores en  $M$  se preservan por la derivación covariante. En particular,  $D_X R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$  tiene (al menos) las mismas simetrías que la curvatura  $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$  y  $D_X Ric \in \mathfrak{T}_2^0(M)$  es simétrico (puesto que  $Ric \in \mathfrak{T}_2^0(M)$  lo es)
- (b) Sea  $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$  la curvatura de  $D$ . Dada una carta  $(U, x)$  en  $M$ , y definiendo:

$$\begin{cases} R_{jkl}^i := R(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \equiv dx^i(R_{\partial_k, \partial_l}(\partial_j)) \\ R_{ijkl} := (\downarrow_1^1 R)(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \equiv \langle \partial_i, R_{\partial_k, \partial_l}(\partial_j) \rangle \end{cases} ,$$

probar que se verifica:

$$\begin{cases} R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij} \\ R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0 \end{cases} .$$

### 3.5. (Curvatura seccional constante)

Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana de dimensión  $n$  y curvatura seccional constante  $C_p$  en  $p \in M$ . Probar que:  $Ric(p) = (n-1)C_p g(p)$  y  $S(p) = n(n-1)C_p$ .

### 3.6. (Curvatura de superficies)

Sea  $(M, g)$  una superficie semi-riemanniana y sean  $R, K, Ric$  y  $S$  sus curvaturas de Riemann, seccional (o de Gauss), de Ricci y escalar, respectivamente.

- (a) Probar que:  $R_{XY}Z = K(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X)$  (para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ).
- (b) Probar que:  $Ric = Kg$  y  $S = 2K$ .
- (c) Dada una base local ortonormal  $\{E_i\}$  en  $M$  (con base dual  $\omega^i$ ), y definiendo:

$$\begin{cases} R_{jkl}^i \equiv R(\omega^i, E_j, E_k, E_l) = \omega^i(R(E_j, E_k, E_l)) \equiv \omega^i(R_{E_k, E_l}(E_j)) \\ R_{ijkl} \equiv (\downarrow_1^1 R)(E_i, E_j, E_k, E_l) := R(\langle E_i, \cdot \rangle, E_j, E_k, E_l) = \\ = \langle E_i, R(E_j, E_k, E_l) \rangle \equiv \langle E_i, R_{E_k, E_l}(E_j) \rangle \end{cases} ,$$

probar que:  $K = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 R_{1212}$ .

### 3.7. (Subvariedades abiertas completas)

Sea  $P$  una subvariedad abierta de una variedad semiriemanniana  $(M, g)$ . Probar que, si  $P$  es completa y  $M$  es conexa, entonces es  $P = M$ .

### 3.8. (Ejemplos de superficies riemannianas)

- (a) Se llama *semiplano de Poincaré*  $(P, g)$  a la subvariedad abierta  $P := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$  con la métrica  $g = \frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2)$ . Probar que  $(P, g)$  posee curvatura seccional constante  $K = -1$ .
- (b) Se llama *2-esfera unidad*  $(\mathbb{S}^2, g)$  a la subvariedad  $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  con la métrica  $g = g_{\mathbb{R}^3}|_{\mathbb{S}^2}$ . Probar que  $(\mathbb{S}^2, g)$  posee curvatura seccional constante  $K = +1$ .

### 3.9. (Gradiente, divergencia, hessiano, laplaciano)

Sea  $(M, g)$  una variedad semiriemanniana. Si  $f, h \in \mathfrak{F}(M)$ ,  $V \in \mathfrak{X}(M)$  y  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ , probar que se verifica:

- (a)  $D(fA) = A \otimes df + fDA$ .
- (b)  $\text{grad}(fh) = f \text{grad } h + h \text{grad } f$ .
- (c)  $\text{div}(fV) = Vf + f \text{div}V$ .
- (d)  $H^{fh} = fH^h + hH^f + df \otimes dh + dh \otimes df$ .
- (e)  $\Delta(fh) = f\Delta h + h\Delta f + 2g(\text{grad } f, \text{grad } h)$ .

### 3.10. (Divergencia de la métrica)

Sea  $(M, g)$  una variedad semiriemanniana.

- (a) Probar que:  $\mathcal{C}(g) = \dim M$ .
- (b) Probar que, si  $M$  es conexa, la hipótesis de que el índice de  $g$  es constante resulta superflua.
- (c) Probar que:  $\text{div}(fg) = df$ , para toda  $f \in \mathfrak{F}(M)$ .

### 3.11. (Preservar productos escalares)

Sea  $\phi : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable entre variedades semi-riemannianas  $(M, g)$  y  $(N, \bar{g})$ . Dados sistemas de coordenadas  $\xi$  en torno a  $p \in M$  y  $\eta$  en torno a  $\phi p \in N$ , probar que  $d\phi_p$  preserva productos escalares si y sólo si se verifica (para todo  $i, j = 1, \dots, m$ )

$$g_{ij}(p) = \sum_{k,l=1}^n \bar{g}_{kl}(\phi p) \frac{\partial(y^k \circ \phi)}{\partial x^i}(p) \frac{\partial(y^l \circ \phi)}{\partial x^j}(p).$$

### 3.12. (Campos sobre curvas y restricciones)

Sean  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana,  $\alpha$  una curva en  $M$  y  $Z$  un campo de vectores sobre  $\alpha$ .

- (a) Probar que, si  $\alpha'(s_0) \neq 0$ , existe un campo de vectores diferenciable  $\tilde{Z}$  sobre un entorno de  $\alpha(s_0)$  tal que  $Z(s) = \tilde{Z}_{\alpha(s)}$ , para  $s$  próximo a  $s_0$ . En particular,  $\alpha$  es localmente (en torno a  $s_0$ ) una curva integral.
- (b) Probar que  $Z'(s) = D_{\alpha'(s)}\tilde{Z}$ , para  $s$  próximo a  $s_0$ .
- (c) Probar que, si  $\alpha$  es una curva integral de  $X$ , entonces:  $Xf \circ \alpha = d(f \circ \alpha)/ds$ , para toda  $f \in \mathfrak{F}(M)$ .

### 3.13. (Espacio euclídeo en polares)

Considérense las *coordenadas esféricas*  $r, \vartheta, \phi$  en  $\mathbb{R}^3$ , de forma que  $r, \phi$  sean las coordenadas polares en el plano  $\vartheta = \pi/2$ .

- (a) Probar que  $(r, \vartheta, \phi)$  constituyen un sistema de coordenadas sobre  $\mathbb{R}^3 - H$ , para cierto semiplano  $H$ .
- (b) Expresar  $\partial_r, \partial_\vartheta, \partial_\phi$  en términos de  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ .
- (c) Deducir la expresión (para la métrica de  $\mathbb{R}^3$ ):  $ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2)$ .
- (d) Calcular:

$$\begin{cases} D_{\partial_r}\partial_r = 0 & , & D_{\partial_r}\partial_\phi = \frac{1}{r}\partial_\phi & , & D_{\partial_r}\partial_\vartheta = \frac{1}{r}\partial_\vartheta \\ D_{\partial_\vartheta}\partial_\vartheta = -r\partial_r & , & D_{\partial_\vartheta}\partial_\phi = \cot \vartheta \partial_\phi & , & D_{\partial_\phi}\partial_\phi = -r \sin \vartheta U \end{cases} ,$$

donde  $U = \cos \phi \partial_x + \sin \phi \partial_y = \sin \vartheta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \vartheta \partial_\vartheta$ .

**3.14. (Curvatura en variedades producto)\***

Considérese una variedad semiriemanniana.

- (a) Sea  $\Pi$  un plano tangente. Si  $A : \Pi \rightarrow \Pi$  es una aplicación lineal de determinante 1, probar que:  $R_{Av, Aw} = R_{vw}$ , para todo  $v, w \in \Pi$ .
- (b) Si se trata de una variedad producto  $M \times N$ , probar que:

$$Ric(x + v, y + w) = Ric^M(x, y) + Ric^N(v, w) ,$$

para todo  $x, y \in T_p M$  y todo  $v, w \in T_q N$ . Concluir que:  $S = S^M + S^N$ .

**3.15. (Geodésicas en coordenadas ortogonales)\***

Sea  $(M, g)$  una variedad semiriemanniana. Probar que, en una carta ortogonal, el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas se convierte en:

$$\frac{d}{ds} \left( g_{kk} \frac{dx^k}{ds} \right) = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \left( \frac{dx^i}{ds} \right)^2 \quad (1 \leq k \leq n) .$$

**3.16. (Hessiano sobre geodésicas)**

Sea  $(M, g)$  una variedad semiriemanniana.

- (a) Probar que, si  $\gamma$  es una geodésica y  $f \in \mathfrak{F}(M)$ , entonces se tiene:  $H^f(\gamma', \gamma') = d^2(f \circ \gamma)/ds^2$ .
- (b) Probar que, en un punto crítico de  $f$ ,  $H^f$  coincide con el Hessiano definido en el Ejercicio 1.14.

**3.17. (Derivación covariante a partir del transporte)\***

Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana.

- (a) Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva. Si  $Y$  es un campo de vectores sobre  $\alpha$ , probar que se verifica:

$$Y'(s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{-t} Y(s+t) - Y(s)}{t} \quad (\forall s \in I \text{ y } \forall t \in (-\varepsilon_s, \varepsilon_s)) ,$$

siendo  $P_{-t}$  el transporte paralelo (inducido por la conexión de Levi-Civita en  $M$ ) a lo largo de  $\alpha$  desde  $\alpha(s+t)$  hasta  $\alpha(s)$ .

- (b) Probar que el transporte paralelo a lo largo de geodésicas en  $M$  determina completamente la conexión de Levi-Civita en  $M$ .

### 3.18. (Rotacional)

Dados variedad semi-riemanniana  $(M, g)$  y campo de vectores  $V \in \mathfrak{X}(M)$ , se define el **rotacional de  $V$**  como  $(rot V)(X, Y) := g(D_X V, Y) - g(D_Y V, X)$ , para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

- (a) Probar que  $rot V$  es un campo de tensores  $\binom{0}{2}$  antisimétrico (esto es, una 2-forma), con componentes coordenadas  $\partial V_j / \partial x^i - \partial V_i / \partial x^j$ .
- (b) Probar que:  $rot(grad f) = 0$ .
- (c) Probar que:  $rot V = d\theta$ , siendo  $\theta$  la 1-forma métricamente equivalente a  $V$ .
- (d) En  $\mathbb{R}^3$ , probar que:  $(rot V)(X, Y) = (X \times Y) \cdot (\nabla \times V)$ .

### 3.19. (Pregeodésicas)\*

Sean  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana y  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva regular. Se trata de probar que  $\alpha$  es pregeodésica si y sólo si su aceleración es colineal con su velocidad. Comencemos por la condición suficiente. Para ello, en los apartados (a)-(d), supóngase que  $\alpha'' = f\alpha'$ , con  $f \in \mathfrak{F}(I)$ .

- (a) Probar que una reparametrización  $\alpha \circ h : J \rightarrow M$  es geodésica si y sólo si  $\frac{d^2 h}{ds^2} + (f \circ h) \left(\frac{dh}{ds}\right)^2 = 0$ .
- (b) Úsese (a) para probar que, si  $\langle \alpha', \alpha' \rangle$  nunca es nula,  $\alpha$  es pregeodésica. De hecho, cualquier reparametrización  $\alpha \circ h : J \rightarrow M$  con (norma de la) velocidad constante será geodésica.
- (c) Probar que  $\langle \alpha', \alpha' \rangle$  nunca es nula o siempre es nula.
- (d) Probar que, si  $\langle \alpha', \alpha' \rangle$  siempre es nula,  $\alpha$  es pregeodésica.

De los apartados (b)-(d) se sigue la condición suficiente.

- (e) Probar la condición necesaria.
- (f) Sean  $M$  una variedad con conexión (arbitraria) y  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva regular. Probar con toda generalidad que  $\alpha$  es pregeodésica si y sólo si su aceleración es colineal con su velocidad.

### 3.20. (Componentes de la curvatura independientes)\*

Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana. Probar que el (campo de) tensor(es) de curvatura posee  $n^2(n^2 - 1)/12$  componentes independientes (formalmente, si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  con producto escalar, el espacio vectorial de las "funciones de tipo curvatura"  $V^4 \rightarrow \mathbb{R}$  posee dimensión  $n^2(n^2 - 1)/12$ ).

**3.21. (Variedades de Einstein)**

Una variedad semi-riemanniana  $(M, g)$  se dice que es una *variedad de Einstein* si se verifica  $Ric = cg$ , para alguna constante  $c$ .

- (a) Probar que, si  $M$  es conexa,  $n \equiv \dim M \geq 3$  y  $Ric = fg$ , para alguna  $f \in \mathfrak{F}(M)$ , entonces  $(M, g)$  es una variedad de Einstein.
- (b) Probar que, si  $M$  es conexa,  $\dim M \geq 3$  y la curvatura seccional  $K$  toma un valor constante  $C_p$  en cada  $p \in M$ , entonces  $K$  es constante.
- (c) Probar que, si  $M$  es de curvatura constante, es de Einstein.

**3.22. (Determinación de la curvatura 1)\***

Sean  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana y  $p \in M$ . Si  $\mathcal{U}$  es un abierto en  $T_pM$ , entonces el tensor de curvatura  $R$  en  $p$  queda completamente determinado por los valores  $K(\Pi)$  de la curvatura seccional sobre todos los planos  $\Pi \subset T_pM$  no-degenerados que intersectan  $\mathcal{U}$ .

Indicación: si  $u \in \mathcal{U}$  y  $x \in T_pM$ , entonces, para  $\delta$  pequeño,  $u + \delta x \in \mathcal{U}$ .

**4. SUBVARIETADES SEMIRIEMANNIANAS**

## 5. GEOM. RIEMANNIANA Y LORENTZIANA

### 5.1. (Continuidad distancia riemanniana)

### 5.2. (Ortogonalidad lorentziana)

Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial lorentziano.

- (a) Probar que dos vectores luz mutuamente ortogonales necesariamente son proporcionales.
- (b) Probar que dos vectores no espaciales mutuamente ortogonales necesariamente son luz (y, por tanto, proporcionales).
- (c) Probar que no existe ningún subespacio 2-dimensional en el que el producto escalar sea nulo.

### 5.3. (Semiconos causales)

Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial lorentziano.

- (a) Probar que dos vectores  $v, w \in V$  no espaciales pertenecen a un mismo semicono causal si y sólo si, o bien es  $g(v, w) < 0$ , o bien ambos vectores son luz y  $w = av$  (con  $a > 0$ ).
- (b) Sea  $u \in V$  temporal. Probar que los semiconos causal  $\bar{C}(u)$  y temporal  $C(u)$  verifican:  $\bar{C}(u) = (C(u))^{cl.} - \{0\}$  y, si  $\dim V > 2$ ,  $\bar{C}(u) = C(u) \cup \{\text{una componente conexa de } \Lambda\}$ .
- (c) Probar que los semiconos causales son convexos.
- (d) Probar que las componentes (conexas) del conjunto de vectores no espaciales de  $V$  son los dos semiconos causales de  $V$ .

### 5.4. (Conectividad vectores temporales)

### 5.5. (Superficies en coordenadas ortogonales1)

### 5.6. (Geodésicas temporales en $R^{3,2}$ )

### 5.7. (Coordenadas luz en superficies lorentzianas 1)

### 5.8. (Coordenadas luz en superficies lorentzianas 2)

### 5.9. (Curvas temporales de longitud máxima en variedades lorentzianas son geodésicas)



**5.10. (Derivadas direccionales en variedades riemannianas y lorentzianas)**

**5.11. (Espacio hiperbólico 1)\***

Sean  $p, q \in \mathbb{H}^n(r)$  (el espacio hiperbólico, entendido como la componente conexa de  $\mathbb{H}_0^n(r) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}(r)$  por  $(r, 0, \dots, 0)$ ).

- (a) Probar que existe una única geodésica  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n(r)$  tal que  $\sigma(0) = p$  y  $\sigma(1) = q$ .
- (b) Probar que la distancia entre  $p$  y  $q$  verifica:  $d(p, q) = L(\sigma|_{[0,1]}) = r\varphi_{pq}$ , siendo  $\sigma$  la geodésica del apartado anterior y  $\varphi_{pq} \geq 0$  el "ángulo hiperbólico" entre  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ .
- (c) Si también  $m \in \mathbb{H}^n(r)$ , probar que los correspondientes "ángulos hiperbólicos" verifican:  $\varphi_{pq} \leq \varphi_{pm} + \varphi_{mq}$ , donde la igualdad se da si y sólo si  $m \in \sigma([0, 1])$ .

**5.12. (Variedades riemannianas completas)**

**5.13. (Variedades semi-riemannianas Misner-completas)**

**5.14. (Curvas causales extendibles en variedades lorentzianas son de longitud finita)**

**5.15. (Conectividad por geodésicas-luz en dos trozos)**

**5.16. (Productos escalares lorentz con el mismo cono de luz son múltiplos)**

Sea  $V$  un espacio vectorial y sean  $g_1$  y  $g_2$  productos escalares en  $V$  de índice 1 y con el mismo cono de luz. Probar que, en tal caso:  $g_2 = Cg_1$ , con  $C \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

## 6. RELATIVIDAD ESPECIAL

### 6.1. (Conos de luz)

Sean  $(M, g)$  el espacio-tiempo de Minkowski y  $\omega$  un observador (inextensible) en caída libre. Sea  $p \in M$  no perteneciente a la trayectoria de  $\omega$ . Probar que:

- (a)  $\text{Im } \omega$  intersecta al cono de luz  $\Lambda(p)$  exactamente en dos sucesos, digamos  $\omega(a)$  y  $\omega(b)$ .
- (b) Si denotamos  $q \equiv \omega((a+b)/2)$ , entonces:  $\vec{pq} \perp \omega$  y  $pq = q\omega(a) = q\omega(b)$ .

### 6.2. (Paradoja de los gemelos)

Dos gemelos  $\alpha$  y  $\omega$  se encuentran en una nave espacial en caída libre. En cierto instante,  $\alpha$  se separa de la nave para recorrer, a velocidad constante (en módulo)  $v = 0,4$  respecto de la nave, una trayectoria que es una circunferencia de 2 años-luz de radio en el 3-espacio newtoniano de la nave. Hallar la diferencia de edades entre ambos gemelos al regreso de  $\alpha$ .

### 6.3. (Sistemas de coordenadas y radar)

Sean  $(M, g)$  el espacio-tiempo de Minkowski y  $\omega$  un observador en caída libre.

- (a) Supóngase que la luz emitida por  $\omega$  en  $\tau = a$  es "reflejada" en  $p \in M$  (no perteneciente a la trayectoria de  $\omega$ ) y recibida de nuevo por  $\omega$  en  $\tau = b$ . Probar que el suceso  $p$  está en el 3-espacio newtoniano de  $\omega$  que contiene a  $q \equiv \omega(\frac{a+b}{2})$  y que  $qp = \frac{b-a}{2}$ .
- (b) Campos de vectores  $E_1, E_2, E_3 \in \mathfrak{X}(\omega)$ , ortonormales entre sí, ortogonales a  $\omega$  y paralelos, representan giróscopos. Refiriéndose al apartado (a) y utilizando la dirección espacial de la luz recibida por  $\omega$ , deducir las coordenadas del suceso  $p$  respecto de cierto sistema de coordenadas Lorentz adaptado a  $\omega$ .
- (c) Sea  $\alpha(s)$  otra partícula en caída libre. Determinar desde  $\omega$ , con *dos* señales de radar, si es de esperar que  $\alpha$  colisione o no con  $\omega$  y, en caso afirmativo, cuándo.

### 6.4. (Cohetes de expulsado material)

Sean  $(M, g)$  el espacio-tiempo de Minkowski y  $\rho$  un cohete cuyo expulsado consta de partículas materiales.

- (a) Denotando por  $v(\tau) \equiv \tanh \varphi(\tau)$  (el módulo de) la velocidad del cohete (respecto del observador instantáneo comóvil con el cohete cuando  $\tau = 0$ ), probar que  $\varphi(\tau) = v_{ex} \ln \frac{m(0)}{m(\tau)}$ , siendo  $0 < v_{ex} < 1$  la velocidad (constante) del expulsado respecto del propio cohete (con lo que  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} v(\tau) = 1$ ).
- (b) Si se trata de un cohete newtoniano, probar que es la velocidad del cohete la que viene dada por  $v(t) = v_{ex} \ln \frac{m(0)}{m(t)}$  (con lo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \infty$ ).

### 6.5. (Cohetes de expulsado luz)

Sean  $(M, g)$  el espacio-tiempo de Minkowski y  $\rho$  un cohete cuyo expulsado consta de partículas luz (ver [ON], Ejemplo 6.34). Supóngase que  $\rho$  se dirige desde nuestro sistema solar  $\sigma$  hacia la estrella  $\alpha$  de Centauro, representados ambos por observadores en caída libre, con velocidad relativa nula y con distancia mutua (en su 3-espacio newtoniano común) de 4'40 años luz.

Si el ritmo de consumo de combustible por  $\rho$  viene dado por  $\frac{dm}{d\tau} = \frac{-m}{100 \text{ años}}$ , hallar la duración del viaje:

- (a) en tiempo propio  $t$  de  $\sigma$ .
- (b) en tiempo propio  $\tau$  de  $\rho$ .

(la diferencia es de unos 158 días).

Sin hipótesis sobre el ritmo de consumo de combustible por  $\rho$ , considérese la función  $f(\tau) := m(\tau)/m(0)$  (obviamente es  $0 < f \leq 1$ ).

- (c) La duración del viaje en tiempo propio  $\tau$  de  $\rho$  viene determinada por el factor de "dilatación temporal"  $\Upsilon(\tau) \equiv (1 - v(\tau)^2)^{-1/2}$ , donde  $v$  es la velocidad de  $\rho$  respecto de  $\sigma$ . ¿Qué valor de  $f$  corresponde a  $\Upsilon = 10$ ?, ¿cuál sería el valor de  $f$  a la llegada con el ritmo de consumo de combustible dado antes?

### 6.6. (Observador acelerado 1)\*

Sean  $M$  el espacio-tiempo de Minkowski,  $\omega$  un observador en caída libre y  $\xi$  un sistema de coordenadas Lorentz "adaptado" a  $\omega$ . Sea  $\alpha(\tau)$  un observador en  $M$  con  $\xi$ -coordenadas

$$x^0(\alpha(\tau)) = g^{-1} \sinh(g\tau) \quad , \quad x^1(\alpha(\tau)) = g^{-1} \cosh(g\tau) \quad , \quad x^2(\alpha(\tau)) = 0 \quad , \quad x^3(\alpha(\tau)) = 0 \quad ,$$

(aquí  $g > 0$  no es la métrica, que denotaremos  $\langle , \rangle$ ) y sea  $\gamma(s)$  un fotón emitido por  $\alpha$  en  $\alpha(0)$  con  $\gamma'(0) = \partial_0 + \partial_1$  (como en [ON], Cap.6, p.181).

- (a) Hallar las partículas newtonianas  $\xi$ -asociadas a  $\alpha$  y  $\gamma$  y verificar que su distancia mutua crece hacia  $g^{-1}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- (b) Si el observador inercial  $\omega$  emite constantemente luz a frecuencia  $\nu_0$ , probar que la frecuencia de la luz recibida por  $\alpha$  en el instante  $\tau$  viene dada por  $\nu(\tau) = \nu_0 e^{-g\tau}$ .
- (c) Si el observador  $\alpha$  emite constantemente luz a frecuencia  $\nu_0$ , probar que la frecuencia de la luz recibida por  $\omega$  en el instante  $t > 0$  viene dada por  $\nu(t) = \nu_0/gt$ .

### 6.7. (Observador acelerado 2)\*

Sean  $M$  el espacio-tiempo de Minkowski,  $\omega$  un observador en caída libre y  $\xi$  un sistema de coordenadas Lorentz "adaptado" a  $\omega$ . Sea  $\alpha(\tau)$  el observador con  $\xi$ -coordenadas

$$x^0(\alpha\tau) = g^{-1} \sinh(g\tau) \quad , \quad x^1(\alpha\tau) = g^{-1} \cosh(g\tau) \quad , \quad x^2(\alpha\tau) = 0 \quad , \quad x^3(\alpha\tau) = 0 \quad ,$$

(aquí  $g > 0$  no es la métrica, que denotaremos  $\langle , \rangle$ ) y sea el cuadrante abierto 2-dimensional  $Q := \{(x^0, x^1, 0, 0) \in M \mid x^1 > |x^0|\}$  (como en [ON], Cap.6, p.181). Supóngase que la luz emitida por  $\alpha$  en  $\tau = a$  es "reflejada" en  $q \in Q$  y recibida de nuevo por  $\alpha$  en  $\tau = b$ .

- (a) Probar que el suceso  $q$  está en la recta afín que pasa por  $o \equiv \xi^{-1}(0)$  y  $\alpha(\frac{a+b}{2})$ . Probar que  $oq = g^{-1}e^x$ , donde  $x = \pm \frac{g(b-a)}{2}$  y el signo depende de la dirección de la luz emitida por  $\alpha$ .
- (b) Probar que el conjunto de 4 funciones  $(y^0, y^1, y^2, y^3) : Q \rightarrow \mathbb{R}^4$ , dadas por

$$y^0(q) = \tau \quad (\text{si } q \in E_\tau) \quad , \quad y^1(q) = oq - g^{-1} \quad , \quad y^2(q) = 0 \quad , \quad y^3(q) = 0 \quad ,$$

constituye un sistema de coordenadas, para el que se tiene

$$g|_Q = -(1 + gy^1)^2 dy^0 \otimes dy^0 + \sum_{i=1}^3 dy^i \otimes dy^i \quad .$$

### 6.8. (Transformación de Lorentz)

Sea  $(M, g)$  el espacio-tiempo de Minkowski y sean  $\xi, \eta$  sistemas de coordenadas lorentzianos ("inerciales") en  $M$  tales que  $x^2 = y^2$  y  $x^3 = y^3$ .

(a) Probar que existen números reales únicos  $\varphi, a$  y  $b$  tales que

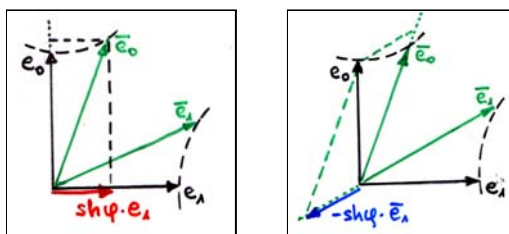
$$\begin{cases} x^0 = y^0 \cosh \varphi \pm y^1 \sinh \varphi + a \\ x^1 = y^0 \sinh \varphi \pm y^1 \cosh \varphi + b \end{cases}$$

(b) Explicar el significado de  $\varphi, a$  y  $b$  en términos de observadores en caída libre  $\omega, \alpha$  cuyas trayectorias sean los ejes<sup>0</sup> de  $\xi, \eta$  (respectivamente).

(c) Expresar  $\partial/\partial y^0, \partial/\partial y^1$  en términos de  $\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1$ , y viceversa.

(d) Sea  $v$  (el módulo de) la velocidad relativa entre los observadores  $\omega, \alpha$ . Estudiar el límite del cambio de coordenadas cuando  $v \rightarrow 0$  ("límite newtoniano").

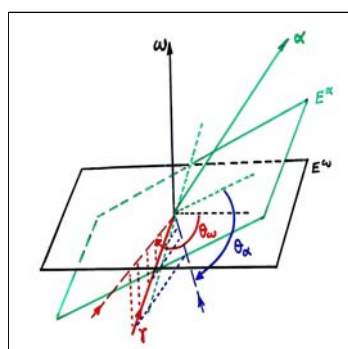
Este es el análogo-Lorentz de una rotación y traslación de coordenadas euclídeas en  $\mathbb{R}^2$



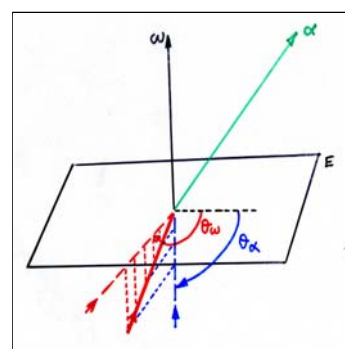
### 6.9. (Aberración de la luz)\*

Sea  $(M, g)$  el espacio-tiempo de Minkowski y sean  $\omega, \alpha$  observadores en caída libre, cuyas trayectorias están contenidas en un plano (afín) Lorentz y con (módulo de la) velocidad relativa  $v$ . Un fotón  $\gamma$  es recibido por ambos  $\omega$  y  $\alpha$  en  $\omega(0) = \alpha(0)$ . Deducir la relación  $\tan \frac{\theta_\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \tan \frac{\theta_\omega}{2}$ , donde  $\theta_\omega$  es el ángulo (euclídeo, entre 0 y  $\pi$ , respecto de la velocidad de  $\alpha$ ) bajo el que tiene lugar la recepción por  $\omega$  y  $\theta_\alpha$  es el ángulo (respecto de la dirección opuesta a la velocidad de  $\omega$ ) bajo el que tiene lugar la recepción por  $\alpha$ .

Indicación: aplicar una transformación de Lorentz (Ejercicio 6.8)



Aberración relativista



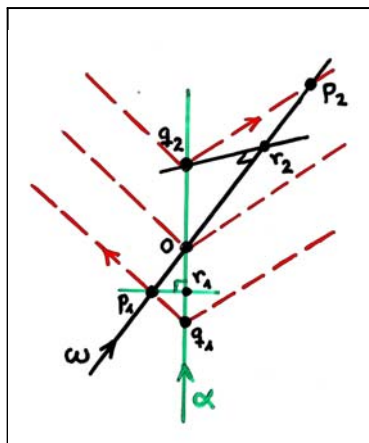
Aberración newtoniana

### 6.10. (Efecto Doppler)\*

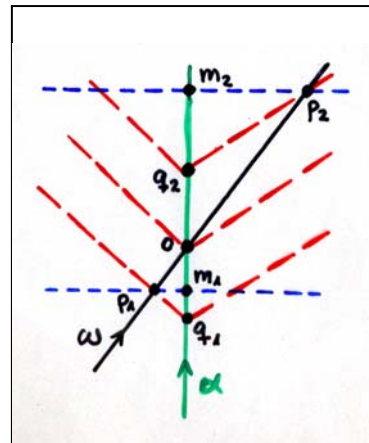
Sea  $(M, g)$  el espacio-tiempo de Minkowski y sean  $\omega, \alpha$  observadores en caída libre, cuyas trayectorias están contenidas en un plano (afín) Lorentz y con (módulo de la) velocidad relativa  $v$ . Introduzcamos el parámetro  $v_D := \pm v$  ( $v_D > 0$  si hay "alejamiento" y  $v_D < 0$  si hay "acercamiento").

- (a) Un fotón  $\gamma$  es emitido por  $\alpha$  con energía  $E_0$  y recibido por  $\omega$  con energía  $E$ . Deducir la relación  $\frac{E_0}{E} = \sqrt{\frac{1+v_D}{1-v_D}}$  (efecto Doppler).
- (b) Considérese que la luz consiste en "ondas electromagnéticas". Una frecuencia de emisión  $\nu_0$  significa que la oscilación del campo electromagnético en el emisor  $\alpha$  tiene un "pico" en la amplitud cada  $\frac{1}{\nu_0}$  segundos del tiempo propio  $\tau$  de  $\alpha$ . La propagación en todas direcciones de cada uno de estos picos puede representarse por un semicono de luz futuro (ver Ejercicio 6.1a) centrado en el correspondiente suceso de emisión y la separación temporal entre dos de estos sucesos (consecutivos) viene dada por  $\Delta\tau = \frac{1}{\nu_0}$ . Por el Ejercicio 6.1b,  $\text{Im } \omega$  intersecta a cada uno de estos semiconos exactamente en un suceso "de recepción". Análogamente a lo dicho para la emisión, puede considerarse que la frecuencia de recepción  $\nu$  verifica  $\Delta t = \frac{1}{\nu}$ , siendo  $\Delta t$  el tiempo transcurrido para  $\omega$  entre la recepción de dos picos consecutivos. Deducir por "trigonometría-Lorentz" la relación  $\frac{\nu_0}{\nu} = \sqrt{\frac{1+v_D}{1-v_D}}$ .

Los resultados de (a) y (b) apoyan la hipótesis de que, respecto de cualquier observador, la energía de una partícula luz es proporcional a la frecuencia de la onda electromagnética asociada (ver [ON], p. 179).



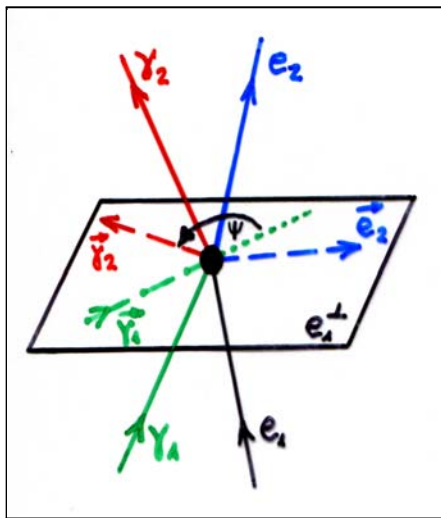
Efecto Doppler relativista



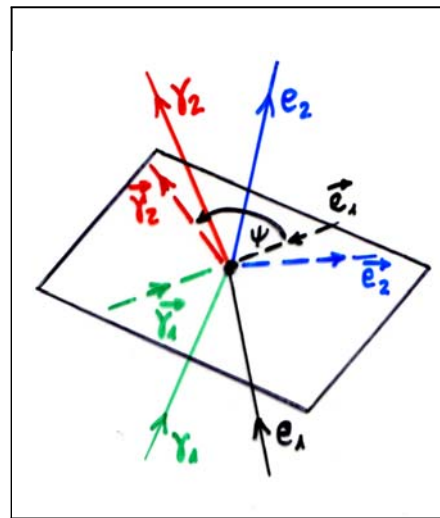
Efecto Doppler newtoniano

### 6.11. (Efecto Compton)\*

- (a) Mostrar, en base a las definiciones dadas para las partículas y a la ley de conservación de la energía-momento, la imposibilidad de que un electrón libre absorba o emita un fotón.
- (b) Un fotón y un electrón (masa  $m$ ) colisionan dando lugar a otro fotón y otro electrón. En el "sistema de reposo del electrón entrante" (observador instantáneo comóvil con dicho electrón en el suceso de colisión) los fotones entrante y saliente tienen energías  $E_1$  y  $E_2$ , respectivamente, y sus direcciones de movimiento forman un ángulo (euclídeo)  $\psi$ . Deducir la relación  $E_2 = \frac{E_1}{1 + \frac{E_1}{m}(1 - \cos \psi)}$  (efecto Compton).
- (c) Un fotón y un electrón (masa  $m$ ) colisionan dando lugar a otro fotón y otro electrón. Respecto de un cierto observador instantáneo  $u$  en el suceso de colisión, la colisión tiene lugar "de frente", el electrón entrante tiene energía  $E_{e_1}$ , los fotones entrante y saliente tienen energías  $E_1$  y  $E_2$ , respectivamente, y sus direcciones de movimiento forman un ángulo (euclídeo)  $\psi$ .
- (i) Deducir la expresión de  $E_2$  en función de  $E_{e_1}$ ,  $E_1$ ,  $m$  y  $\psi$ , que generaliza la expresión hallada en (b).
- (ii) Supóngase  $E_{e_1} \gg m > E_1$ . Determinar el valor de  $\psi$  para el que  $E_2$  es máxima y deducir la expresión aproximada:  $(E_2)_{m\acute{a}x.} \approx \frac{E_{e_1}}{1 + \frac{m^2}{4E_{e_1}E_1}}$



Ejercicio 6.11b (Efecto Compton)



Ejercicio 6.11c

### 6.12. (Colisiones newtonianas)\*

Sean  $(M, g)$  un espacio-tiempo,  $p \in M$  un suceso de colisión entre partículas materiales ( $\alpha_i(0) = p = \beta_j(0)$ ,  $\forall \alpha_i \in Ent$  y  $\forall \beta_j \in Sal$ ) y  $u \in T_p M$  un observador instantáneo. A partir de la ley de conservación de la energía-momento

$$\sum_{\alpha_i \in Ent} P_i(0) = \sum_{\beta_j \in Sal} P_j(0),$$

deducir, cuando las velocidades  $v_i \equiv V_i/c_{conv}$ ,  $v_j \equiv V_j/c_{conv}$  respecto del observador  $u$  son "pequeñas" (frente a 1), las tres expresiones básicas de las colisiones newtonianas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha_i \in Ent} m_i = \sum_{\beta_j \in Sal} m_j \quad (\text{conservación de la masa}) \\ \sum_{\alpha_i \in Ent} m_i \vec{V}_i(0) = \sum_{\beta_j \in Sal} m_j \vec{V}_j(0) \quad (\text{conservación del momento}) \\ \sum_{\alpha_i \in Ent} \frac{1}{2} m_i V_i^2(0) \equiv \sum_{\beta_j \in Sal} \frac{1}{2} m_j V_j^2(0) + \Delta \quad (\text{balance de energía cinética}) \end{array} \right.$$

(si  $\Delta = 0$ , la colisión newtoniana se dice "elástica").

### 6.13. (Adición relativista de velocidades)\*

Sean  $(M, g)$  el espacio-tiempo de Minkowski y  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  tres observadores en caída libre. Denotando por  $v_{ij} \in (\omega'_j)^\perp$  la velocidad newtoniana asociada a  $\omega_i$  por  $\omega_j$ , verificar la expresión:

$$v_{12}^2 = \frac{(v_{13} - v_{23})^2 - (v_{13} \times v_{23})^2}{(1 - v_{13} \cdot v_{23})^2},$$

con  $\cdot$  (resp.  $\times$ ) el producto escalar (resp. vectorial) en  $(\omega'_3)^\perp$  y  $v^2 \equiv |v|^2$ .

Indicación:  $(v \times w)^2 = v^2 w^2 - (v \cdot w)^2$ .

## 7. CONSTRUCCIONES

## 8. SIMETRÍA Y CURVATURA CONSTANTE

## 9. ISOMETRÍAS

## 10. CÁLCULO DE VARIACIONES

## 11. ESPACIOS HOMOGÉNEOS Y SIMÉTRICOS



## 12. GEOMETRÍA DE ROBERTSON-WALKER

### 12.1. (Fluidos perfectos)

Sea  $(M, g)$  un espacio-tiempo que verifica la ecuación de Einstein con constante cosmológica  $Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T$ , donde  $\Lambda \in \mathbb{R}$ .

- (a) Sea  $U$  un campo temporal futuro unitario sobre  $M$ . Probar que  $U$  es el campo de un fluido perfecto con tensión-energía  $T$  si y sólo si  $Ric(X, Y) = Ric(X, U) = 0$ , donde  $X, Y$  son cualesquiera campos tales que  $U, X, Y$  son mutuamente ortogonales.
- (b) Probar que, si  $(U, \rho, p)$  es un fluido perfecto y  $X, Y \perp U$ , entonces  $Ric(U, U) = 4\pi(\rho + 3p) - \Lambda$ ,  $Ric(U, X) = 0$  y  $Ric(X, Y) = [4\pi(\rho - p) + \Lambda]g(X, Y)$ . Deducir que  $S = 8\pi(\rho - 3p) + 4\Lambda$  y que  $\sum_{ij} R^{ij}R_{ij} = 64\pi^2(\rho^2 + 3p^2) + 16\pi(\rho - 3p)\Lambda + 4\Lambda^2$ .

### 12.2. (Variedades de Einstein y fluidos perfectos)

Sea  $(M, g)$  un espacio-tiempo que verifica la ecuación de Einstein con constante cosmológica  $Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T$ , donde  $\Lambda \in \mathbb{R}$ . Probar que  $(M, g)$  es "de Einstein" (esto es,  $Ric = cg$ , con  $c \in \mathbb{R}$ , Ejercicio 3.21) si y sólo si la tensión energía  $T$  es la de un fluido perfecto  $(U, \rho, p)$ , con  $U$  algún (y cualquier) campo de observadores y  $\rho = -p = \frac{c-\Lambda}{8\pi}$ .

### 12.3. (Robertson-Walker conformes a productos)

Probar que cualquier espacio-tiempo de Robertson-Walker  $I \times_f S$  es conformemente difeomorfo a una variedad lorentziana producto  $J \times S$  (con  $J \subset \mathbb{R}_1^1$ ).

### 12.4. (Demostraciones directas en Robertson-Walker)

Sea  $M(k, f) = I \times_f S$  un espacio-tiempo de Robertson-Walker y sea  $U$  el levantamiento a  $M$  del campo estándar  $d/dt$  sobre  $I$ .

- (a) Dar demostraciones directas de los Corolarios 12.8 (derivadas covariantes) y 12.9 (curvaturas).

Supóngase ahora que  $M(k, f)$  verifica la ecuación de Einstein (con constante cosmológica)  $Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T$ . El Teorema 12.11 prueba (aplicando la Definición 12.4) que la tensión-energía  $T$  es necesariamente la de un cierto fluido perfecto ( $U \equiv \partial_t, \rho, p$ ).

- (b) Deducir el Corolario 12.13 (obtenido en [ON] a partir de la condición  $\text{div}T = 0$  para un fluido perfecto) directamente de las expresiones halladas para  $\rho$  y  $p$  en el Teorema 12.11.
- (c) Deducir las expresiones de  $\rho$  y  $p$  del Teorema 12.11 directamente de los Corolarios 12.12 y 12.13.

### 12.5. (Cambio de observador en fluidos perfectos)

Sea  $(M, g)$  un espacio-tiempo y  $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$  la tensión-energía de un fluido perfecto  $(U, \rho, p)$ . Sea  $\omega$  un observador instantáneo para el que la velocidad del fluido es  $\tanh \varphi$  (con  $\varphi \in \mathbb{R}$ ). Hallar la densidad de energía y la presión del fluido medidas por  $\omega$ .

### 12.6. (Divergencias en fluidos perfectos)

Sea  $M(k, f) = I \times_f S$  un espacio-tiempo de Robertson-Walker y sea  $U$  el levantamiento a  $M$  del campo estándar  $d/dt$  sobre  $I$ . Supóngase que  $M(k, f)$  verifica la ecuación de Einstein  $\text{Ric} - \frac{1}{2}Sg = 8\pi T$ . El Teorema 12.11 prueba (aplicando la Definición 12.4) que la tensión-energía  $T$  es necesariamente la de un cierto fluido perfecto  $(U, \rho, p)$ .

- (a) Probar que la expresión hallada para  $\rho'$  en el Corolario 12.13 es equivalente a:  $\text{div}(\rho U) = -p \text{div}U$ , y también a:  $L_U(\rho \Omega) = -p L_U \Omega$ , donde  $L_U$  denota la derivada-Lie respecto del campo  $U$  y  $\Omega$  denota el elemento (local) de volumen métrico en  $M(k, f)$  (o en sus fibras  $S(t)$ ).
- (b) Probar que, en cualquier fibra del producto alabeado  $M(k, f)$ , se verifica:  $\text{div}U = -\text{traza}(S_U)$ , donde  $S_U$  denota el operador de Weingarten de la fibra.
- (c) Probar que el operador "fuerza de marea"  $F_U : U^\perp \rightarrow U^\perp$  es, en cada punto de  $M$ , una homotecia de factor de escala  $f''/f$  y que se verifica:  $\text{traza}(F_U) = -4\pi(\rho + 3p)$ .

### 12.7. (Espacio-tiempos estáticos 1)

### 12.8. (Modelo de Friedmann cerrado)

Considérese el modelo cosmológico de Friedmann estándar correspondiente a  $k = 1$  y  $\Lambda = 0$ , esto es,  $((0, \pi A) \times_f \mathbb{S}^3, \Lambda = 0, \rho)$ , con función de alabeo  $f$  dada en forma paramétrica por las ecuaciones:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}A(\vartheta - \sin \vartheta) \\ f = \frac{1}{2}A(1 - \cos \vartheta) \end{cases}, \quad \text{con } \vartheta \in (0, 2\pi)$$

(para cierta constante  $A > 0$ ), y donde el valor positivo de  $H := \frac{f'}{f}$  para cierto  $t_0 \in (0, \pi A)$  es  $H_0 \equiv H(t_0) \simeq (13'8 \cdot 10^9 \text{ años})^{-1}$ . Sea  $F$  la fracción del total de galaxias de las que un observador comóvil puede haber recibido información hasta el instante  $t_0$ . Y sea  $\rho_0^c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi}$  la densidad de energía crítica (en  $t_0$ ).

- (a) Probar que, si  $\rho_0 \equiv \rho(t_0) = 2\rho_0^c$ , entonces  $F = \frac{1}{2}$ . Hallar el radio máximo  $A$  del universo, la edad  $t_0$ , la distancia (propia) actual a una galaxia con  $z = 1/5$ , el horizonte de partículas y el horizonte de sucesos.
- (b) Si se supone (de forma menos realista) que  $\rho_0 = 10\rho_0^c$ , hallar  $F$ . Hallar los mismos parámetros que en (a)

### 12.9. (Modelo de Friedmann abierto)

Considérese el modelo cosmológico de Friedmann estándar correspondiente a  $k = -1$  y  $\Lambda = 0$ , esto es,  $(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^3, \Lambda = 0, \rho)$ , con función de alabeo  $f$  dada en forma paramétrica por las ecuaciones:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}A(\sinh \eta - \eta) \\ f = \frac{1}{2}A(\cosh \eta - 1) \end{cases}, \quad \text{con } \eta \in (0, \infty)$$

(para cierta constante  $A > 0$ ), y donde el valor positivo de  $H := \frac{f'}{f}$  para cierto  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  es  $H_0 \equiv H(t_0) \simeq (13'8 \cdot 10^9 \text{ años})^{-1}$ . Sea  $\rho_0^c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi}$  la densidad de energía crítica (en  $t_0$ ).

- (a) Supóngase que  $\rho_0 \equiv \rho(t_0) = \rho_0^c/2$ . Hallar la edad  $t_0$  del universo, la distancia (propia) actual a una galaxia con  $z = 1/5$ , el horizonte de partículas y el horizonte de sucesos.
- (b) Supóngase que  $\rho_0 = \rho_0^c/10$ . Hallar los mismos parámetros que en (a)

### 12.10. (Condiciones de energía)

Sea  $(M, g)$  un espacio-tiempo en el que hay definida una tensión-energía.

- (a) Supóngase que la tensión-energía  $T$  es la de un fluido perfecto  $(U, \rho, p)$ . En relación con las condiciones de energía (ver "Fluidos perfectos".C), probar que se verifica la condición

$$\begin{cases} \text{"débil" de energía} & \Leftrightarrow \rho \geq 0, \rho + p \geq 0 \\ \text{"fuerte" de energía} & \Leftrightarrow \rho + p \geq 0, \rho + 3p \geq 0 \end{cases}$$

- (b) Supóngase que  $(M, g)$  es un espacio-tiempo de Robertson-Walker que verifica la ecuación de Einstein (con constante cosmológica)  $Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T$ . Probar que se verifica la condición "fuerte" de energía si y sólo si las curvaturas seccionales principales  $K_u^M$  y  $K_\sigma^M$  verifican:  $K_\sigma^M \geq K_u^M \leq \Lambda/3$ .

**12.11. (Incompletitud geodésica en Robertson-Walker)****12.12. (Determinación de la curvatura 2)**

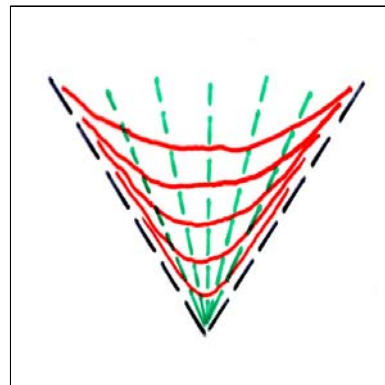
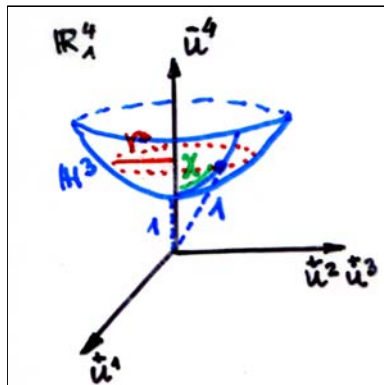
Sean  $(M, g)$  un espacio-tiempo,  $p$  un suceso de  $M$  y  $\mathcal{U}$  un abierto del conjunto de observadores instantáneos de  $T_p M$ .

- (a) Probar que un tensor  $T \in T_2^0(T_p M)$  simétrico queda determinado por el conjunto de valores  $\{T(u, u) \mid u \in \mathcal{U}\}$ .
- (b) Probar que el tensor de curvatura  $R(p) \in T_3^1(T_p M)$  queda determinado por el producto escalar  $g(p)$  y por el conjunto de operadores de fuerza de marea  $\{F_{u/|u|} \mid u \in \mathcal{U}\}$ .

**12.13. (Milne y Minkowski)**

Sea  $M(k, f) = I \times_f S$  un espacio-tiempo de Robertson-Walker.

- (a) Probar que, si  $M(k, f)$  es Ricci-plano, entonces es plano, en cuyo caso hay exactamente *dos* tipos, representados por  $M(0, 1)$  (prototipo  $\mathbb{R}_1^4$ ) y  $M(-1, t)$  (prototipo  $\mathbb{R}^+ \times_t \mathbb{H}^3$ ).
- (b) Probar que  $\mathbb{R}^+ \times_t \mathbb{H}^3$  es isométrico a un semicono temporal de  $\mathbb{R}_1^4$ .
- (c) Suponiendo que cada uno de los espacio-tiempos del apartado anterior se acopla a la tensión-energía de un fluido perfecto vía la ecuación de Einstein (con constante cosmológica)  $Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T$ , y tomando como campo de velocidades de dichos fluidos  $\partial_t$  en  $\mathbb{R}^+ \times_t \mathbb{H}^3$  y el radial respecto al origen del semicono en  $\mathbb{R}_1^4$ , probar que ambos espacio-tiempos son *físicamente equivalentes*, esto es, que admiten una isometría que preserva los modelos de materia.



### 12.14. (Modelos de radiación)

Sea  $M(k, f) = I \times_f S$  un espacio-tiempo de Robertson-Walker y sea  $U$  el levantamiento a  $M$  del campo estándar  $d/dt$  sobre  $I$ . Supóngase que  $M(k, f)$  verifica la ecuación de Einstein (con constante cosmológica)  $Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T$ . El Teorema 12.11 prueba que la tensión-energía  $T$  es necesariamente la de un cierto fluido perfecto  $(U, \rho, p)$ .

- (a) Probar que, si  $f$  no es constante, son equivalentes: (1)  $3p = \rho > 0$ , (2)  $\rho f^4 = C > 0$ , y (3)  $f''^2 + k = a^2/f^2 + \Lambda f^2/3$ , con  $a^2 = 8\pi C/3 > 0$ .

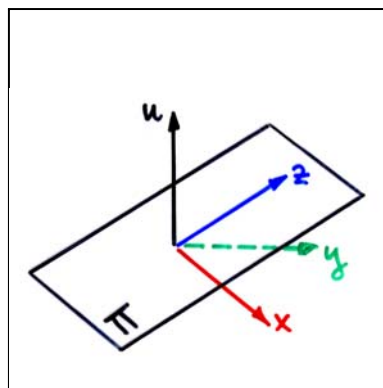
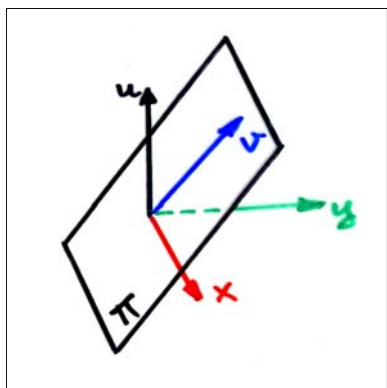
A partir de ahora, supóngase que  $3p = \rho > 0$  y que  $\Lambda = 0$ .

- (b) Probar que la función de escala  $f$  verifica: (1)  $f(t) = (2at)^{1/2}$ , si  $k = 0$ , (2)  $f(t) = (2at - t^2)^{1/2}$ , si  $k = 1$ , y (3)  $f(t) = (2at + t^2)^{1/2}$ , si  $k = -1$ .
- (c) Identificar las gráficas de las funciones  $f$  en (b) con secciones de cónicas y dibujarlas tomando  $a = 1$ .

### 12.15. (Curvaturas seccionales en Robertson-Walker)

Sea  $M(k, f) = I \times_f S$  un espacio-tiempo de Robertson-Walker y sean  $K_u$  y  $K_\sigma$  sus curvaturas seccionales principales. Sea  $(t, p) \in M$ .

- (a) Probar que todo plano temporal  $\Pi \subset T_{(t,p)}M$  posee una base  $\{\cosh \varphi \cdot u + \sinh \varphi \cdot y, x\}$ , siendo  $\{u, x, y\}$  ortonormales en  $T_{(t,p)}M$ . Probar que la curvatura seccional (en  $M$ ) de  $\Pi$  verifica  $K(\Pi) = K_u \cosh^2 \varphi - K_\sigma \sinh^2 \varphi$ .
- (b) Probar que, para planos espaciales en  $T_{(t,p)}M$ , se verifica una expresión similar.
- (c) Probar que, en el suceso  $(t, p)$  (y, por tanto, en toda la fibra  $S(t)$ ), la curvatura seccional (en  $M$ ) de los planos no-degenerados en  $T_{(t,p)}M$  es la misma si y sólo si se verifica  $K_u(t) = K_\sigma(t)$ .



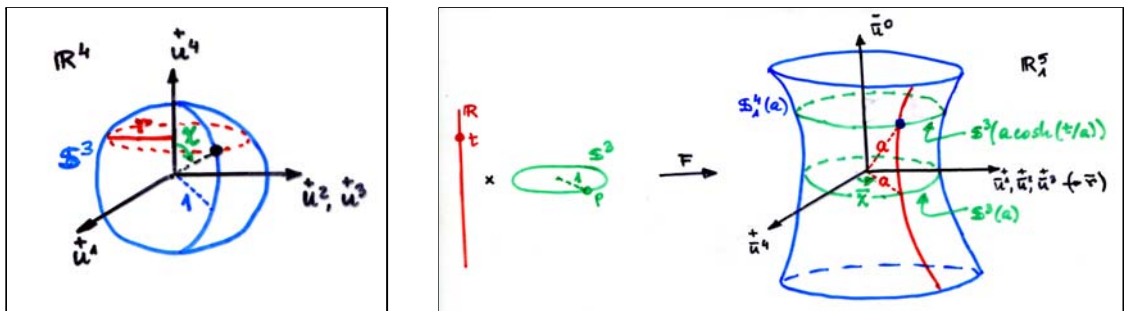
**12.16. (Isometrías en Robertson-Walker)**

Sea  $M(k, f) = I \times_f S$  un espacio-tiempo de Robertson-Walker con curvatura (seccional) no constante. Probar que cualquier isometría  $\Phi : M(k, f) \rightarrow M(k, f)$  es de la forma  $\Phi = \phi_I \times \phi_S$ , donde  $\phi_I : I \rightarrow I$  y  $\phi_S : S \rightarrow S$  son isometrías y  $f \circ \phi_I = f$ .

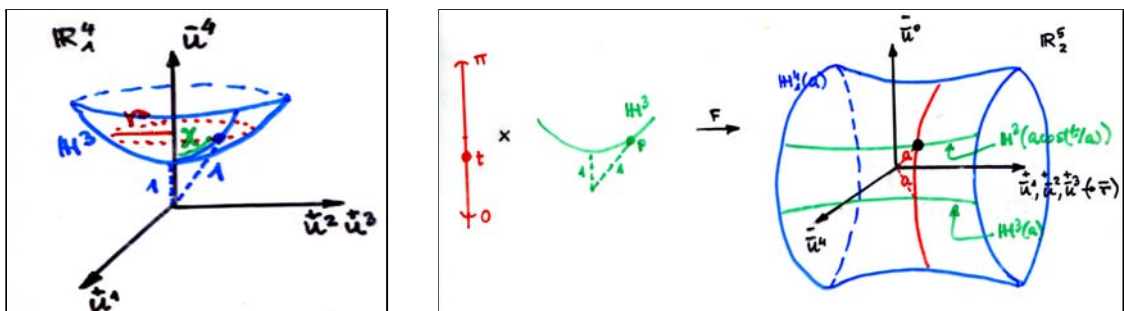
Indicación: si  $K_u$  y  $K_\sigma$  son las curvaturas seccionales principales de  $M(k, f)$ , se sigue de la hipótesis que debe ser  $K_u(t_0) \neq K_\sigma(t_0)$ , para algún  $t_0 \in I$ . Úsese entonces el Ejercicio 12.15c para probar que  $U \perp \Phi(S(t_0))$ .

**12.17. (Hipercuádricas como Robertson-Walker)**

(a) Probar que  $\mathbb{S}_1^4$  es isométrico a un espacio-tiempo de Robertson-Walker.



(b) Probar que, para una adecuada elección de  $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , el producto  $(0, \pi) \times_f \mathbb{H}^3$  es isométrico a una mitad de  $\mathbb{H}_1^4(a)$ ,  $a > 0$ .



(c) Probar que  $\mathbb{H}_1^4(a)$  no es isométrico a un espacio-tiempo de Robertson-Walker.

**12.18. (Espacio-tiempos estáticos 2)****12.19. (Friedmann con constante cosmológica)\***

Sea  $(M, g) = M(k, f)$  un espacio-tiempo de Robertson-Walker que verifica la ecuación de Einstein *con constante cosmológica*  $Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T$  y cuyo flujo de Robertson-Walker  $(U, \rho, p)$  es de presión nula.

- (a) Probar que, para cualquier valor de  $k$  ( $-1, 0$  ó  $+1$ ), existe  $\Lambda$  que posibilita  $f = cte$ . Probar que, si además  $\rho > 0$  (esto es, el flujo es polvo), entonces debe ser  $k = +1$  ("modelo estático de Einstein").

A partir de ahora, supóngase además la función de Hubble cumple  $H(t_0) \equiv H_0 > 0$  (esto es, que se trata de un modelo de Friedmann).

- (b) Describir cualitativamente (en función de  $k$  y  $\Lambda$ ) las características de  $M(k, f)$  como solución de la ec. de Friedmann  $f'^2 = E - V_\Lambda(f)$ , con "energía total"  $E \equiv -k$  y "energía potencial"  $V_\Lambda(f) \equiv -(\frac{A}{f} + \frac{\Lambda f^2}{3})$

- (c) Denotando  $\rho_0^c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi}$ ,  $\Omega_0 \equiv \rho_0/\rho_0^c$  y  $\Omega_{\Lambda 0} \equiv \Lambda/8\pi\rho_0^c = \Lambda/3H_0^2$ , probar que se verifica ("expansión siempre"):

$$f' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega_{\Lambda 0} \geq 0, & \text{si } k = -1 \text{ ó } 0 \\ \Omega_{\Lambda 0} > 0 \text{ y } \frac{3}{2}\sqrt{2}\Omega_0^{2/3}\Omega_{\Lambda 0}^{1/3} - (\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} - 1) \geq 0, & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Indicación para (c): considerar la ecuación de Friedmann (habida cuenta de que  $A \equiv 8\pi\rho f^3/3 > 0$ )

$$\left(\frac{f'}{f(t_0)}\right)^2 = \frac{-k}{f^2(t_0)} - \frac{V_\Lambda(f)}{f^2(t_0)} = \frac{-k}{f^2(t_0)} + \frac{8\pi}{3} \left( \rho_0 \frac{f(t_0)}{f} + \frac{\Lambda}{8\pi} \left(\frac{f}{f(t_0)}\right)^2 \right)$$

**12.20. (Caída libre en Robertson-Walker)\***

Sea  $\gamma(\tau)$  una partícula material en caída libre en un espacio-tiempo de Robertson-Walker  $I \times_f S$ .

- (a) Denotando por  $v$  (el módulo de) su velocidad respecto del campo de observadores  $U \equiv \partial_t$ , deducir la expresión

$$\frac{dv}{d\tau} = -\left(\frac{df/dt}{f} \circ \gamma\right) v\sqrt{1-v^2}.$$

- (b) Deducir de (a) que, mientras  $df/dt \neq 0$ , se verifica (con  $\Upsilon \equiv (1-v^2)^{-1/2}$ ):

$$\Upsilon v(f \circ \gamma) = cte.$$

(c) Deducir de (b) que, mientras  $df/dt \neq 0$ , se verifica:

$$v_2 = \frac{\Upsilon_1 v_1}{\sqrt{(1+z)^2 + \Upsilon_1^2 v_1^2}},$$

siendo  $z := \frac{E_{em} - E_{rec}}{E_{rec}}$  el desplazamiento de frecuencia cosmológico entre los instantes  $t_1, t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) y denotando  $v_1 \equiv v(t_1)$  y  $v_2 \equiv v(t_2)$ .

Indicación para (a): definiendo  $\cosh \varphi \equiv - \langle \gamma', \partial_t \rangle$ , calcular  $\frac{d}{d\tau}(\cosh \varphi)$  y, de ahí,  $\frac{dv}{d\tau} \equiv \frac{d}{d\tau}(\tanh \varphi)$ .

Indicación para (b): deducir de (a) la expresión  $\frac{dv}{d(f \circ \gamma)} = \frac{-v(1-v^2)}{f \circ \gamma}$  e integrarla.

### 12.21. (Causalidad en Einstein-de Sitter)\*

Sean  $(M, g)$  variedad semiriemanniana y  $\bar{g}$  métrica en  $M$  conformemente equivalente a  $g$  (esto es:  $\bar{g} = hg$ , para cierta  $h \in C^\infty(M)$  positiva).

(a) Escribiendo (s.p.d.g.)  $h \equiv e^{2\sigma}$ , con  $\sigma \in C^\infty(M)$ , probar que las conexiones de Levi-Civita  $D$  y  $\bar{D}$  de ambas métricas verifican ( $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ):

$$\bar{D}_X Y - D_X Y = d\sigma(X)Y + d\sigma(Y)X - g(X, Y) \text{grad}_g \sigma.$$

(b) Probar que una curva en  $M$  es pregeodésica luz para  $D$  si y sólo si es pregeodésica luz para  $\bar{D}$ .

(c) Sea ahora  $(M, g)$  el "espacio-tiempo de Einstein-de Sitter", esto es,  $(M, g) \equiv M(k=0, f=t^{2/3}) \equiv (0, \infty) \times_{t^{2/3}} \mathbb{R}^3$ . Utilizando los Ejercicios 6.1a y 12.3, probar que: si  $\gamma$  es un observador comóvil inextensible en  $M$  y  $p$  es un suceso de  $M$  no perteneciente a la trayectoria de  $\gamma$ ,

(i) existe *exactamente una* pregeodésica luz futura desde  $p$  hasta  $\text{Im } \gamma$  (esto es,  $\gamma$  puede obtener información de cualquier suceso, "si espera lo suficiente": no existe un "horizonte de sucesos" para  $\gamma$ ).

(ii) existe *una o ninguna* pregeodésica luz futura desde  $\text{Im } \gamma$  hasta  $p$  (esto es,  $p$  es "inconsciente de la existencia" de ciertos observadores comóviles: existe un "horizonte de partículas" para  $p$ ).

Indicación para (a): cálculo en coordenadas.



**12.22. (Modelo  $\Lambda$ CDM)\***

Considérese el modelo cosmológico de Friedmann estándar correspondiente a  $k = 0$  y  $\Lambda > 0$ , esto es,  $(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^3, \Lambda > 0, \rho)$ , con función de alabeo  $f$  dada por

$$f = C \left( \cosh(\sqrt{3\Lambda} t) - 1 \right)^{1/3}, \quad \text{con } C^3 = 3A/2\Lambda$$

(para cierta constante  $A > 0$ ), y donde el valor positivo de  $H := \frac{f'}{f}$  para cierto  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  es  $H_0 \equiv H(t_0) \simeq (13'8 \cdot 10^9 \text{ años})^{-1}$ . Sea  $\rho_0^c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi}$  la densidad de energía crítica (en  $t_0$ ) y supóngase que  $\rho_0 \equiv \rho(t_0) = 0'27\rho_0^c$ .

- (a) Hallar la edad  $t_0$  del universo y el instante  $t_{\text{cambio}}$  en el que la aceleración cambió de signo.
- (b) Hallar el instante de emisión  $t_p$  para una galaxia con  $z = 1/5$ , para un quasar con  $z = 2$  y para la radiación de fondo ( $z = 1089$ ).
- (c) Hallar la distancia (propia) actual a una galaxia con  $z = 1/5$  y a un quasar con  $z = 2$ , el horizonte de partículas y el horizonte de sucesos.
- (d) Hallar el desplazamiento de frecuencia cosmológico para una galaxia cuya distancia (propia) actual sea la distancia de Hubble y para otra cuya distancia (propia) actual sea el horizonte de sucesos