

RELATIVIDAD Y COSMOLOGIA
NOTAS SOBRE EL LIBRO DE B. O'NEILL

Eduardo Aguirre

Curso 2012 - 13

1. NOTAS. TEORÍA DE VARIEDADES

(Capítulo 1 de [6])

1.1. VARIEDADES. SUBVARIEDADES. INMERSIONES Y SUBMERSIONES

(A) Variedades

(Def.) **Carta** $\xi \equiv (x^i) : (S \supset) \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en un espacio topológico S

Carta estándar $id \equiv (u^i) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

(Def. 1.3) **Variedad diferenciable** M (incluye Hausdorff!), **dimensión**

(Def. 1.6) **Aplicación diferenciable** ($\equiv C^\infty$) $\phi : M \rightarrow N$ (\forall cartas ξ de M y η de N , $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ es C^∞). Si $N = \mathbb{R}$, notación $\mathfrak{F}(M)$

(Def. 1.9) **Vector tangente en** $p \in M$ (\equiv "derivación" en p): aplicación $v : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que es \mathbb{R} -lineal y Leibnitz $_p$ (\rightsquigarrow **espacio tangente** $T_p M$)

▪ (Def. 1.10) Dadas carta $\xi \equiv (x^i) : (M \supset) \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p \in \mathcal{U}$ y $f \in \mathfrak{F}(M)$, se definen (**derivadas parciales de f en p**) $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi p)$

▪ Notación: $\partial_{x^i} |_p \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} |_p$

▪ (Teor. 1.12) El conjunto $\{\partial_{x^i} |_p\}$ es base de $T_p M$ y $v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \partial_{x^i} |_p$

(Def. 1.13) Dada aplicación diferenciable $\phi : M \rightarrow N$ y $p \in M$, se define la aplicación lineal (**diferencial** o **aplicación tangente de ϕ en p**)

$$d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi p} N, v \mapsto d\phi_p(v) \quad (: g \mapsto v(g \circ \phi), \forall g \in \mathfrak{F}(N))$$

▪ (Nota) Dados $f \in \mathfrak{F}(M)$, $p \in M$ y $v \in T_p M$, se tiene:

$$df_p(v) \stackrel{(1.12)}{=} (df_p(v))(u) \frac{d}{du} |_{fp} \stackrel{(1.13)}{=} v(\underbrace{u \circ f}_f) \frac{d}{du} |_{fp}$$

▪ (Lema 1.14) Dadas cartas $\xi \equiv (x^1, \dots, x^m)$ de M y $\eta \equiv (y^1, \dots, y^n)$ de N :

$$d\phi_p(\partial_{x^i} |_p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y^j \circ \phi)}{\partial x^i}(p) \partial_{y^j} |_{\phi p} \quad (i = 1, \dots, m)$$

▪ (Lema 1.15) (**cadena**): $d(\psi \circ \phi)_p = d\psi_{\phi p} \circ d\phi_p$

- (Teor. 1.16) (**función inversa**): $d\phi_p$ es isomorfismo $\Leftrightarrow \exists M$ -entorno \mathcal{V} de p tal que $\phi|_{\mathcal{V}}$ es difeomorfismo sobre un N -entorno $\phi(\mathcal{V})$ de ϕp

(Def. 1.17) Dada **curva** $\alpha : I \rightarrow M, t \mapsto \alpha(t)$ (aplicación C^∞ con $I \subset \mathbb{R}$ abierto), se define (**velocidad de α en t**)

$$\alpha'(t) := d\alpha_t\left(\frac{d}{du}\Big|_t\right) \in T_{\alpha(t)}M$$

- Dada carta $\xi \equiv (x^i) : (M \supset) \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\alpha'(t) \stackrel{(1.14)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{d(x^i \circ \alpha)}{du}(t) \partial_{x^i} \Big|_{\alpha(t)}$$

(Def.) **Campos de vect.** $V \in \mathfrak{X}(M)$ (incluye: $f \in \mathfrak{F}(M) \Rightarrow Vf \in \mathfrak{F}(M)$)

- (Def.) Dada carta $\xi \equiv (x^i) : (M \supset) \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, se definen (**campos coordenados**) $\partial_{x^i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$

- (Def.) **Derivación en $\mathfrak{F}(M)$** : aplicación $\mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ que es \mathbb{R} -lineal y Leibnitz. Biyección: derivaciones \leftrightarrow campos

- (Def.) **Corchete de Lie en $\mathfrak{X}(M)$** : $[V, W]f := V(Wf) - W(Vf)$

- (Def. 1.20) Dada aplic. diferenciable $\phi : M \rightarrow N$, se dice que $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ están **ϕ -relacionados** si $d\phi_p(X_p) = Y_{\phi p}, \forall p \in M$

(Def.) **1-formas** $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ (incluye: $X \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow \theta(X) \in \mathfrak{F}(M)$)

- (Def. 1.24) Dada $f \in \mathfrak{F}(M)$, se define (**diferencial de f**) $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ por $df_p(v) := v(f) \in \mathbb{R}, \forall v \in T_pM$ (recordar la otra acepción de df_p en 1.13: $df_p(v) = v(f) \frac{d}{dt} \Big|_{f_p} \stackrel{(1.45)}{\equiv} (v(f))_{f_p} \in T_{f_p}\mathbb{R}$)

(B) Subvariedades

(Def. 1.26) **Subvariedad** (\equiv **subvariedad regular**) $P \subset M$: variedad y subespacio topológico tal que la inclusión $j : P \hookrightarrow M$ es diferenciable y dj_p es inyectiva ($\forall p \in P$)

(Ejemplo) Dadas $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3, t^2)$, $g : (-\pi/4, 5\pi/4) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\sin t, \sin 2t)$ y $h : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\sin t, \sin 2t)$, es posible dar estructura de variedad a las tres imágenes $\text{Im } f$ (via la carta global $\pi_1|_{\text{Im } f}$), $\text{Im } g$ (que no puede ser conexa) y $\text{Im } h$ (via la carta global h^{-1}). Pero ni $\text{Im } g$ ni $\text{Im } h$ son subespacios topológicos de \mathbb{R}^2 (abiertos de \mathbb{R}^2 en torno a $(0, 0)$ intersectan ambas ramas de $\text{Im } g$ y $\text{Im } h$) y, si bien $\text{Im } f$ lo es, la inclusión $j : \text{Im } f \rightarrow \mathbb{R}^2, x_1 \mapsto (x_1, x_1^{2/3})$ no es diferenciable en $x = 0$. Con lo que ninguna de las tres imágenes es subvariedad de \mathbb{R}^2 .

- (Def. 1.27) Una carta $\xi : (M \supset) \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice **adaptada** a un subconjunto $P \subset M$ si $\mathcal{U} \cap P$ es una cortadura coordinada de \mathcal{U} (i.e. si $n - p$ coordenadas de $\mathcal{U} \cap P$ son constantes, para cierto $p < n$)
- Un subconjunto $P \subset M$ es una subvariedad si (Prop. 1.31) y sólo si (Prop. 1.28) existe en torno a cada $p \in P$ carta de M adaptada a P

(Def. 1.34) **Inmersión:** aplic. diferenciable $\phi : M \rightarrow N$ tal que $d\phi_p$ es inyectiva ($\forall p \in M$) (necesariamente $m \leq n$). En el ejemplo anterior, f no es inmersión (aunque f es diferenciable, df_0 no es inyectiva), g es inmersión pero no inyectiva, y h es inmersión inyectiva.

(Def.) **Encaje:** inmersión inyectiva $\phi : M \rightarrow N$ tal que la aplic. inducida $\bar{\phi} : M \rightarrow \phi(M)$ es (con la topología subconjunto de $\phi(M)$) un homeomorfismo. En el ejemplo anterior, ni f ni g ni h son encajes.

- Localmente, toda inmersión es un encaje (globalmente NO). En efecto: si $\phi : M \rightarrow N$ es inmersión, entonces (1.33(3)): ϕ es localmente inyectiva y, para todo $p \in M$, existe M -abierto $\mathcal{U}(\ni p)$ tal que $\bar{\phi}(\mathcal{U})$ es un $\phi(M)$ -abierto
- Si $P \subset M$ es una subvariedad, entonces (def. de subvariedad) la inclusión $j : P \hookrightarrow M$ (inyectiva) es una inmersión y la aplicación inducida $\bar{j} : P \rightarrow j(P) \subset M$ es un homeomorfismo, con lo que j es un encaje.
- Si $\phi : M \rightarrow N$ es un encaje, entonces (def. de encaje) $\bar{\phi} : M \rightarrow \phi(M)$ es un homeomorfismo. Demos a $\phi(M)$ la estructura diferenciable que hace a $\bar{\phi}$ un difeomorfismo. Entonces la inclusión $j : \phi(M) \hookrightarrow N$, que verifica $j = \phi \circ \bar{\phi}^{-1}$, resulta ser (al ser ϕ inmersión y por 1.15) una inmersión, y por tanto $\phi(M)$ una subvariedad (Def. 1.26)

(Def.) Sean $\psi : M \rightarrow N$ aplicación diferenciable y $q \in \text{Im } \psi$. Si $d\psi_p$ es suprayectiva $\forall p \in \psi^{-1}(q)$ (necesariamente $m \geq n$), se dice entonces que q es un **valor regular de** ψ . En tal caso, $\psi^{-1}(q)$ es (Corol. 1.36) subvariedad de M de codimensión n (i.e. de dimensión $m - n$).

(Def. 1.38) **Submersión:** aplic. diferenciable $\psi : M \rightarrow N$ tal que $d\psi_p$ es suprayectiva ($\forall p \in M$) (necesariamente $m \geq n$). En tal caso, todo $q \in \text{Im } \psi$ es valor regular de ψ

(Ejemplo) La aplicación $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x^1, x^2) \mapsto x^1$ es una submersión: $\forall p \in \mathbb{R}^2, d\pi_p(\partial_{x^i} |_p) = \delta_{i1} \partial_{x^i} |_{\pi p}$

1.2. ALGUNAS VARIEDADES ESPECIALES

Topológicamente, las variedades:

- (por la definición de carta) son localmente conexas y localmente compactas
- (por la definición de carta) son conexas sólo si (por supuesto, también "si") son arco-conexas (de hecho, arco-conexas por curvas C^∞). Dada la función $f : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, \sin \frac{1}{x})$, la clausura $\overline{\text{Im } f}$ es conexo pero no arco-conexo (y no es variedad).
- (incluido en la Def. 1.3) son Hausdorff
- (lo supondremos cuando se precise) poseen una base de entornos numerable, lo que implica (*Prop. 1.40*) que admiten **particiones de la unidad** (i.e. conjunto de funciones $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ tal que (1) $0 \leq f_\alpha \leq 1, \forall \alpha$, (2) $\{\text{soporte}(f_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ es localmente finito, y (3) $\sum_\alpha f_\alpha = 1$, *Def. 1.39*) subordinadas a cualquier recubrimiento por abiertos.

Se definen las **variedades producto** $M \times N$, que verifican:

- Las proyecciones $\pi : M \times N \rightarrow M$ y $\sigma : M \times N \rightarrow N$ son submersiones
- Una aplic. $\phi : P \rightarrow M \times N$ es C^∞ si y sólo si lo son $\pi \circ \phi$ y $\sigma \circ \phi$
- $\forall (p, q) \in M \times N$, los conjuntos $M \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$ y $\{p\} \times N = \pi^{-1}(p)$ son subvariedades de $M \times N$
- $\forall (p, q) \in M \times N$, las restricciones $\pi|_{M \times \{q\}} : M \times \{q\} \rightarrow M$ y $\sigma|_{\{p\} \times N} : \{p\} \times N \rightarrow N$ son difeomorfismos
- (*Lema 1.43*) $\forall (p, q) \in M \times N$, el espacio tangente $T_{(p,q)}(M \times N)$ es suma directa de $T_{(p,q)}M \equiv T_{(p,q)}(M \times \{q\})$ ("horizontal") y $T_{(p,q)}N \equiv T_{(p,q)}(\{p\} \times N)$ ("vertical")

(*Def.*) **Levantamientos:**

- $\tilde{f} := f \circ \pi \in \mathfrak{F}(M \times N)$ de $f \in \mathfrak{F}(M)$ (y análogamente desde N)
 $\tilde{x} \in T_{(p,q)}(M \times N)$ de $x \in T_p M$, con $d\pi(\tilde{x}) = x$ y $d\sigma(\tilde{x}) = 0_q$
 $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M \times N)$ de $X \in \mathfrak{X}(M)$, con $d\pi(\tilde{X}_{(p,q)}) = X_p$ y $d\sigma(\tilde{X}_{(p,q)}) = 0_q$.
- El conjunto de campos levantados $\mathcal{L}(M) := \{\tilde{X} \mid X \in \mathfrak{X}(M)\} \subset \mathfrak{X}(M \times N)$ es un \mathbb{R} -subespacio vectorial (pero no un $\mathfrak{F}(M \times N)$ -submódulo!).

- (Corol. 1.44): (1) $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene: $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$
- (2) $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\forall V \in \mathfrak{X}(N)$, se tiene: $[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$

Un espacio vectorial V de dimensión n sobre \mathbb{R} admite una única (Prop. 1.42) estructura de variedad tal que cada isomorfismo lineal $\{e_i\} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una carta (sus coordenadas (x^i) verifican $v =: \sum_i x^i(v)e_i$).

Para cada $p \in V$, existe un isomorfismo canónico (Def. 1.45)

$$V \ni v \mapsto v_p := \alpha'(0) \in T_p V$$

(con $\alpha(t) := p + tv$), que verifica (Lema 1.46) en cada carta lineal (x^1, \dots, x^n) :

$$v_p \stackrel{(1.17)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{d(x^i \circ \alpha)}{du}(0) \partial_{x^i} \Big|_{\alpha(0)} \stackrel{x \text{ lineal}}{=} \sum_{i=1}^n x^i(v) \partial_{x^i} \Big|_p \quad \left(\stackrel{(1.12)}{\Leftrightarrow} v_p(x^i) = x^i(v) \right)$$

Se sigue que, si $\{e_i\}$ es una base (de V) con carta asociada (x^i) (de $M = V$), entonces: $(e_i)_p = \partial_{x^i} \Big|_p$.

2. NOTAS. TENSORES

(Capítulo 2 de [6])

2.1. CAMPOS DE TENSORES. COMPONENTES

(Def. 2.1) **Campo de tensores de tipo** (r, s) (con $r, s \geq 0$): aplicación $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ (con $\mathfrak{T}_0^0(M) \equiv \mathfrak{F}(M)$). El conjunto $\mathfrak{T}_s^r(M)$ de campos de tensores de tipo (r, s) es un $\mathfrak{F}(M)$ -módulo

(Def.) Dados $A \in \mathfrak{T}_s^r(M), B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}$ (M), se define el **producto tensorial** $A \otimes B \in \mathfrak{T}_{s+s'}^{r+r'}(M)$ por:

$$A \otimes B \left(\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'} \right) := A \left(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s \right) \cdot B \left(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'} \right)$$

Interpretaciones:

- $\mathfrak{T}_1^0(M) \stackrel{\text{Def.}}{=} \mathfrak{X}^*(M)$ y (puesto que $(V^*)^* = V$, para todo espacio vectorial V de dim. finita) $\mathfrak{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}(M)$
- A cada aplicación $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal $\bar{A} : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, se le asocia $A \in \mathfrak{T}_s^1(M)$ dado por: $A(\theta, X_1, \dots, X_s) := \theta(\bar{A}(X_1, \dots, X_s))$

(Prop. 2.2) Dados $A \in \mathfrak{T}_s^r(M), p \in M$ y $(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s), (\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^r, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s)$ tales que $\theta^i(p) = \bar{\theta}^i(p)$ ($i = 1, \dots, r$), $X_j(p) = \bar{X}_j(p)$ ($j = 1, \dots, s$), entonces:

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = A(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^r, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s)(p)$$

(Def.) Dados $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ y carta $\xi \equiv (x^i) : (M \supset) \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, se definen (**componentes**) $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} := A(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_s}}) \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ y se tiene (Lema 2.5):

$$A|_{\mathcal{U}} = \sum_{(i)(j)} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

2.2. CONTRACCIONES E IMAGEN INVERSA. PRODUCTOS ESCALARES

(A) Contracciones e imagen inversa

(Def.) Dado $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ($r, s \geq 1$), se define (**contracción** en los índices a y b) $\mathcal{C}_b^a A \in \mathfrak{T}_{s-1}^{r-1}(M)$ por (en cada carta $\xi \equiv (x^i) : (M \supset) \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$):

$$(\mathcal{C}_b^a A)|_{\mathcal{U}}(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}) := \sum_m A \left(\theta^1, \dots, \underbrace{dx^m}_{a\text{-ésima}}, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, \underbrace{\partial_{x^m}}_{b\text{-ésima}}, \dots, X_{s-1} \right)$$

- (Corol. 2.7) Dada carta $\xi \equiv (x^i) : (M \supset) \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$(\mathcal{C}_b^a A)_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_m A_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1} m \dots m}$$

- (Ejemplo) Si $A = X \otimes \theta \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, es $\mathcal{C}A \equiv \mathcal{C}_1^1 A = \sum_m X^m \theta_m = \theta(X)$, que es la traza de la aplicación $\mathfrak{F}(M)$ -lineal asociada (ver 2.1) $\bar{A} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), V \mapsto \theta(V)X$
- (Nota) Recuérdese que la noción de 'traza' está bien definida para aplicaciones lineales $L : V \rightarrow V$, pero no para formas bilineales $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. En efecto, si b, b' son dos bases de V relacionadas por $b = b'A$ (para cierta matriz A), las columnas $v_b, v_{b'}$ representativas de $v \in V$ verifican $v_{b'} = Av_b$ (*), con lo que las matrices $L_b, L_{b'}$ y $B_b, B_{b'}$ representativas de L y B verifican:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{b'} Av_b \stackrel{(*)}{=} L_{b'} v_{b'} = (Lv)_{b'} \stackrel{(*)}{=} A(Lv)_b = AL_b v_b, \quad \forall v \\ \Rightarrow L_b = A^{-1} L_{b'} A, \quad \Rightarrow \text{tr} L_b = \text{tr} L_{b'} \\ v_b^T A^T B_{b'} A w_b \stackrel{(*)}{=} v_{b'}^T B_{b'} w_{b'} = B(v, w) = v_b^T B_b w_b, \quad \forall v, w \\ \Rightarrow B_b = A^T B_{b'} A, \quad \Rightarrow \text{tr} B_b \stackrel{\text{en general}}{\neq} \text{tr} B_{b'} \end{array} \right.$$

(Def. 2.8) Dados aplic. diferenciable $\phi : M \rightarrow N$ y campo $A \in \mathfrak{T}_s^0(N)$ (covariante!), se define (**imagen inversa por ϕ**) $\phi^* A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ por

$$(\phi^* A)_p(v_1, \dots, v_s) := A_{\phi p}(d\phi_p(v_1), \dots, d\phi_p(v_s))$$

- Dada $f \in \mathfrak{F}(N)$, su diferencial (1.24) $df \in \mathfrak{X}^*(N)$ verifica:

$$(\phi^* df)_p(v) := df_{\phi p}(d\phi_p(v)) \stackrel{(1.15)}{=} d(f \circ \phi)_p(v) \stackrel{(1.24)}{=} v(f \circ \phi)$$

- (Lema 2.9) $\phi^*(A \otimes B) = \phi^* A \otimes \phi^* B$ y $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$ ($\forall \psi : N \rightarrow P$)

Sobre **derivaciones tensoriales** (Def. 2.11 y Teor. 2.15), ver Cap. 3

(B) Productos escalares

Sea B una forma bilineal simétrica (en un espacio vectorial V):

- (Def. 2.17) Se dice que B es **definida positiva** si: $B(v, v) > 0$ ($\forall v \neq 0$), **definida negativa** si: $B(v, v) < 0$ ($\forall v \neq 0$), y **no-degenerada** si: $B(v, w) = 0$ ($\forall w$) $\Rightarrow v = 0$
- (Def. 2.18) Se define el **índice de B** como la dimensión máxima de los subespacios $W \subset V$ tales que $B|_W$ es definida negativa
- Se verifica la **identidad de polarización**:

$$B(v, w) \equiv \frac{1}{2}[B(v+w, v+w) - B(v, v) - B(w, w)]$$

- (Lema 2.19) B es no-degenerada si y sólo si su matriz relativa a una (y cualquier) base es invertible

Un **producto escalar** g (en un espacio vectorial V) es (Def. 2.20) una forma bilineal simétrica no-degenerada

- (Lema 2.22) Dado subespacio $W \subset V$, el subespacio (**complemento ortogonal**) $W^\perp := \{v \in V : g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$ verifica:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V \quad \text{y} \quad (W^\perp)^\perp = W$$

- (Lema 2.23) W es no-degenerado (i.e. $g|_W$ es no-degenerado) si y sólo si $V = W \oplus W^\perp$

(Ejemplo) En $(V = \mathbb{R}^2, g = e^1 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^2)$ el subespacio $W = \text{Span}(e_1 + e_2)$ es degenerado y verifica $W = W^\perp$

- (Lema 2.24) En $(V \neq \{0\}, g)$ hay bases $\{e_i\}$ **ortonormales** (i.e. tales que $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varepsilon_i$, con $\varepsilon_i \equiv g(e_i, e_i) = \pm 1$). El conjunto $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ se denomina la **signatura** de $\{e_i\}$
- (Lema 2.25) Dados $v \in V$ y base ortonormal $\{e_i\}$ con signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, se tiene: $v = \sum_i \varepsilon_i g(v, e_i) e_i$.
- (Lema 2.26) Dada base ortonormal $\{e_i\}$, el número de signos menos en su signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ es igual al índice de g
- (Lema 2.26bis) Una aplicación lineal $L : (V, g) \rightarrow (V, g)$ preserva productos escalares si (también "sólo si") preserva formas cuadráticas [inmediata consecuencia de la identidad de polarización] y sólo si es inyectiva [inmediata consecuencia de la no-degeneración de g].

3. NOTAS. GEOMETRÍA SEMIRIEMANNIANA

(Capítulo 3 de [6])

3.1. VARIEDADES SEMIRIEMANNIANAS. ISOMETRÍAS. CONEXIONES

(A) Variedades semiriemannianas. Isometrías

(Def 3.1) (**Campo de tensor(es) métrico** $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ (simétrico, no degenerado y de índice constante; esta última condición es superflua si M es conexa, ver Ejerc. 3.10b) sobre una variedad diferenciable $M \rightsquigarrow$

(Def. 3.2) **Variedad semiriemanniana** (M, g)

- **Índice** ν ($0 \leq \nu \leq n \equiv \dim M$)
- Casos $\nu = 0$ (**riemanniana**) y $\nu = 1$ (**lorentziana** si $n \geq 2$)
- g 'metriza' a M si y sólo si g es riemanniana y M es conexa (\rightsquigarrow función **distancia**, ver Nota 4 en 12.6."Distancias en los ETRW")
- Dada cualquier base \mathcal{U} -local $\{X_i\}$ (\leftrightarrow base dual $\{\theta^i\}$), la matriz de funciones (g_{ij}) (donde $g_{ij} \equiv g(X_i, X_j)$) es invertible (2.19) y se tiene: $g|_{\mathcal{U}} = \sum_{ij} g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j$.
- (*Ejemplo*) La variedad semiriemanniana $\mathbb{R}_\nu^n \equiv (\mathbb{R}^n, g)$, donde $g(v_p, w_p) := \langle v, w \rangle$ (con v_p definido en 1.45) y \langle, \rangle es el producto escalar canónico de índice ν en el esp. vectorial $V \equiv \mathbb{R}^n$. Sea $\{e_i\}$ la base estándar (de $V = \mathbb{R}^n$), que tiene por carta asociada (de $M = \mathbb{R}^n$) la carta estándar (u^i) . Para todo $p \in \mathbb{R}^n$, y puesto que $(e_i)_p \stackrel{(1.46)}{=} \partial_{u^i}|_p$, se tiene:

$$g(\partial_{u^i}|_p, \partial_{u^j}|_p) = \langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij},$$

con $\varepsilon_i = -1$ (para $1 \leq i \leq \nu$) ó $+1$ (para $\nu + 1 \leq i \leq n$). De donde se sigue: $g = \sum_i \varepsilon_i du^i \otimes du^i$.

- **Notación:** sobreentendiendo una carta local (x^i) concreta de M : $\partial_i \equiv \partial_{x^i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ y también $f_{,i} \equiv \partial_i f$.

(Def 3.3) **Carácter causal** de vectores v tangentes a (M, g) : **espacial** si $g(v, v) > 0$ ó $v = 0$, **temporal** si $g(v, v) < 0$, y **luz** (o **nulo**) si $g(v, v) = 0$ con $v \neq 0$. Clasificación exhaustiva y excluyente.

La forma cuadrática $\mathfrak{q} : TM \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto g(v, v)$ determina g por polarización (2.18): $g(v, w) = \frac{1}{2}(\mathfrak{q}(v+w) - \mathfrak{q}(v) - \mathfrak{q}(w))$.

(Def 3.4) Dadas (M, g) y subvariedad ("regular", Def. 1.26) $j : P \rightarrow M$, se dice que (P, j^*g) es una **subvariedad semiriemanniana** si j^*g es no-degenerada y de índice constante.

- Ejemplo: si $P := \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_1^2$, entonces (P, j^*g) NO es subvariedad semiriemanniana.

(Lema 3.5) Dadas $(M, g_M), (N, g_N)$ y las proyecciones $\pi : M \times N \rightarrow M$ y $\sigma : M \times N \rightarrow N$, resulta que $\pi^*g_M + \sigma^*g_N \in \mathfrak{T}_2^0(M \times N)$ es un tensor métrico de índice $\text{ind}(g_M) + \text{ind}(g_N)$; \rightsquigarrow **variedad semiriemanniana producto** $(M \times N, \pi^*g_M + \sigma^*g_N)$. En particular: $\mathbb{R}_\nu^n = \mathbb{R}_\nu^\nu \times \mathbb{R}^{n-\nu}$.

(Def 3.6) **Isometría:** difeomorfismo $\phi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ tal que $\phi^*g_N = g_M$ (i.e. $g_N(d\phi_p(v), d\phi_p(w)) = g_M(v, w), \forall p \in M$). Con lo que su diferencial en cada punto es (Teor. 1.16, \Leftrightarrow) una *isometría lineal*.

(Lema 3.7) Si $\psi : (V, \langle, \rangle) \rightarrow (W, \langle, \rangle')$ es una isometría lineal, entonces: $\psi : (M \equiv V, g) \rightarrow (N \equiv W, g')$ es una isometría (donde $g(v_p, w_p) := \langle v, w \rangle$ y $g'(v_q, w_q) := \langle v, w \rangle'$).

Demostración. La aplicación $\psi : V \rightarrow W$ es un isomorfismo lineal, luego $\psi : M \equiv V \rightarrow N \equiv W$ es un difeomorfismo.

Si $(x^i), (y^j)$ son las cartas globales inducidas en M, N por bases $\{e_i\}, \{f_j\}$ de V, W , respectivamente, se tiene:

$$\begin{aligned} \psi e_i &\equiv \sum_j \psi_i^j f_j \Rightarrow \psi(v \equiv \sum_i x^i(v) e_i) = \sum_j \left(\sum_i x^i(v) \psi_i^j \right) f_j \quad , \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^j(\psi v) = \sum_i x^i(v) \psi_i^j \quad (*) \quad , \end{aligned}$$

con lo que se concluye:

$$\begin{aligned} d\psi_p(v_p) &\stackrel{\text{Lema 1.46}}{=} \sum_i x^i(v) d\psi_p(\partial_{x^i} |_p) \stackrel{\text{Lema 1.14}}{=} \sum_{i,j} x^i(v) \frac{\partial(y^j \circ \psi)}{\partial x^i}(p) \partial_{y^j} |_{\psi p} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \sum_{i,j} x^i(v) \psi_i^j \partial_{y^j} |_{\psi p} \stackrel{(*)}{=} \sum_j y^j(\psi v) \partial_{y^j} |_{\psi p} \stackrel{\text{Lema 1.46}}{=} (\psi v)_{\psi p} \quad , \Rightarrow \\ \Rightarrow g'(d\psi(v_p), d\psi(w_p)) &= g'((\psi v)_{\psi p}, (\psi w)_{\psi p}) \stackrel{\text{Def. de } g'}{=} \langle \psi v, \psi w \rangle' \stackrel{\text{Hipótesis}}{=} \\ &= \langle v, w \rangle \stackrel{\text{Def. de } g}{=} g(v_p, w_p) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(B) Conexiones

La idea de "conexión" como ley de transporte-a-lo-largo-de-curvas de vectores tangentes.

(Def. 3.9) Axiomática (Koszul) de **conexión** sobre M : aplicación

$$D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) , (V, W) \mapsto D_V W$$

(llamamos a $D_V W$ la **derivada covariante de W con respecto a V** para la conexión D) tal que:

- (D1) $D_V W$ es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en V ,
- (D2) $D_V W$ es \mathbb{R} -lineal en W , y
- (D3) (Leibnitz) $D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W$.

Nota 1. (D1) implica que: $\forall p \in M$ y $\forall v \in T_p M$, queda bien definido $D_v W := (D_V W)(p)$, para cualquier $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $V(p) = v$. En efecto, se tiene:

$$\begin{aligned} V_1(p) = V_2(p) &\Rightarrow V_1 = V_2 + fZ \text{ (con } f(p) = 0 \text{ y } Z \in \mathfrak{X}(M)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (D_{V_1} W)(p) \stackrel{(D1)}{=} (D_{V_2} W + fD_Z W)(p) \stackrel{f(p)=0}{=} (D_{V_2} W)(p) \end{aligned}$$

Obsérvese que la derivada-Lie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ NO verifica (D1). De hecho, dado $v \in T_p M$, el objeto $L_v W$ NO está bien definido: el transporte-Lie precisa información sobre el campo V en la vecindad de la curva integral γ (con $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v = V(p)$) sobre la que se pretende el transporte ■

- Ejemplo: la conexión "canónica" (o "afín") D en $M \equiv \mathbb{R}^n$, definida por:

$$D_V W := \sum_j V(W^j) \partial_{u^j} \quad (\text{con } W \equiv \sum_j W^j \partial_{u^j}) ,$$

lo que equivale a: $D_{\partial_{u^i}} \partial_{u^j} = 0$ ($i, j = 1, \dots, n$).

3.2. CONEXIÓN DE LEVI-CIVITA. DERIVACIONES TENSORIALES. DIFERENCIAL COVARIANTE

(A) Conexión de Levi-Civita

(Prop. 3.10) Dada (M, g) , la aplicación $\mathfrak{J} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M), V \mapsto g(V, \cdot)$ es un isomorfismo de $\mathfrak{F}(M)$ -módulos.

Demostración. Se demuestran sucesivamente: la $\mathfrak{F}(M)$ -linealidad (trivial), la inyectividad (ya que g es no-degenerada) y (es necesario hacerlo, ya que el \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathfrak{X}(M)$ es de dimensión infinita) la suprayectividad (por lo anterior, basta en una carta). Si $V = \sum_i V^i \partial_{x^i}$, se encuentra: $\mathfrak{J}(V) = \sum_{ij} g_{ij} V^j dx^i$. Y si $\theta = \sum_i \theta_i dx^i$, se encuentra: $\mathfrak{J}^{-1}(\theta) = \sum_{ij} g^{ij} \theta_j \partial_{x^i}$ ■

(Teor. 3.11) Dada (M, g) , $\exists!$ conexión D (**de Levi-Civita**) que verifica: (D4) es "simétrica": $D_V W - D_W V = [V, W]$ (\Leftrightarrow "torsión" cero, Ejerc.3.1) (D5) es "métrica": $Xg(V, W) = g(D_X V, W) + g(V, D_X W)$ ("identidad de Ricci").

Además D viene caracterizada por la fórmula de Koszul ($\forall V, W, X$):

$$2g(D_V W, X) = Vg(W, X) + Wg(X, V) - Xg(V, W) - \\ -g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) + g(X, [V, W]) \equiv F(V, W, X)$$

Demostración. Unicidad: Si una conexión D verifica (D4) y (D5), debe verificar (inmediato, operando en el miembro derecho) $2g(D_V W, X) = F(V, W, X)$, para todo V, W, X . Se sigue (no degeneración de g) que una tal D (si existe) es única.

Existencia: $\forall V, W$, la aplicación $\alpha_{VW} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M), X \mapsto F(V, W, X)$ es (inmediato) $\mathfrak{F}(M)$ -lineal, luego $\alpha_{VW} \in \mathfrak{X}^*(M)$. Se sigue (Prop. 3.10) que $\exists!$ "D_VW" $\in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\alpha_{VW} = g(D_V W, \cdot)$. Ahora es inmediato comprobar que la aplicación "D": $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), (V, W) \mapsto D_V W$ verifica (D1) a (D5) ■

- (Def. 3.12) **Símbolos de Christoffel:** coeficientes de la conexión de Levi-Civita en una base coordenada $\{\partial_{x^i}\}$, esto es:

$$D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} =: \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k} \quad (\stackrel{(D4)}{\Rightarrow} \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k) .$$

- (Prop. 3.13(2)) Dada una base coordenada $\{\partial_{x^i}\}$, se tiene:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} (g_{mj,i} + g_{im,j} - g_{ij,m}) .$$

- (Lema 3.14) La conexión de Levi-Civita en \mathbb{R}_ν^n coincide con la canónica en \mathbb{R}^n [en la carta estándar, es: $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$, $\stackrel{(3.13(2))}{\Rightarrow} \Gamma_{ij}^{LC k} = 0 (= \Gamma_{ij}^{afin k})$].

(B) Derivaciones tensoriales

Nota 2. Una **derivación (tensorial)** (Def. 2.11) es una aplicación $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_s^r : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$ ($\forall r, s \geq 0$) que verifica:

- (a) es \mathbb{R} -lineal,
- (b) es "tensorial": $\mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}A \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B$, y
- (c) conmuta con las contracciones: $\mathcal{D}(CA) = C(\mathcal{D}A)$.

Se prueba que:

(1) Dada una derivación \mathcal{D} , existe un único $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathcal{D}_0^0 f = Vf$, $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$ [basta definir $V_p(f) := (\mathcal{D}_0^0 f)(p)$, ver Cap. 1, p.12]

(2) Las derivaciones poseen carácter local (2.12): dados una derivación \mathcal{D} en M y un abierto \mathcal{U} , existe una única derivación $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ en \mathcal{U} tal que $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}(A|_{\mathcal{U}}) = (\mathcal{D}A)|_{\mathcal{U}}$ [si $B \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{U})$ y f es una función meseta en p (i.e. $f(p) = 1$) con $\text{sop}(f) \subset \mathcal{U}$, resulta $fB \in \mathfrak{T}_s^r(M)$. Basta entonces definir $(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}B)(p) := (\mathcal{D}(fB))(p)$]

(3) Dadas derivaciones \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 , se tiene (2.14):

$$(\mathcal{D}_1)_0^0 = (\mathcal{D}_2)_0^0 \text{ y } (\mathcal{D}_1)_0^1 = (\mathcal{D}_2)_0^1 \Rightarrow \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 .$$

(4) Dada una "derivación-en- $\{\mathfrak{F}(M), \mathfrak{X}(M)\}$ " $\{\mathcal{D}_0^0, \mathcal{D}_0^1\}$, existe una única derivación \mathcal{D} cuya restricción a $\{\mathfrak{F}(M), \mathfrak{X}(M)\}$ coincide con $\{\mathcal{D}_0^0, \mathcal{D}_0^1\}$ (Teorema 2.15).

En efecto, (b) y (c) permiten encontrar \mathcal{D}_1^0 a través de (Prop. 2.13)

$$\mathcal{D}_0^0(\omega(X)) \equiv \mathcal{D}_0^0(\mathcal{C}(\omega \otimes X)) \stackrel{(c)}{=} \mathcal{C}(\mathcal{D}_1^1(\omega \otimes X)) \stackrel{(b)}{=} (\mathcal{D}_1^0 \omega)(X) + \omega(\mathcal{D}_0^1 X) ,$$

y entonces (a) y (b) permiten encontrar \mathcal{D} a partir de (2.5) $A|_{\mathcal{U}} = \sum_{(i)(j)} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$ ■

Sea una variedad M con conexión $D \in \text{Con}(M)$, que verifica (D1)–(D3).

Por verificar (D3), la conexión D puede "repensarse" como una aplicación $\mathfrak{F}(M)$ -lineal

$$D : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Der}(M), V \mapsto \mathcal{D} \equiv D_V ,$$

sobreentendiendo que $(D_V)_0^0 f \stackrel{(1)}{:=} Vf$, $(D_V)_0^1 W := D_V W$ y que $(D_V)_s^r$ (para r, s arbitrarios) viene dada por el Teorema 2.15 (en coordenadas la aplicación $(D_V)_1^0 : \mathfrak{X}(M)^* \rightarrow \mathfrak{X}(M)^*$ se calcula, habida cuenta de (3.12): $D_{\partial_{x^i}} dx^k = -\sum_j \Gamma_{ij}^k dx^j$, esto es parte del Ejercicio 3.2).

(C) Diferencial covariante

Sea una variedad M con conexión $D \in \text{Con}(M)$, que verifica (Def. 3.9) (D1) – (D3).

(Def. 3.17) Por verificar (D1) ($\mathfrak{F}(M)$ -linealidad en la primera entrada), la conexión D puede también 'repensarse' como la aplicación \mathbb{R} -lineal (no $\mathfrak{F}(M)$ -lineal, por (D2))

$$D : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{T}_1^1(M), W \mapsto DW \quad , \text{ tal que } DW(\theta, V) := D_V W(\theta)$$

y, más aún, como la aplicación \mathbb{R} -lineal

$$D : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{s+1}^r(M), A \mapsto DA \quad , \text{ tal que}$$

$$(DA)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, V) := (D_V A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$$

(llamamos a DA la **diferencial covariante de A** para la conexión D).

Se tiene:

1. $Df = df, \forall f \in \mathfrak{F}(M) \quad [Df(X) \stackrel{(3.17)}{:=} D_X f \stackrel{(1)}{:=} Xf \stackrel{(1.24)}{:=} df(X)]$
2. $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ se dice D -paralelo si $DA = 0$.
3. **Notación:** Para todo $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ y en cualquier carta local (x^i) , se escribe:

$$A_{j_1 \dots j_s; k}^{i_1 \dots i_r} \equiv (DA)_{j_1 \dots j_s k}^{i_1 \dots i_r} \stackrel{(3.17)}{:=} (D_{\partial_k} A)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$$

(ver Ejercicio 3.2).

4. La condición (D5) (ej. la conexión de Levi-Civita) equivale a $Dg = 0$.

En efecto. Se tiene:

$$\begin{aligned} Xg(V, W) &\equiv D_X(\mathcal{CC}_1^1(V \otimes W \otimes g)) \stackrel{(c)}{=} \mathcal{CC}_1^1 D_X(V \otimes W \otimes g) \stackrel{(b)}{=} \\ &= \mathcal{CC}_1^1(D_X V \otimes W \otimes g + V \otimes D_X W \otimes g + V \otimes W \otimes D_X g) \equiv \\ &= g(D_X V, W) + g(V, D_X W) + (D_X g)(V, W) ; \end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$Xg(V, W) = g(D_X V, W) + g(V, D_X W) \Leftrightarrow D_X g = 0 \quad \blacksquare$$

$\forall X, V, W$ $\forall X$

3.3. TRANSPORTE PARALELO. GEODÉSICAS

(A) Transporte paralelo

Campos de vectores $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ sobre curvas $\alpha : I \rightarrow M$ (1.47).

Nota 1. Dada carta (x, U) en M tal que $\alpha(J) \subset U$ (para cierto subintervalo $J \subset I$), se verifica: $Z|_J = \sum_i Z^i(\partial_i \circ \alpha)|_J$, con $Z^i \in \mathfrak{F}(J)$. En general, NO existen $\tilde{Z}^i \in \mathfrak{F}(U)$ tales que $Z^i = \tilde{Z}^i \circ \alpha|_J$ (en general, NO existe $\tilde{Z} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $Z|_J = \tilde{Z} \circ \alpha|_J$) ■

Dadas variedad con conexión (M, D) y curva $\alpha : I \rightarrow M$, se define la **derivada covariante inducida (sobre α)** como una aplicación $\mathfrak{X}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$, $Z \mapsto Z'$ que verifica:

- (1) es \mathbb{R} -lineal,
- (2) $(hZ)' = \frac{dh}{dt}Z + hZ'$ ($\forall h \in \mathfrak{F}(\alpha)$) y
- (3) $(V \circ \alpha)' = D_{\alpha'}V$ ($\forall V \in \mathfrak{X}(M)$).

- (*Prop. 3.18*) Existencia y unicidad de la derivada covariante inducida. Para la unicidad, basta mostrar que, en cualquier carta (x, \mathcal{U}) en torno a un punto de $\alpha(I) \subset M$, donde $Z \equiv \sum_{\text{loc.}} Z^j(\partial_j \circ \alpha)$, el campo Z' tiene una expresión local completamente determinada por D , a saber:

$$\begin{aligned} Z' &\stackrel{(1,2)}{\underset{\text{loc.}}{=}} \sum_j \left(\frac{dZ^j}{dt}(\partial_j \circ \alpha) + Z^j(\partial_j \circ \alpha)' \right) \stackrel{(3)}{=} \sum_j \left(\frac{dZ^j}{dt}(\partial_j \circ \alpha) + Z^j(D_{\alpha'}\partial_j) \right) \stackrel{(D1)}{\underset{(3.12)}{=}} \\ &= \sum_k \left(\frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \alpha) \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Z^j \right) (\partial_k \circ \alpha) \quad (*) \quad . \end{aligned}$$

Para la existencia basta comprobar que los campos locales Z' dados por (*), verifican (1), (2) y (3); por la unicidad, estas definiciones locales de Z' dan lugar a un campo bien definido sobre α .

Nota 2. Denotaremos $\alpha'' \equiv (\alpha')'$, la **aceleración** de α (inducida por la conexión D). Hay que destacar que la notación $D_{\alpha'}Z \equiv Z'$ (y en particular $D_{\alpha'}\alpha' \equiv \alpha''$) es tentadora (pone de manifiesto que la "aceleración" de una curva depende de la conexión) pero peligrosa (si $\alpha'(a) = 0$, esta notación sugiere $Z'(a) = 0$, lo que no tiene por qué ocurrir; ver Ejercicio 3.12b) ■

- $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ se dice **D -paralelo** si $Z' = 0$. En cualquier carta local (x, \mathcal{U}) , lo anterior es *equivalente* por (*) a que las componentes Z^i verifiquen el siguiente sistema de EDO de 1er. orden *lineales* (*Prop. 3.19*):

$$\frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \alpha) \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Z^j = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad .$$

Con lo que: $\forall a \in I$ y $\forall v \in T_{\alpha(a)}M$, existe un *único* $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tal que $Z' = 0$ y $Z(a) = v$.

Denotemos $\mathfrak{X}^{\parallel}(\alpha)$ al conjunto de campos sobre α que son D -paralelos. Como la biyección $T_{\alpha(a)}M \rightarrow \mathfrak{X}^{\parallel}(\alpha), v \mapsto Z$ es \mathbb{R} -lineal, es un isomorfismo de \mathbb{R} -espacios vectoriales.

- (*Prop. 3.18*) Si D es la conexión de Levi-Civita de (M, g) , entonces (D5) implica:

$$(4) \quad \frac{d}{dt}g(Z_1, Z_2) = g(Z'_1, Z_2) + g(Z_1, Z'_2).$$

Dadas variedad con conexión (M, D) y curva $\alpha : I \rightarrow M$, se define el **transporte (D -)paralelo a lo largo de α entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$** ($\forall a, b \in I$) como la aplicación

$$P_a^b(\alpha) : T_{\alpha(a)}M \rightarrow T_{\alpha(b)}M, v \mapsto Z(b) \quad ,$$

siendo $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ el *único* campo (*Prop. 3.19*) que verifica $Z' = 0$ y $Z(a) = v$.

- (*Lema. 3.20*) El transporte paralelo $P_a^b(\alpha)$ generado por D es un *isomorfismo lineal* [composición de dos isomorfismos]. Si D es la conexión de Levi-Civita, entonces $P_a^b(\alpha)$ es (3.18(4)) una *isometría lineal*.
- En general, el transporte paralelo entre dos puntos *depende de la curva* entre ellos α seguida. No en \mathbb{R}^n ; allí, el transporte paralelo entre p y q a lo largo de cualquier curva es el isomorfismo canónico $T_pM \rightarrow T_qM, v_p \mapsto v_q$ ("paralelismo a distancia").

(B) Geodésicas

Dada variedad con conexión (M, D) , se dice que una curva $\gamma : I \rightarrow M$ es **geodésica** si $\gamma'' = 0$. Y se dice que γ es **pregeodésica** si admite alguna reparametrización $\gamma \circ h : J \rightarrow M$ que es geodésica.

- (Cor. 3.21) En cualquier carta local (x, \mathcal{U}) , el que γ sea geodésica es *equivalente* por (*) a que las coordenadas de γ verifiquen el siguiente sistema de EDO de 2º orden *no-lineales* (en general):

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \ .$$

- (Lema 3.22) Existencia y unicidad local de geodésicas para cada velocidad inicial: $\forall v \in TM$, existe un intervalo I en torno a 0 y *existe una única* geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\gamma'(0) = v$.
- (Lema 3.23) Si $\gamma_1 : I \rightarrow M$ y $\gamma_2 : I \rightarrow M$ son geodésicas y existe $a \in I$ tal que $\gamma_1'(a) = \gamma_2'(a)$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2$ (usa el Lema 3.22).
- (Propos. 3.24) Existencia y unicidad de **geodésica maximal** $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ para cada velocidad inicial v .
- Se dice que (M, D) es **geodésicamente completa** si $I_v = \mathbb{R}$ ($\forall v \in TM$)

- (Ejemplo 3.25) Geodésicas de \mathbb{R}_ν^n :

En carta estándar (u^i) es $g = -\sum_{i=1}^{\nu} du^i \otimes du^i + \sum_{i=\nu+1}^n du^i \otimes du^i$

Se tiene (Prop. 3.13(2)): $\Gamma_{jk}^i = 0$ ($i, j, k = 1, \dots, n$).

Ecuaciones de las geodésicas (Corol. 3.21): $\frac{d^2(u^i \circ \gamma)}{dt^2}$ ($i = 1, \dots, n$)

Entonces: $\forall p, v \in \mathbb{R}^n$, la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n, t \mapsto p + tv$ es geodésica, y (puesto que $\alpha'(0) = v_p$) es la (Prop. 3.24) geodésica maximal γ_{v_p}

- Ejemplo: geodésicas de $\mathbb{S}^2(\subset \mathbb{R}^3)$:

Carta $\varphi : (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^2, (\vartheta, \phi) \mapsto (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta)$, \Rightarrow

$$\Rightarrow J_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \phi & -\sin \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \sin \phi & \sin \vartheta \cos \phi \\ -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}. \text{ Puesto que las columnas de}$$

J_φ son las componentes (en la carta estándar de \mathbb{R}^3) de los campos coordenados $\partial/\partial\theta$ y $\partial/\partial\phi$, se sigue:

$$g = d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2 \vartheta d\phi \otimes d\phi$$

Se tiene (Prop. 3.13(2), ver también Ejerc. 3.13d): $\Gamma_{11}^1 = 0$, $\Gamma_{12}^1 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = -\cos \vartheta \sin \vartheta$, $\Gamma_{11}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = \cot \vartheta$, $\Gamma_{22}^2 = 0$.

$$\text{Ecs. geodésicas (Corol. 3.21): } \begin{cases} \frac{d^2(\vartheta \circ \gamma)}{dt^2} - \text{sen}(\vartheta \circ \gamma) \cos(\vartheta \circ \gamma) \left(\frac{d(\phi \circ \gamma)}{dt}\right)^2 = 0 \\ \frac{d^2(\phi \circ \gamma)}{dt^2} + \cot(\vartheta \circ \gamma) \frac{d(\vartheta \circ \gamma)}{dt} \frac{d(\phi \circ \gamma)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Entonces: la curva $(0, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^2, t \mapsto ((\vartheta \circ \gamma)(t) = t, (\phi \circ \gamma) = 0)$ es geodésica. Se sigue (arbitrariedad en la elección de polos y de meridiano inicial) que: $\forall p, v \in V \equiv \mathbb{R}^3$ ortonormales y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2, t \mapsto \cos(\lambda t)p + \text{sen}(\lambda t)v$ es geodésica, y (puesto que $\alpha'(0) = \lambda v_p$) es la (Prop. 3.24) geodésica maximal $\gamma_{\lambda v_p}$

Otras propiedades de las geodésicas:

- Las geodésicas (no triviales) no pueden "pararse" (3.20) y, en el caso de la conexión de Levi-Civita, mantienen constante (3.18(4)) el producto escalar de la velocidad por sí misma (y por tanto el "carácter causal" de ésta, Def. 3.3).
- (Lema 3.26) Una reparametrización de una geodésica preserva el carácter de geodésica si y sólo si es afín:

$$\begin{cases} (\gamma \circ h)' \stackrel{\text{cadena}}{=} \frac{dh}{ds}(\gamma' \circ h) & (*) \\ (\gamma \circ h)'' \stackrel{(*)}{=} \left(\frac{dh}{ds}(\gamma' \circ h)\right)' \stackrel{\text{Prop. 3.18(2)}}{=} \frac{d^2h}{ds^2}(\gamma' \circ h) + \frac{dh}{ds}(\gamma' \circ h)' \stackrel{\text{Ejerc. 3.3a}}{=} \\ = \frac{d^2h}{ds^2}(\gamma' \circ h) + \left(\frac{dh}{ds}\right)^2(\gamma'' \circ h) \end{cases}$$

- (Lema 3.27) El carácter C^∞ de las geodésicas lo es no sólo respecto del parámetro sino también respecto de las condiciones iniciales [se usa en las demostraciones de la Prop. 3.30 y de la existencia de bases ortonormales locales].
- (Propos. 3.28) Las geodésicas maximales γ_v en (M, D) resultan ser proyecciones de las correspondientes curvas integrales (maximales) del campo de vectores $G^D \in \mathfrak{X}(TM)$ definido por: $\forall v \in TM$, $G^D(v) := \alpha'_v(0)$, siendo $\alpha_v(s) := \gamma'_v(s)$ [se usa en la demostración del Corol. 5.4].

3.4. APLICACIÓN EXPONENCIAL. ENTORNOS NORMALES

(A) Aplicación exponencial

(Def 3.29) Dados variedad con conexión (M, D) y $p \in M$, se define la **aplicación exponencial en p** como:

$$\exp_p : (T_p M \supset) \mathfrak{D}_p \rightarrow M, v \mapsto \gamma_v(1) .$$

- Si (M, D) es geodésicamente completa, $\mathfrak{D}_p = T_p M$ (en el Corolario 5.4 se prueba que, en cualquier caso, el dominio \mathfrak{D}_p es un abierto de $T_p M$).
- (Lema) La exponencial \exp_p lleva rectas por $0 \in T_p M$ en geodésicas por $p \in M$ y se verifica: $v \in \mathfrak{D}_p \Rightarrow tv \in \mathfrak{D}_p$ ($\forall t \in I_v$).

Demostración. $\forall v \in \mathfrak{D}_p$ y $\forall t \in I_v$, la geodésica $\gamma_{tv} : s \mapsto \gamma_{tv}(s)$ (maximal) tiene la misma velocidad inicial tv que la geodésica $\sigma : s \mapsto \gamma_v(ts)$ (definida al menos en $[0, 1]$, ya que γ_v está definida al menos en $[0, t]$), con lo que (Lema 3.23) γ_{tv} está definida en 1 (esto es, $tv \in \mathfrak{D}_p$) y se tiene ($\forall t$):

$$\exp_p(tv) := \gamma_{tv}(1) = \sigma(1) = \gamma_v(t) \quad (*) \quad \blacksquare$$

- (Prop 3.30) Dados variedad con conexión (M, D) y $p \in M$, existe un entorno $\tilde{\mathcal{U}}$ de $0 \in T_p M$ tal que $\exp_p|_{\tilde{\mathcal{U}}}$ es un difeomorfismo sobre cierto entorno \mathcal{U} de p .

Demostración. Es consecuencia de:

(a) la existencia de un entorno ($\subset \mathfrak{D}_p$) de $0 \in T_p M$ en el que \exp_p es C^∞ (aplicación del Lema 3.27; en el Corol. 5.4 se prueba que \exp_p es C^∞ en todo \mathfrak{D}_p),

(b) el hecho de que la aplicación tangente $d\exp_p|_0 : T_0(T_p M) \rightarrow T_p M$ es un isomorfismo, ya que se verifica ($\forall v \in T_p M$):

$$d\exp_p|_0(v_0) \stackrel{\rho(t) \equiv tv}{=} d\exp_p|_0(\rho'(0)) \stackrel{\text{cadena}}{=} (\exp_p \circ \rho)'(0) \stackrel{(*)}{=} \gamma'_v(0) \equiv v \quad (**)$$

(c) el teorema de la función inversa (Teor. 1.16) \blacksquare

(B) Entornos normales

Dados variedad con conexión (M, D) y $p \in M$, se dice que \mathcal{U} es un **entorno normal de p** si \mathcal{U} es la imagen difeomorfa por \exp_p de un entorno $\tilde{\mathcal{U}}$ "estrellado" respecto de $0 \in T_pM$.

- (Propos. 3.31) Sea \mathcal{U} un entorno normal de p . Entonces, $\forall q \in \mathcal{U}$, existe una única geodésica $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ entre p y q . Además: $\sigma'(0) = \exp_p^{-1}(q)$ (cuidado: pueden existir otras geodésicas $[0, 1] \rightarrow M$ entre p y q).

Demostración. Definamos $v := \exp_p^{-1}(q) \in \tilde{\mathcal{U}}$ ($\Rightarrow v \in \mathfrak{D}_p, \Rightarrow tv \in \mathfrak{D}_p, \forall t \in [0, 1]$) y consideremos la recta $\rho(t) := tv$ en T_pM .

Existencia: la curva $\sigma := \exp_p \circ \rho|_{[0,1]} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ es una geodésica entre p y q que verifica $\sigma(t) \stackrel{(*)}{=} \gamma_v(t), \Rightarrow \sigma'(0) = v$.

Unicidad: dada una geodésica $\bar{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ entre p y q , definamos $\bar{v} := \bar{\sigma}'(0) \in T_pM$ y consideremos la recta $\bar{\rho}(t) := t\bar{v}$ en T_pM . Por (*), la geodésica $\exp_p \circ \bar{\rho}$ tiene la misma velocidad inicial \bar{v} que $\bar{\sigma}$, con lo que (Lema 3.23) ambas deben coincidir en la intersección de sus dominios. Pero, al ser $\tilde{\mathcal{U}}$ estrellado respecto de $0 \in T_pM$, $\exp_p \circ \bar{\rho}$ está definida en $[0, 1]$, con lo que $\exp_p \circ \bar{\rho}|_{[0,1]} = \bar{\sigma}$ y $\bar{v} \in \tilde{\mathcal{U}}$. Se sigue:

$$\begin{aligned} \exp_p(\bar{v}) = \bar{\sigma}(1) = q = \exp_p(v) \quad , \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = v \quad , \quad \stackrel{(3.32)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = \exp_p \circ \bar{\rho}|_{[0,1]} = \exp_p \circ \rho|_{[0,1]} =: \sigma \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- (Ejemplo) Dados variedad riemanniana (M, g) (\rightsquigarrow conexión de Levi-Civita D) y $p \in M$, el ' ε -entorno' (Def. 5.16) $\mathcal{N}_\varepsilon(p)$ es, para ε suficientemente pequeño, entorno normal de p (Prop. 5.16(1)).

En \mathbb{S}^2 ($\subset \mathbb{R}^3$), el más grande ε -entorno normal de p es $\mathcal{N}_\pi(p) = \mathbb{S}^2 - \{\bar{p}\}$ (con \bar{p} el punto antipodal de p).

- (Lema 3.32) M es conexa si y sólo si es arco-conexa por geodésicas a trozos.

Demostración. El "si" es un resultado general ([Dugundji] V, Theorem 5.3). El "sólo si" con curvas C^∞ es cierto para cualquier variedad diferenciable (por ser loc. difeomorfa a \mathbb{R}^n). El "sólo si" con geodésicas a trozos (para variedades con conexión) es interesante: si \mathcal{C} es el conjunto de puntos de M que pueden unirse con $p \in M$ por una geodésica a trozos, tanto \mathcal{C} como $M - \mathcal{C}$ son (Prop. 3.31) abiertos, con lo que (\mathcal{C} es no vacío y M es conexa) $\mathcal{C} = M$ ■

Dados variedad con conexión (M, D) , $p \in M$, entorno normal \mathcal{U} de p y base $\{e_i\}$ de $T_p M$ (\rightsquigarrow base dual $\{\omega^i\}$), se define la **carta normal** $(\xi \equiv (x^i), \mathcal{U})$ **asociada a** $\{e_i\}$ por:

$$x^i := \omega^i \circ \exp_p^{-1} |_{\mathcal{U}}$$

(o también, $\exp_p^{-1}(q) =: \sum_i x^i(q)e_i$, $\forall q \in \mathcal{U}$).

- (*Prop 3.33*) En cualquier carta normal $(\xi \equiv (x^i), \mathcal{U})$ asociada a $\{e_i\}$, se tiene: (1) $\partial_{x^i} |_p = e_i$ y (2) $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

Demostr. Para todo $v \equiv \sum_i v^i e_i \in T_p M$ y todo $t \in I_v$, se tiene:

$$\begin{aligned} x^i(\gamma_v(t)) &:= (\omega^i \circ \exp_p^{-1})(\gamma_v(t)) \stackrel{(*)}{=} \omega^i(tv) = tv^i, \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow (v \equiv) \gamma'_v(0) = \sum_i v^i \partial_{x^i} |_p, \Rightarrow e_i = \partial_{x^i} |_p \\ \stackrel{(3.21)}{\Rightarrow} \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t)) v^i v^j = 0, \stackrel{\forall t}{\Rightarrow} \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(p) v^i v^j = 0, \stackrel{\forall v}{\Rightarrow} \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad \blacksquare \end{array} \right. \end{aligned}$$

Nota 1. Si se trata de una variedad semiriemanniana (M, g) y se elige la base $\{e_i\}$ de $T_p M$ ortonormal, entonces en cualquier carta normal (ξ, \mathcal{U}) (respecto de cualquier conexión D en M) se verifica (Proposición 3.33(1)) $g_{ij}(p) = \varepsilon_i \delta_{ij}$. Si D es la conexión de Levi-Civita, entonces se tiene además (Proposiciones 3.33(2) y 3.13(2)) $g_{ij,k}(p) = 0$; sin embargo, ni siquiera en una carta normal puede conseguirse que $g_{ij,kl}(p) = 0$, a menos que la curvatura (ver luego) se anule en un entorno de p ■

Nota 2. La conclusión $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ indica que, para cálculos con campos de tensores, resulta cómodo trabajar con cartas normales (recordar el Ejercicio 3.2) ■

(*Ejemplo 3.34*) Exponencial de Levi-Civita en \mathbb{R}_v^n . Puesto que se tiene $(\forall p \in \mathbb{R}_v^n): \gamma_{v_p}(t) \stackrel{(3.25)}{=} p + tv$, $\Rightarrow \exp_p(v_p) = p + v$ (*), \exp_p resulta ser un difeomorfismo (composición del isomorfismo canónico (1.45) $T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v_p \mapsto v$ y el difeomorfismo $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto p + v$).

Si se considera el espacio vectorial con producto escalar $(T_p \mathbb{R}_v^n, g(p))$ como variedad semiriemanniana, $\exp_p : T_p \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n$ resulta ser una isometría.

Demostración. En las cartas estándar (u^i) de \mathbb{R}_v^n (en la que $v_p = \sum_i u^i(v) \partial_{u^i} |_p$, Lema 1.46) e inducida (\bar{u}^i) de la variedad $T_p \mathbb{R}_v^n$ (donde

$\bar{u}^i(v_p) := u^i(v)$, se tiene:

$$\begin{aligned} (u^i \circ \exp_p)(v_p) &\stackrel{(*)}{=} u^i(p+v) = u^i(p) + \bar{u}^i(v_p), \Rightarrow \frac{\partial(u^i \circ \exp_p)}{\partial \bar{u}^i}(v_p) = \delta_i^j, \Rightarrow \\ &\Rightarrow d \exp_p(\partial_{\bar{u}^i} |_{v_p}) \stackrel{(1.14)}{=} \sum_j \frac{\partial(u^j \circ \exp_p)}{\partial \bar{u}^i}(v_p) \partial_{u^j} |_{p+v} = \partial_{u^i} |_{p+v}, \Rightarrow \\ &\Rightarrow d \exp_p(\xi_{v_p} \equiv \sum_i \xi_i \partial_{\bar{u}^i} |_{v_p}) = \sum_i \xi_i \partial_{u^i} |_{p+v} \equiv \xi_{p+v} \quad (**). \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene ($\forall v_p \in T_p M, \forall \xi_{v_p}, \eta_{v_p} \in T_{v_p}(T_p \mathbb{R}^n$), y llamando \bar{g} a la métrica semiriemanniana en la variedad $T_p \mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned} g(p+v)(d \exp_p(\xi_{v_p}), d \exp_p(\eta_{v_p})) &\stackrel{(**)}{=} g(p+v)(\xi_{p+v}, \eta_{p+v}) := \langle \xi, \eta \rangle = \\ &=: g(p)(\xi_p, \eta_p) =: \bar{g}(v_p)(\xi_{v_p}, \eta_{v_p}), \end{aligned}$$

esto es, \exp_p preserva productos escalares ■

Para (M, g) arbitraria, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ no preserva productos escalares. Ejemplo: Sean $M = \mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{R}^3$, $p \in (0, 0, r)$, $v = \lambda(1, 0, 0)_p \in T_p M$, con lo que se tiene: $\exp_p(v) = \gamma_v(1) = r(\sin \frac{\lambda}{r}, 0, \cos \frac{\lambda}{r})$. Así, \exp_p lleva la circunferencia α de radio λ en $T_p M$ sobre el paralelo β de colatitud $\frac{\lambda}{r}$ en M , pero $L(\alpha) = 2\pi\lambda > 2\pi r \sin \frac{\lambda}{r} = L(\beta)$.

Nota 3*. Para (M, g) arbitraria se tiene (llamando \bar{g} a la métrica semiriemanniana en la variedad $T_p M$):

(i) (Propos. 3.30) $\forall \xi_0 \in T_0(T_p M)$, se tiene: $d \exp_p(\xi_0) = \xi \in T_p M$.
Con lo que, $\forall \xi_0, \eta_0 \in T_0(T_p M)$, se tiene:

$$g(p)(d \exp_p(\xi_0), d \exp_p(\eta_0)) = g(p)(\xi, \eta) =: \bar{g}(0)(\xi_0, \eta_0);$$

esto es, $d \exp_p |_0$ preserva productos escalares. Además:

(ii) (Lema 5.1, "de Gauss") $\forall v \in \mathfrak{D}_p(\subset T_p M)$ y $\forall \xi_v, \eta_v \in T_v(T_p M)$, con ξ_v "radial" (esto es, $\xi \sim v$), se tiene:

$$g(\exp_p v)(d \exp_p(\xi_v), d \exp_p(\eta_v)) = \bar{g}(v)(\xi_v, \eta_v);$$

esto es, $d \exp_p |_v$ preserva productos escalares cuando uno de los vectores tangentes es radial. Pero sin embargo:

(iii) (Propos. 8.6) $\forall v \in \mathfrak{D}_p(\subset T_p M)$ y $\forall \xi \in T_p M$, es $d \exp_p(\xi_v) = V(1)$, con $V \in \mathfrak{X}(\gamma_v)$ el único campo "de Jacobi" (ver Cap. 8) tal que $V(0) = 0 \in T_p M$ y $V'(0) = \xi$. En el ejemplo que precede a esta Nota, tomando $v = r(1, 0, 0)_p$ y $\xi = r(0, 1, 0)_p$, se encuentra ([ON], Ejemplo 8.4): $V(t) = r(0, \sin t, 0)_{\gamma_v(t)}$, con lo que

$$\begin{aligned} g(\exp_p v)(d \exp_p(\xi_v), d \exp_p(\xi_v)) &= g(\gamma_v(1))(V(1), V(1)) = \\ &= r^2 \sin^2 1 \neq r^2 = g(p)(\xi, \xi) =: \bar{g}(v)(\xi_v, \xi_v), \end{aligned}$$

esto es, $d \exp_p |_v$ no preserva cualesquiera productos escalares ■

3.5. CURVATURA. CURVATURA SECCIONAL

(A) Curvatura

Dada variedad con conexión (M, D) , se define la aplicación (atención al signo!)

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), (Z, X, Y) \mapsto R_{XY}Z \equiv D_{[X, Y]}Z - [D_X, D_Y]Z .$$

■ (Lema 3.35) La aplicación R es $\mathfrak{F}(M)$ -trilineal (!), con lo que induce:

1. un campo de tensores (el **tensor de curvatura**) $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$, denotado por la misma letra R y definido por (Capítulo 2, "Interpretaciones") $R(\theta, Z, X, Y) := \theta(R(Z, X, Y))$
2. un operador lineal ($\forall p \in M$ y $\forall x, y \in T_pM$)

$$R_{xy} : T_pM \rightarrow T_pM, z \mapsto R(z, x, y)$$

Propiedades del tensor de curvatura:

■ (Prop. 3.36) En el caso de la conexión de Levi-Civita de (M, g) , el operador lineal R_{xy} tiene las propiedades *algebraicas* siguientes (la demostración es interesante):

1. es "antisimétrico" en los subíndices (por la definición): $R_{xy} = -R_{yx}$,
2. es "antiadjunto" (por ser la conexión métrica): $\langle R_{xy}v, w \rangle = -\langle R_{xy}w, v \rangle$,
3. verifica la **primera identidad de Bianchi** (que toma esta forma por ser la conexión simétrica): $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$,
4. posee "simetría de pares" (por ser la conexión simétrica y métrica): $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$.

Nota 1. Como consecuencia de estas propiedades de simetría, el número de componentes independientes de R se reduce, de las n^4 que corresponden a un elemento genérico de $\mathfrak{T}_3^1(M)$, a $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ (ver Ejercicio 3.20*). En Relatividad ($n = 4$), ello supone pasar de 256 a sólo 20 componentes independientes; en Teoría de superficies ($n = 2$), de 16 a 1 función independiente, la curvatura de Gauss; en cada punto $p \in M$, es $K_{Gauss}(p) := \frac{\langle R_{vw}v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$ ■

- (*Prop. 3.37*) En el caso de que D sea simétrica (i.e. verifique (D4)), se tiene la siguiente identidad *diferencial* (**segunda identidad de Bianchi**)

$$(D_z R)(w, x, y) + (D_x R)(w, y, z) + (D_y R)(w, z, x) = 0 .$$

- (*Lema 3.38*) Dada variedad con conexión (M, D) , las componentes del tensor $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ en una carta local (x^i) (por definición, $R_{jkl}^i := R(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$, $\Rightarrow R_{\partial_k, \partial_l} \partial_j := R(\partial_j, \partial_k, \partial_l) = \sum_i R_{jkl}^i \partial_i$) verifican:

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{kj,l}^i - \Gamma_{lj,k}^i + \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \sum_m \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m .$$

(B) Curvatura seccional

Dada variedad semiriemanniana (M, g) (\rightsquigarrow conexión de Levi-Civita D), se define la **curvatura seccional** como la aplicación

$$K : \{ \text{Planos tang. no-degen. de } M \} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Pi \mapsto K(\Pi) \equiv K(v, w) := \frac{\langle R_{vw}v, w \rangle}{Q(v, w)},$$

siendo $\{v, w\}$ cualquier base de Π y $Q(v, w) \equiv \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2$ ($\neq 0$, por definición de no-degeneración, 2.19). Se comprueba (*Lema 3.39*) que, en efecto, la definición dada es independiente de la base elegida.

En el caso de superficies ($n = 2$), sólo existe un plano tangente en cada punto y K resulta ser un elemento de $\mathfrak{F}(M)$ (la curvatura de Gauss).

Por definición, R determina K . Veamos que K determina R :

- (*Prop. 3.41*) Dados (M, g) y $p \in M$, se tiene: $K(p) = 0 \Rightarrow R(p) = 0$

Demostración (interesante). (1) $\langle R_{vw}v, w \rangle = 0$ (usa Lema 3.40, también interesante); (2) $R_{vw}v = 0$ (usa polarización, (1) y Proposición 3.36(4)); (3) $R_{vw}x = R_{wx}v$ (usa polarización, (2) y Proposición 3.36(1)); (4) $R_{vw}x = 0$ (usa (3) y Proposición 3.36(3)) ■

Nota 2. Se dice que (M, g) es **plana** si su tensor de curvatura R es cero (idénticamente). El resultado anterior nos dice que (M, g) es plana si y sólo si $K \equiv 0$ ■

- (*Corol. 3.42*) Dada (M, g) , " K determina R " en el sentido de que: para todo $p \in M$, un tensor $F \in T_4^0(T_p M)$ que:

(i) posea las simetrías de la Prop. 3.36 para la función $(v, w, x, y) \mapsto \langle R_{vw}x, y \rangle$ (se dice entonces que F es **de tipo curvatura**), y

(ii) cumpla $F(v, w, v, w) = K(v, w)Q(v, w)$ (para toda base $\{v, w\}$ de todo plano tangente no-degenerado),

necesariamente verifica: $F(v, w, x, y) = \langle R_{vw}x, y \rangle$.

Demostración. El tensor $\Delta \in T_4^0(T_pM)$ definido por

$$\Delta(v, w, x, y) := F(v, w, x, y) - \langle R_{vw}x, y \rangle$$

es de tipo curvatura y verifica (por hipótesis) $\Delta(v, w, v, w) = 0$ (para toda base $\{v, w\}$ de todo plano tangente no-degenerado). La demostración de la Propos. 3.41 conduce a que $\Delta = 0$ ■

Se dice que (M, g) es **de curvatura constante** si K es constante.

- (Corol. 3.43) Si (M, g) posee en $p \in M$ curvatura seccional constante C_p , se tiene:

$$R_{vw}x = C_p(\langle x, v \rangle w - \langle x, w \rangle v) \quad , \quad \forall v, w, x \in T_pM .$$

Demostración. Para todo $p \in M$, el tensor $F \in T_4^0(T_pM)$ definido por

$$F(v, w, x, y) := C_p(\langle x, v \rangle \langle w, y \rangle - \langle v, y \rangle \langle x, w \rangle)$$

es de tipo curvatura y verifica (por definición) $F(v, w, v, w) = K(v, w)Q(v, w)$ (para toda base $\{v, w\}$ de todo plano no degenerado). Entonces (Corol. 3.42) $F(v, w, x, y) = \langle R_{vw}x, y \rangle$, de donde se sigue: $C_p(\langle x, v \rangle w - \langle x, w \rangle v) = R_{vw}x$ ■

3.6. VARIEDADES SEMIRIEMANNIANAS PRODUCTO. ISOMETRÍAS LOCALES

(A) Variedades semiriemannianas producto

Dadas $(M, g_M) (\rightsquigarrow D^M \rightsquigarrow R^M)$, $(N, g_N) (\rightsquigarrow D^N \rightsquigarrow R^N)$ y la variedad semiriemanniana producto (Lema 3.5) $(M \times N, \pi^*g_M + \sigma^*g_N) (\rightsquigarrow D \rightsquigarrow R)$, se tiene (recordar la geometría de las variedades producto en Cap.1, pp. 24-25):

- (Prop. 3.56) $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\forall V, W \in \mathfrak{X}(N)$:

1. $D_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \widetilde{D_X^M Y}$
2. $D_{\tilde{V}}\tilde{W} = \widetilde{D_V^N W}$
3. $D_{\tilde{V}}\tilde{X} = 0 = D_{\tilde{X}}\tilde{V}$.

- (Corol. 3.57)

1. $\gamma(s) \equiv (\alpha(s), \beta(s))$ es D - geodésica si y sólo si $\alpha(s)$ es D^M - geodésica y $\beta(s)$ es D^N - geodésica
2. $M \times N$ es geodésicamente completa si y sólo si lo son M y N .

- (Corol. 3.58) $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $\forall U, V, W \in \mathfrak{X}(N)$:

1. $R_{\tilde{X}\tilde{Y}}\tilde{Z} = \widetilde{R_{XY}^M Z}$
2. $R_{\tilde{U}\tilde{V}}\tilde{W} = \widetilde{R_{UV}^N W}$
3. $R_{\tilde{X}\tilde{Y}}\tilde{U} = 0$, etc. Se sigue que K es cero sobre cualquier plano generado por un vector "horizontal" y otro "vertical".

(B) Isometrías locales

Las isometrías preservan (como es lógico) todos los objetos geométricos derivados de la métrica. En particular:

- (Propos. 3.59) Las isometrías $\phi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ preservan la conexión de Levi-Civita, esto es: $d\phi(D_X^M Y) = D_{d\phi(X)}^N d\phi(Y)$.

Demostración. En cartas (x^i) de M e (y^i) de N tales que $y^i \circ \phi = x^i$ (estas cartas existen alrededor de cada punto en N y de su preimagen en M , dado que ϕ es un difeomorfismo) ■

(Def 3.60) **Isometría local:** aplicación diferenciable $\phi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ tal que, $\forall p \in M$, $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi p} N$ sea una isometría lineal (equivalente a que se verifique: $\phi^*g_N = g_M$ y $\dim M = \dim N$).

- Se sigue (Teor. 1.16) que, $\forall p \in M$, existe un entorno \mathcal{U} de p tal que $\phi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U})$ es una isometría.
- Se sigue de lo anterior que todos los objetos geométricos de *carácter local (o puntual)* que son preservados por las isometrías son también preservados por las isometrías locales. Por ejemplo:

1. Dados curva $\alpha : I \rightarrow M$ y campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$, y definiendo $d\phi(Y) \in \mathfrak{X}(\phi \circ \alpha)$ por $(d\phi(Y))(s) := d\phi_{\alpha(s)}(Y(s))$, se tiene:

$$d\phi(Y^M) = (d\phi(Y))'^N .$$

2. Dados curva $\alpha : I \rightarrow M$ y $a, b \in I$, se tiene:

$$d\phi_{\alpha(b)} \circ P_a^b(\alpha) = P_a^b(\phi \circ \alpha) \circ d\phi_{\alpha(a)} .$$

3. Dada geodésica $\gamma : I \rightarrow M$, la curva $\phi \circ \gamma : I \rightarrow N$ es geodésica. En particular:

$$\phi \circ \gamma_v = \gamma_{d\phi(v)}|_{I_v} .$$

4. $\forall p \in M$, se tiene (donde ambos miembros estén bien definidos):

$$\phi \circ \exp_p^M = \exp_{\phi p}^N \circ d\phi_p .$$

5. $\forall p \in M$ y $\forall x, y, z \in T_p M$, se tiene: $d\phi(R_{xy}^M z) = R_{d\phi(x) d\phi(y)}^N d\phi(z)$.

6. Se tiene:

$$K^M(\Pi) = K^N(d\phi(\Pi)) \quad , \quad Ric^M = \phi^* Ric^N \quad \text{y} \quad S^M = S^N \circ \phi .$$

$\forall \Pi$ no-degen. tangente a M

- (Prop 3.62) Una isometría local $\phi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ viene unívocamente determinada (si M es conexa) por su diferencial en cualquier punto.

Demostración (muy interesante). Dadas dos isometrías locales $\phi, \psi : M \rightarrow N$, el conjunto $A := \{q \in M \mid d\phi_q = d\psi_q, \text{ lo que implica } \phi(q) = \psi(q)\}$ es (obvio) cerrado. Además A es abierto, ya que, si $q \in A$ y \mathcal{U} es entorno normal de q , se tiene (para todo $r \in \mathcal{U}$):

$$\phi(r) \stackrel{\text{Prop. 3.31}}{=} \phi(\gamma_v(1)) \stackrel{(3)}{\underset{\text{con } v \in T_q M}{=}} \gamma_{d\phi_q(v)}(1) \stackrel{\text{Hip.}}{=} \gamma_{d\psi_q(v)}(1) \stackrel{(3)}{=} \psi(\gamma_v(1)) \stackrel{\text{Prop. 3.31}}{=} \psi(r) ,$$

con lo que también es $d\phi_r = d\psi_r$ (para todo $r \in \mathcal{U}$), y $\mathcal{U} \subset A$. Puesto que A es no vacío y M es conexa, resulta $A = M$ ■

Nota. No existe un resultado análogo para difeomorfismos locales entre variedades; de ahí la "rigidez" de las isometrías (Capítulo 9) ■

(Def.) Una aplicación diferenciable $\psi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ se dice **conforme** si $\psi^*g_N = hg_M$, siendo $h \in \mathfrak{F}(M)$ nunca nula. En particular:

(Def. 3.63) Una aplicación diferenciable $\psi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ se dice **homotecia** si es un difeomorfismo tal que $\psi^*g_N = cg_M$, siendo $c(\neq 0)$ constante (c , **coeficiente** de la homotecia; $|c|^{1/2}$, **factor de escala** de la homotecia).

Una homotecia se dice **positiva** (resp. **negativa**) si $c > 0$ (resp. $c < 0$), en cuyo caso preserva (resp. invierte) el carácter causal de los vectores tangentes.

Una isometría (Def. 3.6) (resp. **antiisometría**) es una homotecia de coeficiente $+1$ (resp. -1).

- (Lema 3.64) Las homotecias preservan la conexión de Levi-Civita.

Demostración. Si $\psi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ es homotecia de coeficiente c , entonces $\psi : (M, cg_M) \rightarrow (N, g_N)$ es isometría y se tiene:

$$D_X^{(M, g_M)} Y \stackrel{\text{Teor. 3.11}}{=} D_X^{(M, cg_M)} Y \stackrel{\text{Prop. 3.59}}{=} D_{d\psi(X)}^{(N, g_N)} d\psi(Y) \quad \blacksquare$$

- (Obs. 3.65) (1) Se sigue del Lema 3.64 que las homotecias preservan todos los objetos geométricos (Tensores de curvatura, de Ricci, etc.) derivados (solamente) de la conexión de Levi-Civita.

(2) Si $\psi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ es homotecia de coeficiente c , entonces se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} K^{(M, g_M)}(\Pi) \stackrel{\substack{\text{Lema 3.64} \\ \text{Def. de } K}}{=} cK^{(M, cg_M)}(\Pi) \stackrel{3.59}{=} cK^{(N, g_N)}(d\psi(\Pi)) \\ S^{(M, g_M)} \stackrel{\substack{\text{Lema 3.64} \\ \text{Def. de } S}}{=} cS^{(M, cg_M)} \stackrel{3.59}{=} cS^{(N, g_N)} \circ \psi \end{array} \right.$$

3.7. CUESTIONES VARIAS

(A) Superficies semiriemannianas

- La curvatura seccional K se convierte en un elemento de $\mathfrak{F}(M)$ (curvatura de Gauss).
- (*Prop. 3.44*) Fórmula para calcular K en cartas ortogonales (que existen en torno a cada punto de una superficie).

(B) Subida y bajada de índices

Dada variedad semiriemanniana (M, g) , el isomorfismo (biyección $\mathfrak{F}(M)$ -lineal, *Prop. 3.10*) $\mathfrak{J} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M), V \mapsto g(V, \cdot)$ induce:

- **Bajada de índices:** isomorfismos $\downarrow_b^a : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{s+1}^{r-1}(M)$ ($1 \leq a \leq r, 1 \leq b \leq s+1$) dados por ("el campo de la b -ésima entrada de $\downarrow_b^a A$ proviene de la forma de la a -ésima entrada de A):

$$\begin{aligned} (\downarrow_b^a A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_b, \dots, X_{s+1}) &:= \\ &= A(\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, \mathfrak{J}(X_b), \theta^a, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1}). \end{aligned}$$

Nota 1. En componentes: si $\{\theta^i\}$ es la base dual de $\{X_i\}$ ($\Rightarrow \mathfrak{J}(X_k) = \sum_m g_{km} \theta^m$) y si p.ej. $A \in \mathfrak{T}_3^1(M)$, se tiene:

$$(\downarrow_3^1 A)_{ijkl} \equiv (\downarrow_3^1 A)(X_i, X_j, X_k, X_l) := A(\mathfrak{J}(X_k), X_i, X_j, X_l) = \sum_m g_{km} A_{ijl}^m \quad \blacksquare$$

- (y correspondientemente) **Subida de índices:** isomorfismos $\uparrow_b^a : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{s-1}^{r+1}(M)$ ($1 \leq a \leq r+1, 1 \leq b \leq s$) dados por ("la forma de la a -ésima entrada de $\uparrow_b^a A$ proviene del campo de la b -ésima entrada de A):

$$\begin{aligned} (\uparrow_b^a A)(\theta^1, \dots, \theta^a, \dots, \theta^{r+1}, X_1, \dots, X_{s-1}) &:= \\ &:= A(\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, \theta^{a+1}, \dots, \theta^{r+1}, X_1, \dots, X_{b-1}, \mathfrak{J}^{-1}(\theta^a), X_b, \dots, X_{s-1}). \end{aligned}$$

Nota 2. En componentes: si $\{\theta^i\}$ es la base dual de $\{X_i\}$ ($\Rightarrow \mathfrak{J}^{-1}(\theta^i) = \sum_m g^{im} X_m$) y si p.ej. $A \in \mathfrak{T}_4^0(M)$, se tiene:

$$(\uparrow_3^1 A)^i_{jkl} \equiv (\uparrow_3^1 A)(\theta^i, X_j, X_k, X_l) := A(X_j, X_k, \mathfrak{J}^{-1}(\theta^i), X_l) = \sum_m g^{im} A_{jkl}^m \quad \blacksquare$$

- **Contracciones métricas:** aplicaciones ($\mathfrak{F}(M)$ -lineales)

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{ab} : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{s-2}^r(M), A \mapsto \mathcal{C}_a^\alpha(\uparrow_b^\alpha A) & (1 \leq a < b \leq s, 1 \leq \alpha \leq r+1) \\ \mathcal{C}^{ab} : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^{r-2}(M), A \mapsto \mathcal{C}_\beta^a(\downarrow_b^\beta A) & (1 \leq a < b \leq r, 1 \leq \beta \leq s+1) \end{cases} .$$

Nota 3. En componentes: si $\{\theta^i\}$ es la base dual de $\{X_i\}$ ($\Rightarrow \mathfrak{J}^{-1}(\theta^k) = \sum_m g^{km} X_m$) y si p.ej. $A \in \mathfrak{T}_3^1(M)$, se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_{12}A)_j^i &:= (\mathcal{C}_1^1(\uparrow_2^1 A))_j^i := \sum_k (\uparrow_2^1 A)_{kj}^{ki} \equiv \sum_k (\uparrow_2^1 A)(\theta^k, \theta^i, X_k, X_j) := \\ &:= \sum_k A(\theta^i, X_k, \mathfrak{J}^{-1}(\theta^k), X_j) = \sum_{km} g^{km} A_{kmj}^i \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- (Lema 3.45) Para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$, D_V (Levi-Civita) conmuta con las subidas y bajadas de índices y, por tanto, con las contracciones métricas.

Demostración. Teniendo en cuenta que (comprobar!):

(i) $\uparrow_b^a = (\downarrow_b^a)^{-1}$,

(ii) $\downarrow_b^a = \sigma_{\{1\dots b\}} \circ \downarrow_1^a$ (con $\sigma_{\{1\dots b\}}$ el operador de permutación cíclica entre las b primeras entradas),

(iii) $\downarrow_1^a A = \mathcal{C}_1^a(g \otimes A)$,

(iv) $D_V \circ \sigma_{ab} = \sigma_{ab} \circ D_V$ (Ejercicio 3.4a) y $D_V \circ \mathcal{C}_b^a = \mathcal{C}_b^a \circ D_V$ (por ser D_V derivación tensorial), y finalmente

(v) $D_V g = 0$ (Teor. 3.11(D5)), se tiene:

$$\begin{aligned} D_V(\downarrow_b^a A) &\stackrel{(ii)}{=} D_V(\sigma_{\{1\dots b\}} \circ \downarrow_1^a A) \stackrel{(iv)}{=} \sigma_{\{1\dots b\}}(D_V(\downarrow_1^a A)) \stackrel{(iii)}{=} \\ &= \sigma_{\{1\dots b\}}(D_V(\mathcal{C}_1^a(g \otimes A))) \stackrel{(iv)}{=} \sigma_{\{1\dots b\}}(\mathcal{C}_1^a(D_V(g \otimes A))) \stackrel{(v)}{=} \\ &= \sigma_{\{1\dots b\}}(\mathcal{C}_1^a(g \otimes D_V A)) \stackrel{(iii)}{=} \sigma_{\{1\dots b\}} \downarrow_1^a(D_V A) \stackrel{(ii)}{=} \downarrow_b^a(D_V A) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(C) Bases locales ortonormales

- (Lema) Existencia de bases ortonormales locales en torno a cada punto $p \in M$ (no necesariamente a la vez coordenadas)

Demostración. Sean $\{e_i\}$ base ortonormal de $T_p M$ y \mathcal{U} entorno normal de p , que puede unirse (Prop. 3.31) con cada $q \in \mathcal{U}$ por una única (parametrizada entre 0 y 1) geodésica σ_q . Así se puede definir un conjunto $\{E_i\}$ de 'campos' (no necesariamente diferenciables) sobre \mathcal{U} por transporte paralelo de $\{e_i\}$ a lo largo de dichas geodésicas 'radiales'. Dicho conjunto da (Lema 3.20) una base ortonormal en cada punto $q \in \mathcal{U}$. Y puesto que, en el sistema de EDO $\frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma_q) \frac{d(x^i \circ \sigma_q)}{dt} Z^j = 0$ de la Prop. 3.19, las funciones $\Gamma_{ij}^k \circ \sigma_q$ y $\frac{d(x^i \circ \sigma_q)}{dt}$ son diferenciables respecto del parámetro t y de la condición inicial $\sigma_q'(0)$, cada E_i resulta ser diferenciable, i.e. $E_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ ■

- Sean $\{E_i\}$ una base ortonormal local (esto es, $\langle E_i, E_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$, con $\varepsilon_i = \pm 1$) y $\{\theta^i\}$ su base dual. Entonces se tiene:

$$\theta^i = \varepsilon_i g(E_i, \cdot) \equiv \varepsilon_i \mathfrak{J}(E_i) \quad (i = 1, \dots, n) \quad .$$

3.8. TENSOR DE RICCI Y CURVATURA ESCALAR

(Def. 3.51) Dadas variedad M y conexión $D \in \text{Con}(M)$ (\rightsquigarrow curvatura R), se define el campo de tensores (**tensor de Ricci**, atención al signo!!)

$$\text{Ric} := \mathcal{C}_3^1 R \in \mathfrak{T}_2^0(M) ;$$

en cualquier base local $\{X_i\}$, se tiene: $R_{ij} \equiv \text{Ric}_{ij} = \sum_m R_{ijm}^m$.

- Si D es simétrica (torsión cero), Ric es la única contracción *independiente* no métrica (de las tres posibles) de la curvatura R . En efecto:

$$\begin{cases} R_{imj}^m \stackrel{3.36(1)}{=} -R_{ijm}^m , & \Rightarrow \mathcal{C}_2^1 R = -\mathcal{C}_3^1 R \\ R_{imj}^m + R_{mji}^m + R_{jim}^m \stackrel{3.36(3)}{=} 0 , & \Rightarrow (\mathcal{C}_1^1 R)_{ji} = -(\mathcal{C}_2^1 R)_{ij} - (\mathcal{C}_3^1 R)_{ji} \end{cases}$$

- (Lema 3.52) Si D es la conexión de Levi-Civita de una variedad semi-riemanniana (M, g) , Ric verifica, en cualquier base local $\{X_i\}$ (\rightsquigarrow base dual $\{\theta^i\}$):

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y) &:= \sum_m R(\theta^m, X, Y, X_m) \equiv \sum_m \theta^m(R_{YX_m} X) \stackrel{\text{Si } \{X_i\} \text{ es ortonormal}}{=} \\ &= \sum_m \varepsilon_m g(R_{YX_m} X, X_m) , \end{aligned}$$

de donde se sigue (Propos. 3.36(4)) que Ric es simétrico.

- (M, D) se dice **Ricci-plana** si $\text{Ric} = 0$.
- Dada variedad semi-riemanniana (M, g) ($\rightsquigarrow D \rightsquigarrow R \rightsquigarrow \text{Ric}$), la curvatura seccional K determina (obvio, por el Corolario 3.42) el tensor Ric . Concretamente, se tiene, en cualquier base local ortonormal $\{E_i\}$:

$$\text{Ric}(E_i, E_i) \stackrel{3.52}{=} \sum_m \varepsilon_m g(R_{E_i E_m} E_i, E_m) =: \sum_m \varepsilon_m \frac{K(E_i, E_m)}{\varepsilon_i \varepsilon_m} = \varepsilon_i \sum_m K(E_i, E_m).$$

(Def. 3.53) Dada (M, g) (\rightsquigarrow conexión $D \rightsquigarrow$ curvatura $R \rightsquigarrow \text{Ric}$), se define la **curvatura escalar**

$$S := \mathcal{C}_{12} \text{Ric} \in \mathfrak{F}(M) ;$$

en cualquier base local $\{X_i\}$, se tiene: $S = \sum_{ij} g^{ij} \text{Ric}_{ij}$.

- (Corol. 3.54) Se verifica: $dS = 2\text{div}(Ric)$.

Demostración. En cualquier carta local (x^i) , y recordando que:

$$(D_{\partial_r} R)(\partial_j, \partial_k, \partial_l) = \sum_i (D_{\partial_r} R)_{jkl}^i \partial_i \stackrel{\text{Def. 3.17}}{=} \sum_i (DR)_{jklr}^i \partial_i \equiv \sum_i R_{jkl;r}^i \partial_i ,$$

se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{Prop. 3.37}}{=} R_{jkl;r}^i + R_{jlr;k}^i + R_{jrk;l}^i \stackrel{\text{Prop. 3.36(1)}}{=} R_{jkl;r}^i + R_{jlr;k}^i - R_{jkr;l}^i , \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = \sum_r (R_{jkl;r}^r + R_{jlr;k}^r - R_{jkr;l}^r) \stackrel{C_3^1(DR)=D(C_3^1R)=DRic}{=} \\ &= \sum_r R_{jkl;r}^r + Ric_{jl;k} - Ric_{jk;l} , \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = \sum_{jk} g^{jk} \left(\sum_r R_{jkl;r}^r + Ric_{jl;k} - Ric_{jk;l} \right) \stackrel{DR=\uparrow_1^1(D(\downarrow_1^1R))}{=} \stackrel{C_{12}(DRic)=D(C_{12}Ric)=dS}{=} \\ &= \sum_{mrjk} g^{jk} g^{mr} R_{mjkl;r} + \sum_{jk} g^{jk} Ric_{jl;k} - S_{,l} \stackrel{\text{Prop. 3.36(1,2)}}{=} \\ &= \sum_{mrjk} g^{jk} g^{mr} R_{jmlk;r} + \sum_{mr} g^{mr} Ric_{ml;r} - S_{,l} \stackrel{C_{14}(D(\downarrow_1^1R))=D(C_3^1R)=DRic}{=} \\ &= 2 \sum_{mr} g^{mr} Ric_{ml;r} - S_{,l} = 2(\text{div } Ric)_l - (dS)_l \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota. Importante resultado, ya que el campo de tensores $G := Ric - \frac{1}{2}Sg \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ (*tensor de Einstein*) resulta así tener divergencia cero (Lema 12.2(1)):

$$\text{div}G \stackrel{\text{Cor. 3.54}}{=} \frac{1}{2} (dS - \text{div}(Sg)) \stackrel{\text{Ejerc. 3.10}}{=} 0 \quad \blacksquare$$

4. NOTAS. SUBVARIETADES SEMIRIEMANNIANAS*

(Capítulo 4 de [6])

4.1. LA CONEXIÓN INDUCIDA*

Sean (\bar{M}, \bar{g}) una variedad semiriemanniana y $(M, g \equiv j^*\bar{g})$ una subvariedad semiriemanniana (con $j : M \hookrightarrow \bar{M}$ la inclusión, Def. 3.4).

$$\text{Notaciones: } \begin{cases} \boxed{\bar{\mathfrak{X}}(M)} \equiv \mathfrak{X}(j) := \{X : M \rightarrow T\bar{M} \mid X \text{ diferenciable con } \bar{\pi} \circ X = j\} \\ \boxed{\mathfrak{X}(M)^\perp} := \{Z \in \bar{\mathfrak{X}}(M) \mid Z \perp M\} \end{cases}$$

Se tiene:

- $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)^\perp$ son $\mathfrak{F}(M)$ -submódulos de $\bar{\mathfrak{X}}(M)$
- Las proyecciones $\boxed{\tan} : \bar{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ y $\boxed{\text{nor}} : \bar{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$, dadas por

$$\tan(X)(p) := \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g(X(p), e_i) e_i \quad \text{y} \quad \text{nor}(X)(p) := \sum_{i=k+1}^n \varepsilon_i g(X(p), e_i) e_i$$

(con $X \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$, $p \in M$ y $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ base ortonormal de $T_p\bar{M}$ adaptada a T_pM), son $\mathfrak{F}(M)$ -lineales

- $\bar{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Sean \bar{D} y D las conexiones de Levi-Civita en \bar{M} y M , respectivamente.

- (Lema 4.1) La conexión $\bar{D} : \bar{\mathfrak{X}}(\bar{M}) \times \bar{\mathfrak{X}}(\bar{M}) \rightarrow \bar{\mathfrak{X}}(\bar{M})$ da lugar a una aplicación (la **conexión inducida**, bien definida vía extensiones locales de los elementos de $\bar{\mathfrak{X}}(M)$ por elementos de $\bar{\mathfrak{X}}(\bar{M})$):

$$\boxed{\bar{D}} : \bar{\mathfrak{X}}(M) \times \bar{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M), (V, X) \mapsto \bar{D}_V X .$$

- (Lema 4.3) Se verifica ($\forall V, W \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$):

$$D_V W = \tan(\bar{D}_V W) \quad (\text{nótese que } W \in \bar{\mathfrak{X}}(M))$$

- (Lema 4.4) La aplicación dada por

$$\boxed{II} : \bar{\mathfrak{X}}(M) \times \bar{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M)^\perp, (V, W) \mapsto \text{nor}(\bar{D}_V W) \quad (\text{nótese que } W \in \bar{\mathfrak{X}}(M))$$

es $\mathfrak{F}(M)$ -bilineal y simétrica (el **tensor de Weingarten de $M \hookrightarrow \bar{M}$** , pertenece a la "geometría extrínseca" de M). Se sigue ($\forall V, W \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$):

$$\boxed{\bar{D}_V W = D_V W + II(V, W)} .$$

Sean \bar{R} y R las curvaturas de \bar{D} y D , respectivamente. Entonces:

- (*Teor. 4.5, ecuación de Gauss*) Se verifica ($\forall V, W, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$):

$$\bar{g}(\bar{R}_{VW}X, Y) = \bar{g}(R_{VW}X, Y) - \bar{g}(II(V, X), II(W, Y)) + \bar{g}(II(V, Y), II(W, X)) .$$

En particular, se verifica (*Corol. 4.6*) ($\forall p \in M$ y \forall plano no-degenerado $\Pi \subset T_p M$ con base $\{v, w\}$):

$$\bar{K}(v, w) = K(v, w) - \frac{\bar{g}(II(v, v), II(w, w)) + \bar{g}(II(v, w), II(v, w))}{\bar{g}(v, v)\bar{g}(w, w) - \bar{g}(v, w)^2} .$$

- (*Def. 4.31*) La conexión $\bar{D} : \mathfrak{X}(\bar{M}) \times \mathfrak{X}(\bar{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\bar{M})$ da lugar a una aplicación (la **conexión normal**, bien definida vía extensiones locales de los elementos de $\mathfrak{X}(M)^\perp$ por elementos de $\mathfrak{X}(\bar{M})$):

$$\boxed{D^\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp, (V, Z) \mapsto \text{nor } \bar{D}_V Z .$$

- (*Def. 4.32*) Dado $V \in \mathfrak{X}(M)$, la aplicación

$$\begin{aligned} \nabla_V II & : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp \\ (X, Y) & \mapsto D_V^\perp(II(X, Y)) - II(D_V X, Y) - II(X, D_V Y) \end{aligned}$$

es $\mathfrak{F}(M)$ -bilineal y simétrica.

- (*Teor. 4.33, ecuación de Codazzi*) Se verifica ($\forall V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$):

$$\text{nor}(\bar{R}_{VW}X) = -\nabla_V II(W, X) + \nabla_W II(V, X)$$

Se dice (*Def. 4.12*) que M es **totalmente geodésica en \bar{M}** si $II = 0$. Y se dice (*Def. 4.15*) que M es **totalmente umbílica en \bar{M}** si existe $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ tal que ($\forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$) $II(V, W) = \bar{g}(V, W)Z$. Obviamente se tiene: M totalmente geodésica $\Rightarrow M$ totalmente umbílica. Y además:

- (*Propos. 4.13*) M es totalmente geodésica en \bar{M} si y sólo si toda geodésica de M es geodésica de \bar{M} .

Si M es una **hipersuperficie semiriemanniana de \bar{M}** , se define (*Def. 4.16*) el **signo ε_M de M** como:

$$\varepsilon_M := \begin{cases} +1, & \text{si } \text{ind}(M) = \text{ind}(\bar{M}) \\ -1, & \text{si } \text{ind}(M) = \text{ind}(\bar{M}) - 1 \end{cases} .$$

Sea $f \in \mathfrak{F}(\bar{M})$ y sea c un valor de f .

Nota. Se dice que el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ es **regular** si $\text{grad } f|_{f^{-1}(c)}$ nunca se anula. En tal caso, se prueba (Corol. 1.37) que $f^{-1}(c)$ es una hipersuperficie de \bar{M} (de hecho, toda hipersuperficie es localmente un conjunto de nivel regular para alguna f) ■

- (Prop. 4.17) Supongamos que $f^{-1}(c)$ es regular (sin esta hipótesis, 1(sólo si) y 2 dejan de ser ciertas). Entonces:

0. $\text{grad } f|_{f^{-1}(c)}$ es siempre normal a $f^{-1}(c)$.

1. $f^{-1}(c)$ es una hipersuperficie semiriemanniana si y sólo si se verifica:

$$\bar{g}(\text{grad } f, \text{grad } f)|_{f^{-1}(c)} > 0 \text{ (siempre)} \quad \text{ó} \quad < 0 \text{ (siempre)} .$$

2. Si $f^{-1}(c)$ es una hipersuperficie semiriemanniana, se verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{f^{-1}(c)} = \text{signo}(\bar{g}(\text{grad } f, \text{grad } f)|_{f^{-1}(c)}) \\ U \equiv \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}|_{f^{-1}(c)} \text{ es una normal unitaria} \end{array} \right.$$

(toda hipersuperficie semiriemanniana admite *localmente* una normal unitaria).

Sea $M(\subset \bar{M})$ una hipersuperficie semiriemanniana y sea $U \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ una normal unitaria ($\Rightarrow \bar{g}(U, U) = \varepsilon_M$). Entonces:

- (Def. 4.19) Se define la aplicación

$$\boxed{S_U}: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), V \mapsto -\bar{D}_V U \quad (\stackrel{(4.39)}{=} \widetilde{II}(V, U)) ,$$

que es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal (el **operador de Weingarten de $M \hookrightarrow \bar{M}$ respecto de U**).

- (Lema 4.18) Se verifica ($\forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$):

$$\begin{aligned} \bar{g}(S_U V, W) &= \bar{g}(II(V, W), U) = \bar{g}(V, S_U W) , \Rightarrow \\ &\Rightarrow II(V, W) = \varepsilon_M \bar{g}(S_U V, W) U . \end{aligned}$$

- De donde se sigue:

1. (Lema 4.21) M es totalmente umbílica si y sólo si S_U es, en cada punto, una homotecia.
2. (Corol. 4.20) La ecuación de Gauss (Corolario 4.6) se convierte en (puesto que $II(v, w) = \varepsilon_M \bar{g}(S_U v, w) U(p)$ y $\bar{g}(U, U) = \varepsilon_M$):

$$\bar{K}(v, w) = K(v, w) - \varepsilon_M \frac{\bar{g}(S_U v, v) \bar{g}(S_U w, w) + \bar{g}(S_U v, w)^2}{\bar{g}(v, v) \bar{g}(w, w) - \bar{g}(v, w)^2} .$$

4.2. HIPERCUÁDRICAS*

En la variedad semiriemanniana $(\bar{M}, \bar{g}) \equiv \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ ($0 \leq \nu \leq n+1$):

- Considérese la función $q \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_\nu^{n+1})$ dada por (Cap. 3, p. 56):

$$q(v) := \bar{g}(v, v) \quad , \quad \text{esto es,} \quad q(u^1, \dots, u^{n+1}) := - \sum_{i=1}^{\nu} (u^i)^2 + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} (u^i)^2 \quad .$$

- Considérese el campo (de "posición desde el origen") $P \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_\nu^{n+1})$ dado por (Cap. 1, p. 26):

$$P(p) := p_p \in T_p \mathbb{R}_\nu^{n+1} ; \stackrel{\text{Lema 1.46}}{\Rightarrow} P = \sum_i u^i \partial_{u^i} ; \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Rightarrow D_V P = V & (*) \\ \Rightarrow \bar{g}(P, P) = q ; \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \text{grad } q = 2P ; \Rightarrow \bar{g}(\text{grad } q, \text{grad } q) = 4q . \end{cases}$$

- $\forall r > 0$ y $\forall \varepsilon = \pm 1$, la **hipercuádrica central** $Q := q^{-1}(\varepsilon r^2)$ es una hipersuperficie (Corolario 1.37) semiriemanniana (Proposición 4.17(1)), con "signo ε " y normal unitaria $U \equiv P/r$ (Proposición 4.17(2)).
- (Prop. 4.22) El **cono de luz** $\Lambda := q^{-1}(0) - \{0\}$ es (si no vacío) una hipersuperficie (Corolario 1.37) degenerada (Proposición 4.17(1)), invariante por homotecias y difeomorfa a $(\mathbb{R}^\nu - \{0\}) \times \mathbb{S}^{n-\nu}(1)$. Además, $P|_\Lambda$ es tangente y normal (Proposición 4.17(0)) a Λ .
- Ambas familias (para $\varepsilon = +1$ y $\varepsilon = -1$) de hipercuádricas centrales "llenan" todo \mathbb{R}_ν^{n+1} excepto el conjunto $q^{-1}(0) = \Lambda \cup \{0\}$.

(Def. 4.23) Para $n \geq 2$ y $0 \leq \nu \leq n$, se definen:

$$\begin{cases} \mathbb{S}_\nu^n(r) := \mathbf{q}_{\mathbb{R}_\nu^{n+1}}^{-1}(r^2) = \{p \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} \mid \bar{g}(p, p) = r^2\} \\ \mathbb{H}_\nu^n(r) := \mathbf{q}_{\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}}^{-1}(-r^2) = \{p \in \mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1} \mid \bar{g}(p, p) = -r^2\} \quad , \end{cases}$$

que son hipercuádricas centrales (de dimensión n e índice ν) y reciben los nombres de **pseudoesfera de radio** $r > 0$ en \mathbb{R}_ν^{n+1} y **espacio pseudohiperbólico de radio** $r > 0$ en $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$, respectivamente.

- (Lema 4.24) La aplicación

$$\sigma : \mathbb{R}_\nu^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{n-\nu+1}^{n+1}, (p_1, \dots, p_{n+1}) \mapsto (p_{\nu+1}, \dots, p_{n+1}, p_1, \dots, p_\nu)$$

es una antiisometría que lleva $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ sobre $\mathbb{H}_{n-\nu}^n(r)$ y viceversa. Se sigue que *cualquier hipercuádrica es homotética a una cierta pseudoesfera unidad* $\mathbb{S}_\nu^n(1)$.

- (Lema 4.25) La pseudoesfera $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ es difeomorfa a $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{S}^{n-\nu}(1)$. El espacio pseudohiperbólico $\mathbb{H}_\nu^n(r)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^\nu(1) \times \mathbb{R}^{n-\nu}$ (por convenio, \mathbb{R}^0 es un punto; por definición, \mathbb{S}^0 consta de dos puntos). Se sigue que: (1) $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ (para $\nu \leq n-1$) y $\mathbb{H}_\nu^n(r)$ (para $1 \leq \nu$) son *conexas*, y (2) $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ (para $\nu \leq n-2$) y $\mathbb{H}_\nu^n(r)$ (para $2 \leq \nu$) son *simplemente conexas*.
- (Lema 4.27) $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ y $\mathbb{H}_\nu^n(r)$ son totalmente umbólicas, con $S_{U \equiv P/r}$ en cada punto la homotecia (Lema 4.21) de factor $-1/r$.
- (Prop. 4.28) En $\mathbb{S}_\nu^n(r)$, toda geodésica no constante tiene por imagen la intersección de $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ con un plano vectorial de \mathbb{R}_ν^{n+1} , esto es: una rama de hipérbola (si temporal), una línea recta (si luz) o una elipse (si espacial). En $\mathbb{H}_\nu^n(r)$, vale lo anterior intercambiando (Lema 4.24) temporal \leftrightarrow espacial. Se sigue que $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ y $\mathbb{H}_\nu^n(r)$ son (*geodésicamente completas*).
- (Prop. 4.29) $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ y $\mathbb{H}_\nu^n(r)$ son de *curvatura constante* $K = 1/r^2$ y $K = -1/r^2$, respectivamente (inmediata consecuencia del Corolario 4.20, con $\bar{K} = 0$, $S_{U \equiv P/r}v = -v/r$ y $\varepsilon_M = \pm 1$).

(Def. 8.22) Se dice que una variedad semiriemanniana es una **forma espacial** si es conexa, (geodésicamente) completa y de curvatura (seccional) constante.

- (Prop. 8.23) Dos formas espaciales simplemente conexas son isométricas si y sólo si poseen la misma dimensión, índice y curvatura.
- (Corol. 8.25, Hopf) Una forma espacial riemanniana ($\nu = 0$) simplemente conexa, de dimensión n y curvatura C es isométrica a la hipercuádrice (\tilde{A} significa el "recubridor universal" de A , cA significa una componente conexa de A):

<i>Forma espacial</i>	\underline{n}	\underline{C}	<i>Hipercuádrice</i>
Esfera $\mathbb{S}^n(r)$	≥ 2	$1/r^2$	$\mathbb{S}_0^n(r)$
Euclídeo	<i>arbitr.</i>	0	\mathbb{R}^n
Hiperbólico $\mathbb{H}^n(r)$	≥ 2	$-1/r^2$	$c\mathbb{H}_0^n(r)$

- (Corol. 8.26) Una forma espacial lorentziana ($\nu = 1$) simplemente conexa, de dimensión n y curvatura C es isométrica a la hipercuádrice:

<i>Forma espacial</i>	\underline{n}	\underline{C}	<i>Hipercuádrice</i>
deSitter	≥ 3	$1/r^2$	$\mathbb{S}_1^n(r)$
"	2	"	$\widetilde{\mathbb{S}_1^2(r)}$
Minkowski	<i>arbitr.</i>	0	\mathbb{R}_1^n
anti-deSitter	≥ 2	$-1/r^2$	$\widetilde{\mathbb{H}_1^n(r)}$

5. NOTAS. GEOMETRÍA RIEMANNIANA Y LORENTZIANA

(Capítulo 5 de [6])

5.1. ENTORNOS CONVEXOS

Dada variedad semiriemanniana (M, g) , las aplicaciones exponenciales en cada punto (Def. 3.29) dan lugar a una aplicación (denotando por π la proyección $TM \rightarrow M$, con TM el fibrado tangente):

$$\exp : (TM \supset) \mathfrak{D} \rightarrow M, v \mapsto \exp_{\pi(v)}(v) .$$

- (Cor. 5.4) El dominio \mathfrak{D} es un abierto de TM y \exp es diferenciable. Para cada $p \in M$, el dominio $\mathfrak{D}_p := \mathfrak{D} \cap T_p M$ de \exp_p es un abierto de $T_p M$ y $\exp_p := \exp|_{T_p M}$ es diferenciable. Además, \mathfrak{D}_p es "estrellado" respecto de $0 \in T_p M$.

Demostración*. La aplicación $\psi : (TM \times \mathbb{R} \supset) \tilde{\mathfrak{D}} \rightarrow M, (v, s) \mapsto \gamma_v(s)$ es diferenciable (Lema 3.27) y tiene el mismo dominio que la aplicación $\tilde{\mathfrak{D}} \rightarrow TM, (v, s) \mapsto \gamma'_v(s)$. Puesto que ésta resulta ser (Lema 3.28) el flujo (local) de un campo de vectores en TM , $\tilde{\mathfrak{D}}$ es abierto.

Por ser $TM \equiv TM \times \{1\}$ subvariedad (regular) de $TM \times \mathbb{R}$, el dominio $\mathfrak{D} := \tilde{\mathfrak{D}} \cap (TM \times \{1\})$ de \exp resulta ser un abierto de TM y la aplicación $\exp (= \psi|_{\mathfrak{D}})$ es diferenciable.

Sea $p \in M$. Por ser $T_p M$ subvariedad (regular) del fibrado tangente TM , el dominio $\mathfrak{D}_p := \mathfrak{D} \cap T_p M$ de \exp_p resulta ser un abierto de $T_p M$ y $\exp_p (= \exp|_{T_p M})$ es diferenciable.

El que \mathfrak{D}_p es "estrellado" es consecuencia de que la exponencial \exp_p lleva rectas por $0 \in T_p M$ en geodésicas por $p \in M$ ■

Dada variedad semiriemanniana (M, g) , se dice que un abierto $\mathfrak{C} \subset M$ es **convexo** si es un entorno normal de todos sus puntos (en particular, \mathfrak{C} es conexo).

Nota. En tal caso, se sigue de la Proposición 3.31: $\forall p, q \in \mathfrak{C}$, existe una única geodésica $\sigma_{pq} : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{C}$ entre p y q . Cuidado: pueden existir otras geodésicas $[0, 1] \rightarrow M$ entre p y q ■

- (*Ejemplo*) En el cilindro (riemanniano) $M \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$, el abierto $M - L$ (siendo L una generatriz) es un entorno convexo (*Ejemplo 5.17(1)*).

En $\mathbb{S}^2 (\subset \mathbb{R}^3)$, el más grande ε -entorno convexo de p es $\mathcal{N}_{\pi/2}(p)$, igual a la semiesfera abierta centrada en p .

- (*Prop. 5.7; Lema de Whitehead*) Todo punto de una variedad semiriemanniana posee un entorno convexo.
- (*Lema 5.8; consecuencia de Prop. 5.7*) Dada (M, g) , una geodésica $\gamma : [0, b) \rightarrow M$ es C^0 -extendible si (obvio) y sólo si (!) es C^∞ -extendible-como-geodésica.
- **Notación:** Dada variedad semiriemanniana (M, g) , entorno convexo $\mathfrak{C} \subset M$ y puntos $p, q \in \mathfrak{C}$ (\rightsquigarrow geodésica única $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{C}$ entre p y q), denotamos:

$$\boxed{\overrightarrow{pq}} \equiv \sigma'(0) \in T_p M \quad (\Rightarrow \exp_p(\overrightarrow{pq}) = q) \ .$$

- (*Lema 5.10*) Dado un recubrimiento abierto de una variedad semiriemanniana, existe un recubrimiento por entornos convexos subordinado a aquél.

5.2. CARÁCTER CAUSAL LORENTZIANO

(A) Carácter causal en espacios vectoriales lorentzianos

Un espacio vectorial con producto escalar (V, g) (recordar Cap. 2, pp. 47-52) se dice **lorentziano** si $\dim V \geq 2$ y $\text{ind}(g) = 1$.

Dados esp. vect. lorentziano (V, g) y subespacio $W \subset V$, se define el **carácter causal de W** como: **espacial** si $g|_W$ es definido-positivo, **temporal** si $g|_W$ es no-degenerado de índice 1, y **luz** (o **nulo**) si $g|_W$ es degenerado.

- Se sigue que:
 - (i) esta clasificación es exhaustiva y excluyente
 - (ii) W es espacial-o-temporal si y sólo si $g|_W$ es no-degenerado
 - (iii) el carácter causal de $v \in V$ (Def. 3.3) coincide con el de $\mathbb{R}v$ (definido aquí).
- (Lema 5.26) W es temporal (resp. espacial) si y sólo si W^\perp es espacial (resp. temporal) [Lema 2.26]
- Consecuencias:
 - (i) W es luz si y sólo si W^\perp es luz
 - (ii) En un espacio vectorial lorentziano (V, g) , dos vectores luz son ortogonales si y sólo si son proporcionales (Ejercicio 5.2a)

Dados esp. vect. lorentziano (V, g) y subespacio $W \subset V$, se tiene:

- (Lema) W es espacial si y sólo si todos sus vectores son espaciales (obvio, recordar Def. 3.3).
- (Lema 5.27) (1) W es temporal si y sólo si (3) W contiene un vector temporal, si (siempre) y sólo si (cuando $\dim W \geq 2$) (2) W contiene dos vectores luz linealmente independientes.

Demostración. (1) \Rightarrow (3) (obvio)

(3) \Rightarrow (1): $z \in W$ temporal $\stackrel{(5.26)}{\Rightarrow} (W^\perp \subset) z^\perp$ espacial $\stackrel{(5.26)}{\Rightarrow} W$ temporal.

(1) $\stackrel{\dim W \geq 2}{\Rightarrow}$ (2): Si $\{e_1, e_2, \dots\}$ es base ortonormal de W , entonces $e_1 \pm e_2$ son luz y linealmente independientes

(2) \Rightarrow (3): u, v luz linealmente independientes $\stackrel{\text{Ej. 5.2a}}{\Rightarrow}$ uno de ambos $u \pm v$ es temporal ■

- (Lema 5.28) (1) W es luz si y sólo si (2) W contiene un vector luz y ninguno temporal, si y sólo si (3) $W \cap \Lambda = L - \{0\}$, donde Λ es el conjunto (cono) de vectores luz y L es un subespacio de dimensión 1.

Demostración. (1) \Rightarrow (2): W no contiene un vector temporal (si no, W sería temporal, Lema 5.27) y contiene un vector luz (si no, W sería espacial)

(2) \Rightarrow (3): W no contiene dos vectores luz linealmente independientes (Lema 5.27(2 \Rightarrow 3))

(3) \Rightarrow (1): W no es espacial (obvio) ni tampoco temporal (si lo fuera, tendría dimensión ≥ 2 y se aplicaría el Lema 5.27(1 \Rightarrow 2)) ■

(B) Carácter causal en variedades lorentzianas

Dada una variedad lorentziana (M, g) , el **carácter causal de una subvariedad** $P \subset M$ es el de sus espacios tangentes $T_p P \subset T_p M$ (*supuesto que sean todos el mismo*). Obviamente, una subvariedad arbitraria no tiene por qué tener ningún carácter causal; pero, si es una subvariedad semiriemanniana (Def. 3.4), necesariamente es temporal o espacial.

Nota. En la variedad lorentziana \mathbb{R}_1^{n+1} :

1. Las pseudoesferas $\mathbb{S}_1^n(r) := \mathfrak{q}^{-1}(r^2) := \{p \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid g(p, p) = r^2\}$ y los espacios hiperbólicos $\mathbb{H}_0^n(r) := \mathfrak{q}^{-1}(-r^2) := \{p \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid g(p, p) = -r^2\}$ (Def. 4.23) son (Corolario 1.37) hipersuperficies (esto es, subvariedades de codimensión 1) temporales y espaciales, respectivamente (Proposición 4.17(1)).

2. El cono de luz Λ es una hipersuperficie luz (Proposición 4.22) ■

5.3. SEMICONOS TEMPORALES

(A) Semiconos temporales en espacios vectoriales lorentzianos

Sean (V, g) un espacio vectorial lorentziano y $\mathcal{T} \subset V$ el conjunto de sus vectores temporales, esto es:

$$\mathcal{T} := \{v \in V \mid g(v, v) < 0\}$$

Dado $u \in \mathcal{T}$, se define el **semicono temporal de u** como el conjunto

$$C(u) := \{v \in \mathcal{T} \mid g(u, v) < 0\} \quad (\Rightarrow u \in C(u))$$

Se sigue del Lema 5.26 que: $u, v \in \mathcal{T} \Rightarrow g(u, v) \neq 0$; de donde se concluye: $\mathcal{T} = C(u) \cup C(-u)$ (unión disjunta). Como $C(u)$ y $C(-u)$ son (obviamente) abiertos, \mathcal{T} no es conexo.

- (Lema 5.29) Vectores temporales están en el mismo semicono temporal si y sólo si su producto escalar mutuo es negativo.

Demostración. Dados v, w temporales, se tiene ($\forall u$ temporal):

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \lambda u + \bar{v}, \quad \text{con } \bar{v} \in u^\perp \text{ y } |\lambda| |u| > |\bar{v}| \\ w = \mu u + \bar{w}, \quad \text{con } \bar{w} \in u^\perp \text{ y } |\mu| |u| > |\bar{w}| \end{array} \right\}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |g(\bar{v}, \bar{w})| \stackrel{\text{Schwartz en } u^\perp}{\leq} |\bar{v}| |\bar{w}| < |\lambda \mu| |u|^2 \quad (*)$$

Suponiendo (s.p.d.g.) $v \in C(u)$ ($\Leftrightarrow \lambda > 0$), se sigue de lo anterior:

$$w \in C(u) \quad (\Leftrightarrow \mu > 0) \quad \Leftrightarrow \quad g(v, w) = -|\lambda \mu| |u|^2 + g(\bar{v}, \bar{w}) \stackrel{(*)}{<} 0 \quad \blacksquare$$

- Consecuencia: $u \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(u) \Leftrightarrow C(u) = C(v)$.
- Los semiconos temporales $C(u)$ y $C(-u)$ son arco-conexos, ya que: $\forall v, w \in C(u)$, $tv + (1-t)w \in C(u)$, $\forall t \in [0, 1]$. Se sigue que son conexos y, por tanto \mathcal{T} tiene dos componentes conexas $C(u)$ y $C(-u)$.

Nota 1. Dado $u \in \mathcal{T}$, se define análogamente el **semicono causal de u** como el conjunto $\bar{C}(u) := \{v \in \mathcal{T} \cup \Lambda \mid g(u, v) < 0\}$ (siendo Λ el cono de luz de V). Las propiedades de los semiconos causales se exploran en el Ejercicio 5.3 \blacksquare

Dados espacio vectorial lorentziano (V, g) y $v, w \in \mathcal{T}$, se tiene:

- (Prop. 5.30(1)) $|g(v, w)| \geq |v| |w|$ (desigualdad de Schwartz "invertida"). La igualdad se da si y sólo si $v \sim w$.

La desigualdad se extiende trivialmente a $v, w \in \mathcal{T} \cup \Lambda$

- (*Prop. 5.30(2)*) Si $C(v) = C(w)$, $\exists!$ ("ángulo hiperbólico") $\varphi \geq 0$ tal que $g(v, w) = -|v||w| \cosh \varphi$ [*Prop. 5.30(1)* y propiedad de \cosh]
- (*Corol. 5.31*) Si $C(v) = C(w)$, $|v + w| \geq |v| + |w|$ (desigualdad triangular "invertida"). La igualdad se da si y sólo si $v \sim w$ [*Prop. 5.30(1)*]

(B) Orientación tiempo en variedades lorentzianas

Sean (M, g) variedad lorentziana (Nota: M admite una estructura lorentziana si y sólo si admite un campo de vectores sin ceros, Lema 5.37) y M^T el conjunto de todos los semiconos temporales en sus espacios tangentes. Se dice que (M, g) es **orientable-tiempo** si existe una función (**orientación-tiempo**) $\tau : M \rightarrow M^T$ que es "diferenciable", en el sentido de que: $\forall p \in M$, $\exists \mathcal{U}$ (entorno de p) y $\exists V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ tales que: $V(q) \in \tau_q$, $\forall q \in \mathcal{U}$.

Nota 2*. Puede probarse (Cap. 7, p. 194) que existe una única estructura de variedad diferenciable en el conjunto M^T tal que la proyección natural (dos a uno) $k : M^T \rightarrow M$ es una "aplicación recubridora" (Definición A.7). Con ello, el que (M, g) sea orientable-tiempo resulta equivalente a que k admita una sección global o, en otras palabras (Lema 7.17(2)), a que $k : M^T \rightarrow M$ sea trivial (esto es, a que M^T conste de dos componentes conexas, difeomorfas ambas a M). Resulta además (Lema 7.17(1)) que la variedad lorentziana (M^T, k^*g) siempre es orientable-tiempo ■

- (*Lema 5.32*) (M, g) es orientable-tiempo si y sólo si existe un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ temporal.

Demostración. "Si" es trivial. "Sólo si" usa particiones de la unidad y la arco-conexión de los semiconos temporales ■

Consecuencias del Lema 5.32:

- Toda variedad lorentziana es localmente orientable-tiempo.
- \mathbb{R}_1^n es orientable-tiempo (el campo ∂_{u^1} es temporal).
- $\mathbb{S}_1^n(r) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ es orientable-tiempo, ya que el campo

$$\left(\partial_{u^1} - g(\partial_{u^1}, \frac{P}{r}) \frac{P}{r} \right) |_{\mathbb{S}_1^n(r)} \in \mathfrak{X}(j_{\mathbb{S}_1^n(r)})$$

(con $P \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_1^{n+1})$ el campo de "posición desde el origen", Cap. 1, p. 26) es tangente a $\mathbb{S}_1^n(r)$ y temporal. En efecto: para lo primero, $\frac{P}{r} |_{\mathbb{S}_1^n(r)}$

es normal unitaria espacial (Propos. 4.17(2)); y para lo segundo,

$$\begin{aligned} & g\left(\left(\partial_{u^1} - g\left(\partial_{u^1}, \frac{P}{r}\right)\frac{P}{r}\right), \left(\partial_{u^1} - g\left(\partial_{u^1}, \frac{P}{r}\right)\frac{P}{r}\right)\right) \Big|_{\mathbb{S}_1^n(r)} \stackrel{P=\sum_i u^i \partial_{u^i}}{=} \\ &= g\left(\partial_{u^1} + u^1 \frac{P}{r^2}, \partial_{u^1} + u^1 \frac{P}{r^2}\right) \Big|_{\mathbb{S}_1^n(r)} \stackrel{P=\sum_i u^i \partial_{u^i}}{=} -1 - 2\frac{(u^1)^2}{r^2} + \frac{(u^1)^2}{r^2} g\left(\frac{P}{r}, \frac{P}{r}\right) = \\ & \quad g^{(P/r, P/r)=1} - \left(1 + \frac{(u^1)^2}{r^2}\right) \Big|_{\mathbb{S}_1^n(r)} < 0 . \end{aligned}$$

- $\mathbb{H}_1^n(r) \in \mathbb{R}_2^{n+1}$ es orientable-tiempo, ya que el campo

$$(u^2 \partial_{u^1} - u^1 \partial_{u^2}) \Big|_{\mathbb{H}_1^n(r)} \in \mathfrak{X}(j_{\mathbb{H}_1^n(r)}) \equiv \overline{\mathfrak{X}}(\mathbb{H}_1^n(r))$$

es tangente a $\mathbb{H}_1^n(r)$ y temporal. En efecto: para lo primero, $P \Big|_{\mathbb{H}_1^n(r)}$ es normal espacial (Proposición 4.17(2)) y

$$g(u^2 \partial_{u^1} - u^1 \partial_{u^2}, P) \stackrel{P=\sum_i u^i \partial_{u^i}}{=} 0 ;$$

y para lo segundo,

$$g(u^2 \partial_{u^1} - u^1 \partial_{u^2}, u^2 \partial_{u^1} - u^1 \partial_{u^2}) \Big|_{\mathbb{H}_1^n(r)} = -((u^2)^2 + (u^1)^2) \Big|_{\mathbb{H}_1^n(r)} < 0 .$$

- No existe relación alguna entre orientabilidad y orientabilidad-tiempo (ver [8], Ejemplo 1.2.3).

5.4. GEOMETRÍA DE LORENTZ LOCAL*

(A) Introducción

Sean (M, g) una variedad semiriemanniana y $p \in M$.

Nota 1. (*Lema 5.1, "de Gauss"*) $\forall v \in \mathfrak{D}_p(\subset T_p M)$ y $\forall \xi_v, \eta_v \in T_v(T_p M)$, con ξ_v "radial" (esto es, $\xi \sim v$), se tiene (llamando \bar{g} a la métrica semiriemanniana en la variedad $T_p M$):

$$g(\exp_p v)(d \exp_p(\xi_v), d \exp_p(\eta_v)) = \bar{g}(v)(\xi_v, \eta_v);$$

esto es, $d \exp_p$ preserva productos escalares cuando uno de los vectores tangentes es radial.

Y se definían en el espacio tangente $T_p M$ (ver 4.2, "Hipercurvaturas"), donde todos los objetos van a denotarse con una "tilde":

(a) La función $\tilde{\mathfrak{q}} \in \mathfrak{F}(T_p M)$ dada por: $\tilde{\mathfrak{q}}(v) := g(v, v)$.

(b) El campo (de "posición desde el origen") $\tilde{P} \in \mathfrak{X}(T_p M)$ dado por $\tilde{P}(v) := v_v \in T_v(T_p M)$, que verifica:

$$\begin{cases} \tilde{P}(tv) = ts'(t), & \text{con } s(t) := tv. \\ g(\tilde{P}, \tilde{P}) = \tilde{\mathfrak{q}}; \Rightarrow \text{grad } \tilde{\mathfrak{q}} = 2\tilde{P}; \Rightarrow g(\text{grad } \tilde{\mathfrak{q}}, \text{grad } \tilde{\mathfrak{q}}) = 4\tilde{\mathfrak{q}}. \end{cases}$$

(c) (para cada $c \neq 0$) la hipercurvatura $\tilde{Q} := \tilde{\mathfrak{q}}^{-1}(c)$, a la que \tilde{P} es normal.

(d) El cono de luz $\tilde{\Lambda} := \tilde{\mathfrak{q}}^{-1}(0) - \{0\}$, al que \tilde{P} es tgte. y normal ■

Sea \mathcal{U} un entorno normal de p (esto es, \mathcal{U} es la imagen difeomorfa bajo \exp_p de un entorno $\tilde{\mathcal{U}}$ estrellado de $0 \in T_p M$). Entonces se definen:

- La función local $\mathfrak{q} := \tilde{\mathfrak{q}} \circ \exp_p^{-1} \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$.
- El campo (de "posición desde p ") local $P := d \exp_p(\tilde{P}) \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, que verifica:

$$\begin{cases} P(\exp_p tv) = t\gamma'_v(t). \\ g(P, P) \stackrel{\text{Lema 5.1}}{=} \mathfrak{q}; \Rightarrow \text{grad } \mathfrak{q} \stackrel{\text{Lema 5.1}}{=} 2P \text{ (Corol. 5.3)}. \end{cases}$$

- (para cada $c \neq 0$) la hipercurvatura local $Q := \mathfrak{q}^{-1}(c) = \exp_p(\tilde{Q}) \subset \mathcal{U}$, a la que P es (Lema 5.1) normal. (Corol. 5.2).
- el cono de luz local $\Lambda := \mathfrak{q}^{-1}(0) - \{p\} = \exp_p(\tilde{\Lambda}) \subset \mathcal{U}$, al que P es (Lema 5.1) tangente y normal (Corol. 5.2).

(B) Geodésicas en variedades riemannianas y lorentzianas

Se trata de probar la Proposición 5.34, que asegura que, en una variedad lorentziana, las geodésicas temporales *maximizan* localmente la distancia (lo que resulta clave para el tratamiento de la "paradoja de los gemelos", ver 6.5, "Algunos efectos relativistas"). La demostración de esta Proposición es similar a la del Lema 5.14, que asegura que, en una variedad riemanniana, las geodésicas (necesariamente espaciales) *minimizan* localmente la distancia. Tratamos ambos resultados en paralelo, enfatizando sus analogías.

(Lema 5.14) Sean variedad riemanniana (M, g) , punto $p \in M$, entorno normal \mathcal{U} de p y punto $q \in \mathcal{U}$. Entonces: el (único, Proposición 3.31) segmento geodésico radial $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ entre p y q es la única (salvo reparametrizaciones) curva de longitud mínima entre p y q .

Demostración. Para empezar, se verifica:

$$P(\sigma(t)) = P(\exp_p t\sigma'(0)) = t\sigma'(t) \quad (*) .$$

Si $\alpha : [0, b] \rightarrow \mathcal{U}$ es una curva entre p y q , se tiene, puesto que $|P| \neq 0$ en $\mathcal{U} - \{p\}$:

$$\alpha' = g(\alpha', P/|P| \circ \alpha) (P/|P| \circ \alpha) + N \quad , \quad \text{con } N \perp P \circ \alpha \quad (1) .$$

Si se define la función (diferenciable excepto en p) $\mathbf{r} \equiv \mathbf{q}^{1/2} := \tilde{\mathbf{q}}^{1/2} \circ \exp_p^{-1}$, se tiene:

$$\text{grad } \mathbf{r} = \frac{\text{grad } \mathbf{q}}{2\mathbf{q}^{1/2}} \stackrel{\text{Cor. 5.3}}{=} \frac{P}{|P|} ; \Rightarrow \frac{d(\mathbf{r} \circ \alpha)}{dt} = g(\alpha', \text{grad } \mathbf{r}) = g(\alpha', \frac{P}{|P|}) \quad (2)$$

Y se concluye:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &:= \int_0^b |\alpha'| dt \stackrel{(1)}{=} \int_0^b (g(\alpha', P/|P| \circ \alpha)^2 + g(N, N))^{1/2} dt \geq \\ &\geq \int_0^b |g(\alpha', P/|P| \circ \alpha)| dt \geq \int_0^b g(\alpha', P/|P| \circ \alpha) dt \stackrel{(2)}{=} \\ &= \int_0^b \frac{d(\mathbf{r} \circ \alpha)}{dt} dt = \mathbf{r}(q) \stackrel{\exp_p(\sigma'(0)=q)}{=} |\sigma'(0)| = L(\sigma) \quad (3) . \end{aligned}$$

Por último:

$$L(\alpha) = L(\sigma) \Rightarrow N \stackrel{(3)}{=} 0 \quad \text{y} \quad \frac{d(\mathbf{r} \circ \alpha)}{dt} \stackrel{(2,3)}{=} |g(\alpha', P/|P| \circ \alpha)| > 0 \stackrel{(1,2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \alpha' = \frac{d(\mathbf{r} \circ \alpha)}{dt} (P/|P| \circ \alpha) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \alpha(t) = \sigma \left(\frac{(\mathbf{r} \circ \alpha)(t)}{\mathbf{r}(p)} \right) \quad \blacksquare$$

(Proposición 5.34) Sean variedad lorentziana (M, g) , punto $p \in M$, entorno normal \mathcal{U} de p y punto $q \in \mathcal{U}$ tal que existe una curva temporal entre p y q . Entonces: el (único, Proposición 3.31) segmento geodésico radial $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ entre p y q es la única (salvo reparametrizaciones) curva temporal y de longitud máxima entre p y q .

Nota 2. Para la Dem. se usa el siguiente resultado (Lema 5.33, basado en el Lema 5.1): Sea $p \in M$ y sea $\beta : [0, b] \rightarrow T_p M$ una curva C^∞ (a trozos) con $\beta(0) = 0$ y tal que $\alpha \equiv \exp_p \circ \beta$ es "temporal" (en los quiebros t_i es $g(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+)) < 0$). Entonces $\text{Im } \beta$ está contenida en uno de los dos semiconos temporales de $T_p M$ ■

Demostración. Para empezar, se verifica:

$$P(\sigma(t)) = P(\exp_p t\sigma'(0)) = t\sigma'(t) \quad (*) .$$

Si $\alpha : [0, b] \rightarrow \mathcal{U}$ es una curva temporal entre p y q , se tiene: (1) en primer lugar, por el Lema 5.33, la curva $\beta \equiv \exp_p^{-1} \circ \alpha : [0, b] \rightarrow T_p M$ verifica (para cierto $u \in T_p M$):

$$\begin{aligned} & \text{Im } \beta \subset C(u) \text{ y } g(\beta', \tilde{P} \circ \beta) < 0 ; \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{(en particular) } \vec{p}\vec{q} \equiv \sigma'(0) \text{ es temporal ; } \Rightarrow \sigma \text{ es temporal} \\ P \circ \alpha \text{ es temporal } (**) \text{ y (Lema 5.1) } g(\alpha', P \circ \alpha) < 0 \quad (***) ; \end{array} \right. \end{aligned}$$

y (2) en segundo lugar:

$$\alpha' \stackrel{(**)}{=} -g(\alpha', P/|P| \circ \alpha) (P/|P| \circ \alpha) + N \quad , \quad \text{con } N \perp P \circ \alpha \quad (1) .$$

Si se define la función (diferenciable excepto en p) $\mathbf{r} \equiv |\mathbf{q}|^{1/2}$ ($\Rightarrow \mathbf{r} \circ \alpha = (-\mathbf{q})^{1/2} \circ \alpha$), se tiene (a lo largo de α):

$$\text{grad } \mathbf{r} = \frac{-\text{grad } \mathbf{q}}{2(-\mathbf{q})^{1/2}} \stackrel{\text{Cor. 5.3}}{=} \frac{-P}{|P|} ; \Rightarrow \frac{d(\mathbf{r} \circ \alpha)}{dt} = g(\alpha', \text{grad } \mathbf{r}) = -g(\alpha', \frac{P}{|P|}) \stackrel{(***)}{>} 0 \quad (2).$$

Y se concluye:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &:= \int_0^b |\alpha'| dt \stackrel{(1)}{=} \int_0^b (g(\alpha', P/|P| \circ \alpha)^2 - g(N, N))^{1/2} dt \leq \\ &\leq \int_0^b |g(\alpha', P/|P| \circ \alpha)| dt \stackrel{(***)}{=} - \int_0^b g(\alpha', P/|P| \circ \alpha) dt \stackrel{(2)}{=} \\ &= \int_0^b \frac{d(\mathbf{r} \circ \alpha)}{dt} dt = \mathbf{r}(q) \stackrel{\exp_p(\sigma'(0))=q}{=} |\sigma'(0)| = L(\sigma) \quad (3) . \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} L(\alpha) = L(\sigma) &\Rightarrow N \stackrel{(3)}{=} 0 \stackrel{(1,2)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \alpha' &= \frac{d(\mathbf{r} \circ \alpha)}{dt} (P/|P| \circ \alpha) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \alpha(t) = \sigma \left(\frac{(\mathbf{r} \circ \alpha)(t)}{\mathbf{r}(p)} \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6. NOTAS. RELATIVIDAD ESPECIAL

(Capítulo 6 de [6]; ver también [10])

6.1. ESPACIO-TIEMPO DE NEWTON

(Def. 6.1) **Espacio de Newton:** espacio euclídeo 3-dimensional E , esto es, variedad riemanniana isométrica a \mathbb{R}^3 .

Tiempo de Newton: espacio euclídeo 1-dimensional orientado, esto es, \mathbb{R} salvo elección del origen.

(Defs. 6.2 y 6.3) **Partícula newtoniana:** curva (C^∞) $\alpha : (\mathbb{R} \supset) I \rightarrow E$, junto con **masa** $m \in (0, \infty)$, que se determina experimentalmente.

(1) **Momento** $m\alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

(2) **Fuerza** $\frac{d(m\alpha')}{dt} \stackrel{\text{si } m=cte.}{=} m\alpha'' \in \mathfrak{X}(\alpha)$ (NO es la segunda ley de Newton).

(3) **Energía cinética** $\frac{1}{2}m|\alpha'|^2 \in \mathfrak{F}(\alpha)$.

(Def 6.5) **Espacio-tiempo de Newton:** variedad riemanniana producto $\mathbb{R} \times E$, siendo \mathbb{R} el tiempo de Newton y $E \approx \mathbb{R}^3$ el espacio (euclídeo) de Newton. Proyecciones canónicas $\pi : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ y $\sigma : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$.

Nota 1. La métrica producto carece de significado físico. Mejor dicho: no tiene aún sentido hablar de métrica en este modelo de espacio-tiempo, porque "espacio" y "tiempo" son aún (sin una constante universal que los relacione) conceptos físicamente heterogéneos ■

Nota 2. No debe pensarse que el interés de la noción de "espacio-tiempo" se circunscribe al tratamiento relativista. Las fotos-finish, utilizadas para distinguir los ganadores en las carreras, no son fotos-fijas, esto es, diagramas xy , a $t = cte$. (instante de llegada del primero), sino diagramas ty , a $x = cte$. (abscisa de la línea de meta) en un espacio-tiempo xyt de Newton (ver [2], Cap. 1, p.5) ■

(Def. 6.6) **Línea de espacio-tiempo:** subvariedad W de dimensión 1 de $\mathbb{R} \times E$ tal que $\pi|_W : W \rightarrow I$ es un difeomorfismo.

Toda partícula newtoniana $\alpha : (\mathbb{R} \supset) I \rightarrow E$ tiene por gráfica una línea de espacio-tiempo. Y viceversa, toda línea de espacio-tiempo $W \subset \mathbb{R} \times E$ es la gráfica $\{(t, \alpha(t)) \mid t \in I\}$ de una partícula newtoniana $\alpha := \sigma \circ (\pi|_W)^{-1}$.

(Def.) **Sistema de coordenadas newtoniano (SCN) (o inercial):** carta global $id \times \xi : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ tal que $\xi : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una isometría

Nota 3. (a) Toda isometría $\xi : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ es afín (i.e. la correspondencia $q - p \mapsto f(q) - f(p)$ es \mathbb{R} -lineal). En efecto: Sean V el espacio vectorial asociado a E y $p \in E$. Entonces ξ y la isometría afín $\eta : E \rightarrow \mathbb{R}^3, q \mapsto \xi(p) + d\xi_p(q - p)$ (sobrentendiendo los isomorfismos canónicos (1.45) $V \rightarrow T_p E$ y $T_{\xi p} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) tienen (por construcción) la misma diferencial en p , con lo que (Lema 3.62) $\xi = \eta$.

(b) Una carta global $\xi \equiv (x^1, x^2, x^3) : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una isometría si y sólo si $g_{ij} = \delta_{ij}$. En efecto: teniendo en cuenta

$$x^i := u^i \circ \xi, \quad \stackrel{(1.14)}{\Rightarrow} \quad d\xi(\partial_{x^i}) = \partial_{u^i} \quad (*)$$

y denotando g y \bar{g} las métricas de E y \mathbb{R}^3 (respectivamente), se tiene:

$$(\text{Sólo si}) \quad g_{ij} \equiv g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) \stackrel{(*)}{=} (\xi^{-1*} g)(\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) \stackrel{Hip.}{=} \bar{g}(\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) = \delta_{ij}$$

(Si) Por ser ξ carta, es difeomorfismo sobre su imagen. Además:

$$(\xi^* \bar{g})_{ij} \equiv (\xi^* \bar{g})(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) \stackrel{(*)}{=} \bar{g}(\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) = \delta_{ij} \stackrel{Hip.}{=} g_{ij},$$

con lo que ξ es isometría sobre su imagen. Por ser E completa, $\text{Im } \xi$ es completa y resulta (Ejercicio 3.7) $\text{Im } \xi = \mathbb{R}^3$ ■

(Lema) Dados $p \in E$ y $\{e_i\}$ base ortonormal de $T_p E$ (\rightsquigarrow base dual $\{\omega^i\}$), existe un único SCN $id \times \xi \equiv (t, x^1, x^2, x^3)$ tal que $\xi(p) = o \equiv (0, 0, 0)$ y $\partial_{x^i} |_{p} = e_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Demostración. La carta normal (global) $\xi \equiv (x^1, x^2, x^3) := \{\omega^i\} \circ \exp_p^{-1} : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ asociada a $\{e_i\}$ (Cap. 3) da lugar a un tal SCN. En efecto: ξ es una isometría [lo son $\exp_p^{-1} : E \rightarrow T_p E$ (Ejemplo 3.34) y $\{\omega^i\} : T_p E \rightarrow \mathbb{R}^3$ (base ortonormal)], $\xi(p) = o$ y $\partial_{x^i} |_{p} = e_i$ (Prop. 3.33(1)).

Sea $id \times \eta \equiv (t, y^1, y^2, y^3) : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ otro tal SCN. Al ser

$$\begin{cases} x^i := u^i \circ \xi, & \stackrel{(1.14)}{\Rightarrow} \quad d\xi(\partial_{x^i}) = \partial_{u^i} \\ y^i := u^i \circ \eta, & \stackrel{(1.14)}{\Rightarrow} \quad d\eta(\partial_{y^i}) = \partial_{u^i} \end{cases} \quad (*)$$

la isometría $\eta^{-1} \circ \xi : E \rightarrow E$ verifica

$$d(\eta^{-1} \circ \xi) |_{p} (e_i) \stackrel{(*)}{=} d\eta^{-1} |_{o} (\partial_{u^i} |_{o}) \stackrel{(*)}{=} e_i,$$

con lo que resulta (Propos. 3.62): $\eta^{-1} \circ \xi = id_E$ ■

Nota 4. Sean $id \times \xi, id \times \eta$ dos SCN tales que $x^2 = y^2, x^3 = y^3$. Entonces $\exists! v, a \in \mathbb{R}$ tales que $x^1 = vt + y^1 + a$ ■

Nota 5. Anticipando lo que está por venir (y de lo que O'Neill no va a hablar): una vez se toma nota de que (el módulo de) la velocidad de la luz (en el vacío) es (Michelson-Morley) una constante universal c_{conv} , independiente del sistema de coordenadas inercial desde el que se mide (lo que por cierto obligará a cambiar el modelo de espacio-tiempo), se abre la posibilidad de "homogeneizar espacio y tiempo", multiplicando la coordenada temporal por c_{conv} . Con lo que (en los sistemas de unidades "convencionales", con "dimensiones" básicas: masa M , longitud L y tiempo T) todas las coordenadas (en cualquier carta) tienen dimensiones de longitud.

En la actualidad, el "segundo" (frecuencia de radiación típica de átomos) es la unidad básica. El "centímetro" (definido hasta 1983 en términos de la longitud de onda de ciertas líneas espectrales atómicas) se define ahora en función del "segundo" y de c_{conv} . Así, mejoras en la precisión experimental modificarán el "centímetro" respecto de las longitudes de onda atómicas, pero no el valor de la velocidad de la luz ([7] 2.6) ■

(*Observ. 6.7*) **Unidades geométricas:** sistema de unidades tal que

$$c = G^{Newton} = 1 \text{ (adimensional) } ,$$

donde (en unidades convencionales) $c_{conv} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/seg}$ es la velocidad de la luz en el vacío (que involucra longitud y tiempo) y $G_{conv}^{Newton} = 6'67 \cdot 10^{-8} \text{ gr}^{-1} \text{cm}^3 \text{seg}^{-2}$ es la constante de la gravitación de Newton (que involucra masa, longitud y tiempo).

Elegir c adimensional *equivale a que la longitud se mide en unidades de tiempo*, mientras que elegir c y G^{Newton} adimensionales *equivale a que longitud y masa se miden en unidades de tiempo*:

$$[L] = [T] \quad (*) \quad \text{y} \quad [M] = [L^3 T^{-2}] \stackrel{(*)}{=} [T]$$

La relación entre los valores de (p.ej.) velocidad, longitud y masa en unidades geométricas y los correspondientes valores en unidades convencionales es:

$$\begin{cases} v \text{ (adimensional)} & \rightarrow v_{conv} = v c_{conv} \text{ (en cm/seg)} \\ l \text{ (en seg)} & \rightarrow l_{conv} = l c_{conv} \text{ (en cm)} \\ m \text{ (en seg)} & \rightarrow m_{conv} = m c_{conv}^3 (G_{conv}^{Newton})^{-1} \text{ (en gr)} \end{cases}$$

Desde el punto de vista físico, la ventaja de escribir:

(1) $v_{\oplus} = 10^{-3}$ (en lugar de $v_{\oplus conv} = 3 \cdot 10^7 \text{ cm/seg}$) para la velocidad de la Tierra (respecto del centro de nuestra galaxia) es que se ve inmediatamente que $v_{\oplus conv}$ es *pequeña* (frente a c).

(2) $R_{\odot} = 2'3 \text{ seg}$ (en lugar de $R_{\odot conv} = 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$) para el radio del Sol es que indica inmediatamente *lo que tarda la luz* en recorrer $R_{\odot conv}$ (en el vacío). Para distancias entre estrellas, ya estamos acostumbrados a usar el *año* (o *año luz*).

(3) $M_{\odot} = 4'9 \cdot 10^{-6} \text{ seg}$ (en lugar de $M_{\odot conv} = 2 \cdot 10^{33} \text{ gr}$) para la masa del Sol es que indica inmediatamente (habida cuenta de que $R_{\odot} = 2'3 \text{ seg}$) que: $M_{\odot} \ll R_{\odot}$, $\Leftrightarrow v_{\odot esc}^2 \stackrel{!}{=} \frac{2M_{\odot}}{R_{\odot}} \ll 1$ (con $v_{\odot esc}$ la "velocidad de escape" en la superficie del Sol), esto es, que *la gravedad en la superficie del Sol es débil*.

Nota 6. La noción de "velocidad de escape" (Charla 2) surge en el tratamiento newtoniano de la gravitación (ver [O'Neill], Apéndice C). El gradiente del "potencial gravitatorio" $\Phi \in \mathfrak{F}(E \approx \mathbb{R}^3)$ proporciona la aceleración de las partículas α "en caída libre": $\alpha'' = -grad \Phi \circ \alpha$, lo que implica conservación de la "energía total por unidad de masa": $\frac{1}{2} |\alpha'|^2 + \Phi \circ \alpha = C(cte.)$. Para una α que consigue "justo escapar" ($\lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha(t)| = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha'(t)| = 0$), lo anterior conduce (eligiendo $\Phi < \lim_{|p| \rightarrow \infty} \Phi(p) = 0$) a $C = 0$. Si α se encuentra sobre la superficie de un atractor esféricamente simétrico de masa M y radio R (en cuyo exterior la "ley de la gravitación universal" establece que $\Phi(p) = -M/|p|$), se obtiene: $v_{esc}^2 = \frac{2M}{R}$ (en unidades convencionales, $v_{esc, conv}^2 = \frac{2G^{Newton} M_{conv}}{R_{conv}}$) ■

6.2. ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

(Def.) **Espacio-tiempo (relativista)**: variedad lorentziana, 4 dimensional, conexa, orientada-tiempo.

(Def. 6.8) **Espacio-tiempo de Minkowski**: espacio-tiempo (M, g) isométrico a \mathbb{R}_1^4 (notación para las coordenadas estándar: u^0, u^1, u^2, u^3).

(Def. 6.9) **Partícula material** en M : curva (C^∞) $\alpha : (\mathbb{R} \supset)I \rightarrow M$ temporal, futura y unitaria (t.f.u.).

Dada la trayectoria, la condición de unitariedad *fija el parámetro* (y por tanto la curva), llamado **tiempo propio** y denotado usualmente por τ .

Cada partícula material posee una **masa** $m \in (0, \infty)$, que se determina experimentalmente.

Se dice que una partícula material está en **caída libre** si es geodésica.

Nota 1. (a) En unidades convencionales, se toma $|\alpha'_{conv}| = c_{conv}$.

(b) El tiempo propio modela (salvo elección arbitraria del origen) la lectura de cualquier reloj "comóvil" con (o "acompañante" a) la partícula. Los mejores relojes actuales se basan en procesos de desintegración, todos los cuales siguen una ley del tipo (la función N representa el "número de partículas aún sin desintegrar"):

$$N(\tau) = N(\tau_0)e^{-a(\tau-\tau_0)} ,$$

donde $a(> 0)$ es una constante (típica de cada proceso). Es habitual llamar **semivida** $T_{1/2} := \ln 2/a$ al tiempo (constante y típico de cada proceso) que tarda en desintegrarse la mitad de una muestra.

(c) La masa se mide mediante procesos de colisión que no involucran gravitación ■

(Def. 6.10) **Partícula luz** en M : curva $\alpha : (\mathbb{R} \supset)I \rightarrow M$ luz, futura y geodésica.

La condición de ser geodésica *no fija el parámetro* (Lema 3.26). Sobre el significado del parámetro en este caso, ver más adelante ("Energía-momento").

Sobre la masa de las partículas luz, ver más adelante ("Energía-momento").

(Def.) **Línea de espacio-tiempo**: subvariedad W de dimensión 1 de M temporal o luz.

Toda partícula $\alpha : (\mathbb{R} \supset)I \rightarrow M$ tiene por imagen una línea de espacio-tiempo. Y viceversa, toda línea de espacio-tiempo $W \subset M$ es la imagen de una partícula.

(Def. 6.11) **Sistema de coordenadas Lorentz (SCL) (o inercial):** carta global $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ que es una isometría y preserva la orientación-tiempo (la orientación-tiempo en \mathbb{R}_1^4 es la inducida por ∂_{u^0} , Lema 5.32)

Nota 2. (a) Toda isometría $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ es necesariamente afín (demostración similar a la de la Nota 3(a) en "Espacio-tiempo de Newton")

(b) Una carta global $\xi \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) : M \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ es un SCL si y sólo si $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$ ($\varepsilon_i = \pm 1$) y ∂_{x^0} es futuro. En efecto: Primero se prueba (demostración similar a la de la Nota 3b en "Espacio-tiempo de Newton") que ξ es una isometría si y sólo $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$. Y al ser

$$x^i := u^i \circ \xi, \stackrel{(1.14)}{\Rightarrow} d\xi(\partial_{x^i}) = \partial_{u^i}, \Rightarrow \partial_{x^0} = d\xi^{-1}(\partial_{u^0}),$$

ξ preserva la orientación-tiempo si y sólo si ∂_{x^0} es futuro ■

(Lema 6.12) Dados $p \in M$ y $\{e_i\}$ base ortonormal de $T_p M$ (\rightsquigarrow base dual $\{\omega^i\}$), con e_0 futuro, existe un único SCL $\xi \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ tal que $\xi(p) = o \equiv (0, 0, 0)$ y $\partial_{x^i}|_p = e_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$).

Demostración. Primero se prueba (demostración similar a la del correspondiente Lema en "Espacio-tiempo de Newton") que la carta normal (global) $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ asociada a $\{e_i\}$ es la única isometría que verifica $\xi(p) = o$ y $\partial_{x^i}|_p = e_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$).

En particular, se sigue que $\partial_{x^0}|_p = e_0$ (futuro por hipótesis), con lo que al ser ∂_{x^0} temporal y M conexa, ∂_{x^0} resulta futuro (Nota 2b) y ξ preserva la orientación-tiempo ■

Nota 3. Para el cambio de carta (**transformación de Lorentz**) entre dos SCL ξ y η , ver el Ejercicio 6.8a,c. Para una "deducción" (!?) de la transformación de Lorentz a partir de los dos "postulados de Einstein" ([7] 1.9), ver [7] 2.7 ■

6.3. GEOMETRÍA DE MINKOWSKI

Tres hechos importantes en el ET de Minkowski (M, g) :

(1) $\forall p, q \in M$, existe una isometría lineal canónica ("paralelismo a distancia") $T_p M \rightarrow T_q M, v_p \mapsto v_q$ (Lema 3.20, sobre el transporte paralelo)

(2) $\forall p, q \in M$, existe una única geodésica $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ entre p y q , a saber: $\sigma(t) = p + t(q - p)$ (Ejemplo 3.25, sobre geodésicas)

(3) $\forall p \in M$, la exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M, v_p \mapsto p + v$ es una isometría (Ejemplo 3.34, sobre la aplicación exponencial).

(Observación 6.13) En particular, se sigue de (2) que M es un "entorno convexo" (Cap. 5) y, $\forall p, q \in M$, se denota:

$$\overrightarrow{pq} \stackrel{\text{Cap. 5}}{\equiv} \sigma'(0) = (q - p)_p \in T_p M \quad (\Rightarrow \exp_p(\overrightarrow{pq}) = q) \quad (*)$$

Entonces, en cualquier (carta afín, en particular en cualquier) SCL $\xi \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ se tiene:

$$\boxed{\overrightarrow{pq} = \sum_{i=0}^3 (x^i(q) - x^i(p)) \partial_{x^i} |_p} \quad (**)$$

Lo anterior sugiere que la "causalidad en $T_p M$ " (Cap. 5, "Carácter causal lorentziano" y "Semiconos temporales") puede fácilmente trasplantarse a M :

- Dado $p \in M$, se define el **semicono temporal** (resp. **luz**, resp. **causal) futuro de p** como el conjunto de puntos $q \in M$ tales que \overrightarrow{pq} es temporal (resp. luz, resp. causal) futuro. Y análogamente para los "pasados".

Si $\sigma(t)$ (con dominio $[0, 1]$) es geodésica futura entre p y q , entonces $\sigma(1 - t)$ es geodésica pasada entre q y p . Con lo que, si q está en el semicono temporal (resp. luz, resp. causal) futuro de p , entonces p está en el semicono temporal pasado de q . Denotamos $\Lambda(p)$ al **cono luz de p** (unión de los semiconos luz futuro y luz pasado de p).

- La razón del nombre "semicono causal futuro": *un suceso $q \in M$ puede "ser influenciado por" $p \in M$ (esto es, existe alguna partícula, material o luz, de p a q) si y sólo si \overrightarrow{pq} es causal futuro.*

En efecto: (Sólo si) Existe partícula $\alpha : I \rightarrow M$ de p a q , $\stackrel{\text{Lema 5.33}}{\Rightarrow}$ la imagen de la curva $\exp_p^{-1} \circ \alpha : I \rightarrow T_p M$ de $\exp_p^{-1}(p) \equiv 0_p$ a $\exp_p^{-1}(q) \equiv \overrightarrow{pq}$ está contenida en el semicono causal futuro de $T_p M$, $\Rightarrow \overrightarrow{pq}$ es causal futuro.

(Si) \overrightarrow{pq} es causal futuro, \Rightarrow la única geodésica $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ de p a q es causal futura, \Rightarrow existe partícula de p a q ■

(Definición 6.14) Dados $p, q \in M$, se define la **separación entre p y q** como

$$pq := |\vec{p}\vec{q}| \geq 0$$

- En cualquier SCL $\xi \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, se tiene:

$$pq \stackrel{(**)}{=} \sqrt{|-(x^0(q) - x^0(p))^2 + \sum_{i=1}^3 (x^i(q) - x^i(p))^2|} .$$

- Significado físico de la separación entre p y q :

(1) Si $\vec{p}\vec{q}$ es temporal futuro, existe partícula material en caída libre α entre p y q , y pq coincide con el tiempo propio $\Delta\tau$ transcurrido para α

En efecto: la geodésica unitaria α debe ser una reparametrización de la única geodésica $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ entre p y q . Y se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma &= \alpha \circ h \quad , \quad \Rightarrow \quad \sigma' = \frac{dh}{ds} (\alpha' \circ h) \quad , \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \Delta\tau &\equiv \int_0^{\Delta\tau} |\alpha'(\tau)| d\tau \stackrel{\text{cambio variable}}{=} \int_0^1 |\alpha'(h(s))| \left| \frac{dh}{ds}(s) \right| ds = \\ &= \int_0^1 |\sigma'(s)| ds = |\sigma'(0)| = pq \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(2) Si $\vec{p}\vec{q}$ es luz futuro, $pq = 0$.

(3) Si $\vec{p}\vec{q}$ es espacial, pq resultará ser (ver "Observación de partículas") la distancia entre p y q medida por un "observador" en caída libre y ortogonal a $\vec{p}\vec{q}$.

”Trigonometría”-Lorentz (sobreentendiendo el ”paralelismo a distancia”) :

- (Lema 6.16) Sean $o, p, q \in M$, con \vec{op} espacial y \vec{oq} temporal, y sean las afirmaciones: (1) \vec{pq} es luz, (2) $\vec{op} \perp \vec{oq}$ y (3) $op = oq$. Entonces se tiene:

$$(1) + (2) \Rightarrow (3), \quad (1) + (3) \Rightarrow (2) \quad \text{y} \quad (2) + (3) \Rightarrow (1).$$

En efecto:

$$\vec{pq} = \vec{oq} - \vec{op} \quad , \quad \Rightarrow \quad g(\vec{pq}, \vec{pq}) = \underbrace{g(\vec{oq}, \vec{oq})}_{-oq^2} - 2g(\vec{oq}, \vec{op}) + \underbrace{g(\vec{op}, \vec{op})}_{op^2}$$

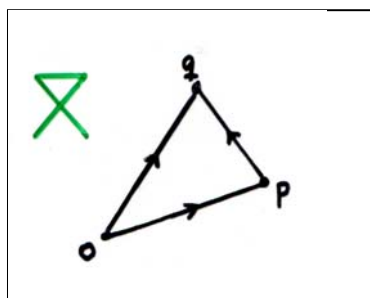
- (Propos. 6.17) Sean $o, p, q \in M$, con p, q pertenecientes al mismo semi-cono temporal de o y con $\vec{op} \perp \vec{oq}$. Entonces se tiene:

$$(1) \quad oq^2 = op^2 - pq^2 \quad , \quad (2) \quad op = oq \cosh \varphi \quad \text{y} \quad (3) \quad pq = oq \sinh \varphi \quad ,$$

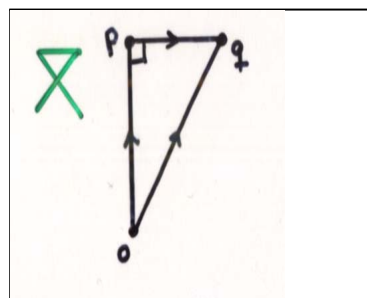
siendo $\varphi \geq 0$ el ángulo hiperbólico entre \vec{op} y \vec{oq} , definido (Propos. 5.30) por $g(\vec{op}, \vec{oq}) =: -op \, oq \cosh \varphi$

En efecto:

$$\vec{pq} = \vec{oq} - \vec{op} \quad , \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underbrace{g(\vec{oq}, \vec{op})}_{-oq \, op \cosh \varphi} = \underbrace{g(\vec{op}, \vec{op})}_{-op^2} + \underbrace{g(\vec{pq}, \vec{op})}_0 & (2) \\ \underbrace{g(\vec{oq}, \vec{oq})}_{-oq^2} = \underbrace{g(\vec{op}, \vec{op})}_{-op^2} + 2 \underbrace{g(\vec{op}, \vec{pq})}_0 + \underbrace{g(\vec{pq}, \vec{pq})}_{pq^2} & (1), \Rightarrow \\ \Rightarrow pq^2 \stackrel{(2)}{=} oq^2(-1 + \cosh^2 \varphi) = oq^2 \sinh^2 \varphi & (3) \end{cases}$$



[ON], Lema 6.16



[ON], Propos. 6.17

6.4. OBSERVACIÓN DE PARTÍCULAS

(A) Desde un SCL $\xi \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) : M \rightarrow \mathbb{R}_1^4$:

- El eje x^0 (imagen por ξ^{-1} del eje u^0 en \mathbb{R}_1^4) es la trayectoria de una geodésica temporal.
- La cortadura $\{x^0 = 0\} := \xi^{-1}\{u^0 = 0\}$ es un hiperplano afín euclídeo isométrico vía $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ a \mathbb{R}^3 .
- (Def. 6.18) ξ -**tiempo**: la función $x^0 : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dos sucesos p y q se dicen ξ -**simultáneos** si $x^0(p) = x^0(q)$.
- ξ -**posición**: la función $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Dada una partícula (material o luz) $\alpha : I \rightarrow M, s \mapsto \alpha(s)$, se tiene:

- la aplic. $\boxed{t \equiv x^0 \circ \alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$ es un difeomorfismo sobre su imagen J
 [En efecto: $\frac{d(x^0 \circ \alpha)}{ds} \stackrel{(2.25)}{=} \xi \text{ es SCL!!} -g(\alpha', \partial_{x^0} \circ \alpha) \stackrel{\text{Ejerc. 5.3a}}{>} 0$]
- (Def.) **Partícula newtoniana asociada** (por ξ a α):

$$\vec{\alpha} := (\vec{x} \circ \alpha) \circ (x^0 \circ \alpha)^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{\alpha}(t),$$

con **velocidad relativa** $\vec{v}(t) := d\vec{\alpha}(t)/dt$.

- (Lema 6.19) Si α es luz, la imagen de $\vec{\alpha}$ es una recta, y $v(t) \equiv |\vec{v}(t)| = 1$ (de acuerdo con Michelson-Morley, Charla 3).

Demostración. La primera afirmación es obvia [$\xi \circ \alpha$ es una geodésica en \mathbb{R}_1^4]. En cuanto a la segunda, se tiene:

$$\alpha' = \sum_{i=0}^3 \frac{d(x^i \circ \alpha)}{ds} (\partial_{x^i} \circ \alpha) = \frac{dt}{ds} \left(\partial_{x^0} \circ \alpha + \sum_{i=1}^3 v^i (\partial_{x^i} \circ \alpha) \right) \stackrel{\substack{g(\alpha', \alpha')=0 \\ \xi \text{ es SCL!!}}}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 (-1 + v^2) \blacksquare$$

Nota 1. Recuérdese que la condición de ser luz *no fija el parámetro* s . Para "mantener la igualdad" de la Prop. 5.30(2)

$$\left(\frac{dt}{ds} \right) \underbrace{-g(\alpha', \partial_{x^0} \circ \alpha)}_{>0} = - \underbrace{|\alpha'|}_0 \underbrace{|\partial_{x^i} \circ \alpha|}_1 \cosh \varphi,$$

debe tomarse $\varphi = \infty$, lo que no determina el valor de dt/ds ■

- (Prop. 6.20) Si α es material (parámetro el tiempo propio τ):

(1) se verifica $v(t) \equiv |\vec{v}(t)| = \tanh \varphi(\tau(t)) (< 1)$, siendo $\varphi \geq 0$ el ángulo hiperbólico entre α' y $\partial_{x^0} \circ \alpha$, definido (Propos. 5.30) por

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right) - g(\alpha', \partial_{x^0} \circ \alpha) =: \cosh \varphi$$

(2) se verifica:

$$\frac{dt}{ds} = (1 - v^2)^{-1/2} \geq 1$$

(dilatación de (los valores medidos de) tiempo para cualquier SCL ξ "no-comóvil" con α , "relojes en movimiento atrasan", Charla 3).

Demostración. Se tiene:

$$\alpha' = \sum_{i=0}^3 \frac{d(x^i \circ \alpha)}{d\tau} (\partial_{x^i} \circ \alpha) = \frac{dt}{d\tau} \left(\partial_{x^0} \circ \alpha + \sum_{i=1}^3 v^i (\partial_{x^i} \circ \alpha) \right) \quad \begin{array}{l} g(\alpha', \alpha') = -1 \\ \xi \text{ es SCL!!} \end{array}$$

$$\Rightarrow -1 = \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 (-1 + v^2)$$

De donde se sigue (2), y también (1) a partir de la identidad $\cosh \varphi \equiv (1 - \tanh^2 \varphi)^{-1/2}$ ■

Nota 2. El Lema 6.19 se obtiene como límite de la Propos. 6.20(1) cuando φ tiende a ∞ ■

- **Distancia entre parejas de sucesos p y q ξ -simultáneos** (esto es, tales que $\vec{pq} \perp \partial_{x^0}$): su separación $pq \stackrel{x^0(p)=x^0(q)}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i(p) - x^i(q))^2}$.

(B) Desde un observador $\omega(t)$ en caída libre:

En el ET de Minkowski (M, g) un **observador** es una partícula material.

- Dado un observador $\omega(t)$ en caída libre, existe un SCL ξ "asociado" a ω , en el sentido de que su eje x^0 es la trayectoria de ω .

En efecto: Dada una base ortonormal $\{e_0 = \omega'(0), e_1, e_2, e_3\}$ de $T_{\omega(0)}M$, existe (Lema 6.12) un único SCL $\xi \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ tal que $\xi(\omega(0)) = (0, 0, 0, 0)$ y $\partial_{x^i}|_{\omega(0)} = e_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$), a saber la carta normal (global) de (M, g) asociada a $\{e_i\}$.

Puesto que el eje x^0 (imagen por ξ^{-1} del eje u^0 en \mathbb{R}_1^4) es la trayectoria de una geodésica temporal, el resultado se sigue ■

- **ω -Tiempo:** la función ξ -tiempo $x^0 : M \rightarrow \mathbb{R}$ (la misma, salvo elección del origen, para cualquiera de estos SCL ξ).
- **ω -Espacio:** el hiperplano afín euclídeo $E_{t=0}^\omega = \{x^0 = 0\} \simeq \mathbb{R}^3$, *canónicamente* identificado con cualquier otro E_t^ω por la isometría $E_t^\omega \rightarrow E_{t=0}^\omega, p \mapsto q$, con $\vec{pq} \parallel \omega$.

Nota 3. (a) Existe un protocolo que utiliza trayectorias luz ("señales de radar") para, desde un observador en caída libre, "fabricar" un SCL asociado a él (ver Ejercicio 6.3) ■

(b) Dados dos SCL ξ y η asociados a observadores en caída libre, el cambio de carta (**transformación de Lorentz**) puede expresarse en términos de dichos observadores (ver Ejercicio 6.8b,d) ■

- **Partícula newtoniana asociada** (por ω a α): la partícula newtoniana $\vec{\alpha}$ asociada por ξ a α .

Se obtiene: $v(t) \equiv |d\vec{\alpha}/dt(t)| = \tanh \varphi(\tau(t))$,

siendo $\varphi(\tau)$ tal que $\cosh \varphi(\tau) \stackrel{\text{Prop. 5.30(2)}}{:=} -g(\alpha'(\tau), \omega')$.

Nota 4. La trayectoria $\text{Im } \vec{\alpha}$ de la partícula newtoniana asociada (por ω a α) depende del observador ω . Una de las manifestaciones de esto es la llamada "aberración de la luz" (ver Ejercicio 6.9*) ■

Nota 5. (a) El tiempo propio transcurrido para una partícula material que transita entre las trayectorias de dos observadores en caída libre y en reposo relativo puede en principio hacerse "tan corto como se quiera":

Con partículas materiales en caída libre, ello es una simple consecuencia de la Propos. 6.17(3) (ver también [13], p.14-15 y Problema 1.11, p.23).

Si (más realista) la partícula parte del reposo (relativo a ambos observadores) y debe, por tanto, acelerar para alcanzar el factor de dilatación temporal requerido, se trata de un problema de "cohetes" (ver 6.8, "Colisiones").

Los problemas de la duración del "viaje espacial" resultan ser en última instancia problemas "de combustible" ■

(b) El tiempo propio transcurrido para un observador en caída libre entre la emisión de dos fotones no tiene por qué coincidir con el tiempo propio transcurrido para otro observador en caída libre (y en movimiento relativo al primero) entre la recepción de los mismos. En esto consiste el llamado "efecto Doppler" (ver Ejercicio 6.10b*), que ya ocurre en el espacio-tiempo de Newton. El efecto Doppler en el espacio-tiempo de Minkowski no debe confundirse con el fenómeno de la dilatación de tiempo (el papel de la dilatación de tiempo minkowskiana es introducir una corrección en el resultado del efecto Doppler newtoniano) ■

6.5. ALGUNOS EFECTOS RELATIVISTAS

La mayoría de las dificultades con la Relatividad especial surgen de la comparación entre las conclusiones obtenidas por dos observadores en caída libre diferentes, en particular las conclusiones relativas a la simultaneidad.

Nota 1. Nótese que, para ω y α en movimiento relativo, con $p \equiv \omega(0) = \alpha(0)$, el hiperplano afín euclídeo $E_{t=0}^\omega$ NO COINCIDE con el hiperplano afín euclídeo $E_{\tau=0}^\alpha$. En términos vectoriales, se tiene:

Sean $e_0, \bar{e}_0 \in T_p M$ temporales futuros unitarios.

Existe un único $e_1 \in e_0^\perp$ unitario tal que

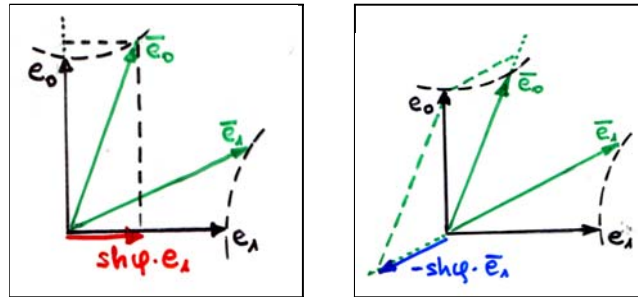
$$\bar{e}_0 = \cosh \varphi e_0 + \sinh \varphi e_1$$

(" \bar{e}_0 se mueve respecto de e_0 en la dirección e_1 con velocidad $\tanh \varphi e_1$ ").

Entonces el vector $\bar{e}_1 := \sinh \varphi e_0 + \cosh \varphi e_1$ es unitario, pertenece a \bar{e}_0^\perp y verifica

$$e_0 = \cosh \varphi \bar{e}_0 - \sinh \varphi \bar{e}_1$$

(" e_0 se mueve resp. de \bar{e}_0 en la "misma" dirección \bar{e}_1 con velocidad $-\tanh \varphi \bar{e}_1$ ").



Obviamente se tiene: $\{\bar{e}_0, \bar{e}_1\} = \{e_0, e_1\} \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$, con lo que $\{\bar{e}_0, \bar{e}_1\}$ y $\{e_0, e_1\}$ definen la misma orientación ■

(A) Composición relativista de velocidades:

- (*Ejemplo 6.21*) (en dos dimensiones, una espacial y una temporal): Un cohete ρ abandona una estación espacial σ (ambos en caída libre) con velocidad $v_1 > 0$ ("hacia adelante") relativa a la estación, y un astronauta μ abandona el cohete (en el plano Lorentz de ρ y σ) con velocidad v_2 (positiva si es hacia "adelante", negativa si es hacia "atrás") relativa al cohete. La velocidad v del astronauta relativa a la estación resulta ser:

$$v \stackrel{\text{Propos. 6.20(1)}}{=} \tanh \varphi \stackrel{\text{Ejerc. 5.11}}{=} \tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tanh \varphi_1 + \tanh \varphi_2}{1 + \tanh \varphi_1 \tanh \varphi_2} \stackrel{\text{Propos. 6.20(1)}}{=} \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} .$$

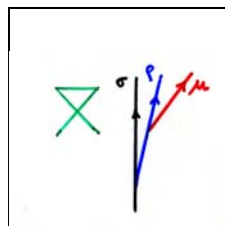
Consecuencias:

- (1) si $v_2 = 1$ (el "astronauta" es luz), resulta $v = 1$ (independientemente de v_1 , de acuerdo con Michelson-Morley Charla 3)
- (2) si $v_1, v_2 \ll 1$, resulta $v \simeq v_1 + v_2$ (resultado newtoniano).

Nota 2. En unidades convencionales (denotando $V \equiv v_{conv} = c_{conv}v$):

$$\frac{V}{c_{conv}} = \frac{\frac{V_1}{c_{conv}} + \frac{V_2}{c_{conv}}}{1 + \frac{V_1}{c_{conv}} \frac{V_2}{c_{conv}}} , \Rightarrow V = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2 / c_{conv}^2} \blacksquare$$

Nota 3. En cuatro dimensiones, ver Ejercicio 6.13* ■



[ON], Ejemplo 6.21

(B) "Paradoja" de los gemelos:

- (Ejemplo 6.22) Dos gemelos (Pedro y Pablo) viajan en un cohete (en caída libre). Al cumplir 21 años (suceso o), Pedro abandona el cohete a velocidad $v = 24/25$ hasta cumplir 28 años (suceso p), retornando entonces y llegando al cohete al cumplir 35 años (suceso q). Trabajando desde el observador geodésico Pablo, resulta:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{Pablo} &\stackrel{!}{=} ox + xq \stackrel{\text{Propos. 6.17(2)}}{=} op \cosh \varphi + pq \cosh \varphi \stackrel{!}{=} \\ &= \Delta\tau_{Pedro} \cosh \varphi \stackrel{\text{Propos. 6.20(1)}}{=} \frac{\Delta\tau_{Pedro}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{14}{7/25} = 50 \text{ años} , \end{aligned}$$

con lo que, a la llegada de Pedro, Pablo cumple $21 + 50 = 71$ años (!).

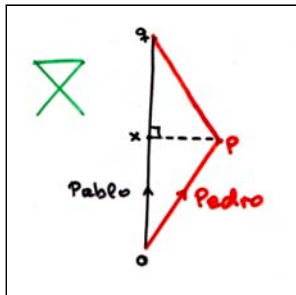
El resultado parece paradójico, pero únicamente es no-intuitivo: aunque Pedro y Pablo son gemelos y la dilatación de tiempo (Propos. 6.20(2)) es simétrica entre cada par de trayectorias geodésicas, la de Pedro no es geodésica (sólo es geodésica-en-dos-trozos).

Nota 3. El Ejemplo 6.22 se ha tomado de [12], Ejercicio 27 (p.71). Para trabajar desde el observador geodésico-en-dos-trozos Pedro, ver [12], Ejercicio 49 (p.94-95): denotando y, z los dos sucesos sobre la trayectoria de Pablo con los que p es Pedro-simultáneo, resulta:

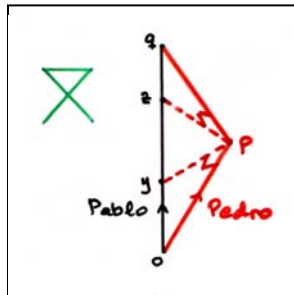
$$\begin{aligned} \Delta\tau_{Pablo} &\stackrel{!}{=} oy + yz + zq \stackrel{\text{Propos. 6.17(2)}}{=} \frac{op}{\cosh \varphi} + yz + \frac{pq}{\cosh \varphi} \stackrel{!}{=} \\ &= \frac{\Delta\tau_{Pedro}}{\cosh \varphi} + yz \stackrel{\text{Propos. 6.20(1)}}{=} \Delta\tau_{Pedro} \sqrt{1-v^2} + yz = 14 \frac{7}{25} + yz \simeq 3,92 + yz , \end{aligned}$$

pero el cálculo no tiene en cuenta la duración yz .

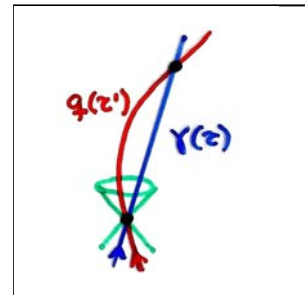
Para un cálculo usando efecto Doppler (Ejercicio 6.10b), ver [12], Ejercicio 81 (p. 157) y [13], Ejercicio 8-24 (p. 264). ■



[ON], Ejemplo 6.22a



[ON], Ejemplo 6.22b



[ON], Corolario 6.23

- (Corolario 6.23) Sea (M, g) el ET de Minkowski. Si $\alpha : [0, \Delta\tau] \rightarrow M$ es una partícula material de p a q , se tiene: $\Delta\tau \leq pq$ (con "=" si y sólo si α está en caída libre).

Demostración. Por ser α una partícula material de p a q , el vector $\vec{pq} \in T_p M$ es (recordar en "Geometría de Minkowski" la referencia al Lema 5.33) temporal futuro, con lo que existe una (única) partícula material *en caída libre* $\omega : [0, \Delta t] \rightarrow M$ de p a q . Llamando $\xi \equiv (x^i)$ a cualquiera de los SCL asociados (Lema 6.12) a ω , se tiene:

$$pq \stackrel{\text{"Geom. Minkowski"}}{=} \Delta t \stackrel{\text{"Observ. partículas"}_{x^0(\omega(t))=t+\lambda}}{=} x^0(q = \alpha(\Delta\tau)) - x^0(p = \alpha(0)) \equiv \\ \equiv \int_0^{\Delta\tau} d(x^0 \circ \alpha) \stackrel{\text{C.V.}}{=} \int_0^{\Delta\tau} \frac{d(x^0 \circ \alpha)}{d\tau} d\tau \stackrel{\text{Propos. 6.20(2)}}{\geq} \Delta\tau$$

(con "=" si y sólo si α está en caída libre). Y hemos terminado ■

Nota 4. (a) El Corolario 6.23 sale al paso de la objeción que atribuye el resultado del Ejemplo 6.22 a la "irrealidad" de un observador geodésico-en-dos-trozos.

Para un ejemplo concreto con un observador geodésico y otro no-geodésico pero "realista", ver Ejercicio 6.2 y [8], Ejercicio 2.1.14.

(b) En el caso de que (M, g) sea una variedad lorentziana arbitraria:

(i) Si q está en un entorno normal de p , la conclusión del Corolario 6.23 mantiene su validez. Ello es consecuencia de la Propos. 5.34, que afirma: Dados un punto $p \in M$, un entorno normal U de p y un punto $q \in U$ tal que existe una curva temporal entre p y q , el (único, Propos. 3.31) segmento geodésico radial $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$ entre p y q es la única (salvo reparametrizaciones) curva temporal de longitud máxima (en U) entre p y q . La Propos. 5.34 representa la versión para geodésicas temporales en una variedad lorentziana del Lema 5.14 para geodésicas en una variedad riemanniana.

(ii) Si q no está en un entorno normal de p , no es seguro que exista una geodésica temporal "maximizante" entre p y q (una condición suficiente se da en la Propos. 14.19), ni siquiera que exista una geodésica temporal entre p y q (pensar en un ejemplo trivial o en un cilindro-Lorentz, Ejemplo 5.35).

(c) Experimentos: Pound-Rebka (1960) con dos núcleos de hierro a distinta temperatura (ver [12], Ejercicio 89, p. 160, y [13], Ejercicio 8-34, p. 270) y Hafele-Keating (1972) con dos relojes de cesio a bordo de aviones en movimiento relativo (ver [13], 4.10, p. 131-134, y [15], Cap. 3), ver Charla 4 ■

6.6. CONTRACCIÓN DE LORENTZ-FITZGERALD

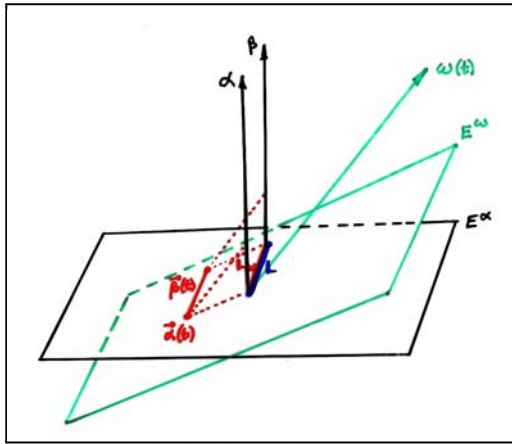
Sean $\alpha(\tau), \beta(\sigma)$ observadores minkowskianos en caída libre y "paralelos" (i.e. en "reposo relativo": $\langle \alpha'(\tau), \beta'(\sigma) \rangle = -1 \stackrel{(6.17)}{\Rightarrow} \varphi = 0 \stackrel{(6.20(1))}{\Rightarrow} v = 0$), con lo que ambos tiempos propios τ, σ "corren a la par" (i.e. $d(\tau \circ \beta)/d\sigma = 1$, Prop. 6.20) y (eligiendo $\alpha(0)\beta(0) \perp \alpha$), se tiene: $\alpha(\tau)\beta(\tau) \perp \alpha$. Así α y β se consideran los extremos de una **regla** $[\alpha, \beta]$ en M en caída libre.

La **longitud L de la regla** se define como $L \equiv L_\alpha := \alpha(\tau)\beta(\tau)$, esto es, como la distancia (independiente de τ) entre los sucesos α -simultáneos $\alpha(\tau)$ y $\beta(\tau)$.

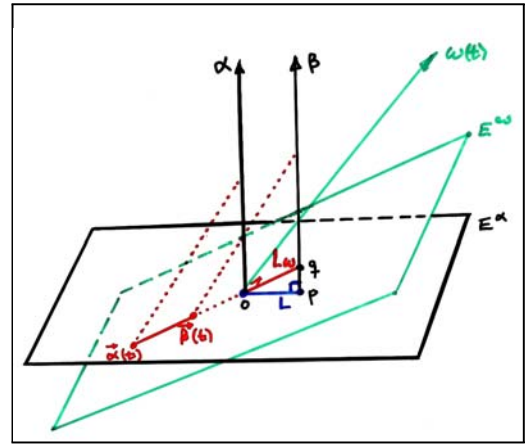
Dado otro observador en caída libre $\omega(t)$, la regla newtoniana asociada $[\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t)]$ es un segmento que se mueve "por traslación" (esto es, manteniéndose paralelo a sí mismo: α y β tienen la misma velocidad newtoniana respecto de ω) en $E_{t=0}^\omega$; la **longitud L_ω de la regla según ω** se define como $L_\omega := \vec{\alpha}(t)\vec{\beta}(t)$, esto es, como la distancia (independiente de t) entre los sucesos ω -simultáneos $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\beta}(t)$.

(Prop. 6.24) Sea $[\alpha, \beta]$ una regla en M en caída libre. Sea $\omega(t)$ un observador en caída libre, para el que la regla newtoniana $[\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t)]$ se mueve con (módulo de la) velocidad v . Entonces se tiene:

- (1) Si $[\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t)]$ se mueve en dirección ortog. a su eje, entonces $L_\omega = L$.
- (2) Si $[\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t)]$ se mueve en la dirección de su eje, entonces $L_\omega = L\sqrt{1-v^2} \leq L$.



[ON], Prop. 6.24(1)



[ON], Prop. 6.24(2), Fig. 6.8

Demostración. (1) Por definición, $A \equiv [\vec{\alpha}(0), \vec{\beta}(0)] \perp \omega$; y por hipótesis, $A \perp \vec{\alpha}$. Puesto que $\text{Im } \alpha \subset \text{Span}(\text{Im } \omega, \text{Im } \vec{\alpha})$, se sigue $A \perp \alpha$, $\Rightarrow L_\omega = L$.

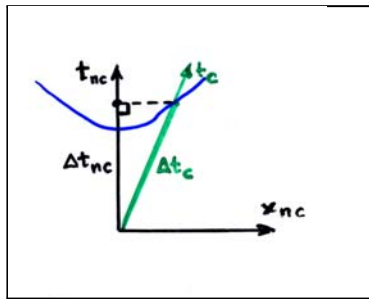
$$(2) \text{ Se tiene: } \left\{ \begin{array}{l} L \equiv op \stackrel{6.17}{=} \text{ or } \sinh \varphi \\ L_\omega \equiv oq \stackrel{6.17}{=} \text{ or } \tanh \varphi \end{array} \right\}, \Rightarrow L_\omega = \frac{L}{\cosh \varphi} \equiv L\sqrt{1 - \tanh^2 \varphi} \blacksquare$$

Así pues: *Contracción de (los valores medidos de) longitudes* para $\omega(t)$ (observador no comóvil con la regla de referencia) con respecto al observador comóvil $\alpha(\tau)$ ("reglas en movimiento se acortan en la dirección de éste").

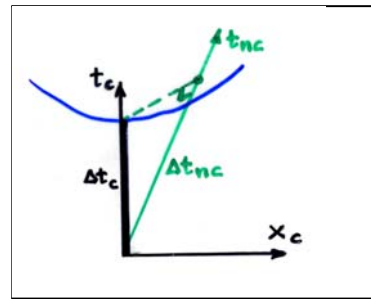
Nota. (a) Podría pensarse que la diferencia entre los fenómenos de Dilatación de tiempo y de Contracción de longitudes radicaría en una especie de "dualidad" entre tiempo (signo $-$ en la métrica minkowskiana) y espacio (signo $+$ en la métrica minkowskiana).

No es así. La diferencia radica en que los procesos "medida de tiempo" y "medida de longitudes" son cualitativamente distintos:

(i) Dado un intervalo de tiempo Δt_c en un reloj, para medir qué intervalo de tiempo Δt_{nc} le corresponde desde un observador no-comóvil, es preciso obtener la diferencia de t_{nc} -coordenadas de un único objeto (el reloj). El intervalo Δt_{nc} resulta ser la *proyección ortogonal* sobre el eje t_{nc} del intervalo Δt_c

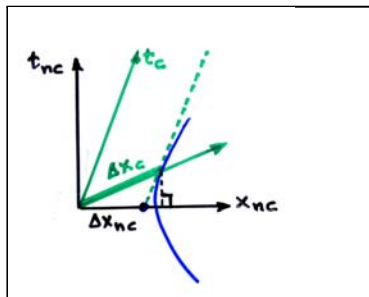


$$\Delta t_{nc} > \Delta t_c$$



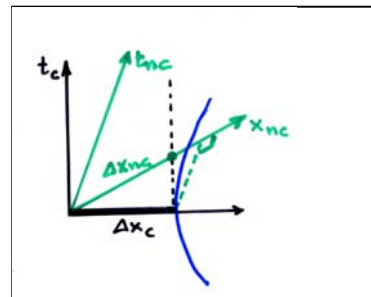
$$\Delta t_{nc} > \Delta t_c$$

(ii) Dada una regla de longitud Δx_c , para medir qué longitud Δx_{nc} le corresponde desde un observador no-comóvil, es preciso obtener la diferencia de x_{nc} -coordenadas a t_{nc} -constante de dos objetos (los dos extremos de la regla). La longitud Δx_{nc} no resulta ser la *proyección ortogonal* sobre el eje x_{nc} de la longitud Δx_c



$$\Delta x_{nc} < \Delta x_c$$

[ON], Fig. 6.9



$$\Delta x_{nc} < \Delta x_c$$

[ON], Fig. 6.8

Para una descripción "intuitiva" (?) de la contracción de Lorentz-Fitzgerald, ver [7], 2.4.

(b) Una nave ω , que recorre un α -trayecto Δx_c en un α -tiempo Δt_{nc} con velocidad $v_{\omega\alpha} := \frac{\Delta x_c}{\Delta t_{nc}} \equiv \tanh \varphi$, percibe una:

- distancia a recorrer $\Delta x_{nc} \stackrel{(6.24)}{=} \frac{\Delta x_c}{\cosh \varphi} < \Delta x_c$ (contr. de longitud) y
- duración del viaje $\Delta t_c \stackrel{(6.20)}{=} \frac{\Delta t_{nc}}{\cosh \varphi} < \Delta t_{nc}$ (dilat. de tiempo),

de forma que $v_{\alpha\omega} := \frac{\Delta x_{nc}}{\Delta t_c} = \tanh \varphi$ ■

6.7. ENERGÍA-MOMENTO

La conservación de energía y momento en las colisiones relativistas justifica las definiciones de energía-momento para partículas materiales y luz

(Def. 6.26) Dada partícula material $\alpha(\tau)$ (con masa m), su **energía-momento** es $P_\alpha := m\alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

- Sea $\omega(t)$ un observador (\equiv partícula material) en caída libre. En términos de un SCL $\xi \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ asociado a ω ("Observación de partículas".A), se definen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Energía } E_\alpha := -g(P_\alpha, \partial_{x^0} |_\alpha) = m \frac{d(x^0 \circ \alpha)}{d\tau} \stackrel{(6.20)}{=} \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}(v^4) \\ \text{Momento } \vec{P}_\alpha := P_\alpha - E_\alpha \partial_{x^0} |_\alpha = m \frac{d(\vec{x} \circ \alpha)}{d\tau} \stackrel{(6.20)}{=} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} = m\vec{v} + \mathcal{O}(v^3) \end{array} \right. ,$$

siendo v (el módulo de) la velocidad de la partícula newtoniana $\vec{\alpha}$ asociada (por ξ a α). Y se tiene: $P_\alpha = E_\alpha(\partial_{x^0} \circ \alpha) + \vec{P}_\alpha$

- (Cor. 6.28) Se verifica (recordando que $v \equiv |\vec{v}| = \tanh \varphi$, donde $\varphi(\geq 0) \in \mathfrak{F}(I)$ es tal que $\cosh \varphi := -g(\alpha', \partial_{x^0} |_\alpha)$):

$$\begin{array}{ll} (1) E_\alpha^2 = m^2 + |\vec{P}_\alpha|^2 & (3) |\vec{P}_\alpha| = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} = m \sinh \varphi \\ (2) E_\alpha = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m \cosh \varphi & (4) |\vec{P}_\alpha| / E_\alpha = \tanh \varphi = v \end{array}$$

(Def. 6.29) Dada partícula luz $\gamma(s)$ (por definición, geodésica), su **energía-momento** es $P_\gamma := \gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

- Sea $\omega(t)$ un observador en caída libre. En términos de un SCL $\xi \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ asociado ("Observación de partículas".A), se define:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Energía } E_\gamma := - \langle P_\gamma, \partial_{x^0} |_\gamma \rangle = \frac{d(x^0 \circ \gamma)}{ds} \\ \text{Momento } \vec{P}_\gamma := P_\gamma - E_\gamma \partial_{x^0} |_\gamma = \frac{d(\vec{x} \circ \gamma)}{ds} \end{array} \right. , \Rightarrow P_\gamma = E_\gamma(\partial_{x^0} \circ \gamma) + \vec{P}_\gamma$$

- Para partículas luz γ se tiene: $|\vec{P}_\gamma| = E_\gamma$, con lo que se verifica 6.28(4) (ya que $v = 1$, Lema 6.19). Para que se verifique 6.28(1), debe atribuírse a γ masa cero. Por otra parte, 6.28(2) y 6.28(3) carecen de sentido.

Nota 1. Esto último posibilita definir "partículas" como curvas α causales futuras tales que $g(\alpha', \alpha') = -m^2$ (con $m \geq 0$), y su "energía-momento" como $P_\alpha := \alpha'$ (ver [8], 3.1.1; ver Charla 6) ■

- Al ser γ geodésica y $\partial_{x^0} |_\gamma$ paralelo, resulta $E_\gamma = cte.$ y \vec{P}_γ paralelo.

Energía y momento tienen *la misma unidad geométrica* (el "segundo") que masa, que longitud y que tiempo.

Nota 2. En "unidades convencionales", se define:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para partículas materiales:} \\ E_{conv} := m_{conv} c_{conv} \frac{d(x_{conv}^0 \circ \alpha)}{d\tau_{conv}} \\ \vec{P}_{conv} = m_{conv} \frac{d(\vec{x}_{conv} \circ \alpha)}{d\tau_{conv}} \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Para partículas luz:} \\ E_{conv} := c_{conv} \frac{d(x_{conv}^0 \circ \alpha)}{ds_{conv}} \\ \vec{P}_{conv} = m_{conv} \frac{d(\vec{x}_{conv} \circ \alpha)}{ds_{conv}} \end{array} \right.$$

Puesto que $[x_{conv}^{i=0,1,2,3}] = [L]$ ("ET de Newton", Nota 5) y $[\tau_{conv}] = [T]$, estas definiciones para partículas materiales $\alpha(\tau)$ conducen a

$$[E_{conv}] = [ML^2T^{-2}] \quad \text{y} \quad [\vec{P}_{conv}] = [MLT^{-1}] ,$$

mientras que estas definiciones para partículas luz $\gamma(s)$ conducen a

$$[s_{conv}] = [M^{-1}T]$$

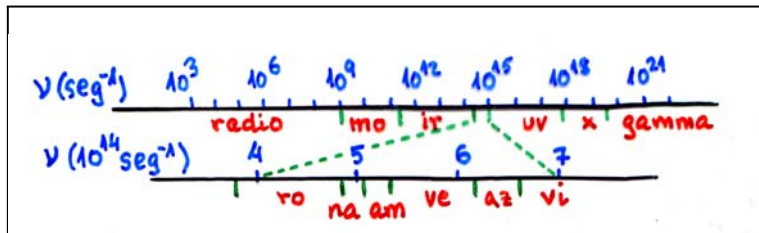
La relación entre los valores de energía y momento en unidades geométricas y los correspondientes valores en unid. convencionales es:

$$\left\{ \begin{array}{l} E \text{ (en seg)} \rightarrow E_{conv} = E c_{conv}^5 (G_{conv}^{Newton})^{-1} \text{ (en erg} \equiv \text{gr cm}^2/\text{seg}^2) \\ \vec{P} \text{ (en seg)} \rightarrow \vec{P}_{conv} = \vec{P} c_{conv}^4 (G_{conv}^{Newton})^{-1} \text{ (en din} \equiv \text{gr cm/seg)} \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

La relación entre el carácter "corpúscular" de la luz (el que adoptamos aquí, con conceptos como energía E y momento P) y el "ondulatorio" (con conceptos como "frecuencia" ν y "longitud de onda" λ , ligados entre sí por: $\lambda\nu = 1$) quedó establecida por las equivalencias:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = h\nu (= \frac{h}{\lambda}) \text{ (Einstein 1905, efecto fotoeléctrico; ver [1], 19.12)} \\ |\vec{P}| = h\nu (= \frac{h}{\lambda}) \text{ (Compton 1923, Ejercicio 6.11b*; ver [1], 19.10-19.11)} \end{array} \right. ,$$

donde $h = 1,8 \cdot 10^{86} \text{ seg}^2$ es la constante de Planck.



[ON], Fig. 6.29 (rangos de frecuencia de la luz)

Nota 5*. En "unidades convencionales" (donde $\nu_{conv} = \nu$ y $\lambda_{conv} = \lambda c_{conv}$ están ligadas entre sí por $\lambda_{conv}\nu_{conv} = c_{conv}$), se tiene:

$$E_{conv} = h_{conv}\nu_{conv} = \frac{h_{conv}c_{conv}}{\lambda_{conv}} \quad \text{y} \quad |\vec{P}_{conv}| = \frac{h_{conv}}{c_{conv}}\nu_{conv} = \frac{h_{conv}}{\lambda_{conv}} ,$$

donde $h_{conv} = h c_{conv}^5 (G_{conv}^{Newton})^{-1} = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ erg seg} \quad \blacksquare$

6.8. COLISIONES

(A) Conservación de la energía-momento:

(Def. 6.30) **Colisión en M** : colección $Ent(p) \cup Sal(p)$, donde:

$$\underbrace{p \in M}_{\text{suceso de colisión}} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} Ent(p) := \underbrace{\{\alpha_i : [a_i, 0] \rightarrow M, \text{ con } \alpha_i(0) = p \mid i = 1, \dots, r\}}_{\text{partícula entrante}} \\ Sal(p) := \underbrace{\{\beta_j : [0, b_j] \rightarrow M, \text{ con } \beta_j(0) = p \mid j = 1, \dots, s\}}_{\text{partícula saliente}} \end{array} \right. .$$

Cuando $r = 1$, la colisión se llama **desintegración**.

Observador instantáneo en $p \in M$: vector tangente $u \in T_p M$ temporal, futuro, unitario.

Dada una partícula α por p , su energía-momento P se expresa de forma única como $P = Eu + \vec{P}$, con $E = -g(P, u) \in (0, \infty)$ la **energía de α respecto de u** y $\vec{P} \in u^\perp$ el **momento de α respecto de u** .

(Def. 6.31) **Ley de conservación de la energía-momento**: dada cualquier colisión $Ent(p) \cup Sal(p)$, se verifica (experimental!):

$$\sum_{\alpha_i \in Ent} P_i = \sum_{\beta_j \in Sal} P_j ,$$

con P_i (resp. P_j) la energía-momento de α_i (resp. β_j) en p .

(Cor. 6.33) Dado cualquier observador instantáneo $u \in T_p M$, lo anterior da lugar a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha_i \in Ent} E_i = \sum_{\beta_j \in Sal} E_j \\ \sum_{\alpha_i \in Ent} \vec{P}_i = \sum_{\beta_j \in Sal} \vec{P}_j \end{array} \right. .$$

Nota 1. La ley de la conservación de la energía-momento:

- (1) Justifica las definiciones relativistas de energía y momento respecto de un observador.
- (2) Justifica la relación de la energía y momento de las partículas-luz con la frecuencia (color) de dicha luz (efectos fotoeléctrico y Compton, este último se trata en el Ejercicio 6.11*) ■

(Ejemplo 6.32) Dos bloques de plastilina α_1 y α_2 , con masas m_1 y m_2 y con (módulo de la) velocidad relativa v , chocan y salen juntos. Se trata de analizar las características del bloque resultante β , con masa m_β . Aplicando la ley de conservación de la energía-momento para calcular la masa final

$$m_\beta \equiv |m_\beta \beta'| \stackrel{\text{Def. 6.31}}{=} |m_1 \alpha'_1 + m_2 \alpha'_2| \stackrel{!}{=} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1-v^2}}} (> m_1 + m_2) ,$$

se concluye que ha habido un *aumento de masa* (en contraste con el resultado newtoniano, donde la conservación de la masa es un axioma).

Nota 2. Cálculo newtoniano detallado (en dos dimensiones, una espacial y una temporal), desde un observador instantáneo $u \in T_p M$ respecto del cual ambas partículas poseen velocidades newtonianas (en unidades convencionales) V_1 y V_2 ($V_1 \neq V_2$).

Las dos expresiones básicas son (ver Ejercicio 6.12*):

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m_\beta & \text{(conservación de la masa)} \\ m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_\beta V_\beta & \text{(conservación del momento)} \end{cases}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_\beta = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_2.$$

Calculando ahora el balance Δ de energía cinética

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \equiv \frac{1}{2} m_\beta V_\beta^2 + \Delta, \stackrel{!}{\Rightarrow} \Delta = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2)^2 (> 0),$$

se concluye que ha habido una disminución de energía cinética (al no conservarse ésta, la colisión newtoniana se dice "inelástica").

En el Ejercicio 6.12* se prueba que, cuando las velocidades $v_i \equiv V_i/c$ y $v_\beta \equiv V_\beta/c$ son "pequeñas" (frente a 1), la ley de conservación de la energía-momento (Def. 6.31) proporciona de hecho el límite newtoniano que acabamos de ver ■

(B) Cohetes:

(Ejemplo 6.34) Un cohete $\rho(\tau)$ abandona una estación espacial en caída libre σ con velocidad relativa inicial $v(0) = 0$. El expulsado de ρ , dirigido siempre hacia σ (se trata por tanto de un problema en dos dimensiones, una espacial y una temporal), consta exclusivamente de partículas luz ("fotones").

Se trata de hallar el parámetro de velocidad $\varphi(\tau)$ de ρ con respecto a σ (definido por $\cosh \varphi(\tau) := - \langle \rho'(\tau), \sigma' \rangle$) en términos de la masa $m(\tau)$ del cohete. El cálculo se lleva a cabo integrando la ecuación diferencial que relaciona la ganancia de parámetro $\Delta\varphi > 0$ con la pérdida de masa $\Delta m < 0$. A esta ecuación se puede llegar considerando (para pequeños incrementos $\Delta\tau$ del tiempo propio) la evolución del cohete como una desintegración del "cohete inicial" $\rho(\tau)$ con masa m en un "cohete final" $\rho(\tau + \Delta\tau)$ con masa $\bar{m} \equiv m + \Delta m < m$ y un cierto expulsado de fotones (con energía-momento P_{ex}), aplicando la conservación de energía-momento (Def. 6.31) y tomando límites cuando $\Delta\tau \rightarrow 0$.

Concretamente (también puede hacerse un cálculo respecto del observador instantáneo $\rho'(\tau)$):

$$\begin{aligned}
m\rho'(\tau) &= \bar{m}\rho'(\tau + \Delta\tau) + P_{ex} \quad , \quad \langle P_{ex}, P_{ex} \rangle = 0 \\
\Rightarrow 0 &= -m^2 - \bar{m}^2 - 2m\bar{m} \underbrace{\langle \rho'(\tau), \rho'(\tau + \Delta\tau) \rangle}_{\equiv -\cosh \Delta\varphi} \stackrel{\bar{m} \equiv m + \Delta m}{=} \\
&= -m^2 - (m^2 + \Delta m^2 + 2m\Delta m) + 2m(m + \Delta m) \cosh \Delta\varphi = \\
&= -(\Delta m)^2 + m(m + \Delta m) \underbrace{2(\cosh \Delta\varphi - 1)}_{=(\Delta\varphi)^2 + O((\Delta\varphi)^4)} \stackrel{\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \Delta m = 0 = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \Delta\varphi}{\simeq} \\
&\simeq -(\Delta m)^2 + m^2(\Delta\varphi)^2 \quad , \quad \Delta m \Delta\varphi < 0 \\
\Rightarrow m\Delta\varphi &\simeq -\Delta m \quad , \quad \Delta\tau \rightarrow 0 \quad \frac{d\varphi}{d\tau}(\tau) = \frac{-1}{m(\tau)} \frac{dm}{d\tau}(\tau) \quad , \quad \varphi(0) = 0 \quad \varphi(\tau) = \ln \frac{m(0)}{m(\tau)} \quad .
\end{aligned}$$

Nota 3. El Ejercicio 6.4 explora un cálculo análogo para un cohete cuyo expulsado consta de partículas materiales con (módulo de la) velocidad respecto del cohete v_{ex} (constante); en este caso no es posible (!) limitarse a tomar normas en la ecuación intrínseca. Frente al cohete de expulsado material, el cohete fotónico "optimiza" la ganancia de velocidad por pérdida de masa. ■

6.9. UN OBSERVADOR ACELERADO

Sean M el espacio-tiempo de Minkowski, ω un observador en caída libre y ξ un sistema de coordenadas Lorentz "adaptado" a ω . Trabajaremos en el plano temporal $P \subset M$ definido por $x^2 = 0 = x^3$ (movimiento relativista en un dimensión espacial). Sea $\alpha(\tau)$ un observador en P con ξ -coordenadas

$$x^0(\alpha(\tau)) = g^{-1} \sinh(g\tau) \quad , \quad x^1(\alpha(\tau)) = g^{-1} \cosh(g\tau)$$

Aquí $g = x^1(\alpha(0)) = |\alpha''(\tau)|^{-1} > 0$ (con "dimensiones" $[g] = T^{-1}$) *no es la métrica*.

- Es inmediato comprobar que, en efecto, α es un observador con tiempo propio τ .
- La partícula newtoniana $\vec{\alpha}(t)$ asociada por ξ a α (en $E_{t=0}^\omega$) se acerca desde $x^1 = +\infty$ hacia el origen hasta la distancia g^{-1} para después alejarse simétricamente hacia $x^1 = +\infty$.

Nota. De hecho, se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(t) &= (g^{-1} \cosh(\sinh^{-1}(gt)), 0, 0) = (g^{-1} \sqrt{1 + g^2 t^2}, 0, 0) \quad , \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{v}_\alpha &\equiv \frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \left(\frac{gt}{\sqrt{1 + g^2 t^2}}, 0, 0 \right) \quad , \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 \vec{\alpha}}{dt^2} &= \left(\frac{g}{(1 + g^2 t^2)^{3/2}}, 0, 0 \right) = (g(1 - v_\alpha^2)^{3/2}, 0, 0) . \end{aligned}$$

Se trata de un movimiento que, para pequeñas velocidades (esto es, para valores pequeños de t), es (aproximadamente) uniformemente acelerado respecto de ω , con aceleración g (donde $g_{conv} = gc$). Tener en cuenta que, en relatividad, no son posibles movimientos indefinidamente uniformemente acelerados ■

- El intento de construir un sistema de coordenadas mediante radar desde α da lugar a una carta $\eta \equiv (y^0, y^1, y^2, y^3) : Q \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ en torno a $\text{Im } \alpha$, que *ni es global* ($Q \subsetneq M$, en particular, α "no detecta" al observador ω) *ni es una isometría* sobre su imagen: $g(\partial_{y^0}, \partial_{y^0}) = -(1 + gy^1)^2$ (ver Ejercicio 6.7).
- Si γ es un fotón emitido (hacia "adelante") por el observador α en $\tau \geq 0$, la velocidad de la partícula newtoniana $\vec{\gamma}(\gamma^0)$ asociada por η a γ (en $E_{\tau=0}^\alpha$) *crece sin límite* a medida que crece τ (Ejercicio 6.6a).

7. NOTAS. CONSTRUCCIONES

(Capítulo 7 de [6]; ver también [9] y [14])

7.1. PRODUCTOS ALABEADOS

(Def. 7.33) Dadas variedades semiriemannianas (B, g_B) (**base**) y (F, g_F) (**fibra típica**) y dada $f(> 0) \in \mathfrak{F}(B)$ (**función de alabeo**), se define el **producto alabeado** $B \times_f F$ como la variedad semiriemanniana

$$B \times_f F := (M \equiv B \times F, g \equiv \pi^* g_B + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_F) ,$$

siendo $\pi : B \times F \rightarrow B$ y $\sigma : B \times F \rightarrow F$ las proyecciones canónicas.

- Aparte de las notaciones \tilde{f} y \tilde{X} para los "levantamientos" (Cap. 1, pp. 24-25) a $B \times F$ de funciones f y campos X sobre los factores, [6] usa las siguientes **Notaciones**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ para las métricas en } B \text{ y } M \text{ (nosotros usaremos } g_B \text{ y } g) \\ (\cdot, \cdot) \text{ para la métrica en } F \text{ (nosotros usaremos } g_F) \\ D \text{ para las conexiones de Levi-Civita en } B \text{ y } M \text{ (nosotros usaremos } D^B \text{ y } D) \\ \nabla \text{ para la conexión de Levi-Civita en } F \text{ (nosotros usaremos } D^F) \end{array} \right.$$

- $\forall x \in TM$, se tiene: $g(x, x) = g_B(d\pi(x), d\pi(x)) + (f \circ \pi)^2 g_F(d\sigma(x), d\sigma(x))$.
- g es de hecho (análogo al Lema 3.5) una métrica, con $ind(g) = ind(g_B) + ind(g_F)$.
- Si $f = 1$, resulta la métrica producto (recordar Nota en 3.8).
- Tanto las **hojas** $B \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$ ($\forall q \in F$) como las **fibras** $\{p\} \times F = \pi^{-1}(p)$ ($\forall p \in B$) son subvariedades (regulares) semiriemannianas que se cortan *ortogonalmente*. Además, $\pi|_{B \times \{q\}}$ es una *isometría* sobre B , mientras que $\sigma|_{\{p\} \times F}$ es una *homotecia* (de "coeficiente" $1/f^2(p)$, o "factor de escala" $1/f(p)$, ver Definición 3.63) sobre F : $(\sigma|_{\{p\} \times F})^* g_F = \frac{1}{f^2(p)} g|_{\{p\} \times F}$.
- $\forall (p, q) \in M$, se definen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan : T_{(p,q)}M \rightarrow T_{(p,q)}(\{p\} \times F) \text{ (proyección } \underline{\text{tangente a las fibras}}) \\ \text{nor} : T_{(p,q)}M \rightarrow T_{(p,q)}(B \times \{q\}) \text{ (proyección } \underline{\text{tangente a las hojas}}) \end{array} \right. .$$

Nota 1*. Las proyecciones definidas aquí y las definidas en "La conexión inducida" (4.1) se relacionan por:

$$\tan \equiv \tan_{4.1}^{fibras} \equiv \text{nor}_{4.1}^{hojas} \quad \text{y} \quad \text{nor} \equiv \text{nor}_{4.1}^{fibras} \equiv \tan_{4.1}^{hojas} \quad \blacksquare$$

Dadas $(B, g_B) (\rightsquigarrow D^B)$, $(F, g_F) (\rightsquigarrow D^F)$, $f(> 0) \in \mathfrak{F}(B)$ y el producto alabeado $M = B \times_f F (\rightsquigarrow D)$, se tiene:

- (Lema 7.34) Para toda $h \in \mathfrak{F}(B)$, el levantamiento $\tilde{h} := h \circ \pi \in \mathfrak{F}(B \times_f F)$ verifica: $\text{grad } \tilde{h} = \widetilde{\text{grad}^B h} \in \mathcal{L}(B)$.
- (Propos. 7.35) Para todo levantamiento $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(B)$ y $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{L}(F)$, se tiene:
 - (1) $D_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \widetilde{D_X^B Y} \in \mathcal{L}(B)$
 - (2) $D_{\tilde{X}} \tilde{V} = D_{\tilde{V}} \tilde{X} = \frac{\tilde{X} \tilde{f}}{\tilde{f}} \tilde{V}$ (tangente a las fibras)
 - (3) $\text{nor}(D_{\tilde{V}} \tilde{W}) = \frac{-g(\tilde{V}, \tilde{W})}{\tilde{f}} \widetilde{\text{grad}^B f} = -\tilde{f} (g_F(V, W) \circ \sigma) \widetilde{\text{grad}^B f}$ (tangente a las hojas)
 - (4) $\text{tan}(D_{\tilde{V}} \tilde{W}) = \widetilde{D_V^F W} \in \mathcal{L}(F)$.

Nota 2*. Recordar (4.1, "La conexi3n inducida") que se tiene:

$$\begin{cases} \text{nor}(D_{\tilde{V}} \tilde{W}) = \text{nor}_{4.1}^{\text{fibra}}(D_{\tilde{V}} \tilde{W}) =: II^{\text{fibra}}(\tilde{V}, \tilde{W}) \\ \text{tan}(D_{\tilde{V}} \tilde{W}) = \text{tan}_{4.1}^{\text{fibra}}(D_{\tilde{V}} \tilde{W}) \stackrel{\text{Lema 4.3}}{=} D_{\tilde{V}}^{\text{fibra}} \tilde{W} \end{cases},$$

siendo II^{fibra} y D^{fibra} el tensor de Weingarten y la conexi3n de Levi-Civita, respectivamente, de la correspondiente fibra como subvariedad semiriemanniana de M ■

Nota 3. Dada $h \in \mathfrak{F}(B)$, se tiene (para todo levantamiento $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(B)$ y $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{L}(F)$):

$$\left\{ \begin{array}{l} H^{\tilde{h}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \stackrel{\text{Lema 3.49}}{=} g(D_{\tilde{X}}(\widetilde{\text{grad}^B h}), \tilde{Y}) \stackrel{\text{Prop. 7.35(1)}}{=} \\ \quad \quad \quad = g_B(D_X(\text{grad}^B h), Y) \circ \pi \stackrel{\text{Lema 3.49}}{=} H^h(\tilde{X}, Y) \\ \\ H^{\tilde{h}}(\tilde{X}, \tilde{V}) \stackrel{\text{Lema 3.49}}{=} g(D_{\tilde{X}}(\widetilde{\text{grad}^B h}), \tilde{V}) \stackrel{\text{Prop. 7.35(1)}}{=} 0 \\ \\ H^{\tilde{h}}(\tilde{V}, \tilde{W}) \stackrel{\text{Lema 3.49}}{=} g(D_{\tilde{V}}(\widetilde{\text{grad}^B h}), \tilde{W}) \stackrel{\text{Prop. 7.35(2)}}{=} \\ \quad \quad \quad = \frac{g_B(\text{grad}^B h, \text{grad}^B f)}{\tilde{f}} g(\tilde{V}, \tilde{W}) \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

- (Corol. 7.36) Cada hoja es totalmente geod3sica, esto es: $\text{tan}(D_X Y) = 0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\text{hoja})$ (Def. 4.12). Cada fibra es totalmente umb3lica, esto es: existe $Z \in \mathfrak{X}(\text{fibra})^\perp$ (tangente por tanto a las hojas) tal que $\text{nor}(D_V W) = g(V, W)Z$, $\forall V, W \in \mathfrak{X}(\text{fibra})$ (Def. 4.15).

Demostración. La primera afirmación se sigue de que: $\forall X \in \mathfrak{X}(hoja)$, $\exists! \tilde{X} \in \mathcal{L}(B)$ tal que $\tilde{X}|_{hoja} = X$ y de la Prop. 7.35(1).

Y la segunda afirmación se sigue de que: $\forall V \in \mathfrak{X}(fibra)$, $\exists! \tilde{V} \in \mathcal{L}(B)$ tal que $\tilde{V}|_{fibra} = V$ y de la Prop. 7.35(3). ■

(Ejemplo 7.37) Ejemplos de productos alabeados:

(1) La superficie de revolución M obtenida girando una curva plana C en torno a un eje en \mathbb{R}^3 verifica (denotando por $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ la distancia al eje, supuesta mayor que cero): $M = C \times_f \mathbb{S}^1(1)$.

(2) $\mathbb{R}^n - \{0\} = \mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^{n-1}(1)$.

(3) El espacio-tiempo de Robertson-Walker (Cap. 12) es $M := \bar{I} \times_f \overset{+++}{S}$ (para ciertos I, S y f). El espacio-tiempo de Schwarzschild (Cap. 13) es $M := \overset{-+}{\mathcal{A}} \times_r \overset{++}{\mathbb{S}^2}(1)$ (para ciertos \mathcal{A} y r).

7.2. GEODÉSICAS EN PRODUCTOS ALABEADOS

(Prop. 7.38) Una curva $\gamma \equiv (\alpha, \beta)$ en un producto alabeado $B \times_f F$ es geodésica (esto es, $\gamma'' = 0$) si y sólo si se verifica:

- (1) $\alpha'' = (\beta', \beta')(f \circ \alpha)(\text{grad}^B f \circ \alpha)$ (en B) y
- (2) $\beta'' = \frac{-2}{f \circ \alpha} \frac{d(f \circ \alpha)}{ds} \beta'$ (en F).

Notas. (a) Escribimos $\gamma' = (\alpha', \beta')$ porque

$$d\pi(\gamma') \stackrel{(1.17)}{:=} (d\pi \circ d\gamma) \left(\frac{d}{du} \right) \stackrel{(1.15)}{=} d\alpha \left(\frac{d}{du} \right) \stackrel{(1.17)}{:=} \alpha',$$

y análogamente $d\sigma(\gamma') = \beta'$.

Sin embargo, $\gamma'' \neq (\alpha'', \beta'')$ (en general), porque

$$\begin{cases} d\pi(\gamma'') \equiv d\pi(D_{\gamma'}\gamma') \equiv d\pi(\text{nor}(D_{\gamma'}\gamma')) \stackrel{?}{=} d\pi(D_{\alpha'}^{\text{hoja}}\alpha') \stackrel{\text{Prop. 3.59}}{=} D_{\alpha'}^B\alpha' \equiv \alpha'' \\ d\sigma(\gamma'') \equiv d\sigma(D_{\gamma'}\gamma') \equiv d\sigma(\text{tan}(D_{\gamma'}\gamma')) \stackrel{?}{=} d\sigma(D_{\beta'}^{\text{fibra}}\beta') \stackrel{\text{Prop. 3.64}}{=} D_{\beta'}^F\beta' \equiv \beta'' \end{cases},$$

donde la igualdad intermedia (?) es cierta (Lema 4.3) si γ' es tangente a las hojas, i.e. $\beta' = 0$ (resp. a las fibras, i.e. $\alpha' = 0$).

(b) Se sigue de (2) que γ es geodésica en $B \times_f F$ sólo si β es pregeodésica en F (recordar Ejercicio 3.19).

(c) Si $f = 1$, entonces γ es geodésica en $B \times_f F$ si y sólo si α y β son geodésicas en B y F , respectivamente (recordar Corolario 3.57(1)) ■

Sea $B \times_f F$ un producto alabeado riemanniano.

- Si B y F son completas, entonces $B \times_f F$ es (Lema 7.40) completa para cualquier f (si $f = \text{cte.}$, es el Corolario 3.57(2 \Leftarrow)).

Pero si $B \times_f F$ no es riemanniano (aunque ambas B y F sean definidas), la implicación es falsa.

(Ejemplo 7.41): en $\mathbb{R}_1^1 \times_{e^t} \mathbb{R}^1$, una curva $\gamma \equiv (\alpha, \beta)$ es geodésica si y sólo si (Prop. 7.38) $\alpha'' = -\beta'^2 e^{2\alpha}$ y $\beta'' = -2\alpha'\beta'$; en particular la curva $\gamma : (0, \infty) \rightarrow M, s \mapsto (\ln s, 1/s)$ es geodésica y es (claramente) maximal, con lo que $\mathbb{R}_1^1 \times_{e^t} \mathbb{R}^1$ no es geodésicamente completa.

- Si $B \times_f F$ es completa, entonces B es completa, ya que: $\pi|_{\text{hoja}}: \text{hoja} \rightarrow B$ es una isometría y las geodésicas $\gamma \equiv (\alpha, \beta)$ en cada hoja son (por ser cada hoja totalmente geodésica y por la Propos. 4.13; también porque, si $\alpha'' = 0$ y $\beta' = 0$, se verifican (1) y (2) de Prop. 7.38) geodésicas en $B \times_f F$. ¿En cuanto a F ?

7.3. CURVATURA EN PRODUCTOS ALABEADOS

Nota. Continuación de la Nota en "Variedades semiriemannianas producto". Dadas variedades M y N , se definen más "levantamientos" a $M \times N$ desde M (y análogamente desde N):

Levantamiento $\tilde{A} := \pi^* A \in \mathfrak{T}_s^0(M \times N)$ de $A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$; esto es, $\tilde{A}(v_1, \dots, v_s) := A(d\pi(v_1), \dots, d\pi(v_s)) \in \mathbb{R}$.

Levantamiento $\tilde{A} \in \mathfrak{T}_s^1(M \times N)$ de $A \in \mathfrak{T}_s^1(M)$, definido por: $d\pi(\tilde{A}(v_1, \dots, v_s)) := A(d\pi(v_1), \dots, d\pi(v_s))$ y $d\sigma(\tilde{A}(v_1, \dots, v_s)) := 0$

■

Dadas $(B, g_B) (\rightsquigarrow D^B \rightsquigarrow R^B \rightsquigarrow Ric^B)$, $(F, g_F) (\rightsquigarrow D^F \rightsquigarrow R^F \rightsquigarrow Ric^F)$, $f(> 0) \in \mathfrak{F}(B)$ y el producto alabeado $M = B \times_f F (\rightsquigarrow D \rightsquigarrow R \rightsquigarrow Ric)$, se tiene:

- (Prop. 7.42) Para todo levantamiento $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathcal{L}(B)$ y $\tilde{V}, \tilde{W}, \tilde{U} \in \mathcal{L}(F)$, se tiene (al ser $II^{hojas}(\cdot) = 0$ y $II^{fibras}(\cdot) \stackrel{7.35(3)}{=} -\frac{g(\cdot)}{f}(\text{grad } \tilde{f})$):

$$(1) R_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}} \stackrel{4.5}{=} R_{\tilde{X}\tilde{Y}}^{\text{hojas}} \tilde{Z} \stackrel{\pi|_{\text{hojas}} \text{ isometría}}{=} \widetilde{R^B}_{\tilde{X}\tilde{Y}} \tilde{Z} = \widetilde{R^B}_{XY} Z \in \mathcal{L}(B)$$

$$(2) R_{\tilde{V}\tilde{X}} \tilde{Y} = \frac{H^{\tilde{f}}(\tilde{X}, \tilde{Y})}{\tilde{f}} \tilde{V} \stackrel{7.35, \text{Nota3}}{=} \frac{H^f(X, Y)}{f} \tilde{V} \text{ (tangente a las fibras)}$$

$$(3) R_{\tilde{X}\tilde{Y}} \tilde{V} = R_{\tilde{V}\tilde{W}} \tilde{X} = 0$$

$$(4) R_{\tilde{X}\tilde{V}} \tilde{W} = \frac{g(\tilde{V}, \tilde{W})}{\tilde{f}} D_{\tilde{X}}(\text{grad } \tilde{f}) \stackrel{7.34 \& 7.35}{=} \frac{g(\tilde{V}, \tilde{W})}{f} D_X(\widetilde{\text{grad}^B f}) \text{ (tangente a las hojas)}$$

$$(5) R_{\tilde{V}\tilde{W}} \tilde{U} \stackrel{4.5}{=} R_{\tilde{V}\tilde{W}}^{\text{fibras}} \tilde{U} + \frac{g(\text{grad } \tilde{f}, \text{grad } \tilde{f})}{\tilde{f}^2} \left(g(\tilde{V}, \tilde{U}) \tilde{W} - g(\tilde{W}, \tilde{U}) \tilde{V} \right) \stackrel{\sigma|_{\text{fibras}} \text{ homotecia}}{=} \frac{7.34}{7.34}$$

$$= \widetilde{R^F}_{\tilde{V}\tilde{W}} \tilde{U} - \frac{g_B(\text{grad}^B \tilde{f}, \text{grad}^B \tilde{f})}{\tilde{f}^2} \left(g(\tilde{V}, \tilde{U}) \tilde{W} - g(\tilde{W}, \tilde{U}) \tilde{V} \right) \text{ (tangente a las fibras).}$$

Nota. Como R es un campo de tensores, las anteriores expresiones para $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathcal{L}(B)$ y $\tilde{V}, \tilde{W}, \tilde{U} \in \mathcal{L}(F)$ mantienen su validez para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ tangentes a las hojas y $U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ tangentes a las fibras ■

- (Corol. 7.43) Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tangentes a las hojas y $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ tangentes a las fibras, se tiene:

$$(1) Ric(X, Y) = \widetilde{Ric^B}(X, Y) - \frac{\dim F}{f} H^{\tilde{f}}(X, Y)$$

$$(2) Ric(X, V) = 0$$

$$(3) Ric(V, W) = \widetilde{Ric^F}(V, W) - \left(\frac{\widetilde{\Delta^B f}}{f} + (\dim F - 1) \frac{g_B(\text{grad}^B \tilde{f}, \text{grad}^B \tilde{f})}{\tilde{f}^2} \right) g(V, W)$$

8. NOTAS. SIMETRÍA Y CURVATURA CONSTANTE

(Capítulo 8 de [6])

8.1. CAMPOS DE JACOBI

Cada familia 1-paramétrica de geodésicas próximas a una dada viene descrita (Lema 8.3) por un campo de Jacobi, cuya aceleración viene dada (Def. 8.2) por el tensor de curvatura.

Nota 1. Aplicaciones biparamétricas ("rectángulos") (Cap. 4, pp. 122-123).

(a) **Rectángulo** (en una variedad M): aplicación diferenciable $\mathbf{x} : (\mathbb{R}^2 \supset) \mathcal{D} \rightarrow M$, con \mathcal{D} abierto (coordenadas u, v).

Curvas longitudinales $\mathbf{x} |_{v=cte.}$ y **curvas transversales** $\mathbf{x} |_{u=cte.}$.
Entonces se definen los campos de vectores

$$\begin{cases} \mathbf{x}_u \equiv (\mathbf{x} |_{v=cte.})' := d\mathbf{x}(\partial_u) = \sum_i \frac{\partial(x^i \circ \mathbf{x})}{\partial u} (\partial_{x^i} \circ \mathbf{x}) \in \mathfrak{X}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}_v \equiv (\mathbf{x} |_{u=cte.})' := d\mathbf{x}(\partial_v) = \sum_i \frac{\partial(x^i \circ \mathbf{x})}{\partial v} (\partial_{x^i} \circ \mathbf{x}) \in \mathfrak{X}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (*),$$

donde (x^i) es cualquier carta local en M .

(b) Sean variedad con conexión simétrica (M, D) , rectángulo $\mathbf{x} : \mathcal{D} \rightarrow M$ y campo $Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{x})$. Entonces se definen los campos de vectores

$$\begin{cases} Z_u := (Z |_{v=cte.})' \stackrel{\text{Cap. 3}}{=} \sum_i \left(\frac{\partial Z^k}{\partial u} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \mathbf{x}) Z^i \frac{\partial(x^j \circ \mathbf{x})}{\partial u} \right) (\partial_{x^k} \circ \mathbf{x}) \in \mathfrak{X}(\mathbf{x}) \\ Z_v := (Z |_{u=cte.})' \stackrel{\text{Cap. 3}}{=} \sum_k \left(\frac{\partial Z^k}{\partial v} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \mathbf{x}) Z^i \frac{\partial(x^j \circ \mathbf{x})}{\partial v} \right) (\partial_{x^k} \circ \mathbf{x}) \in \mathfrak{X}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (**),$$

donde (x^i) es cualquier carta local, en la que $Z = \sum_k Z^k (\partial_{x^k} \circ \mathbf{x})$.

Notación: $\mathbf{x}_{uu} \equiv (\mathbf{x}_u)_u$, $\mathbf{x}_{uv} \equiv (\mathbf{x}_u)_v$, etc.

También: $Z_{uu} \equiv (Z_u)_u$, $Z_{uv} \equiv (Z_u)_v$, etc.

(c) (Prop. 4.44) Se tiene:

- (1) $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$
- (2) $Z_{uv} = Z_{vu} + R_{\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v} Z$, $\forall Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{x})$.

Demostración: Sobreentendiendo la "composición con \mathbf{x} " allí donde proceda, se tiene:

En primer lugar,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uv} - \mathbf{x}_{vu} &\stackrel{(**,*)}{=} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x^k}{\partial u} \right) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) \partial_{x^k} - \\ &\quad - \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x^k}{\partial v} \right) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) \partial_{x^k} = \\ &= \sum_k \left(\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) \partial_{x^k} \stackrel{\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k}{=} 0 \end{aligned}$$

Y en segundo lugar:

$$\begin{aligned} Z_{uv} - Z_{vu} &\stackrel{(**)}{=} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial Z^k}{\partial u} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k Z^i \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \left(\frac{\partial Z^i}{\partial u} + \sum_{p,q} \Gamma_{pq}^i Z^p \frac{\partial x^q}{\partial u} \right) \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) \partial_{x^k} - \\ &\quad - \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial Z^k}{\partial v} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k Z^i \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \left(\frac{\partial Z^i}{\partial v} + \sum_{p,q} \Gamma_{pq}^i Z^p \frac{\partial x^q}{\partial v} \right) \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) \partial_{x^k} = \\ &= \sum_{k,i,j} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial v} Z^i \frac{\partial x^j}{\partial u} + \Gamma_{ij}^k \sum_{p,q} \Gamma_{pq}^i Z^p \frac{\partial x^q}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) \partial_{x^k} - \\ &\quad - \sum_{k,i,j} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u} Z^i \frac{\partial x^j}{\partial v} + \Gamma_{ij}^k \sum_{p,q} \Gamma_{pq}^i Z^p \frac{\partial x^q}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) \partial_{x^k} \stackrel{\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k}{=} \\ &= \sum_{k,i,j} \left(\sum_l \Gamma_{ji,l}^k Z^l \left(\frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^l}{\partial v} - \frac{\partial x^j}{\partial v} \frac{\partial x^l}{\partial u} \right) + \Gamma_{ji}^k \sum_{p,q} \Gamma_{qp}^i Z^p \left(\frac{\partial x^q}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} - \frac{\partial x^q}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) \right) \partial_{x^k} = \\ &= \sum_{k,i,j,l} \left(\Gamma_{ji,l}^k Z^l \frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^l}{\partial v} - \sum_{k,i,j,l} \Gamma_{li,j}^k Z^l \frac{\partial x^l}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) \partial_{x^k} + \\ &\quad + \left(\sum_{k,m,l} \Gamma_{lm}^k \sum_{i,j} \Gamma_{ji}^m Z^i \frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^l}{\partial v} - \sum_{k,m,j} \Gamma_{jm}^k \sum_{i,l} \Gamma_{li}^m Z^i \frac{\partial x^l}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) \partial_{x^k} = \\ &= \sum_{k,i,j,l} \left(\Gamma_{ji,l}^k - \Gamma_{li,j}^k + \sum_m \Gamma_{lm}^k \Gamma_{ji}^m - \sum_m \Gamma_{jm}^k \Gamma_{li}^m \right) Z^i \frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^l}{\partial v} \partial_{x^k} \stackrel{\text{Lema 3.38}}{=} \\ &= \sum_{k,i,j,l} R_{ijl}^k Z^i \frac{\partial x^j}{\partial u} \frac{\partial x^l}{\partial v} \partial_{x^k} \stackrel{(*)}{=} \sum_{k,i,j,l} R_{ijl}^k Z^i (\mathbf{x}_u)^j (\mathbf{x}_v)^l \partial_{x^k} = R_{\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v} Z \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(Def. 8.1) Sean variedad M y (segmento de) curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$. Se dice que un rectángulo $\mathbf{x} : (\mathbb{R}^2 \supset) \mathcal{D} \rightarrow M$ es una **variación de α** si: $\mathcal{D} = [a, b] \times [-\delta, \delta]$, para cierto $\delta > 0$, y $\mathbf{x}(\cdot, 0) = \alpha$ (**curva base de \mathbf{x}**).

Y se llama **campo de la variación \mathbf{x}** al campo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ dado por $V(u) := \mathbf{x}_v(u, 0)$.

Nota 2. El campo V describe la "versión linealizada" (o "infinitesimal") de la familia de curvas longitudinales ("vecinas de α ") de \mathbf{x} : en cualquier carta (x^1, \dots, x^n) en torno a $\alpha(u)$, se tiene

$$\begin{aligned} (x^i \circ \mathbf{x})(u, v) &= (x^i \circ \mathbf{x})(u, 0) + v \frac{\partial (x^i \circ \mathbf{x})}{\partial v}(u, 0) + \mathcal{O}(v^2) \stackrel{(*)}{=} \\ &= x^i(\alpha(u)) + v V^i(u) + \mathcal{O}(v^2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sea una variedad con conexión simétrica (M, D) .

- (*Def.*) Se dice que un rectángulo \mathbf{x} en M es una **variación geodésica** (o una **familia uniparamétrica de geodésicas**) si todas sus curvas longitudinales son geodésicas.
- (*Def. 8.2*) Sea geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ y campo $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Se dice que Y es un **campo de Jacobi** si se verifica (**ecuación de Jacobi**):

$$Y'' = R_{Y\gamma'}\gamma' .$$

- (*Lema 8.3*) El campo de una variación geodésica es un campo de Jacobi.

Demostración. Se tiene:

$$(\mathbf{x}_v)_{uu} \stackrel{\text{Prop. 4.44(1)}}{=} (\mathbf{x}_u)_{vu} \stackrel{\text{Prop. 4.44(2)}}{=} (\mathbf{x}_u)_{uv} - R_{\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_u \stackrel{\mathbf{x}_{uu}=0}{\stackrel{\text{Prop. 3.36(1)}}{=}} R_{\mathbf{x}_v\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_u \quad \blacksquare$$

- (*Ejemplo 8.4*) Sean $(M, g) = \mathbb{S}^2(r) (\subset \mathbb{R}^3)$ (sobreentendidas las conexiones de Levi-Civita D de M y \bar{D} de \mathbb{R}^3), geodésica (con imagen un meridiano) $\gamma : [0, \pi] \ni u \mapsto r(\sin u, 0, \cos u) \in M$ y variación geodésica $\mathbf{x} : [0, \pi] \times [-\delta, \delta] \ni (u, v) \mapsto r(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \in M$ de γ .

El campo V de la variación \mathbf{x} verifica (por el Lema 4.3, el campo $\partial_y \circ \gamma$, que es tangente a M y \bar{D} -paralelo, es D -paralelo):

$$V(u) := \mathbf{x}_v(u, 0) = r(0, \sin u, 0)_{\mathbf{x}(u,0)} = r \sin u \partial_y(\gamma(u)) \quad ; \quad \stackrel{\text{Lema 4.3}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow V''(u) = -r \sin u \partial_y(\gamma(u)) = -V(u)$$

y, por otra parte, se tiene (habida cuenta de que $\mathbb{S}^2(r)$ es de curvatura constante $1/r^2$, Proposición 4.29):

$$R_{V\gamma'}\gamma' \stackrel{\text{Corol. 3.43}}{=} \frac{1}{r^2} \left(\underbrace{g(\gamma', V)}_0 \gamma' - \underbrace{g(\gamma', \gamma')}_{r^2} V \right) = -V \quad ;$$

con lo que V es efectivamente un campo de Jacobi.

- (*Lema 8.5*) Sea geodésica γ . Entonces, para todo $v, w \in T_{\gamma_0}M$, existe un único campo de Jacobi $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ tal que $Y(0) = v$ y $Y'(0) = w$.

Nota 3. Recordemos (Proposición 3.19): Sean variedad con conexión (M, D) , curva α en M y referencia $\{E_i\}$ sobre α . Entonces, para todo $Y \equiv \sum_k Y^k E_k \in \mathfrak{X}(\alpha)$, se tiene:

$$Y' = \sum_k \left(\frac{dY^k}{dt} + \sum_j \Gamma_j^k Y^j \right) E_k \quad ,$$

con $\Gamma_j^k \in \mathfrak{F}(\alpha)$ tales que $E'_j =: \sum_k \Gamma_j^k E_k$. Con lo que la condición $Y' = 0$ conduce a un sistema lineal de EDO de 1er orden, y la condición inicial $Y(0)$ determina un único campo $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelo.

Lo anterior conduce a que: (i) el \mathbb{R} -espacio vectorial de campos (sobre α) paralelos posee dimensión n ; y (ii) existen referencias $\{E_i\}$ sobre α paralelas. En ellas se tiene: $Y' \equiv \sum_k \frac{dY^k}{dt} E_k$ ■

Demostración (tener en cuenta la Nota 3) Sea referencia $\{E_i\}$ sobre γ paralela. Por ser γ geodésica, se tiene: $\gamma' = \sum_k a^k E_k$, con $a^k \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo $Y \equiv \sum_k Y^k E_k \in \mathfrak{X}(\gamma)$, se tiene:

$$Y'' - R_{Y\gamma'}\gamma' = \sum_k \left(\frac{d^2 Y^k}{dt^2} - \sum_{lij} R_{lij}^k a^l Y^i a^j \right) E_k ,$$

con $R_{lij}^k \in \mathfrak{F}(\gamma)$ tales que $R(E_l, E_i, E_j) =: \sum_k R_{lij}^k E_k$. Con lo que la condición $Y'' - R_{Y\gamma'}\gamma' = 0$ conduce a un sistema lineal de EDO de 2º orden, y la condición inicial $\{Y(0), Y'(0)\}$ determina un único campo $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ de Jacobi.

Lo anterior conduce a que el \mathbb{R} -espacio vectorial de campos (sobre γ) de Jacobi posee dimensión $2n$ ■

- (Propos. 8.6)* Sean $p \in M$ y $\mathfrak{D}_p \subset T_p M$ el dominio de \exp_p . Entonces, $\forall v \in \mathfrak{D}_p$ y $\forall \xi \in T_p M$, es $d\exp_p(\xi_v) = V(1)$, con $V \in \mathfrak{X}(\gamma_v)$ el único campo de Jacobi tal que $V(0) = 0_p$ y $V'(0) = \xi$.

Demostración. Sea la aplicación $\tilde{\mathbf{x}}(t, s) := t(v + s\xi)$. Entonces $\mathbf{x}(t, s) := \exp_p(\tilde{\mathbf{x}}(t, s)) = \gamma_{v+s\xi}(t)$ es una variación geodésica de $\gamma_v|_{[0,1]}$.

Se sigue (Lema 8.3) que

$$V(t) := \mathbf{x}_s(t, 0) = d\exp_p(\tilde{\mathbf{x}}_s(t, 0)) = d\exp_p(t\xi_{tv}) \quad (\Rightarrow V(1) = d\exp_p(\xi_v))$$

es un campo de Jacobi sobre $\gamma_v|_{[0,1]}$.

Se sigue (Lema 8.5) que V es el campo de Jacobi determinado por

$$\begin{cases} V(0) = d\exp_p(0_0) = 0_p \in T_p M \\ V'(0) := \mathbf{x}_{st}(0, 0) \stackrel{\text{Prop. 4.44(1)}}{=} \mathbf{x}_{ts}(0, 0) \stackrel{\mathbf{x}_t(0,s)=v+s\xi}{=} \xi \in T_p M \quad \blacksquare \end{cases}$$

- En el Ejemplo 8.4, el campo de Jacobi V es el único tal que $V(0) = 0_{(0,0,r)}$ y $V'(0) = r(0, 1, 0)_{(0,0,r)}$.

8.2. FUERZAS DE MAREA

El conjunto de aceleraciones relativas de familias 1-paramétricas de geodésicas próximas a una dada viene descrito (Definición 8.8) por un operador lineal autoadjunto ("fuerza de marea"), cuya traza (esto es, el "promedio" de dichas aceleraciones, ver Nota 2) viene dada (Lema 8.9(2)) por el tensor de Ricci.

Dadas variedad semiriemanniana (M, g) y curva $\alpha : I \rightarrow M$, se tiene:

- Un campo $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$ se dice **tangente a** α si $Y = f\alpha'$, para cierta $f \in \mathfrak{F}(\alpha)$; y se dice **normal a** α si $g(Y, \alpha') = 0$.
- Si $|\alpha'| > 0$, todo campo $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$ admite una descomposición única (Lema 2.23) $Y = Y^{\parallel} + Y^{\perp}$, con Y^{\parallel} tangente y Y^{\perp} normal a α .
- Si α es geodésica, todo campo $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$ verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y \text{ tangente} \Rightarrow Y' \text{ tangente} \\ Y \text{ normal} \Rightarrow Y' \text{ normal} \end{array} \right\}, \quad \text{si } |\alpha'| > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (Y^{\parallel})' \text{ es tangente} \\ (Y^{\perp})' \text{ es normal} \end{array} \right\}, \Rightarrow$$

$$Y' = (Y^{\parallel})' + (Y^{\perp})' \stackrel{\Rightarrow}{=} Y'^{\parallel} + Y'^{\perp} \quad \left\{ \begin{array}{l} (Y^{\parallel})' = Y'^{\parallel} \\ (Y^{\perp})' = Y'^{\perp} \end{array} \right. \quad (*)$$

(Lema 8.7) Dadas variedad semiriem. (M, g) y geodésica γ en M :

(1) Sea $f \in \mathfrak{F}(\gamma)$. Entonces:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \gamma' \stackrel{\gamma''=0}{=} (f\gamma')'' \stackrel{\text{Si } f\gamma' \text{ es de Jacobi}}{=} R_{f\gamma'\gamma'} \stackrel{\text{Prop. 3.36(1)}}{=} 0, \Rightarrow$$

$$\text{Si } \gamma \text{ no-trivial} \Rightarrow f(t) = At + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(2) Sea $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Entonces:

$$\frac{d^2 g(Y, \gamma')}{dt^2} \stackrel{\gamma''=0}{=} g(Y'', \gamma') \stackrel{\text{Si } Y' \text{ es de Jacobi}}{=} g(R_{Y\gamma'}\gamma', \gamma') \stackrel{\text{Pr. 3.36(2)}}{=} 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(Y(t), \gamma'(t)) = At + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(3) Si $|\gamma'| > 0$, $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es Jacobi si y sólo si lo son Y^{\parallel} y Y^{\perp} .

En efecto. Se tiene:

$$Y'' = R_{Y\gamma'}\gamma' \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} (Y^{\parallel})'' = (R_{Y\gamma'}\gamma')^{\parallel} \stackrel{\text{Pr. 3.36(2)}}{=} 0 \stackrel{\text{Pr. 3.36(1)}}{=} R_{Y^{\parallel}\gamma'}\gamma' \\ (Y^{\perp})'' = (R_{Y\gamma'}\gamma')^{\perp} \stackrel{\text{Pr. 3.36(2)}}{=} R_{Y\gamma'}\gamma' \stackrel{\text{Pr. 3.36(1)}}{=} R_{Y^{\perp}\gamma'}\gamma' \end{array} \right.$$

Nota 1. Sean (M, g) semiriemanniana, γ geodésica y $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ de Jacobi. Las siguientes "afirmaciones" son ¿Verdadero o Falso?:

(1) ¿ $Y'(0) = 0 \Rightarrow Y' = 0$? $\boxed{\text{F}}$ [Ejemplo 8.4, $Y'(\pi/2) = 0, Y' \neq 0$]

(2) ¿ $Y'(0) = 0 \Rightarrow g(Y', \gamma') = 0$? $\boxed{\text{V}}$ [$g(Y', \gamma') \stackrel{(8.7(2))}{=} A \stackrel{Y'(0)=0}{=} 0$]

(3) ¿ $g(Y, \gamma')(0) = 0 \Rightarrow g(Y, \gamma') = 0$? $\boxed{\text{F}}$

[$g(Y, \gamma')(t) \stackrel{(8.7(2))}{=} At + B \stackrel{g(Y, \gamma')(0)=0}{=} At$]

(4) ¿ $g(Y', \gamma')(0) = 0 \Rightarrow g(Y, \gamma') = cte$? $\boxed{\text{V}}$

[$g(Y, \gamma')(t) \stackrel{(8.7(2))}{=} At + B \stackrel{g(Y, \gamma')(0)=0}{=} B$]

(5) ¿ $g(Y', \gamma') = cte.$ y $g(Y'', \gamma') = cte$? $\boxed{\text{V}}$

[$g(Y, \gamma')(t) \stackrel{(8.7(2))}{=} At + B, \Rightarrow g(Y', \gamma') = A$ y $g(Y'', \gamma') = 0$]

(6) ¿ $Y(0) = 0$ y $Y'(0) = A\gamma'(0) \Rightarrow Y \sim \gamma'$?

$\boxed{\text{V}}$ [$At\gamma'(t)$ es Jacobi (Lema 8.7(1)) con las condiciones iniciales requeridas. Por unicidad debe ser $Y(t) = At\gamma'(t)$]

(7) ¿ $Y(0) = B\gamma'(0)$ y $Y'(0) = 0 \Rightarrow Y \sim \gamma'$?

$\boxed{\text{V}}$ [$Y \equiv B\gamma'$ es Jacobi (Lema 8.7(1)) con las condiciones iniciales requeridas. Por unicidad debe ser $Y \equiv B\gamma'$]

(8) Para $Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$: ¿ $Z' = 0 \Rightarrow Z$ es Jacobi? $\boxed{\text{F}}$

[$0 \stackrel{Z'=0}{=} Z'' \stackrel{?}{=} R_{Z\gamma'}\gamma'$] ■

(Def. 8.8) Dados variedad semiriemanniana (M, g) , $p \in M$ y $v(\neq 0) \in T_pM$, se define el **operador fuerza de marea** (para el nombre, ver "Fundamentos de la relatividad general", Nota 1):

$$F_v : v^\perp \rightarrow v^\perp, y \mapsto R_{yv}v$$

- Nótese que $F_v(v^\perp) \subset v^\perp$, ya que $g(R_{yv}v, v) \stackrel{\text{Prop. 3.36(2)}}{=} 0$.
- Nótese que $F_v(y) = Y''(0)$, siendo $Y \in \mathfrak{X}(\gamma_v)$ cualquier campo de Jacobi (Lema 8.5) tal que $Y(0) = y$.
- (Lema 8.9) (1) F_v es autoadjunto y (2) $Tr(F_v) = -Ric(v, v)$.

Demostración. (1) Se tiene:

$$\begin{aligned} g(F_v y_1, y_2) &:= g(R_{y_1 v} v, y_2) \stackrel{\text{Prop. 3.36(4)}}{=} g(R_{v y_2} y_1, v) \stackrel{\text{Prop. 3.36(1,2)}}{=} \\ &= g(R_{y_2 v} v, y_1) =: g(F_v y_2, y_1) . \end{aligned}$$

(2) Se tiene (para toda base ortonormal $\{e_i\}$ de T_pM):

$$Ric(v, v) \stackrel{\text{Lema 3.52}}{\Rightarrow} \sum_i \varepsilon_i g(R_{ve_i}v, e_i) .$$

Si $|v| > 0$, tómesese $e_1 = v/|v|$ ($\Rightarrow L(e_2, \dots, e_n) = v^\perp$). Y queda:

$$\begin{aligned} Ric(v, v) &\stackrel{\text{Prop. 3.36(1)}}{=} \sum_{i \geq 2} \varepsilon_i g(R_{ve_i}v, e_i) \stackrel{\text{Pr. 3.36(1)}}{=} \\ &= - \sum_{i \geq 2} \varepsilon_i g(F_v(e_i), e_i) \stackrel{L(e_2, \dots, e_n) = v^\perp}{=} -Tr(F_v) . \end{aligned}$$

Y si $|v| = 0$, tómesese w luz tal que $\langle v, w \rangle = -1$ y tómesese $e_1 = \frac{v+w}{2}$, $e_2 = \frac{v-w}{2}$ ($\Rightarrow L(v, e_3, \dots, e_n) = v^\perp$). Y queda:

$$\begin{aligned} Ric(v, v) &= \underbrace{-g(R_{ve_1}v, e_1) + g(R_{ve_2}v, e_2)}_{\substack{\text{Prop. 3.36(1,2)} \\ 0}} + \sum_{i \geq 3} \varepsilon_i g(R_{ve_i}v, e_i) \stackrel{\text{Prop. 3.36(1)}}{=} \\ &= - \sum_{i \geq 3} \varepsilon_i g(F_v(e_i), e_i) \stackrel{L(v, e_3, \dots, e_n) = v^\perp}{=} \stackrel{F_v(v) = 0}{=} -Tr(F_v) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 2. Sean (V^n, g) esp. vec. euclídeo y $L : V \rightarrow V$ aplic. lineal.

La traza de L (dividida por n) puede considerarse una especie de "promedio discreto" (de la actuación de L sobre bases ortonormales).

En efecto, \forall base ortonormal $b \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$:

$$\frac{1}{n} \sum_i g(L(e_i), e_i) = \frac{1}{n} \sum_{ik} L_i^k g_{ki} \stackrel{g_{ki} = \delta_{ki}}{=} \frac{1}{n} Tr(L) .$$

Si L es además autoadjunta (como ocurre con el operador F_v), existen bases ortonormales que la diagonalizan (no necesariamente cierto si g no es definido-positivo, ver Cap. 9). En este caso, la traza de L (dividida por n) puede también considerarse una especie de "promedio continuo" (de la actuación de L sobre la $(n-1)$ -esfera unidad). En efecto, \forall base ortonormal $b \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ que diagonalice a L (denotando por ζ al elemento de volumen en la esfera unidad \mathbb{S}^{n-1}):

$$\begin{aligned} \frac{1}{vol(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} g(L(x), x) \zeta &= \frac{1}{vol(\mathbb{S}^{n-1})} \sum_{ijk} \left(L_i^k g_{kj} \int_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} x^i x^j \zeta \right) \stackrel{g_{kj} = \delta_{kj}}{=} \\ &= \frac{1}{vol(\mathbb{S}^{n-1})} \sum_{ij} \left(L_i^j \int_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} x^i x^j \zeta \right) \stackrel{b \text{ diagonaliza}}{=} \frac{1}{vol(\mathbb{S}^{n-1})} \sum_i \left(L_i^i \int_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} (x^i)^2 \zeta \right) \stackrel{!}{=} \\ &= \frac{\sum_i L_i^i}{vol(\mathbb{S}^{n-1})} \cdot \frac{1}{n} \int_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \underbrace{((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)}_1 \zeta = \frac{1}{n} Tr(L) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9. NOTAS. ISOMETRÍAS

10. NOTAS. CÁLCULO DE VARIACIONES

**11. NOTAS. ESPACIOS HOMOGÉNEOS Y
SIMÉTRICOS**

12. NOTAS. RELATIVIDAD GENERAL: COSMOLOGÍA

(Capítulo 12 de [6])

12.1. FUNDAMENTOS DE LA RELATIVIDAD GENERAL

La relatividad general modela (ciertos aspectos de) el mundo físico vía los llamados **espacio-tiempos**, que son (clases de equivalencia por isometrías que preservan la orientación-tiempo de) variedades (4-dimensionales, conexas) lorentzianas orientadas-tiempo (M, g, \uparrow) .

(A) La relatividad especial es un caso particular de la relatividad general.

La relatividad especial modela el mundo físico (macroscópico) *en ausencia de gravitación* via el espacio-tiempo de Minkowski \mathbb{R}_1^4 (Definición 6.8); \rightsquigarrow resulta natural "trasladar" a la relatividad general aquellos conceptos de la relatividad especial que no dependen de las propiedades específicas de \mathbb{R}_1^4 , en particular, las nociones de: **suceso**, **partícula material** y **tiempo propio** (Def. 6.9), **partícula luz** (Def. 6.10), **línea de espacio-tiempo**, **energía-momento** (Def. 6.26) y **observador** ("Observación de partículas").

Pero la "ausencia de gravitación" sólo puede ser tomada en serio localmente; \rightsquigarrow de las tres propiedades matemáticas que identifican (Corolario 8.26, salvo isometrías) a \mathbb{R}_1^4 dentro de las variedades (4-dimensionales conexas) lorentzianas, esto es, que es plana, completa y simplemente conexa, *sólo la "planicie" resulta físicamente relevante*.

(B) La relatividad especial aproxima localmente a la relatividad general.

Para cada $p \in M$, el espacio tangente $(T_p M, g(p))$ es, como variedad lorentziana, isométrico a \mathbb{R}_1^4 (Ejemplo 3.34); \rightsquigarrow la *aplicación exponencial* (Def. 3.29) $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ proporciona, via cartas normales, una *"aproximación local"* (Prop. 3.33) a la relatividad general (esto es, a M) por la relatividad especial (esto es, por $T_p M$).

La aproximación puede hacerse tan buena como se desee simplemente *restringiendo lo necesario el "tamaño"* del entorno que se aproxima, tanto más cuanto "mayor" sea la curvatura de (M, g) en p (Prop. 8.6, ver "Aplicación exponencial", Nota 3).

Un **observador instantáneo** en $p \in M$ es un vector $u \in T_p M$ temporal, futuro y unitario.

Dados u y partícula (material o luz) α , con $\alpha(0) = p$ y energía-momento (Def. 6.26) $P \in \mathfrak{X}(\alpha)$, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}u \text{ es el } \mathbf{eje de tiempo} \text{ de } u, \text{ y } u^\perp \text{ es el } \mathbf{espacio de reposo} \text{ de } u \\ \\ \alpha'(0) = au + x, \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} a := -g(\alpha'(0), u) > 0 \\ \text{(si } |\alpha'| = 1, \text{ es } a \geq 1, \Rightarrow a =: \cosh \varphi, \text{ con } \varphi \geq 0) \\ \text{(si } |\alpha'| = 0, \text{ } a \text{ puede tomar cualquier valor)} \\ \\ x \in u^\perp \\ \text{(si } |\alpha'| = 1, \text{ es } |x| = \sinh \varphi) \\ \text{(si } |\alpha'| = 0, \text{ es } |x| = a) \end{array} \right. \\ \\ v := \frac{x}{a} \in u^\perp \text{ (} \mathbf{velocidad de } \alpha \mathbf{ respecto de } u \text{)}, \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si } |\alpha'| = 1, \text{ es } |v| < 1 \\ \text{si } |\alpha'| = 0, \text{ es } |v| = 1 \end{array} \right. \\ \\ P(0) = Eu + \vec{P}, \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} E := -g(P(0), u) > 0 \text{ (} \mathbf{energía de } \alpha \mathbf{ resp. de } u \text{)} \\ \text{(si } |\alpha'| = 1, \text{ es } P := m\alpha', \Rightarrow E = ma) \\ \text{(si } |\alpha'| = 0 \text{ es } P := \alpha', \Rightarrow E = a) \\ \\ \vec{P} \in u^\perp \text{ (} \mathbf{momento de } \alpha \mathbf{ resp. de } u \text{)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Marco descrito por las tres teorías físicas "clásicas" (esto es, no-cuánticas):

<u>Teoría</u>	<u>Gravitación</u>	<u>Velocidades</u>
Relatividad general	arbitraria	arbitrarias
Relatividad especial	despreciable	arbitrarias
Física newtoniana	débil	pequeñas

(C) La gravitación domina a gran escala.

Alcance e intensidad relativa de las interacciones fundamentales (ver [11], II.1.1.1, [Cepa], p. 270):

<u>Interacción</u>	<u>Alcance</u>	<u>Intensidad relativa</u>
Fuertes	10^{-13} cm	10
Electromagnéticas	∞	$7 \cdot 10^{-3}$
Débiles	10^{-16} cm	$5 \cdot 10^{-57}$
Gravitatorias	∞	$6 \cdot 10^{-39}$

Pero la gravitación "se acumula"; \rightsquigarrow a gran escala resulta dominante.

(D) La caída libre es geodésica.

La Física newtoniana (Defs. 6.1-6.7) distingue dos casos de "caída libre" (movimiento bajo la sola influencia de la gravitación):

- (i) "acelerada" en los SCI: hay gravitación
- (ii) "no acelerada" en los SCI: no hay gravitación.

Pero los experimentos *no permiten distinguir* los SCI dentro de los SC-NR (en la Charla 3, incertidumbre entre (a) \leftrightarrow (b) ó entre (a') \leftrightarrow (b')), \rightsquigarrow la caída libre newtoniana es geodésica para cierta conexión. El efecto de la gravitación no es propiamente *acelerar a las partículas en caída libre* (con respecto a las libres, que serían geodésicas de la conexión afín, "experimentalmente inaccesible"), sino más bien *declararlas geodésicas* de cierta conexión (posiblemente no plana, por tanto no afín).

Einstein postuló que en un espacio-tiempo arbitrario la caída libre es geodésica.

(E) La gravitación viene dada por la curvatura.

La manifestación local genuina de la gravitación son las "mareas", esto es, las aceleraciones relativas de partículas en caída libre y próximas (si bien la intensidad de estas mareas puede quedar por debajo del umbral de detección por los experimentos; de ahí la incertidumbre "de principio" citada en 12.D).

La Física newtoniana describe (Charla 2):

- (i) la gravitación por el gradiente $grad\Phi$ de una función Φ ("potencial"):

$$d^2r^\mu/dt^2 = -grad^\mu\Phi|_r$$

- (ii) las "mareas" (i.e. las aceleraciones relativas de la caída libre) por el hessiano H^Φ de Φ :

$$d^2(r^\mu - r_0^\mu)/dt^2 \simeq - \sum_{\nu} (H^\Phi)_{\mu\nu}|_{r_0} (r^\nu - r_0^\nu)$$

- (iii) los "promedios" de las mareas por el laplaciano $\Delta\Phi$ de Φ :

$$\int_{\mathbb{S}^2} \langle d^2(r^\mu - r_0^\mu)/dt^2, r^\mu - r_0^\mu \rangle \zeta_{\mathbb{S}^2} \simeq -(4\pi/3)\Delta\Phi|_{r_0}$$

Puesto que se verifica la ecuación de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi\rho_m$ (en unidades geométricas, con ρ_m la "densidad de masa"), la función Φ en el "vacío" (donde $\rho_m = 0$) es armónica y el promedio de las mareas es nulo. Todo ello proporciona una descripción (aproximadamente) coherente con los experimentos realizados en la gravitación (débil) terrestre.

La Relatividad general describe:

(i) la gravitación por la conexión de Levi-Civita D del espacio-tiempo (sus geodésicas causales γ describen las partículas en caída libre).

(ii) las mareas respecto de γ por (un operador autoadjunto F_γ , Def. 8.8, que involucra) la curvatura R de D (via "campos de Jacobi" a lo largo de γ , Def. 8.2).

(iii) los "promedios" de las mareas respecto de γ por (la traza de F_γ , que involucra) el tensor de Ricci Ric de D (Lema 8.9).

El análisis de una *versión linealizada* del espacio-tiempo de la Relatividad general muestra claramente que el límite del tratamiento relativista para "gravitación débil" y "velocidades pequeñas" (recordar 12.B) reproduce bien el tratamiento newtoniano (Charla 6).

Nota 1. Sean (M, g, \uparrow) espacio-tiempo, γ partícula material (i.e. curva temporal futura unitaria) en caída libre (i.e. geodésica) y $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ campo de Jacobi. Sea $\{E_i\}$ una referencia sobre γ paralela, con $E_0 = \gamma'$. Sabemos (Lema 8.7(3)) que $Y^\perp \equiv \sum_{\mu=1}^3 Y^\mu E_\mu \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es también de Jacobi y se tiene:

$$d^2 Y^\mu / dt^2 \stackrel{\text{Lema 8.5}}{=} \sum_{\nu=1}^3 R_{0\nu 0}^\mu Y^\nu \stackrel{\text{Def. 8.8}}{=} (F_{\gamma'} Y)^\mu \quad (\mu = 1, 2, 3)$$

La comparación de esta expresión con la ecuación de las mareas en la gravitación clásica (sugiere que el límite newtoniano de la curvatura viene dado por el hessiano del potencial y) justifica el nombre dado de "operador fuerza de marea" (mejor sería "operador aceleración de marea") para $F_{\gamma'}$ ■

(F) La fuente de la gravitación es la tensión-energía.

En la Física newtoniana, la fuente de la gravitación es la *densidad de masa*.

Una serie de consideraciones heurísticas llevaron a Einstein a postular que, en el espacio-tiempo (M, g, \uparrow) de la Relatividad general, la curvatura R debe estar "acoplada" (via alguna ecuación tensorial) a la **tensión-energía** (con dimensiones 'físicas' $ML^{-1}T^{-2}$, ver Charla 7), esto es, al campo de tensores (simétrico) $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ *cuyas componentes, en cualquier base ortonormal local, son:* las 9 componentes del "flujo de momento" (o "tensiones" en elasticidad: "presiones" las componentes de la diagonal principal y "cizallas" las de fuera de dicha diagonal), las 3 componentes del "flujo de energía", las 3 componentes de la "densidad de momento", y finalmente la "densidad de energía" (no negativa, para la materia conocida), que es la componente dominante en el límite newtoniano de "gravitación débil" y "velocidades pequeñas".

Nota 2. Formalmente, la "tensión-energía" es simplemente un campo de tensores $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ simétrico, habitualmente (pero no en O'Neill) con la restricción $T(v, v) \geq 0$, para todo $v \in TM$ causal (ver [8], 3.3.1). Pero detrás de esta formalidad hay "mediciones físicas": cuando u es un observador instantáneo, $T(u, u)$ es, por definición, la "densidad de energía medida por u ". Esta definición, que permite de hecho "reconstruir" T

$$\begin{array}{ccc} \{T(u_i, u_i)\}_{i=1,2,3,4} & \xrightarrow{\text{polarización}} & \{T(u_i, u_j)\}_{i,j=1,2,3,4} \\ \text{con } \{u_i\} \text{ base de obs. inst. en } p & & \text{con } \{u_i\} \text{ base de obs. inst. en } p \end{array} \rightsquigarrow T(p)$$

a partir de dichas mediciones ([8] Proposición 3.3.4), constituye en una "ley básica de la naturaleza" ([8], 3.3.3) ■

Por razones físicas (entre ellas que, en presencia de campos de Killing, como ocurre en el espacio-tiempo de Minkowski de la Relatividad especial, ello conduce a "teoremas de conservación", bien avalados por los experimentos) debe ser $\boxed{\text{div}(T) = 0}$ ([8], 3.10.3, ver Charla 7). Esta exigencia, a su vez:

- (i) restringe la manera en la que la tensión-energía "genera" curvatura (ver "Ecuación de Einstein. La constante cosmológica")
- (ii) contiene ecuaciones de movimiento para la materia (ver "Fluidos perfectos").

La expresión concreta de T depende del "modelo de materia" que se postule sobre M . Dos ejemplos:

- (i) el "vacío" (en cuyo caso es $T = 0$), como ocurre en el ET de Schwarzschild usado para describir el sistema solar
- (ii) un "fluido perfecto" (ver "Fluidos perfectos"), como ocurre en los ET de Robertson-Walker usados en Cosmología.

12.2. ECUACIÓN DE EINSTEIN. LA CONSTANTE COSMOLÓGICA

(A) Ecuación de Einstein.

(Def. 12.1) Dado un espacio-tiempo (M, g, \uparrow) , se llama **tensor de Einstein** al campo de tensores simétrico

$$G := Ric - (1/2) Sg \in \mathfrak{T}_2^0(M) ,$$

(no confundir con la constante G^{Newton} , que vale 1 en unidades geométricas, Observ. 6.7) donde $Ric := \mathcal{C}_3^1 R \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ es el tensor de Ricci (Def. 3.51) y $S := \mathcal{C}_{12} Ric \in \mathfrak{F}(M)$ es la curvatura escalar (Def. 3.53).

(Lema 12.2) El tensor de Einstein G verifica:

- (1) $div G = 0$ y
- (2) $Ric = G - (1/2) (\mathcal{C}_{12} G)g$.

Demostración.

$$(1) \quad div G = div (Ric) - (1/2) div (Sg) \stackrel{\text{Corol. 3.54}}{\stackrel{\text{Ejerc. 3.10c}}{=}} (1/2) (dS - dS) = 0$$

$$(2) \quad \mathcal{C}_{12} G = \mathcal{C}_{12} Ric - (1/2) S \mathcal{C}_{12} g \stackrel{\text{Ejerc. 3.10a}}{=} S - 2S = -S \quad , \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ric =: G + (1/2) Sg = G - (1/2) (\mathcal{C}_{12} G)g \quad \blacksquare$$

(Def. 12.3) Dado un espacio-tiempo (M, g, \uparrow) , se llama **ecuación de Einstein** (sin constante cosmológica) a la ecuación tensorial

$$\boxed{G = 8\pi T} ,$$

donde $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ es la tensión-energía (ver 12.F y Charla 7) en M .

Nota 1*. En unidades convencionales, se tiene:

$$\underbrace{(G_{conv})_{ij}}_{[L^{-2}]} = \frac{8\pi G_{conv}^{Newton}}{\underbrace{c_{conv}^4}_{[M^{-1}L^{-1}T^2]}} \underbrace{(T_{conv})_{ij}}_{[ML^{-1}T^{-2}]} ,$$

con $c_{conv} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/seg}$ la vel. de la luz en el vacío y $G_{conv}^{Newton} = 6'67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{gr}^{-1} \text{seg}^{-2}$ la cte. de la gravitación de Newton.

En cuanto a las "dimensiones" del miembro izquierdo de la ecuación:

(i) Puesto que $[x_{conv}^{i=0,1,2,3}] = [L]$ ("Espacio-tiempo de Newton", Nota 5) y $[g_{conv}] = [L^2]$, se tiene:

$$[(g_{conv})_{ij}] = [(g_{conv})^{ij}] = 1 \quad , \quad \Rightarrow \quad [(g_{conv})_{ij,k}] = [(D_{conv})_{jk}^i] = [L^{-1}] \quad , \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad [(D_{conv})_{jk,l}^i] = [(R_{conv})_{jkl}^i] = [(Ric_{conv})_{ij}] = [S_{conv}] = [L^{-2}]$$

(ii) (Otra forma de verlo, ver [5], 17.1): de la expresión (ver "Fundam. de la Rel. General".E, Nota 1) $d^2 Y_{conv}^\mu / dt_{conv}^2 = c_{conv}^2 \sum_{\nu=1}^3 (R_{conv})_{0\nu 0}^\mu Y_{conv}^\nu$ (tener en cuenta que, al ser $|\gamma'_{conv}| = c_{conv}$, debe elegirse como primer campo de la referencia sobre γ paralela $E_0 = \gamma'_{conv}/c_{conv}$) se sigue que $(R_{conv})_{0\bullet 0}$ es un operador lineal que, a partir de "desplazamientos" Y_{conv} (en cm), produce c_{conv}^{-2} veces aceleraciones relativas Y_{conv}'' (en cm/seg^2), con lo que $[(R_{conv})_{0\bullet 0}] = [L^{-2}]$ ■

Nota 2. Para argumentos heurísticos conducentes a la ecuación de Einstein, ver [11] II.2.2 y [5] 17.1. En particular, una vez convencido de que la ecuación "correcta" debía ser $G = kT$, para cierta $k \in \mathbb{R}$, Einstein "ajustó" el valor $k = 8\pi$ (en unidades geométricas) razonando que, en el límite de velocidades "pequeñas" (frente a 1) y gravitación "débil" (esto es, con velocidades "de escape" pequeñas; ver Charla 2 y "Espacio-tiempo de Newton", Nota 6), la componente dominante de la ecuación

$$\underbrace{Ric_{00}}_{\simeq \Delta\Phi/c^2} \stackrel{12.2(2)}{=} G_{00} - (1/2)(C_{12}G)g_{00} \stackrel{E.E.}{=} k \left[\underbrace{T_{00}}_{\rho} - (1/2) \underbrace{(C_{12}G)}_{\simeq -\rho} \underbrace{g_{00}}_{\simeq -1} \right] \simeq \frac{k}{2} \underbrace{\rho}_{\simeq \rho_m c^2}$$

debía corresponder a la ecuación de Poisson (ver 12.E) $\Delta\Phi = 4\pi G^{Newton} \rho_m$ en la gravitación newtoniana ■

Nota 3. Resulta interesante "rastrear" los requisitos que conducen a que el miembro de la izquierda $\mathcal{I} \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ de la ecuación de Einstein tenga que ser (un múltiplo constante de) G .

Los siguientes requisitos resultan "razonables":

(i) el espacio-tiempo plano ($R = 0$) debe ser compatible (vía la ecuación) con el "vacío" ($T = 0$)

(ii) \mathcal{I} debe depender sólo de g y de la curvatura R

(ii') las componentes de \mathcal{I} deben depender sólo de las de g via derivadas de hasta orden dos

(iii) \mathcal{I} debe ser lineal en la curvatura R

(iv) \mathcal{I} debe ser simétrico

(v) \mathcal{I} debe tener divergencia cero.

Para dim. arbitraria se prueba fácilmente (ver [11] II.2.2 y [5] 17.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} (ii') \Rightarrow (ii) \quad (*) \\ (ii') + (iii) + (iv) \xrightarrow{(*)} \mathcal{I} = Ric + aSg + \Lambda g, \xrightarrow{(v)} \mathcal{I} = G + \Lambda g, \xrightarrow{(i)} \mathcal{I} = G. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ a, \Lambda \in \mathbb{R} \\ \Lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

Además, para dimensión 4 se tiene:

$$(ii') + (v) \stackrel{(\text{Loveloek, 1972})}{\Rightarrow} \mathcal{I} = G + \underset{\Lambda \in \mathbb{R}}{\Lambda g} .$$

resultado importante, ya que prueba (en dimensión 4) la implicación: $(ii') + (v) \Rightarrow (iii) + (iv)$ ■

Nota 4. En cualquier carta, la ecuación de Einstein constituye un sistema de 10 EDP's de 2º orden, "hiperbólicas", lineales en las segundas derivadas (pero no en las primeras) de las componentes g_{ij} de la métrica. La idea de que estas ecuaciones "dicen cómo la materia curva la geometría" es sólo aproximada; más bien hay que verlas como 10 restricciones sobre el par tensorial (g, T) ([7] 14.2). Las 10 ecuaciones no son independientes, debido a que ambos miembros de la ecuación tensorial son de divergencia nula ■

(B) La constante cosmológica.

La ecuación de Einstein (Def. 12.3) fue postulada contando con que, en "ausencia de fuentes" (o "vacío", $T = 0$), el espacio-tiempo plano (Minkowski) fuera una posible solución (ver Nota 3).

Adelantemos acontecimientos:

Los modelos de espacio-tiempo usados en la "cosmología estándar" son (ver "Espacio-tiempos de Robertson-Walker", Def. 12.7) productos alabeados $I \times_f S$, donde I es un intervalo real, S es una variedad riemanniana 3-dimensional, conexa y de curvatura constante (Cap. 3) $k = -1, 0$ ó 1 , y la función $f(> 0) : I \rightarrow \mathbb{R}$ ("función de alabeo") es diferenciable.

Para que estas geometrías verifiquen la ecuación de Einstein (sin constante cosmológica, Def. 12.3), la tensión-energía T debe ser la correspondiente a un "fluido perfecto" (Def. 12.4), con "densidad de energía comóvil" ρ y "presión comóvil" p dadas por (Teor. 12.11)

$$\frac{8\pi\rho}{3} = \frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2} \quad \text{y} \quad -8\pi p = \frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2} + \frac{2f''}{f} .$$

La condición para que este modelo sea "estático" (esto es, con todas sus variables observables independientes del tiempo) exige $f = f_0$ (*constante*), lo que implica

$$\rho = \frac{3k}{8\pi f_0^2} = -3p ;$$

pero ni ρ ni p son negativas, para la materia ordinaria.

A la vista de lo anterior, Einstein modificó (1918) su ecuación en la forma

$$\boxed{G + \Lambda g = 8\pi T} ,$$

para cierto número real Λ (la **constante cosmológica**, con "dimensiones" $[\Lambda] = [T^{-2}]$, en unidades convencionales $[\Lambda_{conv} = c_{conv}^{-2} \Lambda] = [L^{-2}]$) a determinar. Las modificaciones que ello introduce en el Teor. 12.11 de O'Neill han sido ya incorporadas en estas Notas.

Con esta nueva ecuación, la condición $f = f_0$ conducía a expresiones "razonables" para ρ y p . Y la hipótesis $\rho > 0$ y $p = 0$ (el fluido de galaxias sería "polvo") implicaba $k = 1$ y fijaba Λ y ρ en función de f_0 ("modelo estático de Einstein", ver Ejercicio 12.19a*).

Ante la evidencia experimental de "expansión cosmológica" (Slipher, 1920's), Einstein consideró un "error" haber introducido la constante Λ (por lo "ad hoc" de su introducción y por la "inestabilidad" del modelo cosmológico estático resultante) y volvió a su ecuación original.

Sin embargo, la presencia en el miembro izquierdo de la ecuación de un término de la forma Λg no es en absoluto descartable (ver Nota 3) y el que sea $\Lambda \neq 0$ únicamente impide que un espacio-tiempo plano pueda ser solución de la ecuación en ausencia de fuentes (de hecho se tiene: $T = 0 \Rightarrow Ric = \Lambda g$, con lo que en tal caso el espacio-tiempo resulta ser una "variedad de Einstein").

"Predicciones cuánticas" de un valor para Λ resultan inmensamente superiores (en un factor $> 10^{50}$; ver "El misterio de la constante cosmológica", IC, julio 88) a lo que, hasta mitad de los 1990's, era la cota superior ($|\Lambda_{conv}| \lesssim 10^{-55} \text{ cm}^{-2}$) puesta por las observaciones cosmológicas (esto se conoce como el "problema de la constante cosmológica"). Pero, aparte esta discrepancia teórica (no resuelta), hasta mitad de los 1990's las observaciones eran compatibles con $\Lambda = 0$, y este era el valor de referencia aceptado.

Aunque O'Neill trabaja en todo momento SIN constante cosmológica, nosotros trabajaremos CON constante cosmológica, por lo que **adoptaremos como ecuación de Einstein** $G + \Lambda g = 8\pi T$.

El tratamiento no resulta complicado, ya que la nueva ecuación puede reescribirse como la antigua (esto es, sin constante cosmológica) $G = 8\pi \bar{T}$, con nueva tensión-energía $\bar{T} := T - \frac{\Lambda}{8\pi}g$. En el caso "vacío" ($T = 0$) resulta: $\bar{T} = \frac{-\Lambda}{8\pi}g$, por lo que el término $\frac{-\Lambda}{8\pi}g$ se llama **tensión-energía del vacío**

Nota 5. Para entender que un valor $\Lambda > 0$ tiene un papel "repulsor", piénsese en un ET vacío (i.e. $T = 0$), en el que la ec. de Einstein se escribe:

$$Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 0 \quad , \quad \Rightarrow \quad Ric = \Lambda g \quad , \quad \Rightarrow \quad Tr(F_{\gamma'}) \stackrel{\text{Lema 8.9}}{=} -Ric(\gamma', \gamma') = \Lambda$$

(para toda partícula material en caída libre γ); así aparece una aceleración relativa promedio (de las partículas en caída libre) de alejamiento ■

12.3. FLUIDOS PERFECTOS. LA CONSTANTE COSMOLÓGICA

(A) Fluidos perfectos.

Como se dijo en 12.F, la expresión concreta de la tensión-energía $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ depende del "modelo de materia" que se postule sobre M .

(Def. 12.4) Dado un espacio-tiempo (M, g, \uparrow) , se llama **fluido perfecto** a (un modelo de materia para el que existe) una tripleta (U, ρ, p) tal que:

(1) $U \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo de observadores (esto es, temporal, futuro, unitario) llamado el **campo (de velocidades) promedio** del fluido,

(2) $\rho \in \mathfrak{F}(M)$ y $p \in \mathfrak{F}(M)$ son la **densidad de energía comóvil** y la **presión comóvil** del fluido (respectivamente), y

(3) la tensión-energía viene dada por: $T = (\rho + p)g(U, \cdot) \otimes g(U, \cdot) + pg$

Nota 1. (a) En un espacio vectorial lorentziano existen *cuatro* posibles formas de Jordan para una aplicación lineal autoadjunta (ver [ON], Ejercicio 9.19; ver también [8], 8.1.5). Una de estas cuatro posibilidades (que se da precisamente cuando existe un autovector temporal) es que la aplicación se diagonalice (en cierta base ortonormal). Pues bien, la tensión-energía T de un fluido perfecto (U, ρ, p) verifica $\uparrow_2^1 T(U) \stackrel{(3)}{=} -\rho U$, con lo que, en cada punto, la forma de Jordan de la aplicación $\uparrow_2^1 T(p)$ (autoadjunta, al ser $T(p)$ simétrica) es la diagonal.

(b) Dados $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, $U \in \mathfrak{X}(M)$ (t.f.u.) y $\rho, p \in \mathfrak{F}(M)$, se cumple (3) *si y sólo si* se verifica (para todo $X, Y \perp U$):

$$T(U, U) = \rho \quad , \quad T(U, X) = 0 = T(X, U) \quad \text{y} \quad T(X, Y) = pg(X, Y) \quad .$$

En efecto: (\Rightarrow) es trivial.

(\Leftarrow) Trabajando en una base local ortonormal $\{X_0 \equiv U, X_1, X_2, X_3\}$, se tiene (para todo $V = \sum_i V^i X_i$):

$$\begin{aligned} T(V, V) &= \sum_{ij} V^i V^j T(X_i, X_j) \stackrel{Hip.}{=} (V^0)^2 \rho + \sum_{\mu} (V^\mu)^2 p \equiv \\ &\equiv (\rho + p) (V^0)^2 + p[-(V^0)^2 + \sum_{\mu} (V^\mu)^2] = ((\rho + p)g(U, \cdot) \otimes g(U, \cdot) + pg)(V, V) . \end{aligned}$$

(c) Dados $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ y $U \in \mathfrak{X}(M)$ (t.f.u.), existen $\rho, p \in \mathfrak{F}(M)$ que cumplen (3) *si y sólo si* T es "espacialmente isótropa" para U , esto es ([8], 2.1.7): $\forall p \in M$ y $\forall \phi : T_p M \rightarrow T_p M$ que sea isometría lineal y preserve $u \equiv U(p)$, se verifica $\phi^* T(p) = T(p)$. En efecto:

(\Rightarrow) Se tiene ($\forall \phi : T_p M \rightarrow T_p M$ isometría lineal que preserve u):

$$\begin{aligned} \phi^* T(x, y) &:= T(\phi x, \phi y) = (\rho + p)(p)g(U, \phi x) \otimes g(U, \phi y) + p(p)g(\phi x, \phi y) \stackrel{\text{Hip.}}{=} \\ &= (\rho + p)(p)g(U, x) \otimes g(U, y) + p(p)g(x, y) = T(x, y) . \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Trabajando en una base local ortonormal $\{X_0 \equiv U, X_1, X_2, X_3\}$ y eligiendo, para cada $\mu = 1, 2, 3$, una isometría lineal $\phi_\mu : T_p M \rightarrow T_p M$ que preserve u y tal que $\phi_\mu(X_\mu) = -X_\mu$, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0\mu} \stackrel{\text{Hip.}}{=} -T_{0\mu} , \Rightarrow (T_{i0})T_{0i} = \rho\delta_{0i} , \text{ para cierta } \rho \in F(M) \\ T_{\mu\mu} \stackrel{\text{Hip.}}{=} T_{\nu\nu} \\ T_{\mu\nu} \stackrel{\text{Hip.}}{=} -T_{\mu\nu} \quad \mu \neq \nu \end{array} \right\} , \Rightarrow T_{\mu\nu} = p\delta_{\mu\nu} , \text{ para cierta } p \in F(M)$$

Denotando $\{\theta^i\}$ a la base dual, resulta $\theta^i = \varepsilon_i g(X_i, \cdot)$ (ver Cap. 3, "Cuestiones varias", Nota 2) y se concluye:

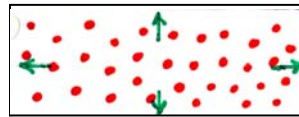
$$\begin{aligned} T &\equiv \sum_{ij} T_{ij} \theta^i \otimes \theta^j = \rho g(U, \cdot) \otimes g(U, \cdot) + \sum_{\mu} p g(X_{\mu}, \cdot) \otimes g(X_{\mu}, \cdot) = \\ &= (\rho + p)g(U, \cdot) \otimes g(U, \cdot) + pg \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 2. Todos los fluidos perfectos "conocidos" (colecciones finitas de flujos de partículas, con isotropía generada por las colisiones, ver [8], 3.13) verifican

$$\rho > 0 \text{ y } \rho \geq 3p \geq 0 \quad (\Rightarrow \rho + 3p > 0) .$$

El caso extremo $\rho = 3p > 0$ corresponde a un fluido perfecto "de radiación" (electromagnética); el caso extremo $\rho > p = 0$ se denomina "polvo".

No se conocen fluidos perfectos con $p < 0$ (pero pueden concebirse: ver "Supernovas y expansión acelerada del universo", IC marzo 99).



$p > 0$



$p < 0$

Sin embargo, es útil trabajar con la noción de fluido perfecto de O'Neill (sin exigencias sobre ρ ó p), porque incluye el caso $\rho > 0$ y $\rho + p = 0$, que equivale (probando por el camino que necesariamente $\rho = cte.$, escribamos $\rho \equiv \frac{\Lambda}{8\pi}$) a una constante cosmológica $\Lambda = 8\pi\rho > 0$ (ver Nota 3) \blacksquare

(B) Ecuación de los fluidos perfectos.

(Propos. 12.5) Sea (U, ρ, p) un fluido perfecto en (M, g, \uparrow) . Se tiene:

$$\operatorname{div} T = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} U\rho = -(\rho + p)\operatorname{div} U & \text{Ejerc. 3.9c} \\ (\rho + p)D_U U = -\operatorname{grad}^\perp p & \text{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div}(\rho U) = -p\operatorname{div} U & \text{(1)} \end{cases},$$

con $\operatorname{grad}^\perp p := \operatorname{grad} p + g(\operatorname{grad} p, U)U = \operatorname{grad} p + U(p)U$.

Dem. Denotando $\bar{g} \equiv \uparrow_1^1 \uparrow_2^1 g$ y $\bar{T} \equiv \uparrow_1^1 \uparrow_2^1 T \in \mathfrak{T}_0^2(M)$, se tiene:

$$\begin{cases} D\bar{g} \equiv D(\uparrow_1^1 \uparrow_2^1 g) \stackrel{\text{Lema 3.45}}{=} \uparrow_1^1 \uparrow_2^1 (Dg) \stackrel{\text{Teor. 3.11(D5)}}{=} 0 & (*) \\ \operatorname{div} \bar{T} := \mathcal{C}_1^1 (D(\uparrow_1^1 \uparrow_2^1 T)) \stackrel{\text{Lema 3.45}}{=} \mathcal{C}_1^1 (\uparrow_1^1 \uparrow_2^1 (DT)) = \mathcal{C}_{12} (\uparrow_2^1 (DT)) \equiv \\ \equiv \uparrow_1^1 (\mathcal{C}_{13}(DT)) =: \uparrow_1^1 (\operatorname{div} T) . \end{cases}$$

Ahora bien, puesto que $\bar{T} = (\rho + p)U \otimes U + p\bar{g}$, se verifica

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \bar{T})^i &= \sum_j \bar{T}_{;j}^{ij} \stackrel{(*)}{=} \sum_j ((\rho + p)_{;j} U^i U^j + (\rho + p) U_{;j}^i U^j + (\rho + p) U^i U_{;j}^j + p_{;j} g^{ij}) = \\ &= (U(\rho + p) + (\rho + p)\operatorname{div} U) U^i + ((\rho + p)D_U U + \operatorname{grad} p)^i \end{aligned}$$

de donde se concluye:

$$\operatorname{div} T = 0 \Leftrightarrow \underbrace{U(\rho)U + (\rho + p)(\operatorname{div} U)U}_{\sim U} + \underbrace{(\rho + p)D_U U + \operatorname{grad}^\perp p}_{\perp U} = 0 \quad \blacksquare$$

Nota 3. Es claro (Def. 12.4(3)) que añadir en el miembro izquierdo (de la ec.de Einstein) un término Λg puede 'sustituirse' por añadir en el miembro derecho un término $8\pi T_{(U,\rho,p)}$ con $\rho + p = 0$.

Viceversa, añadir en el miembro derecho un término $8\pi T_{(U,\rho,p)}$ con $\rho + p = 0$ (el f. p. 'no posee inercia', ver 12.5(2)) puede 'sustituirse' por añadir en el miembro izquierdo un término Λg . En efecto, se tiene:

(i) en la Def. 12.4(3) es $T = pg$, con lo que U es arbitrario (cualquier U es autovector de $\frac{1}{2}T = p\delta = -\rho\delta$): "no privilegia ningún campo de observadores"

(ii) se sigue de la Propos. 12.5(2) que $\operatorname{grad}^\perp p = 0$ ("homogeneidad espacial") y de Prop. 12.5(1) que $U\rho = 0$, y por tanto que $Up = 0$.

(iii) se sigue de (ii) que $p = cte \stackrel{\text{s.p.d.g.}}{\equiv} \frac{-\Lambda}{8\pi}$ ("homogeneidad"), y por tanto: $T = \frac{-\Lambda}{8\pi}g$

De lo anterior se concluye: añadir en el miembro derecho de la Ecuación de Einstein un fluido perfecto con $p = -\rho$ (desconocido, ¿el vacío?) equivale a añadir en el miembro izquierdo un término Λg (con $\Lambda = 8\pi\rho$) \blacksquare

Nota 4. Límite newtoniano de las ecuaciones 12.5(1) y (2). Se tiene:

$$\begin{cases} U\rho = -(\rho + p)\operatorname{div}U \xrightarrow{\text{límite}} \frac{\partial\rho_m}{\partial t} = -\sum_{\mu}\frac{\partial(\rho_mv^\mu)}{\partial x^\mu} \text{ (ec. de continuidad)} \\ (\rho + p)D_UU = -\operatorname{grad}^\perp p \xrightarrow{\text{límite}} \rho_m\left(\frac{\partial v^\mu}{\partial t} + \sum_{\sigma}v^\sigma\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu}\right) = \frac{-\partial p}{\partial x^\mu} \text{ (ec. de Euler)}, \end{cases}$$

donde \vec{v} , ρ_m y p son el campo de velocidades, la densidad de masa y la presión del fluido newtoniano, respectivamente ■

(C) Condiciones de energía.

(Definición) Dada una tensión-energía $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ (ver 12.F), es habitual considerar las siguientes (posibles) desigualdades, llamadas **condiciones de energía** (ver [4], 4.3 para una descripción pormenorizada):

$$\begin{cases} T(v, v) \geq 0, \quad \forall v \in TM \text{ causal} \quad \text{(condición "débil")} \quad (1) \\ T(v, v) - \frac{1}{2}(\mathcal{C}_{12}T)g(v, v) \geq 0, \quad \forall v \in TM \text{ causal} \\ \quad \text{(condición "fuerte" o de "convergencia temporal")} \quad (2) \end{cases}$$

Nota 5. La condición ⁽¹⁾ ("la densidad de energía medida por cualquier observador es no-negativa") suele incorporarse (pero no en O'Neill) a la definición de tensión-energía. Implica que la materia tiene un efecto no-divergente sobre las congruencias irrotacionales de geodésicas luz ([4], 4.3, p. 94-95).

La condición ⁽²⁾ implica que la materia tiene un efecto no-divergente sobre las congruencias irrotacionales de geodésicas temporales ([4], 4.3, p. 95). De ahí el nombre "convergencia temporal".

⁽¹⁾ $\not\Rightarrow$ ⁽²⁾ y, contra lo que sugieren los nombres, ⁽²⁾ $\not\Rightarrow$ ⁽¹⁾ (por ejemplo en el caso de un fluido perfecto, ver a continuación) ■

Supongamos que (M, g, \uparrow) se acopla a la tensión-energía T via la ecuación de Einstein (*sin* constante cosmológica), con lo que:

$$\operatorname{Ric} \stackrel{\text{Lema 12.2(2)}}{=} G - \frac{1}{2}\mathcal{C}_{12}(G)g = 8\pi\left(T - \frac{1}{2}\mathcal{C}_{12}(T)g\right) \quad (3);$$

entonces la condición ⁽²⁾ se escribe: $\operatorname{Tr}(F_v) \stackrel{\text{Lema 8.9(1)}}{=} -\operatorname{Ric}(v, v) \stackrel{(2),(3)}{\leq} 0$, $\forall v \in TM$ causal ("la gravitación atrae en promedio").

Si T es la tensión-energía de un fluido perfecto, resulta (Ejercicio 12.10):

$$\begin{cases} T \text{ verifica } (1) & \Leftrightarrow \rho \geq 0, \rho + p \geq 0 \\ T \text{ verifica } (2) & \Leftrightarrow \rho + p \geq 0, \rho + 3p \geq 0 \end{cases};$$

como ya se dijo en la Nota 2, todos los fluidos perfectos "conocidos" verifican $\rho > 0, \rho \geq 3p \geq 0$ y, por tanto, ⁽¹⁾ y ⁽²⁾.

12.4. ESPACIO-TIEMPOS DE ROBERTSON-WALKER

(A) Hipótesis básicas sobre cosmología

El universo a gran escala ("cosmos") se modela (para empezar) como un espacio-tiempo (M, g, \uparrow) que contiene un fluido cuyas "moléculas" son las galaxias. La evidencia experimental: (i) muestra que el fluido es en promedio "isótropo" desde la Tierra, y (ii) apoya el "principio cosmológico: todas las galaxias típicas (o promedio) tienen la misma historia".

■ Hipótesis sobre M : a gran escala, se verifica:

- (1) $M = I \times S$ (variedad producto), con proyecciones $\pi : M \rightarrow I$ y $\sigma : M \rightarrow S$, donde I es un cierto intervalo real y S es una cierta variedad conexa 3-dimensional
- (2) la métrica g hace a $U \equiv \partial_t \in \mathcal{L}(I)$ (el levantamiento a M del campo estándar en I , Cap. 1) temporal, s.p.d.g. (Lema 5.32) futuro
- (3) para cada $p \in S$, la imagen de $\gamma_p(t) := (t, p)$ (curva integral de U) representa la línea de espacio-tiempo (12.A) de una galaxia típica (γ_p aún no es una partícula material!)

Nota 1. Subyacente a lo anterior están las siguientes ideas:

(i) (Weyl 1923) a gran escala, la tensión-energía $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ define una congruencia de líneas de espacio-tiempo, las de las galaxias promedio, \rightsquigarrow campo de vectores temporal futuro $U \in \mathfrak{X}(M)$

(ii) (observacional?) existe alguna magnitud física "escalar" (esto es, representable por una función) $t \in \mathfrak{F}(M)$ que verifica $U(t) = 1$ (por ejemplo la entropía, o la inversa de la temperatura comóvil de la radiación de fondo, ¿quizás sólo en la actual etapa expansiva del universo?). Puesto que dt nunca se anula, los conjuntos de nivel de t son (Corol. 1.36) hipersuperficies de M y, eligiendo cartas locales $(x, \mathcal{U}) \equiv (x^0 = t, x^1, x^2, x^3)$ con $x^0 = t$ y con (x^1, x^2, x^3) las inducidas por una carta local en la correspondiente hipersuperficie de nivel de t y por el flujo de U , resulta $U|_{\mathcal{U}} = \partial_t$

(iii) (contenida en el "principio cosmológico") dicha función t toma los mismos valores (digamos un intervalo real I) sobre todas las curvas integrales de U . En tal caso, los conjuntos de nivel de t son todos difeomorfos bajo el flujo de U y se tiene la estructura de variedad producto ■

- Hipótesis sobre g : a gran escala, se verifica (además de (1), (2) y (3)):
 - (a) La función $t \in \mathfrak{F}(M)$ (\equiv levantamiento a M de la coordenada estándar t en I) es el tiempo propio de cada galaxia típica: $\boxed{g(U, U) = -1}$. Esto es, cada curva $\gamma_p(t) \equiv (t, p)$ es una partícula material (12.A).
 - (b) Para todo $t \in I$ y todo $p \in S$, el subespacio $T_{(t,p)}(\{t\} \times S)$ es el espacio de reposo (12.B) de $\gamma'_p(t)$: $\boxed{U \perp (\{t\} \times S)}$. Esto es, cada subv. $S(t) \equiv \{t\} \times S$ es el "espacio de reposo" de U .
 - (c) Todo suceso $(t, p) \in M$ posee un entorno $J \times \mathcal{U}$ en el que se verifica:

$$\forall x, y \in T_{(t,p)}S(t), \exists \phi \equiv \underset{\text{unit.}}{id_J} \times \underset{\text{isometría}}{\phi_{\mathcal{U}}} : J \times \mathcal{U} \rightarrow J \times \mathcal{U} \text{ t. q. } d\phi(x) = y$$

(**isotropía local**: todas las direcciones U -ortog. son equivalentes).

Nota 2. En primer lugar, (a) + (b) es equivalente a:

(iv) $\boxed{U \equiv \partial_t = -\text{grad } t}$ (con lo que $-\text{grad } t$ es temporal futuro).

$$\text{En efecto: } \begin{cases} 1 = U(t) =: dt(U) =: g(\text{grad } t, U) & (*) \\ (b) \xrightarrow{\text{grad } t \perp S(t)} U \sim \text{grad } t & (**) \\ (a) \xrightarrow{(*, **)} U = -\text{grad } t \begin{cases} \xrightarrow{\text{grad } t \perp S(t)} (b) \\ \xrightarrow{(*)} (a) \end{cases} \end{cases}$$

Por su parte, (iv) implica que U es "sincronizable a tiempo propio" (Def. 12.32) [$g(U, \cdot) = -g(\text{grad } t, \cdot) := -dt$], lo que a su vez implica (Corol. 12.33) que U es geodésico (ver luego Corol. 12.8(1)) e "irrotacional" (definición en Prop. 12.30(3)).

Finalmente, subyacente a la hipótesis (c) están las siguientes ideas:

- (v) (observacional?) "isotropía local desde aquí"
- (vi) (contenida en el "principio cosmológico") isotropía local desde cualquier galaxia típica ■

Resumen de las Notas 1 y 2. Si en un ET (M, g, \uparrow) existe $t \in \mathfrak{F}(M)$ tal que:

- (A) es "creciente" en cualquier dirección futura, equivalente (al ser $v(t) =: dt(v) =: g(\text{grad } t, v)$) a que $-\text{grad } t$ sea temporal futuro
- (B) proporciona el "tiempo propio" de las curvas integrales de $-\text{grad } t$ (equivalente a que $g(\text{grad } t, \text{grad } t) = -1$) y toma los "mismos valores" sobre todas ellas
- (C) sus hipersuperficies de nivel son "localmente isótropas", entonces $M = I \times S$ y la métrica g verifica (a), (b) y (c) ■

(Propos. 12.6) (**Teorema de Robertson-Walker**) Sea $(M = I \times S, g, \uparrow)$ un espacio-tiempo que verifica (a), (b) y (c). Entonces:

(1) Para todo $t \in I$, la hipersuperficie (riemanniana) $S(t) \equiv \{t\} \times S$ posee curvatura (seccional) constante $C(t)$.

(2) Para todo $s, t \in I$, el difeomorfismo (dado por el flujo de U) $\mu_{s,t} : S(s) \rightarrow S(t), (s, p) \mapsto (t, p)$ es una homotecia.

(3) Resulta $(M, g) = (I, -dt^2) \times_f (S, g_S)$ ("producto alabeado", Def. 7.33), para cierta métrica riemanniana (en S) g_S de curvatura constante $k = -1, 0$ ó 1 , y cierta $f(> 0) \in \mathfrak{F}(I)$ (ver [7], 16.5).

Demostración. (i) Para todo $p \in S$ y para cualesquiera planos $\Pi, \bar{\Pi} \subset T_{(t,p)}S(t)$, existe (por (c) y por ser $\dim S(t) = 3$) una isometría $\phi \equiv id_J \times \phi_{\mathcal{U}} : J \times \mathcal{U} \rightarrow J \times \mathcal{U}$ tal que:

$$d\phi(\Pi) = \bar{\Pi} \quad , \quad \Rightarrow \quad K^M(\Pi) = K^M(\bar{\Pi}) \quad , \quad \overset{\phi|_{S(t)} \text{ es isometría}}{\Rightarrow} \quad K^{S(t)}(\Pi) = K^{S(t)}(\bar{\Pi}) \quad ,$$

con lo que (Ejerc. 3.21b) $(S(t), g_{S(t)})$ es de curvatura constante $C(t)$.

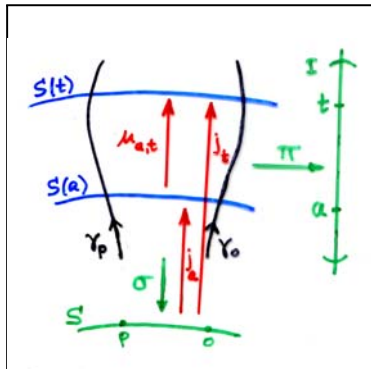
(ii) Por (c), el difeomorfismo $\mu_{s,t}$ resulta *conforme* (dado $p \in S$, $|d\mu_{s,t}(x)|$ es independiente del $x \in T_{(t,p)}S(t)$ unitario elegido), con lo que (Def. 3.63) $\exists h \in \mathfrak{F}(I \times S \times I)$ (no nula, s.p.d.g. positiva) tal que

$$\forall p \in S \quad , \quad (\mu_{s,t}^* g_{S(t)})(s, p) = h^2(s, t, p) g_{S(s)}(s, p) \quad .$$

Más aún, se demuestra inmediatamente (!) que $h(s, p, t)$ no depende de p , con lo que $\mu_{s,t}$ es una homotecia de factor de escala $h(s, t)$:

$$\begin{aligned} \mu_{s,t}^* g_{S(t)} &= h^2(s, t) g_{S(s)} \quad (1) \quad , \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{K^{S(s)}(\Pi)}_{C(s)} &\stackrel{\text{Obs. 3.65(2)}}{=} h^2(s, t) \underbrace{K^{S(t)}(d\mu_{s,t}\Pi)}_{C(t)} \quad , \end{aligned}$$

con lo que el signo $k(= -1, 0$ ó $1)$ de $C(t)$ es independiente de t .



(iii) Para cada $t \in I$, sea la biyección canónica $j_t : S \rightarrow S(t), p \mapsto (t, p)$, $\Rightarrow j_t = \mu_{s,t} \circ j_s$ (2).

Fijemos $a \in I$, fijemos $f_a \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$k =: f_a^2 C(a)$$

y asignemos a S una métrica g_S tal que j_a sea una homotecia de factor de escala f_a :

$$j_a^* g_{S(a)} =: f_a^2 g_S \quad (3) \quad , \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K^S(\Pi) \stackrel{3.65(2)}{=} f_a^2 K^{S(a)}(dj_a \Pi) \stackrel{(i)}{=} f_a^2 C(a) = k,$$

con lo que (S, g_S) es de curvatura constante k .

(iv) Definiendo

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}^+, t \mapsto h(a, t)f_a \quad (\Rightarrow f(a) = f_a) ,$$

resulta que $\underline{j_t}$ es una homotecia de factor de escala $f(t)$ ($\forall t \in I$):

$$j_t^* g_{S(t)} \stackrel{(2)}{=} (j_a^* \circ \mu_{a,t}^*) g_{S(t)} \stackrel{(1)}{=} h^2(a, t) j_a^* g_{S(a)} \stackrel{(3)}{=} h^2(a, t) f_a^2 g_S = f^2(t) g_S \quad (4) ,$$

con lo que

$$k \stackrel{(iii)}{=} K^S \stackrel{\text{Obs. 3.65(2)}}{=} f^2(t) K^{S(t)} \stackrel{(i)}{=} f^2(t) C(t)$$

(v) Finalmente, $\forall (t, p) \in S(t), \forall v \equiv \lambda U_{(t,p)} \in T_{(t,p)}(I \times \{p\})$ y $\forall x \in T_{(t,p)}S(t)$, se tiene:

$$\begin{cases} g(v, v) \stackrel{(a)}{=} -\lambda^2 \stackrel{d\pi(U)=d/dt}{=} -dt^2 (d\pi(v), d\pi(v)) \\ g(v, x) \stackrel{(b)}{=} 0 \\ g(x, x) \stackrel{j_t \circ \sigma|_{S(t)} = id_{S(t)}}{=} g((dj_t \circ d\sigma)(x), (dj_t \circ d\sigma)(x)) \stackrel{(4)}{=} f^2(t) g_S(d\sigma(x), d\sigma(x)) \end{cases}$$

De donde se concluye: $(M, g) = (I, -dt^2) \times_f (S, g_S)$ ■

(B) Espacio-tiempos de Robertson-Walker

(Def. 12.7) Los espacio-tiempos de la forma $M(k, f) \stackrel{\text{Notación}}{\equiv} I \times_f S$, orientados-tiempo por el campo temporal $U \equiv \partial_t$ ("futuro"), se denominan **espacio-tiempos de Robertson-Walker**.

El **signo** k y la **función de escala** f son los ingredientes esenciales.

Diremos que el intervalo I es **maximal** si la función f no admite una extensión diferenciable positiva a un intervalo estrictamente mayor.

Las **elecciones estándar** para S (conexa) son las completas y simplemente conexas (Corol. 8.25): $\mathbb{H}^3, \mathbb{R}^3$ ó \mathbb{S}^3 , con curvaturas seccionales $k = -1, 0$ ó 1 , respectivamente; es por ello habitual en la bibliografía referirse a $M(k, f)$ como **abierto, plano** o **cerrado**, respectivamente.

■ **Notaciones** (recordar Def. 7.33):

$$\begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ para las métricas en } I \text{ y } M \text{ (nosotros usaremos } g_I \text{ y } g) \\ (\cdot, \cdot) \text{ para la métrica en } S \text{ (nosotros usaremos } g_S) \\ D \text{ para las conexiones de Levi-Civita en } I \text{ y } M \text{ (nosotros usaremos } D^I \text{ y } D) \\ \nabla \text{ para la conexión de Levi-Civita en } S \text{ (nosotros usaremos } D^S) \\ h' \equiv Uh, \text{ para toda } h \in \mathfrak{F}(M) \end{cases} .$$

- Puesto que (S, g_S) es de curvatura constante, cualesquiera dos puntos $p, q \in S$ poseen (Corolario 8.15) S -entornos \mathcal{U}, \mathcal{V} isométricos bajo cierta $\phi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$. Con lo que, para cada $t \in I$, cualesquiera dos sucesos $(t, p), (t, q) \in S(t)$, poseen M -entornos $I \times \mathcal{U}, I \times \mathcal{V}$ isométricos bajo $id_I \times \phi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ (**homogeneidad local**/"principio cosmológico"). Además, si S es una de las elecciones estándar, esta isometría puede definirse globalmente (eso es, en toda $M = I \times S$).

- Se verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad } f \stackrel{\text{Lema 7.34}}{\sim} U \quad , \quad \Rightarrow \quad \text{grad } f = -g(\text{grad } f, U)U = -f'U \quad (1) \\ H^f(U, U) \stackrel{\text{Lema 3.49}}{=} g(D_U(\text{grad } f), U) \stackrel{(1)}{=} -f''g(U, U) = f'' \quad (2) \end{array} \right.$$

y también (para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ortogonales a U):

$$\left\{ \begin{array}{l} (S(t), g|_{S(t)}) \text{ es de curv. cte. } C(t) \stackrel{\text{Prop. 12.6(iv)}}{=} \frac{k}{f^2(t)} \quad , \quad \stackrel{\text{Cor. 3.43}}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow (\widetilde{R^S}_{XY}Z)(t, \cdot) \stackrel{\text{Obs. 3.65(1)}}{=} R^{S(t)}_{XY}Z = \frac{k}{f^2(t)}(g(X, Z)Y - g(Y, Z)X) \quad (3) \\ \widetilde{Ric^S}(X, Y) \stackrel{\text{Obs. 3.65(1)}}{=} Ric^{S(\cdot)}(X, Y) = \sum_{\mu=1}^3 g(R^{S(\cdot)}_{XX_\mu}Y, X_\mu) \stackrel{(3)}{=} \\ = \frac{k}{f^2} \sum_{\mu=1}^3 g(g(X, Y)X_\mu - g(X_\mu, Y)X, X_\mu) = \frac{2k}{f^2}g(X, Y) \quad (4) \\ d^I f = f' dt \quad , \quad \Rightarrow \quad \text{grad}^I f = -f' \frac{d}{dt} \quad , \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta^I f := \text{div}^I(\text{grad}^I f) = dt(D^I_{d/dt} \text{grad}^I f) = -f'' \quad (5) \end{array} \right.$$

- (Corolario 12.8) Para todo $X, Y \in \mathcal{L}(S)$, se tiene (Prop. 7.35; ver también Ejercicio 12.4a):

$$\begin{aligned} (1) \quad D_U U &\stackrel{\text{Propos. 7.35(1)}}{=} 0 \quad (\text{recordar lo dicho en la Nota 2}) \\ (2) \quad D_U X &\stackrel{\text{Propos. 7.35(2)}}{=} D_X U = \frac{f'}{f} X \\ (3) \quad \text{nor}(D_X Y) &\stackrel{\text{Propos. 7.35(3)}}{=} -g(X, Y) \frac{\text{grad } f}{f} \stackrel{(1)}{=} g(X, Y) \frac{f'}{f} U \\ (4) \quad \text{tan}(D_X Y) &\stackrel{\text{Propos. 7.35(4)}}{=} D^S_{d\pi(X)} \widetilde{d\pi}(Y) . \end{aligned}$$

- (Corol. 12.9) Para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ortogonales a U , se tiene (Prop. 7.42 y Nota posterior; ver Ejercicio 12.4a):

$$\begin{aligned}
(1) \quad R_{XY}Z &\stackrel{\text{Propos. 7.42(5)}}{=} \widetilde{R}^S_{XY}Z - \frac{g(\text{grad } f, \text{grad } f)}{f^2} (g(X, Z)Y - g(Y, Z)X) \stackrel{(1,3)}{=} \\
&= \frac{f'^2 + k}{f^2} (g(X, Z)Y - g(Y, Z)X) \\
(2) \quad R_{XU}U &\stackrel{\text{Propos. 7.42(2)}}{=} \frac{H^f(U, U)}{f} X \stackrel{(2)}{=} \frac{f''}{f} X \\
(3) \quad R_{XY}U &\stackrel{\text{Propos. 7.42(3)}}{=} 0 \\
(4) \quad R_{XU}Y &\stackrel{\text{Propos. 7.42(4)}}{=} \frac{-g(X, Y)}{f} D_U(\text{grad } f) \stackrel{\text{Cor. 12.8(1)}}{=} \frac{f''}{f} g(X, Y)U.
\end{aligned}$$

Nota 3. Se tiene las expresiones (ver también [7], Ejercicio 16.9)

$$\begin{cases} K_u^M \equiv K^M(U, X) := \frac{g(R_{UX}U, X)}{g(U, U)g(X, X) - g(U, X)^2} & \stackrel{\text{Cor. 12.9(2)}}{=} \frac{f''}{f} \\ K_\sigma^M \equiv K^M(X, Y) := \frac{g(R_{XY}X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} & \stackrel{\text{Cor. 12.9(1)}}{=} \frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2}; \end{cases}$$

la segunda es consistente con la ec. de Gauss (Corol. 4.6), ya que:

$$\begin{aligned}
K^M(X, Y) &\stackrel{\text{Cor. 4.6}}{=} K^{S(t)}(X, Y) - \underbrace{\varepsilon_M}_{-1} \frac{g(D_X U, X)g(D_Y U, Y) - g(D_X U, Y)^2}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} = \\
&\stackrel{\text{Prop. 12.6(iv)}}{=} \frac{k}{f^2} + \frac{g(\frac{f'}{f}X, X)g(\frac{f'}{f}Y, Y) - g(\frac{f'}{f}X, Y)^2}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} = \frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2} \blacksquare \\
&\stackrel{\text{Cor. 12.8(2)}}{=}
\end{aligned}$$

- (Corolario 12.10) Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ortogonales a U , se tiene (Corol. 7.43):

$$\begin{aligned}
(1) \quad Ric(U, U) &\stackrel{\text{Corol. 7.43(1)}}{=} \widetilde{Ric}^I(U, U) - \frac{3}{f} H^f(U, U) \stackrel{(2)}{=} \frac{-3f''}{Ric^I=0} \\
(2) \quad Ric(U, X) &\stackrel{\text{Corol. 7.43(2)}}{=} 0 \\
(3) \quad Ric(X, Y) &\stackrel{\text{Cor. 7.43(3)}}{=} \widetilde{Ric}^S(X, Y) - \left(\frac{\Delta^I f}{f} + \frac{2g(\text{grad } f, \text{grad } f)}{f^2} \right) g(X, Y) \stackrel{(4,5,1)}{=} \\
&= \left(\frac{2f'^2}{f^2} + \frac{2k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right) g(X, Y) \\
(4) \quad S := \mathcal{C}_{12} Ric &= -Ric(U, U) + \sum_{\mu=1}^3 Ric(X_\mu, X_\mu) \stackrel{\text{Corol. 12.10(1,3)}}{=} \\
&= \frac{3f''}{f} + 3 \left(\frac{2k}{f^2} + \frac{f''}{f} + \frac{2f'^2}{f^2} \right) = 6 \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right).
\end{aligned}$$

12.5. GEODÉSICAS LUZ Y DESPLAZAMIENTO DE FRECUENCIA EN LOS ETRW

Sea $M(k, f) \equiv I \times_f S$ un espacio-tiempo de Robertson-Walker (ETRW).

Notaciones: (1) Denotaremos t_0 el "ahora" (a nivel cosmológico).

(2) Denotaremos ($o \in S$, o también la curva) γ_o el "aquí" (a nivel cosmológico), esto es, la galaxia típica que corresponde a la Tierra

(3) Dada cualquier curva α en $M(k, f)$, escribiremos $\alpha(s) \equiv (t(s), \beta(s))$. Cuando se preste a confusión con las derivadas respecto a s , denotaremos $f_t \equiv Uf$ (en lugar de $f' \equiv Uf$).

Nota 1. Identificar γ_o con la propia Tierra está justificado: la velocidad de ésta respecto del centro de nuestra galaxia es $< 10^{-3}$ y la de nuestra galaxia respecto de γ_o (que representa el promedio de nuestra vecindad, a escala $\gtrsim 10^8$ años luz) es $\lesssim 10^{-2}$ (ver Charla 8) ■

(A) Geodésicas luz en los ETRW.

(Propos. 12.22) Sea $M(k, f) \equiv I \times_f S$ un ETRW. Una curva $\alpha(s) \equiv (t(s), \beta(s))$ es geodésica si y sólo si verifica:

$$\begin{cases} (1) \frac{d^2 t}{ds^2} + g_S(\beta', \beta') f f_t = 0 \\ (2) \beta'' + 2 \frac{f_t}{f} \frac{dt}{ds} \beta' = 0 \end{cases}$$

(se sigue de (2) y del Ejercicio 3.19 que, si γ es geodésica en M , β es pregeodésica en S).

Demostración. Consecuencia de la Proposición 7.38 y de que:

$$\text{grad } f \stackrel{\text{Lema 7.34}}{\sim} U, \Rightarrow \text{grad } f = -g(\text{grad } f, U)U = -f_t U \quad \blacksquare$$

(Corol. 12.23) Sea $M(k, f) \equiv I \times_f S$ un ETRW. Una curva luz $\alpha(s) \equiv (t(s), \beta(s))$ es geodésica si y sólo si verifica:

$$\begin{cases} (1) f(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{C} \text{ (cte. } \neq 0) \\ (2) \beta'' + 2 \frac{f_t}{f} \frac{dt}{ds} \beta' = 0 \end{cases}$$

($C > 0$ si α es futura); con lo que la función $t(s)$ posee inversa $s(t, f(t))$

Demostración. Por ser α luz, se tiene:

$$0 = -(dt/ds)^2 + g_S(\beta', \beta') f^2 \quad (*) \quad , \quad \text{con } dt/ds \text{ nunca nulo}$$

Así resulta:

$$f \left(\frac{d^2 t}{ds^2} + g_S(\beta', \beta') f f_t \right) \stackrel{(*)}{=} f \frac{d^2 t}{ds^2} + f_t \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = \frac{d}{ds} \left(f \frac{dt}{ds} \right) \quad ,$$

con lo que 12.23(1) es equivalente en este caso a 12.22(1). Y el resultado se sigue ■

**(B) Desplazamiento de frecuencia (cosmológico) en los ETRW.
Instante de emisión**

(Definición) Sea $M(k, f) \equiv I \times_f S$ un ETRW. Sean γ_p ("emisor", allí) y γ_o ("receptor", aquí) dos galaxias típicas y $\alpha(s)$ un fotón "emitido" por γ_p en t_p ("instante de emisión", entonces) y "recibido" por γ_o en t_0 ("instante de recepción", ahora). Se define el **desplazamiento de frecuencia (cosmológico)** entre $\gamma_p(t_p)$ y $\gamma_o(t_0)$ como el número real z tal que

$$\boxed{1 + z := E_p/E_0} \quad ,$$

siendo E_p y E_0 las energías (ver 12.B) del fotón respecto de los observadores instantáneos $\gamma'_p(t_p)$ y $\gamma'_o(t_0)$, respectivamente (esto es, $E_p := -g(\alpha', \gamma'_p(t_p))$ y $E_0 := -g(\alpha', \gamma'_o(t_0))$).

Nota 2. El nombre "desplazamiento de frecuencia" se debe a la relación $E = h\nu$ (ver Cap. 6, "Energía-momento") entre energía E de los fotones y frecuencia ν de su "onda asociada" (h es la cte. de Planck).

El desplazamiento de frecuencia constituye el principal observable cosmológico. Afirmar que es un "observable" implica afirmar que es posible conocer aquí/ahora la energía de emisión allí/entonces. Ello no es posible en base a un fotón aislado; pero sí lo es en base a:

- (i) la "estructura del espectro de la radiación recibida" y
- (ii) la hipótesis de que la correspondencia entre dicha estructura y los procesos que la generan (esencialmente, transiciones de electrones atómicos entre los distintos niveles de energía) es la misma allí/entonces que aquí/ahora ■

(Observación 12.14(1)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{Definimos}} \text{ la } \mathbf{\text{función de Hubble}} \quad \boxed{H := \frac{f'}{f}} \in \mathfrak{F}(M) \\ \underline{\text{Identificamos}} \text{ (NO es una notación!) } \quad \boxed{H(t_0) \equiv H_0} \quad , \end{array} \right.$$

donde H_0 es la "constante de Hubble" (esto es, el valor experimental que aparece en la "ley empírica de Hubble", Charla 8).

Escribiendo $H_0 \equiv 100h \text{ Km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \simeq \frac{100h}{371 \cdot 10^{19}} \text{ seg}^{-1}$, las observaciones (WMAP 03) indican:

$$h = 0'71_{(-0'03)}^{(+0'04)} \quad , \quad \Rightarrow \quad H_0^{-1} \simeq \frac{3'1 \cdot 10^{19}}{71 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} \text{ años} \simeq 13'8 \cdot 10^9 \text{ años} \quad .$$

El que sea $H_0 > 0$ se interpreta como que "el universo está en expansión".

(Corol. 12.24) Sea $M(k, f) \equiv I \times_f S$ un ETRW. Entonces el desplazamiento de frecuencia cosmológico z entre $\gamma_p(t_p)$ y $\gamma_o(t_0)$ verifica:

$$\boxed{1 + z = f(t_0)/f(t_p)} \quad , \quad \begin{array}{l} z = z(f(t)) \\ H := f'/f \end{array} \quad \boxed{\frac{dz(t)}{dt} = \frac{-f(t_0)H(t)}{f(t)}}$$

(en la segunda expresión, z se considera función del instante de emisión para t_0 fijo)

Demostración. Puesto que γ_p y γ_o son curvas integrales de $U \equiv \partial_t$, se tiene: $E_p = E(s(t_p))$ y $E_0 = E(s(t_0))$ (por el Corolario 12.23, aparece la función $s(t)$, inversa de $t(s)$), siendo $E(s)$ la energía del fotón $\alpha(s) \equiv (t(s), \beta(s))$ respecto del campo de observadores U :

$$E := -g(\alpha', U) \stackrel{\alpha' = \frac{dt}{ds}(U \circ \alpha) + \beta'}{=} \frac{dt}{ds} \quad (*) .$$

Y se tiene:

$$\frac{E_p}{E_0} = \frac{E(s(t_p))}{E(s(t_0))} \stackrel{(*)}{=} \frac{dt/ds(s(t_p))}{dt/ds(s(t_0))} \stackrel{\text{Corol. 12.23}}{=} \frac{f(t_0)}{f(t_p)} \quad \blacksquare$$

Nota 3. (a) Decir que el desplazamiento de frecuencia (cosmológico) en un espacio-tiempo de Robertson-Walker es "un análogo" del desplazamiento Doppler en el espacio-tiempo de Minkowski es fuente de enormes confusiones (ver [3]).

Por ser $j_t : S \rightarrow S(t)$ una homotecia de factor de escala $f(t)$ (Propos. 12.6(iv)), la distancia entre γ_p y γ_o sobre $S(t)$ (**distancia propia**) viene dada por $d_{\gamma_p, \gamma_o}^{S(t)} = f(t)d_{po}$, siendo d_{po} la distancia entre p y o en S (**distancia comóvil**). Y se tiene:

$$z > 0 \stackrel{\text{Corol. 12.24}}{\Leftrightarrow} f(t_p) < f(t_0) \Leftrightarrow d_{\gamma_p, \gamma_o}^{S(t_p)} < d_{\gamma_p, \gamma_o}^{S(t_0)} ;$$

así, la única conclusión (en el marco de los ETRW) de un "desplazamiento al rojo" es que la distancia propia entre emisor y receptor "era menor entonces que ahora". En contraste con la relatividad especial, 'el desplazamiento de frecuencia no indica la velocidad sino la distancia' ([3] p.107).

(b) Si $f_t(t) > 0, \forall t \leq t_0$ (ver "Cosmología de Robertson-Walker", Nota 1), en cada modelo aparece la función $t(f/f_0)$, inversa de $(f/f_0)(t)$. Puesto que, para un fotón $\alpha(s) \equiv (t(s), \beta(t))$, el z observado ahora determina (Cor. 12.24) el cociente f/f_0 en la emisión, se sigue que z determina el instante de emisión, $t = t(z)$ ■

12.6. DISTANCIAS EN LOS ETRWs. LEY DE HUBBLE. HORIZONTES

Nota 4. Distancia en una variedad riemanniana (S, g_S) conexa.

Dados $p, q \in S$, se define (Definición 5.15): $d_{pq} := \inf\{L(\alpha) \mid \alpha \text{ curva en } S \text{ entre } p \text{ y } q\}$. Se dice que una curva α entre p y q es **mínima** si $L(\alpha) = d_{pq}$. Si una curva es mínima, es pregeodésica (Corolario 5.19).

Si (S, g_S) es completa (ver Teor. 5.21, Hopf-Rinow), cualquier par de puntos de S pueden unirse por una curva mínima (Prop. 5.22).

En un entorno normal (Cap. 3, p.71) \mathcal{U} de p , la única (Prop. 3.31) pregeodésica en \mathcal{U} entre p y $q \in \mathcal{U}$ es una curva mínima en \mathcal{U} (Lema 5.14), no necesariamente mínima en S (Ejemplos 5.17 y 5.20).

En un " ε -entorno" (Def. 5.16) $\mathcal{N}_\varepsilon(p)$ de p que sea entorno normal de p (siempre lo es si ε es suficientemente pequeño, Prop. 5.16(1)), la única (Prop. 3.31) pregeodésica en $\mathcal{N}_\varepsilon(p)$ entre p y $q \in \mathcal{N}_\varepsilon(p)$ es una curva mínima (única) en S (Prop. 5.16(2); ver Ejemplos 5.17 y 5.20).

Si $(S, g_S) = \mathbb{H}^3, \mathbb{E}^3$ ó \mathbb{S}^3 , el máximo valor de ε para que $\mathcal{N}_\varepsilon(p)$ sea entorno normal de p es ∞, ∞ ó $\pi/2$, respectivamente (Ejercicio 5.11b, Cap. 5, p.134 ó Ejemplo 5.20, respectivamente). Con lo que una pregeodésica en $\mathbb{H}^3, \mathbb{E}^3$ es siempre mínima, mientras que en \mathbb{S}^3 lo es si y sólo si su longitud es $\leq \pi$ ■

(Corol. 12.25) Sea $M(k, f) \equiv I \times_f S$ un ETRW. Si un fotón $\alpha(s) \equiv (t(s), \beta(s))$ es "emitido" por γ_p en t_p y "recibido" por γ_o en t_0 , la distancia en S entre p y o resulta ser

$$d_{po} = \int_{t_p}^{t_0} \frac{dt}{f(t)} \stackrel{\text{Cor. 12.24}}{=} \int_{t_p}^{t_0} \frac{-dz(t)}{f(t_0)H(t)} \stackrel{\text{Si } f'|_{[t_p, t_0]} > 0}{=} \int_0^z \frac{dz}{f(t_0)H(t(z))}$$

(para $k = 1$, es $d_{po} = \min\{|\int_{t_p}^{t_0} \frac{dt}{f(t)} - \frac{2\pi m}{m \in \mathbb{Z}}|\}$).

Demostración. Por ser α luz, se tiene: $0 = -(dt/ds)^2 + (\beta', \beta')f^2$ (*), con $dt/ds > 0$

Por ser $\alpha(s)$ geodésica en M , la curva $\beta(s)$ (que une p con o) es (Prop. 12.22) pregeodésica en S . Si $\text{Im } \beta$ está contenida en algún ε -entorno normal de o (para $k = -1$ ó 0 , siempre; para $k = 1$, siempre que $L(\beta) < \pi$), entonces β es una curva mínima entre p y o , y se tiene:

$$d_{po} = L(\beta) := \int_{s(t_p)}^{s(t_0)} (\beta'(s), \beta'(s))^{1/2} ds \stackrel{(*)}{=} \int_{s(t_p)}^{s(t_0)} \frac{dt/ds}{f(t(s))} ds = \int_{t_p}^{t_0} \frac{dt}{f(t)}$$

(si $k = 1$, $d_{po} = \min\{|\int_{t_p}^{t_0} \frac{dt}{f(t)} - \frac{2\pi m}{m \in \mathbb{Z}}|\}$).

La integral $\int_{t_p}^{t_0} \frac{dt}{f(t)}$ se denomina **tiempo conforme** entre los sucesos inicial $\gamma_p(t_p)$ y final $\gamma_o(t_0)$ del fotón (ver Ejercicio 12.3) ■

(Definiciones):

- Se llama **ley de Hubble** a la dependencia $d_{\gamma_p, \gamma_o}^{S(t_0)}(z)$ (o mejor $d_L(z)$, con d_L la "distancia luminosidad", Charla 8) que surge al sustituir el Corolario 12.25 en la expresión de la distancia. Introduciendo la función $\eta(\psi) := \sinh \psi$, ψ ó $\sin \psi$, según que $k = -1, 0$ ó 1 , la expresión resultante es (detalles en Charla 9):

$$d_L(z) = (1+z)f(t_0) \eta(d_{po}) \stackrel{\text{Corol. 12.25}}{=} \underset{\text{Si } f'|_{[t_p, t_0]} > 0}{(1+z)f(t_0) \eta\left(\int_0^z \frac{dz}{f(t_0)H(t(z))}\right)}$$

(para $k = 1$, es

$$d_L(z) = (1+z)f(t_0)\eta(d_{po}) \stackrel{\text{Corol. 12.25}}{=} \underset{\text{Si } f'|_{[t_p, t_0]} > 0}{(1+z)f(t_0)\eta(\min\{\int_0^z \frac{dz}{f(t_0)H(t(z))} - \frac{2\pi m}{m \in \mathbb{Z}}\})}$$

Se comprueba fácilmente (Charla 9) que la ley de Hubble *incorpora refinándola* la "ley empírica de Hubble" (Charla 8).

- Se llama **distancia de Hubble** $d_{Hubble}(t)$ a la distancia propia en $S(t)$ de aquellos objetos 'promedio' γ_p que se alejan de nosotros en el instante t a la velocidad de la luz (suponiendo que los haya: si $k = 1$, la distancia propia en $S(t)$ posee un máximo y d_{Hubble} podría no existir):

$$\frac{d(d_{\gamma_p, \gamma_o}^{S(t)})}{dt} \stackrel{d_{\gamma_p, \gamma_o}^{S(t)} = f(t)d_{po}}{=} f'(t)d_{po} = H(t)f(t)d_{po} \quad , \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_{Hubble}(t) := H^{-1}(t)}$$

Nota 4. El concepto de distancia de Hubble:

(i) no contradice ningún presupuesto de la relatividad (ver "Velocidades superlumínicas y causalidad", IC octubre 96, y "Las paradojas de la gran explosión", IC mayo 05),

(ii) verifica

$$d'_{Hubble} = -H'H^{-2} = \left(\frac{f'^2 - ff''}{f^2}\right)H^{-2} = 1 - \frac{ff''}{f'^2} \quad ,$$

con lo que $d'_{Hubble} > 1 \Leftrightarrow f'' < 0$ (la distancia de Hubble crece con velocidad superlumínica si y sólo si la expansión se frena) y también $d'_{Hubble} > 0 \Leftrightarrow ff''/f'^2 < 1$ (la distancia de Hubble crece si y sólo si el "parámetro de aceleración" es menor que la unidad)

(iii) no es un "horizonte": si $d_{Hubble}(t)$ crece ($\Leftrightarrow ff''/f'^2(t) < 1$), fotones emitidos "hacia nosotros" que antes de t estaban "más allá" (i.e. tenían respecto de nosotros una velocidad neta de alejamiento) podrían luego quedar "más acá" (y eventualmente llegarnos) ■

- Se llama **horizonte de partículas** $d_{phor}(t)$ al supremo de la distancia propia en $S(t)$ de objetos 'promedio' γ_p de cuyas características (antes de t) podríamos tener noticia en t ([4], p.129):

$$d_{phor}(t) \stackrel{(12.25)}{:=} f(t) \int_{\inf I}^t \frac{dt}{f(t)} \quad \text{Corol. 12.24} \quad \int_0^{\lim_{t \rightarrow \inf I} z(t)} \frac{dz}{H(t(z))} \\ \text{Si } f_t|_{[\inf I, t]} > 0$$

(para $k = 1$, es $d_{phor}(t) = f(t) \min\{\int_{\inf I}^t \frac{dt}{f(t)}, \pi\}$).

Nota 5. El horizonte de partículas $d_{phor}(t)$:

(i) es la distancia (medida en $S(t)$) recorrida por la luz desde el "comienzo" hasta el instante t ([3] p.97)

(ii) marca el límite de nuestro universo observable en el instante t (si no hay restricciones a la observación)

(iii) (si es finito) verifica:

$$d'_{phor}(t) = f'(t) \int_{\inf I}^t \frac{dt}{f(t)} + 1 = H(t)d_{phor}(t) + 1$$

(salvo si $k = 1$ y $d_{phor}(t) = f(t)\pi$, en cuyo caso es $d'_{phor}(t) = f'(t)\pi = H(t)d_{phor}(t)$). En la actualidad ($H_0 > 0$) el horizonte de partículas crece con velocidad superlumínica ■

- Finalmente, se llama **horizonte de sucesos** $d_{ehor}(t)$ al supremo de la distancia propia en $S(t)$ de objetos 'promedio' γ_p de cuyas características en t podríamos tener noticia (después de t) ([4], p.129):

$$d_{ehor}(t) \stackrel{\text{Cor. 12.25}}{:=} f(t) \int_t^{\sup I} \frac{dt}{f(t)}$$

(para $k = 1$, es $d_{ehor}(t) := f(t) \min\{\int_t^{\sup I} \frac{dt}{f(t)}, \pi\}$).

Nota 6. El horizonte de sucesos $d_{ehor}(t)$:

(i) es la distancia (medida en $S(t)$) que puede recorrer la luz desde el instante t hasta el "final"

(ii) (si es finito) verifica:

$$d'_{ehor}(t) = f'(t) \int_t^{\sup I} \frac{dt}{f(t)} - 1 = H(t)d_{ehor}(t) - 1$$

(salvo si $k = 1$ y $d_{ehor}(t) = f(t)\pi$, en cuyo caso es $d'_{ehor}(t) = f'(t)\pi = H(t)d_{ehor}(t)$) ■

Para una magnífica discusión sobre todos estos conceptos, ver [3], cuya Fig. 1 se refiere al modelo Λ CDM (Observ. 12.21bis y Ejercicio 12.22*).

12.7. EL FLUIDO DE ROBERTSON-WALKER

Sea $M(k, f) \equiv I \times_f S$ un espacio-tiempo de Robertson-Walker (ETRW), con función de Hubble (Obs. 12.14(1)) $H := f'/f \in \mathfrak{F}(M)$.

(Teorema 12.11) $M(k, f) \equiv I \times_f S$ verifica la ecuación de Einstein (con constante cosmológica) $Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T$ si y sólo si el modelo de materia al que corresponde la tensión-energía T es un fluido perfecto (U, ρ, p) (el **fluido de Robertson-Walker**), con (las segundas igualdades, allí donde $H \neq 0$):

$$\begin{cases} U := \partial_t \\ \rho + \frac{\Lambda}{8\pi} := \frac{3}{8\pi} \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2} \right) = \frac{3}{8\pi} H^2 \left(1 + \frac{k}{f'^2} \right) \\ p - \frac{\Lambda}{8\pi} := \frac{-1}{8\pi} \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2} + \frac{2ff''}{f} \right) = \frac{-1}{8\pi} H^2 \left(1 + \frac{k}{f'^2} + \frac{2ff''}{f'^2} \right) \end{cases}$$

Nótese que ρ y p resultan constantes sobre cada subvariedad $S(t)$.

La primera ecuación se denomina "de valores iniciales" ([MTW], (27.39a), (27.40), (27.72)); la segunda es la "ecuación dinámica" ([MTW], (27.39b)).

Demostración. (Sólo si) Supongamos que el ETRW verifica la ecuación de Einstein para cierta tensión-energía T . Sea $U := \partial_t$. Puesto que (Corol. 12.10(2,3)) $Ric(U, X) = 0 = Ric(X, Y)$, para todo $X, Y \perp U$ con $X \perp Y$, se sigue (Ejercicio 12.1a) que T corresponde necesariamente a un fluido perfecto (U, ρ, p) . Las expresiones de $\rho := T(U, U)$ y p tal que $pg(X, Y) := T(X, Y)$ ($\forall X, Y \perp U$) son consecuencia de la ecuación de Einstein y (de nuevo) del Corol. 12.10.

(Si) Supongamos (Def. 12.14) que $T = (\rho + p)g(U, \cdot) \otimes g(U, \cdot) + pg$, donde U, ρ y p son las dadas en el enunciado. Entonces el ETRW verifica la ecuación de Einstein para T , ya que ($\forall X, Y \perp U$):

$$\begin{cases} (Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g)(U, U) \stackrel{\text{Cor. 12.10(1,4)}}{=} 3\left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2}\right) - \Lambda \stackrel{\text{Hip.}}{=} 8\pi\rho = 8\pi T(U, U) \\ (Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g)(U, X) \stackrel{\text{Cor. 12.10(2)}}{=} 0 \stackrel{\text{Hip.}}{=} 8\pi T(U, X) \\ (Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g)(X, Y) \stackrel{\text{Cor. 12.10(3,4)}}{=} \left(\frac{-f'^2}{f^2} - \frac{k}{f^2} - \frac{2ff''}{f} + \Lambda\right)g(X, Y) \stackrel{\text{Hip.}}{=} \\ = 8\pi pg(X, Y) = 8\pi T(X, Y) \blacksquare \end{cases}$$

(Corolario 12.13) Se verifica: $\boxed{\rho' = -3(\rho + p)\frac{f'}{f}}$

Demostración. La demostración directa a partir del Teor. 12.11 se propone en el Ejercicio 12.4b. Aquí damos otra demostración.

Se tiene (trabajando en base ortonormal (U, X_1, X_2, X_3)):

$$\text{div}U \stackrel{\text{Cap. 3}}{:=} \sum_{i=0}^3 (DU)_i^i = - \underbrace{\langle D_U U, U \rangle}_{0\text{-}(\text{Cor. 12.8(1)})} + \sum_{\mu=1}^3 \underbrace{\langle D_{X_\mu} U, X_\mu \rangle}_{(f'/f)X_\mu \text{ (Cor. 12.8(2))}} = 3\frac{f'}{f} \quad (*),$$

con lo que las ecs. de los fluidos perfectos (Prop. 12.5) toman la forma:

$$\begin{cases} \rho' = -(\rho + p)divU, \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \rho' = -3(\rho + p)\frac{f'}{f} \\ (\rho + p)D_U U = -grad^\perp p \end{cases}$$

y equivalen a la ecuación del enunciado (la segunda ecuación de los fluidos perfectos se satisface idénticamente, ya que $D_U U = 0$ (Cor. 12.8(1)) y $grad p \sim U$ (Lema 7.34)) ■

Nota 1. Interpretación de $(\rho f^3)' = -p(f^3)'$ (equivalente a la expresión del Cor. 12.13) como "no-conservación" (a menos que sea $f' = 0$) de la energía comóvil del fluido (si $p > 0$, el trabajo realizado por la presión en la expansión/contracción es positivo/negativo y la energía comóvil decrece/crece), y ello a pesar de que (al ser el fluido perfecto) no hay flujo de energía a través de la frontera de ninguna región U -comóvil. Ello tiene que ver con el hecho de que U no es un "campo de Killing" (a menos que sea $f' = 0$) ■

Recordemos la identificación (Obs. 12.14(1)) $H(t_0) \equiv H_0 > 0$ e introduzcamos las notaciones (Charlas 8 y 9)

$$\boxed{\begin{cases} f_0 \equiv f(t_0), \quad \forall f \in \mathfrak{F}(I) \quad (\text{en particular, } f_0, \rho_0 \text{ y } p_0) \\ \rho_0^c \equiv 3H_0^2/8\pi \\ \Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_0^c} \quad \text{y} \quad \Omega_{\Lambda 0} \equiv \frac{\Lambda/8\pi}{\rho_0^c} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \end{cases}}$$

(Corolario 12.19) Se verifica (allí donde $H \neq 0$):

$$\rho + \frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3H^2}{8\pi} \left(1 + \frac{k}{f'^2}\right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} = 1 + \frac{k}{f_0'^2}},$$

que permite (si $k = -1$ ó 1) expresar $f_0 (= H_0^{-1} f_0')$ en función de "observables", a saber: $f_0 = H_0^{-1} |1 - \Omega_0 - \Omega_{\Lambda 0}|^{-1/2}$ (ver Charla 10)

Demostración. Consecuencia inmediata de la expresión para ρ en el Teor. 12.11 ■

Nota 2. El parámetro ρ_0^c , que es (Corol. 12.19) el valor de la densidad de energía comóvil actual correspondiente a $\Lambda = 0 = k$, recibe el nombre de **densidad (de energía) crítica**.

El Corolario 12.19 responde a la pregunta: EL COSMOS, ¿ES "ABIERTO" ($k = -1$), "PLANO" ($k = 0$) O "CERRADO" ($k = 1$)? La respuesta es:

$$\boxed{k = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} \begin{Bmatrix} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{Bmatrix}} \quad \blacksquare$$

(Corolario 12.12) Se verifica (la segunda igualdad, allí donde $H \neq 0$):

$$\frac{-1}{2}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3f''}{8\pi f} = \frac{3H^2}{8\pi} \cdot \frac{f f''}{f'^2}, \Rightarrow \boxed{\frac{-1}{2}(\Omega_0 + 3\frac{p_0}{\rho_0^c}) + \Omega_{\Lambda 0} = \frac{f_0 f_0''}{f_0'^2}},$$

que pone de manifiesto que $\rho + 3p > 0$ genera atracción (así ocurre con todos los fluidos perfectos "conocidos", recordar Nota 2 en "Fluidos perfectos") mientras que $\Lambda > 0$ genera repulsión (una propiedad general de la constante cosmológica, recordar Nota 5 en "Ecuación de Einstein")

Demostración. Consecuencia inmediata de las expresiones para ρ y p en el Teorema 12.11 ■

Nota 3. El Corolario 12.12 responde a la pregunta: LA EXPANSIÓN ACTUAL ($f_0' > 0$), ¿SE FRENA ($f_0'' < 0$), MANTIENE VELOCIDAD ($f_0'' = 0$) O SE ACELERA ($f_0'' > 0$)? La respuesta es:

$$\boxed{f_0'' \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2}(\Omega_0 + 3\frac{p_0}{\rho_0^c}) + \Omega_{\Lambda 0} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \quad \blacksquare}$$

Nota 4. Resulta posible deducir las expresiones

$$\begin{cases} \rho + \frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{C}{f^2} \right) \\ p - \frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{-1}{8\pi} \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{C}{f^2} + \frac{2f''}{f} \right) \end{cases}$$

(se trata de las expresiones dadas en el Teorema 12.11, pero con una constante C arbitraria) directamente de los Corolarios 12.12 y 12.13 (Ejercicio 12.4c). Si se añade la expresión del Corol. 12.19 (con $k = -1, 0$ ó 1), entonces la constante C tiene que ser k ■

12.8. COSMOLOGÍA DE ROBERTSON-WALKER

(A) Algunos datos cosmológicos

(Observación 12.14(1)) (trasladada a "Geodésicas luz ..." .B)

(Observación 12.14(2)) Con las notaciones introducidas antes del Corolario 12.19, se tiene (Charla 8):

En cuanto a la densidad de energía (comóvil) actual:

$$\Omega_0 \equiv \underbrace{\Omega_0^{rad}}_{\simeq 10^{-5}} + \underbrace{\Omega_0^{mat.ord.}}_{\simeq 6 \cdot 10^{-2}} + \underbrace{\Omega_0^{mat.osc.}}_{\simeq 2 \cdot 10^{-1} \leftrightarrow 3 \cdot 10^{-1}} < 0'4$$

(en particular, $\rho_0^{rad} \simeq 10^{-3} \rho_0^{mat.ord.} \simeq 10^{-4} \rho_0^{mat}$)

En cuanto a la presión (comóvil) actual:

$$p_0/\rho_0^c \equiv \underbrace{p_0^{rad}/\rho_0^c}_{\simeq 3 \cdot 10^{-6}} + \underbrace{p_0^{mat.ord.}/\rho_0^c}_{\simeq 6 \cdot 10^{-8}} + \underbrace{p_0^{mat.osc.}/\rho_0^c}_{???}$$

(en particular, $p_0^{mat.ord.} \simeq 10^{-2} p_0^{rad} \simeq 10^{-7} \rho_0^{mat}$)

(B) Definiciones de Singularidades

Sea $M(k, f) \equiv I \times_f S$ un espacio-tiempo de Robertson-Walker (ETRW) que verifica la ecuación de Einstein (con constante cosmológica), con función de Hubble (Obs. 12.14(1)) $H := f'/f \in \mathfrak{F}(M)$.

(Def. 12.16) Se dice que el que el ETRW $M(k, f) \equiv I \times_f S$ posee:

<p>pasado incompleto si</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;">(i): $t_* \equiv \inf I$ es finito</div> <p>singularidad inicial (SI) si</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;">(i) + (ii): $\lim_{t \rightarrow t_*} H(t) = \infty$</div> <p>gran explosión (BB) si</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;">(i) + (iii): $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_*} f(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow t_*} f'(t) = \infty \end{cases}$</div> <p>singular. física inicial (SFI) si</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;">(i) + (ii) + (iv): $\lim_{t \rightarrow t_*} \rho(t) = \infty$</div>	<p>futuro incompleto si</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;">(i'): $t^* \equiv \sup I$ es finito</div> <p>singularidad final (SF) si</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;">(i') + (ii'): $\lim_{t \rightarrow t^*} H(t) = -\infty$</div> <p>gran implosión (BC) si</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;">(i') + (iii'): $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t^*} f(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow t^*} f'(t) = -\infty \end{cases}$</div> <p>singular. física final (SFF) si</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin: 2px;">(i') + (ii') + (iv'): $\lim_{t \rightarrow t^*} \rho(t) = \infty$</div>
---	---

De $\rho \stackrel{\text{Teor. 12.11}}{=} 3(f'^2 + k)/8\pi f^2 - \Lambda/8\pi$ se sigue inmediatamente: $(iii) \Rightarrow (ii) + (iv)$, así como $(ii) \Rightarrow (iv)$ si $k = 0$ ó 1 (y análogamente con 'primas'). De donde se concluye:

$(BB) \Rightarrow (SFI) \stackrel{k=0 \text{ ó } 1}{\Rightarrow} (SI)$

$(BC) \Rightarrow (SFF) \stackrel{k=0 \text{ ó } 1}{\Rightarrow} (SF)$

Nota 1. Otras implicaciones NO son en general ciertas:

- (i) no implica ninguna otra condición [I puede no ser "maximal", Def. 12.7]
- (ii) $\not\Rightarrow$ (i). Ejemplo: $\mathbb{R} \times_{\exp(-t^2)} S$, donde:

$$f'(t) = -2t \exp(-t^2) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-2t) = \infty$$

El siguiente ejemplo es 'más fuerte':

- (iii) $\not\Rightarrow$ (i). Ejemplo: $\mathbb{R} \times_{(\exp t)^{2/3}} S$, donde:

$$f'(t) = 2/3 \cdot (\exp t)^{-1/3} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) = \infty$$

- (i) + (ii) $\not\Rightarrow$ (iii). Ejemplo (ver Ejemplo 12.18(1)): $(0, \infty) \times_{1+t^{2/3}} S$, donde:

$$f'(t) = 2/3 \cdot t^{-1/3} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$$

Otro ejemplo (ver Ejemplo 12.18(2)): $(0, \infty) \times_{\sinh^{-1} t} S$, donde:

$$f'(t) = (1 + t^2)^{-1/2} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = 1$$

Otro ejemplo: $(0, \infty) \times_t S$, donde:

$$f'(t) = 1 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = 1$$

- (iv) $\not\Rightarrow$ (iii) [consecuencia del ejemplo que sigue y de (iii) \Rightarrow (ii)]
- (iv) $\not\Rightarrow$ (ii). Ejemplo: $\mathbb{R} \times_{\exp(t^2)} S$, donde:

$$f'(t) = 2t \exp(t^2) \quad , \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(t) \stackrel{\text{Teor. 12.11}}{=} \infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} H(t) = -\infty$$

- (iv) $\not\Rightarrow$ (i). Ejemplo: $\mathbb{R} \times_{\exp(\pm t^2)} S$, donde:

$$f'(t) = \pm 2t \exp(\pm t^2) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(t) \stackrel{\text{Teor. 12.11}}{=} \infty$$

- (i) + (ii) $\not\Rightarrow$ (iv) si $k = -1$. Ejemplo: $(0, \infty) \times_t \mathbb{H}^3$ (espacio tiempo "de Milne", Ejercicio 12.13c), donde:

$$f'(t) = 1 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = -\frac{\Lambda}{8\pi} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \infty \quad \blacksquare$$

(C) Incompletitud pasada. Singularidades

Sea $M(k, f) \equiv I \times_f S$ un ETRW que verifica la ecuación de Einstein (con constante cosmológica) $Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T$, con función de Hubble (Obs. 12.14(1)) $H := f'/f \in \mathfrak{F}(M)$, la identificación $H(t_0) \equiv H_0 > 0$ (Obs. 12.14(1)) y las notaciones introducidas antes del Corol. 12.19. Sea (U, ρ, p) el correspondiente fluido de Robertson-Walker y escribamos

$$\bar{\rho} \equiv \rho + \frac{\Lambda}{8\pi} \quad \text{y} \quad \bar{p} \equiv p - \frac{\Lambda}{8\pi}$$

(Propos. 12.15) Considérese la desigualdad

$$\boxed{\frac{-1}{2}(\bar{\rho} + 3\bar{p}) < 0} \quad (*)$$

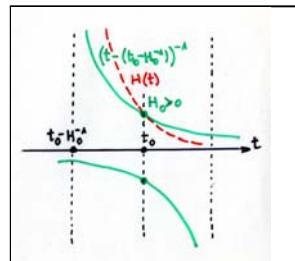
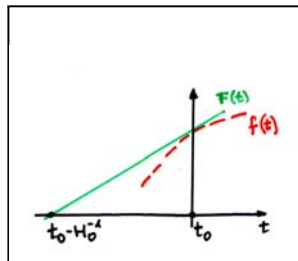
Entonces (SINGULARIDADES INICIAL/FINAL):

(1) Si (*) se verifica hacia el pasado de t_0 , entonces $t_0 - H_0^{-1} < t_* < t_0$, con lo que $M(k, f)$ es pasado-incompleto y (si I es "maximal", Def. 12.7) posee singularidad inicial

(2) Si (*) se verifica hacia el futuro de t_0 , entonces: o bien $f' > 0$ hacia el futuro de t_0 ($\Rightarrow \sup I = \infty$, con lo que $M(k, f)$ no posee singularidad final), o bien $f(t)$ posee un máximo después de t_0 , en cuyo caso $M(k, f)$ es futuro-incompleto y (si I es "maximal") posee singularidad final

Demostración. Para empezar, se verifica:

$$f'_0 =: f_0 H_0 \stackrel{Hip.}{>} 0 \quad \text{y} \quad 3f''/8\pi f \stackrel{(12.12)}{=} -(\bar{\rho} + 3\bar{p})/2 \stackrel{(*)}{<} 0$$



(1) Hacia el pasado de t_0 , se sigue que la gráfica de $f(t)$ queda "estrictamente por debajo" de la de $F(t) \equiv f_0 + f'_0(t - t_0)$ ($\Rightarrow F(t_0 - H_0^{-1}) = 0$), con lo que necesariamente $t_0 - H_0^{-1} < t_* < t_0$.

Además (Raychaudhuri; ver [8], Ejerc. 4.3.5) se deduce la inecuación diferencial: $H' = \frac{f''}{f} - H^2 < -H^2$. Pero la solución de la correspondiente ecuación diferencial (Bernouilli) $H' = -H^2$ es, para $H_0 > 0$, la hipérbola $H(t) = 1/(t - (t_0 - H_0^{-1}))$, con asíntota vertical en $t = t_0 - H_0^{-1}$ y límite: $\lim_{t \rightarrow t_0 - H_0^{-1}} H(t) = \infty$. Con mayor razón, la

solución $H(t)$ de nuestra inecuación diferencial debe verificar (si I es maximal) $\lim_{t \rightarrow t_*} H(t) = \infty$

(2) Hacia el futuro de t_0 y tras el máximo (si existe) será $f' < 0$, y se concluye (mismo argumento, ver figura) lo que se afirma ■

Nota 2. (i) Para $\Lambda = 0$ (algo sobreentendido hasta mitad de los 1990's) la Propos. 12.15 resultaba clave. Las observaciones sugerían $\rho_0 \gtrsim 0'3\rho_0^c$ y $p_0 \simeq 0$, lo que indicaba que (*) se verifica ahora. Y de la convicción de que también se verificaba hacia el pasado se concluía que hubo una singularidad inicial. La cuestión de cara al futuro quedaba abierta.

(ii) Ya sin la restricción anterior, las observaciones recientes sugieren (Charla 10) $\rho_0 \simeq 0'27\rho_0^c$, $p_0 \simeq 0$ y $\Lambda/8\pi \simeq 0'73\rho_0^c$, de donde se sigue que (*) NO se verifica ahora:

$$\frac{-1}{2}(\bar{\rho}_0 + 3\bar{p}_0) \equiv \frac{-1}{2}(\rho_0 + 3p_0) + \frac{\Lambda}{8\pi} \simeq \left(\frac{-0'27}{2} + 0'73\right)\rho_0^c \simeq 0'60\rho_0^c > 0$$

Pero muchas otras observaciones (radiación de fondo, abundancia de elementos químicos, ...) y modelos de física de partículas indican que (*) se verificó hacia el pasado de cierto $t_1 < t_0$ (con $H(t_1) > 0$), con lo que probablemente hubo una singularidad inicial (o algo muy próximo a dicho "límite").

Por otra parte, todo indica que (*) NO se verificará en el futuro. Con la hip. adicional $\rho > p = 0$, ver luego "Modelos de Friedmann" ■

El siguiente teorema prueba las implicaciones (ver Parte B)

$$\boxed{(\text{BB}) \Leftarrow (\text{SFI})} \quad \text{y} \quad \boxed{(\text{BC}) \Leftarrow (\text{SFF})}$$

bajo hipótesis suplementarias.

(Teor. 12.17) Supongamos que I es "maximal" (Def. 12.7) y que $M(k, f)$ no posee singularidades no-físicas (innecesario si $k = 0$ ó 1 , ver Parte B).

Considérense las desigualdades (con $a, A \in \mathbb{R}$)

$$\boxed{\bar{\rho} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{-1}{3} < a \leq \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \leq A} \quad (**)$$

Entonces (GRAN EXPLOSIÓN/IMPLOSIÓN):

(1) Si (**) se verifica hacia el pasado de t_0 , entonces $M(k, f)$ posee gran explosión

(2) Si (**) se verifica hacia el futuro de t_0 y $k = -1$ ó 0 , entonces $f' > 0$ hacia el futuro de t_0 ($\Rightarrow \sup I = \infty$, con lo que $M(k, f)$ no posee singularidad final), $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$

(3) Si (**) se verifica hacia el futuro de t_0 y $k = 1$, entonces $M(k, f)$ posee gran implosión

Demostración. Para empezar, $(**) \Rightarrow (*)$, ya que se tiene:

$$\frac{-1}{3} < a \leq \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \leq A, \quad \bar{\rho} > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \underbrace{(3a+1)\bar{\rho}}_{\equiv \varepsilon > 0} \leq \underbrace{\bar{\rho} + 3\bar{p}}_{\text{Cor. 12.12 } -3f''/4\pi f} \leq \underbrace{(3A+1)\bar{\rho}}_{\equiv \alpha > -2} \quad (***) .$$

(1) Dado que I es maximal, que $H_0 > 0$ y que se verifica $(*)$, existe (Propos. 12.15) singularidad inicial t_* .

Además, en (t_*, t_0) , al ser $f'' < 0$ y $f'_0 > 0$, resulta $f' > 0$ y se verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}' \stackrel{\text{Cor. 12.13}}{=} -3(\bar{\rho} + \bar{p})\frac{f'}{f} \stackrel{-3\bar{p} \geq -3A\bar{\rho}}{\underset{f' > 0}{\leq}} \underbrace{-3(A+1)\bar{\rho}\frac{f'}{f}}_{\equiv C > 2}, \Rightarrow (\bar{\rho}f^C)' \geq 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{\rho}f^C \leq \bar{\rho}_0 f_0^C, \quad \stackrel{C \geq 2}{\underset{\text{Sólo hay SF}}{\Rightarrow}} \lim_{t \rightarrow t_*} f(t) = 0 \quad (1) \\ \\ \bar{\rho}' \stackrel{\text{Cor. 12.13}}{=} -3(\bar{\rho} + \bar{p})\frac{f'}{f} \stackrel{-3\bar{p} \leq (1-\varepsilon)\bar{\rho}}{\underset{f' > 0}{\geq}} -(2+\varepsilon)\bar{\rho}\frac{f'}{f}, \Rightarrow (\bar{\rho}f^{2+\varepsilon})' \leq 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{\rho}f^{2+\varepsilon} \geq \bar{\rho}_0 f_0^{2+\varepsilon}, \quad \stackrel{\varepsilon > 0}{\underset{(1)}{\Rightarrow}} \lim_{t \rightarrow t_*} (\bar{\rho}f^2)(t) = \infty, \quad \stackrel{\text{T. 12.11}}{\underset{f' > 0}{\Rightarrow}} \lim_{t \rightarrow t_*} f'(t) = \infty; \end{array} \right.$$

con lo que t_* es de gran explosión.

(2) y (3). Distinguiamos dos casos:

Caso I: f tiene un máximo (en $t_m > t_0$), con lo que existe (Propos. 12.15) singularidad final t^* . Además:

$$f'(t_m) = 0, \quad \stackrel{\text{Teor. 12.11}}{\underset{\bar{\rho} > 0}{\Rightarrow}} \quad k = 1 \quad (2) .$$

Finalmente, en (t_m, t^*) , al ser $f'' < 0$ y $f'(t_m) = 0$, resulta $f' < 0$ y se verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}' \stackrel{\text{Cor. 12.13}}{=} -3(\bar{\rho} + \bar{p})\frac{f'}{f} \stackrel{-3\bar{p} \geq -3A\bar{\rho}}{\underset{f' < 0}{\geq}} \underbrace{-3(A+1)\bar{\rho}\frac{f'}{f}}_{\equiv C > 2}, \Rightarrow (\bar{\rho}f^C)' \leq 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{\rho}f^C \leq (\bar{\rho}f^C)(t_m), \quad \stackrel{C \geq 2}{\underset{\text{Sólo hay SF}}{\Rightarrow}} \lim_{t \rightarrow t^*} f(t) = 0 \quad (3) \\ \\ \bar{\rho}' \stackrel{\text{Cor. 12.13}}{=} -3(\bar{\rho} + \bar{p})\frac{f'}{f} \stackrel{-3\bar{p} \leq (1-\varepsilon)\bar{\rho}}{\underset{f' < 0}{\geq}} -(2+\varepsilon)\bar{\rho}\frac{f'}{f}, \Rightarrow (\bar{\rho}f^{2+\varepsilon})' \geq 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{\rho}f^{2+\varepsilon} \geq (\bar{\rho}f^{2+\varepsilon})(t_m), \quad \stackrel{\varepsilon > 0}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} \lim_{t \rightarrow t^*} (\bar{\rho}f^2)(t) = \infty, \quad \stackrel{\text{T. 12.11}}{\underset{f' < 0}{\Rightarrow}} \lim_{t \rightarrow t^*} f'(t) = -\infty \end{array} \right.$$

Así pues, en el Caso I se verifica: existe singularidad final, es de gran implosión y $k = 1$.

Caso II: f no tiene un máximo, con lo que es $f' > 0$. Entonces:

$$\bar{\rho}' \stackrel{\text{Cor. 12.13}}{=} -3(\bar{\rho} + \bar{p}) \frac{f'}{f} \stackrel{\substack{-3\bar{p} \leq (1-\varepsilon)\bar{\rho} \\ f' > 0}}{\leq} -(2 + \varepsilon)\bar{\rho} \frac{f'}{f} \stackrel{\varepsilon > 0}{<} 0 ;$$

puesto que sólo hay (hipótesis) singularidades físicas, no existe singularidad final. Distinguiamos dos subcasos:

Subcaso A (el único posible, ver luego): $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ (4).

Entonces, en (t_0, ∞) se verifica:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}' \stackrel{\text{Cor. 12.13}}{=} -3(\bar{\rho} + \bar{p}) \frac{f'}{f} \stackrel{\substack{-3\bar{p} \leq (1-\varepsilon)\bar{\rho} \\ f' > 0}}{\leq} -(2 + \varepsilon)\bar{\rho} \frac{f'}{f} , \Rightarrow (\bar{\rho} f^{2+\varepsilon})' \leq 0 , \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{\rho} f^{2+\varepsilon} \leq \bar{\rho}_0 f_0^{2+\varepsilon} , \stackrel{\varepsilon > 0}{\Rightarrow} \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\rho}(t) f^2(t) = 0 , \begin{cases} \stackrel{\text{T.12.11}}{\Rightarrow} k = -1 \text{ ó } 0 \\ \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \lim_{t \rightarrow \infty} (t) = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Subcaso B (como vamos a ver, imposible): $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = b < \infty$ (5).

Entonces, $f'' \stackrel{(*)}{<} 0$ implica:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = 0 , \begin{cases} \stackrel{\text{Teor. 12.11}}{\Rightarrow} \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\rho}(t) f^2(t) = \frac{3k}{8\pi} \quad (6) , \Rightarrow k = 0 \text{ ó } 1 \\ \stackrel{\text{T.V. medio para } f'}{\Rightarrow} \exists \{t_i\} \rightarrow \infty \text{ con } \lim_{i \rightarrow \infty} (\bar{\rho} + 3\bar{p})(t_i) = 0 \quad (7) \\ \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \end{cases}$$

Pero no puede ser $k = 0$. En efecto, en (t_0, ∞) se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}' \stackrel{\text{Cor. 12.13}}{=} -3(\bar{\rho} + \bar{p}) \frac{f'}{f} \stackrel{\substack{-3\bar{p} \geq -3A\bar{\rho} \\ f' > 0}}{\geq} \underbrace{-3(A+1)\bar{\rho} \frac{f'}{f}}_{\equiv C > 2} , \Rightarrow (\bar{\rho} f^C)' \geq 0 , \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{\rho} f^C \geq \bar{\rho}_0 f_0^C , \stackrel{C \geq 2}{\Rightarrow} \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\rho} f^2)(t) \neq 0 , \stackrel{(6)}{\Rightarrow} k \neq 0 . \end{aligned}$$

Ni tampoco puede ser $k = 1$. En efecto, si fuera $k = 1$, se tendría:

$$(\bar{\rho} + 3\bar{p})(t_i) \stackrel{(*)}{\geq} \varepsilon \bar{\rho}(t_i) \stackrel{\text{Teor. 12.11}}{=} \frac{3\varepsilon}{8\pi} \frac{f'^2 + 1}{f^2}(t_i) \geq \frac{3\varepsilon}{8\pi b^2} > 0 , \text{ que contradiría } (7)$$

Así pues, en el Caso II queda reducido al subcaso A: se verifica: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\rho}(t) = 0$, no hay singularidad final y $k = -1$ ó 0 ■

Nota 3. (i) Para $\Lambda = 0$ (algo sobreentendido hasta mitad de los 1990's) el Teor. 12.17 resultaba clave. Las observaciones sugerían $\rho_0 \gtrsim 0'3\rho_0^c$ y $p_0 \simeq 0$, lo que indicaba que (**) se verifica ahora. Y de la convicción de que también se verificaba hacia el pasado se concluía que hubo un big-bang. La cuestión de cara al futuro quedaba abierta.

(ii) Ya sin la restricción anterior, las observaciones recientes sugieren (Charla 10) $\rho_0 \simeq 0'27\rho_0^c$, $p_0 \simeq 0$ y $\Lambda/8\pi \simeq 0'73\rho_0^c$, de donde se sigue que (**) NO se verifica ahora (por otra parte obvio, ya que (*) tampoco se verifica ahora, Nota 2):

$$\frac{\bar{p}_0}{\bar{\rho}_0} \simeq \frac{-0'73}{0'27 + 0'73} = -0'73 < \frac{-1}{3}$$

Pero muchas otras observaciones (radiación de fondo, abundancia de elementos químicos, ...) y modelos de física de partículas indican que (**) se verificó hacia el pasado de cierto $t_1 < t_0$ (con $H(t_1) > 0$), con lo que probablemente hubo una gran explosión (o algo muy próximo a dicho "límite").

Por otra parte, todo indica que (**) NO se verificará en el futuro. Con la hip. adicional $\rho > p = 0$, ver luego "Modelos de Friedmann" ■

(Ejemplos 12.18) Ambas desigualdades para el cociente $\bar{p}/\bar{\rho}$ en (**) son necesarias para la validez del Teorema 12.17. Dos ejemplos:

- (1) En el ET de Robertson-Walker $(0, \infty) \times_{1+t^{2/3}} \mathbb{R}^3$, se tiene:

$$f'(t) = \frac{2}{3}t^{-1/3} \quad \text{y} \quad f''(t) = -\frac{2}{9}t^{-4/3}.$$

El intervalo $I = (0, \infty)$ es (claramente) *maximal*, $H > 0$ (siempre) y existe singularidad inicial ($\lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \infty$). El correspondiente flujo de Robertson-Walker (U, ρ, p) verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \equiv \rho + \frac{\Lambda}{8\pi} \stackrel{\text{Teor.12.11}}{=} \frac{3}{8\pi} \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2} \right) = \frac{1}{6\pi} \frac{t^{-2/3}}{(1+t^{2/3})^2} \\ \bar{p} \equiv p - \frac{\Lambda}{8\pi} \stackrel{\text{Teor.12.11}}{=} \frac{-1}{8\pi} \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2} + \frac{2f''}{f} \right) = \frac{1}{18\pi} \frac{t^{-4/3}}{(1+t^{2/3})^2} \end{array} \right\}, \Rightarrow \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{3}t^{-2/3},$$

con lo que la singularidad inicial *es física* ($\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = \infty$; tenía que serlo, Parte B); sin embargo, aunque $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \infty$, *no es de gran explosión* ($\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$).

Por otra parte, el cociente $(-1/3 < 0 <)\bar{p}/\bar{\rho}$ *no está acotado por arriba*. Una inspección de la demostración del Teor. 12.17(1) muestra que esta es la causa de que $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) \neq 0$.

- (2) En el ET de Robertson-Walker $(0, \infty) \times_{\sinh^{-1} t} \mathbb{E}\mathbb{R}^3$, se tiene:

$$f'(t) = (1 + t^2)^{-1/2} \text{ y } f''(t) = -t(1 + t^2)^{-3/2} .$$

El intervalo $I = (0, \infty)$ es (claramente) *maximal*, $H > 0$ (siempre) y existe singularidad inicial ($\lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \infty$). El correspondiente flujo de Robertson-Walker (U, ρ, p) verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \equiv \rho + \frac{\Lambda}{8\pi} \stackrel{\text{Teor.12.11}}{=} \frac{3}{8\pi} \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2} \right) = \frac{3}{8\pi} \frac{(1+t^2)^{-1}}{(\sinh^{-1} t)^2} \\ \bar{p} \equiv p - \frac{\Lambda}{8\pi} \stackrel{\text{Teor.12.11}}{=} \frac{-1}{8\pi} \left(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2} + \frac{2f''}{f} \right) = \frac{1}{8\pi} \frac{(1+t^2)^{-1}}{(\sinh^{-1} t)^2} \left(\frac{2t \sinh^{-1} t}{(1+t^2)^{1/2}} - 1 \right) \end{array} \right\} , \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{1}{3} \left(\frac{2t \sinh^{-1} t}{(1+t^2)^{1/2}} - 1 \right) ,$$

con lo que la singularidad inicial *es física* ($\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = \infty$; tenía que serlo, Parte B); sin embargo, aunque $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$, *no es de gran explosión* ($\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = 1$).

Por otra parte, el cociente p/ρ *no está acotado por arriba, ni tampoco por abajo por una constante mayor que $-1/3$* . Una inspección de la demostración del Teor. 12.17(1) muestra que lo segundo es la causa de que $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) < \infty$.

12.9. MODELOS DE FRIEDMANN

(A) Modelos de Friedmann

Sea $M(k, f) \equiv I \times_f S$ un ETRW, con función de Hubble (Obs. 12.14(1)) $H := f'/f \in \mathfrak{F}(M)$, que verifica la ecuación de Einstein (con constante cosmológica) $Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T$. Y sea (U, ρ, p) el correspondiente fluido de Robertson-Walker.

Excepto en las épocas inicial y final (si las hay), parece que la aproximación $\rho > p = 0$ (**polvo**, ver Nota 2 en "Fluidos perfectos") es buena.

(Lema 12.20) Si f es *no constante* (para ello, basta suponer la identificación $H(t_0) \equiv H_0 > 0$ (Obs. 12.14(1)), entonces son equivalentes:

- (1) el correspondiente flujo de Robertson-Walker (U, ρ, p) es polvo
- (2) se verifica: $\rho f^3 = M$ (constante > 0)
- (3) se verifica (**ecuación de Friedmann**):

$$\boxed{f'^2 + k = \frac{A}{f} + \frac{\Lambda f^2}{3}} \quad , \quad \text{con } A \text{ constante } > 0 \quad .$$

Demostración. (2) \Leftrightarrow (3). En efecto:

$$f'^2 + k \stackrel{\text{Teor. 12.11}}{=} \frac{8\pi\rho f^3/3}{f} + \frac{\Lambda f^2}{3} \quad ,$$

y el resultado se sigue con $A = 8\pi M/3$.

(1) \Rightarrow (2). En efecto:

$$p = 0 \stackrel{\text{Cor. 12.13}}{\Rightarrow} \rho'f + 3\rho f' = 0 \Rightarrow \rho f^3 = M \stackrel{\rho > 0}{>} 0 \quad .$$

(2) \Rightarrow (1). En efecto:

$$\rho f^3 = M \Rightarrow \rho'f + 3\rho f' = 0 \stackrel{\text{Cor. 12.13}}{\Rightarrow} pf' = 0 \quad (*)$$

Si p no es idénticamente cero, existe un intervalo (abierto, conexo) *maximal* $J \subset I$ en el que se tiene:

$$p|_J \neq 0 \quad , \quad \stackrel{(*)}{\Rightarrow} f|_J = \text{cte.} \quad , \quad \stackrel{\text{Teor. 12.11}}{\Rightarrow} p|_J = \text{cte.} (\neq 0) \quad , \quad \stackrel{J \text{ maximal}}{\Rightarrow} J = I \quad ,$$

lo que contradice la hipótesis de que f no es constante ■

(Definición) Se llama **modelo (cosmológico) de Friedmann** a un ETRW $M(k, f) \equiv I \times_f S$ tal que:

- (F1) verifica la ecuación de Einstein $Ric - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T$,
- (F2) la función de Hubble $H := f'/f$ cumple $H(t_0) \equiv H_0 > 0$, y
- (F3) su flujo de Robertson-Walker es polvo $(U, \rho > 0, p = 0)$

Nota 1*. Una dependencia $p(\rho)$ podría sustituirse en $\rho' = -3(\rho + p)f'/f$ (Corol. 12.13) para dar una relación $\rho(f)$, que sustituida en $\rho + \frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi}(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2})$ (Teor. 12.11) daría una EDO de 1er orden para la función $f(t)$. ¿Cómo prescribir razonablemente $p(\rho)$?

(i) Retomemos la Observ. 12.14(2), en la forma (con las notaciones introducidas antes del Corol. 12.19):

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \equiv \underbrace{\rho_0^{rad}}_{\simeq 10^{-4}\rho_0^{mat}} + \rho_0^{mat.ord.} + \rho_0^{mat.osc.} \\ p_0 \equiv \underbrace{p_0^{rad}}_{\simeq 10^{-5}\rho_0^{mat}} + \underbrace{p_0^{mat.ord.}}_{\simeq 10^{-7}\rho_0^{mat}} + \underbrace{p_0^{mat.osc.}}_{???} \end{array} \right.$$

El no-dato $p_0^{mat.osc.} = ??$ es consistente ("nada se sabe") con la hipótesis simplificadora $\boxed{p^{mat.osc.} = 0}$ (materia oscura "fría", CDM).

(ii) Lo anterior y los datos $p_0^{mat.ord.} \simeq 10^{-2}p_0^{rad} \simeq 10^{-7}\rho_0^{mat}$ indican que la presión es actualmente irrelevante.

(iii) Si radiación ($p^{rad} = \rho^{rad}/3$) y materia ($p^{mat} \ll \rho^{mat}$ en torno a "ahora" t_0) evolucionan "independientemente" (\equiv interflujos de energía no modifican las respectivas densidades de energía, "razonable" en buena parte de la historia), entonces la ec. $\rho' = -3(\rho + p)f'/f$ (Corol. 12.13) da dos ecs. independientes (la 2ª, en torno a t_0):

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho^{rad})' \stackrel{12.13}{=} -3(\rho^{rad} + p^{rad})\frac{f'}{f} = -4\rho^{rad}\frac{f'}{f}, \quad \text{Ejerc. 12.14a} \Rightarrow \frac{8\pi}{3}\rho^{rad}f^4 = A^{rad} (> 0) \\ (\rho^{mat})' \stackrel{12.13}{=} -3(\rho^{mat} + p^{mat})\frac{f'}{f} \simeq -3\rho^{mat}\frac{f'}{f}, \quad \stackrel{12.20(1\Rightarrow 2)}{\Rightarrow} \frac{8\pi}{3}\rho^{mat}f^3 \simeq A^{mat} (> 0); \end{array} \right.$$

se sigue que, cuando la presión es relevante (i.e. $f/f_0 \ll 1$) p^{rad} domina a p^{mat} . Lo que sugiere la hipótesis $\boxed{p^{mat} = 0}$ ("polvo").

(iv) Así, la tensión-energía (en un modelo de Friedmann generalizado) consta de un fluido de radiación ($\rho^{rad} = 3p^{rad} > 0$) más un polvo de materia ($\rho^{mat} > p^{mat} = 0$) que evolucionan independientemente. Entonces el Corol. 12.13 da las ecuaciones exactas

$$8\pi\rho^{rad}f^4/3 = A^{rad} \quad \text{y} \quad 8\pi\rho^{mat}f^3/3 = A^{mat} \quad (*)$$

y, sustituyendo $\rho = \rho^{rad} + \rho^{mat}$ en la ec. $\rho + \frac{\Lambda}{8\pi} := \frac{3}{8\pi}(\frac{f'^2}{f^2} + \frac{k}{f^2})$ del Teor. 12.11, se obtiene la ec. de Friedmann generalizada:

$$\boxed{f'^2 + k = A^{rad}/f^2 + A^{mat}/f + \Lambda f^2/3} \quad (**),$$

con solución unívocamente determinada por $\Lambda, k, A^{rad} > 0$ y $A^{mat} > 0$ (más el valor inicial H_0).

(v) Pero el dato $\rho_0^{rad} \simeq 10^{-4} \rho_0^{mat}$ conduce, usando (*), a la relación $A^{rad}/f_0^2 \simeq 10^{-4} A^{mat}/f_0$. Con lo que (en buena parte de la historia) se puede prescindir de la radiación y (**) queda $\boxed{f'^2 + k = A/f + \Lambda f^2/3}$, con solución unívoc. determinada por Λ, k y $A > 0$ (más H_0) ■

Nota 2. En un ETRW con $f'(t) > 0$ para todo $t \leq t_0$, el instante de emisión t venía determinado (ver "Geodésicas luz, desplazamiento ...". Nota 3b) por el desplazamiento de frecuencia observado aquí/ahora z . Ello conducía a la siguiente expresión de la ley de Hubble (con las notaciones introducidas antes del Corol. 12.19):

$$d_L(z) \stackrel{\text{Charla 9}}{=} (1+z)f_0\eta(d_{po}) \stackrel{\text{Corol.12.25}}{=} (1+z)f_0\eta\left(\int_0^z \frac{dz}{f_0 H(t(z))}\right)$$

Pues bien: en un modelo de Friedmann, se obtiene la siguiente expresión de la función $H(t(z))$ en términos de Ω_0 y $\Omega_{\Lambda 0}$ (Charla 10 para los detalles), clave para "cribar" modelos via la Ley de Hubble:

$$H(t) = \frac{f_0}{f(t)} H_0 \left(1 + \Omega_0 \left(\frac{f_0}{f(t)} - 1\right) + \Omega_{\Lambda 0} \left(\left(\frac{f(t)}{f_0}\right)^2 - 1\right)\right)^{1/2}, \quad \stackrel{\text{Corol.12.24}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(t(z)) = H_0(1+z) \left(1 + \Omega_0 z + \Omega_{\Lambda 0} \left(\frac{1}{(1+z)^2} - 1\right)\right)^{1/2}} \quad \blacksquare$$

(B) Ejemplos de modelos de Friedmann

(Observación 12.21) Para $\Lambda = 0$, la ec. de Friedmann queda:

$$\boxed{f'^2 + k = \frac{A}{f}},$$

que se integra elementalmente. Todas las soluciones (determinadas por k y $A := \frac{8\pi}{3} \rho_0 f_0^3 = \Omega_0 H_0^2 f_0^3 > 0$, más el valor inicial H_0):

- poseen gran explosión para cierto $t_* < t_0$: previsible, ya que las desigualdades de la Prop. 12.15 y del Teor. 12.17 se cumplen aquí trivialmente
- poseen "horizontes de partículas": consecuencia de que t_* es finito, lo que no permite (aún) la "comunicación" entre regiones "inicialmente desconectadas" (recordar que $\lim_{t \rightarrow t_*} f'(t) = \infty$)
- poseen "expansión siempre" (i.e. $f' > 0$) si $k = -1$ ó 0 , y "gran implosión" si $k = 1$: de nuevo previsible, por el Teor. 12.17
- no poseen (salvo si $k = 1$, por la finitud de la máxima distancia propia) "horizonte de sucesos": consecuencia del carácter siempre frenado de la expansión ($\rho = \frac{-3H^2}{4\pi} \frac{f f''}{f'^2}$, Corol. 12.12), que permite a la luz "ir ganando terreno" y (si la duración del cosmos lo permite) "comunicar" cualquier suceso a cualquier observador comóvil
- predicen (ver luego) una edad actual $\gtrsim 10^{10}$ años (compatible con la antigüedad mínima estimada de los cúmulos globulares) sólo si $\Omega_0 \lesssim 0'1$ ($\Rightarrow k = -1$), incompatible con el dato observacional $\Omega_0 > 0'2$ (Obs. 12.14(2))

Más concretamente: tomando la singularidad inicial (Prop. 12.15(1)) en $t_* = 0$ (con lo que t_0 resulta la "edad del cosmos"), se tiene:

- (1) Caso $\Lambda = 0$, $k = 0$. La ecuación de Friedmann queda:

$$f'^2 = A/f \quad , \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(t) = Ct^{2/3}} \quad , \quad \text{con } C^3 = 9A/4 \quad .$$

El modelo (de Friedmann) "estándar" correspondiente (**modelo de Einstein-de Sitter**)

$$(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^3, \Lambda = 0, k = 0, A)$$

requiere (Corol. 12.19) $\Omega_0 = 1$ (excesivo, frente al dato observacional $\Omega_0 < 0'4$, Obs. 12.14(2)) y hace la predicción:

$$H := f'/f = 2/3t \quad , \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2H_0^{-1}/3 \quad \overset{H_0^{-1} \simeq 13'8 \cdot 10^9 \text{ años}}{\simeq} \quad \underline{9'2 \cdot 10^9 \text{ años}}$$

(escasa frente a la edad de los cúmulos).

(a) En relación con el instante de emisión, se obtiene:

$$t_p \quad \overset{f(t)=Ct^{2/3}}{=} \quad \left(\frac{f(t_p)}{f(t_0)} \right)^{3/2} t_0 \quad \overset{\text{Cor. 12.24}}{=} \quad \frac{2}{3} (1+z)^{-3/2} H_0^{-1} \quad .$$

con lo que, en este caso:

(i) para una galaxia con $z = 1/5$ es $t_p \simeq 7'0 \cdot 10^9 \text{ años}$

(ii) para un quasar con $z = 2$ es $t_p \simeq 1'8 \cdot 10^9 \text{ años}$.

(b) En relación con las distancias propias, se obtiene:

$$d_{\gamma_p, \gamma_o}^{S(t_0)} := f_0 d_{po} \quad \overset{\text{Cor. 12.25}}{=} \quad t_0^{2/3} \int_{t_p}^{t_0} \frac{dt}{t^{2/3}} = 3t_0 \left(1 - \left(\frac{t_p}{t_0} \right)^{1/3} \right) \quad \overset{\text{Cor. 12.24}}{=} \quad 2H_0^{-1} (1 - (1+z)^{-1/2}) \quad ,$$

con lo que, en este caso:

(i) para una galaxia con $z = 1/5$ es $d_{\gamma_p, \gamma_o}^{S(t_0)} \simeq 2'4 \cdot 10^9 \text{ años luz}$

(ii) para un quasar con $z = 2$ es $d_{\gamma_p, \gamma_o}^{S(t_0)} \simeq 11'7 \cdot 10^9 \text{ años luz}$

(iii) es actualmente

$$d_{phor}(t_0) := f(t_0) \int_0^{t_0} \frac{dt}{f(t)} = t_0^{2/3} (3t_0^{1/3}) = 3t_0 \quad (\simeq 27'6 \cdot 10^9 \text{ años}) \quad ,$$

con lo que d_{phor} "se aleja con velocidad 3"

(iv) una galaxia que se hallara actualmente a la distancia de Hubble $d_H = H_0^{-1}$ tendría un desplazamiento de frecuencia dado por:

$$1 = 2(1 - (1+z)^{-1/2}) \quad , \quad \Rightarrow \quad (1+z)^{-1/2} = 1/2 \quad , \quad \Rightarrow \quad z = 3 \quad .$$

(v) finalmente: $d_{ehor} := f_0 \int_{t_0}^{\sup I} \frac{dt}{f(t)} = t_0^{2/3} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{t^{2/3}} = \infty$ (en el modelo de Einstein-de Sitter no existe horizonte de sucesos).

- (2) Caso $\Lambda = 0$, $k = 1$. La ecuación de Friedmann es:

$$f'^2 + 1 = A/f \quad , \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} t(\vartheta) = \frac{1}{2}A(\vartheta - \sin \vartheta) \\ f(\vartheta) = \frac{1}{2}A(1 - \cos \vartheta) \end{array} \right. , \quad \text{con } \vartheta \in (0, 2\pi)$$

(cicloide, máximo en $f(\pi) = A$ y recolapso en $t^* \equiv t(2\pi) = \pi A$).

El modelo (de Friedmann) "estándar" correspondiente

$$((0, \pi A) \times_f \mathbb{S}^3, \Lambda = 0, k = 1, A)$$

requiere (Corol. 12.19) $\Omega_0 > 1$ (muy excesivo!!).

Para más detalles, hay que hacer hipótesis sobre A o, lo que es lo mismo, sobre Ω_0 (ver Ejerc. 12.8): eligiendo p.ej. $\Omega_0 = 2$, se obtiene: $t_0 \simeq 7'9 \cdot 10^9$ años (muy escasa!!)

- (3) Caso $\Lambda = 0$, $k = -1$. La ecuación de Friedmann es:

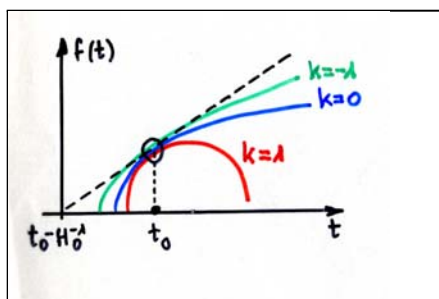
$$f'^2 - 1 = A/f \quad , \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} t(\eta) = \frac{1}{2}A(\sinh \eta - \eta) \\ f(\eta) = \frac{1}{2}A(\cosh \eta - 1) \end{array} \right. , \quad \text{con } \eta \in (0, \infty) .$$

El modelo (de Friedmann) "estándar" correspondiente

$$(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{H}^3, \Lambda = 0, k = -1, A)$$

requiere (Corol. 12.19) $\Omega_0 < 1$.

Para más detalles, hay que hacer hipótesis sobre A o, lo que es lo mismo, sobre Ω_0 (ver Ejerc. 12.9): eligiendo p.ej. $\Omega_0 = 0'1$ (muy escaso!! frente al dato observacional $\Omega_0 > 0'2$, Obs. 12.14(2)), se obtiene: $t_0 \simeq 12'4 \cdot 10^9$ años (ajustado a la edad de los cúmulos)



Los 3 modelos de Friedmann con $\Lambda = 0$

(Observación 12.21bis) Para Λ arbitraria, el análisis cualitativo detallado de las soluciones (unívocamente determinadas por Λ , k y $A := \frac{8\pi}{3}\rho_0 f_0^3 = \Omega_0 H_0^2 f_0^3 > 0$, más el valor inicial H_0) se hace teniendo en cuenta que la ecuación de Friedmann es una "ecuación de la energía" (Ejercicio 12.19* para los detalles):

$$f'^2 = \underbrace{-k}_{\equiv E} + \underbrace{(A/f + \Lambda f^2/3)}_{\equiv V_\Lambda(f)}.$$

Para $k = 0$, la ec. de Friedmann (con Λ arbitraria) también se integra elementalmente.

- (4) Caso $\Lambda > 0$, $k = 0$. La ec. de Friedmann es (ver [7], (18.44)):

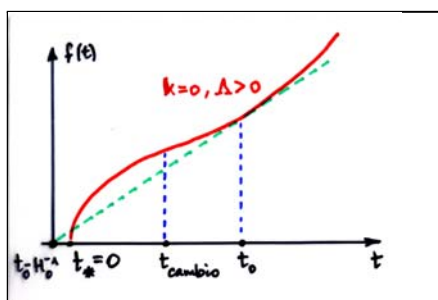
$$f'^2 = A/f + \Lambda f^2/3, \Rightarrow \boxed{f(t) = C \left(\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1 \right)^{1/3}}, \text{ con } C^3 = 3A/2\Lambda.$$

El modelo (de Friedmann) "estándar" correspondiente

$$(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^3, \Lambda > 0, k = 0, A)$$

requiere (Corol. 12.19) $\Omega_0 + \Omega_{\Lambda 0} = 1$ y

- posee expansión siempre, con $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$
- posee gran explosión (y por tanto, horizonte de partículas)
- posee aceleración positiva desde cierto t_{cambio} , con f'' creciente y $\lim_{t \rightarrow \infty} f f'' / f'^2 = 1$
- alcanza $f = \infty$ en tiempo infinito y posee horizonte de sucesos



Obsérvese que $\lim_{\Lambda \rightarrow 0} f = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} C (3\Lambda t^2/2)^{1/3} = (9A/4)^{1/3} t^{2/3}$, que corresponde (como debe ser) al modelo de Einstein-de Sitter.

Para más detalles hay que hacer hipótesis sobre el valor de Λ (ver Ejerc.12.22*).

La elección $\Omega_0 = 0'27$ y $\Omega_{\Lambda 0} = 0'73$ constituye el **modelo Λ CDM** (Charla 10)

Referencias

- [1] M. Alonso and E. J. Finn. *Física. Vol II: Campos y ondas*. Fondo Educativo Interamericano, 1976.
- [2] J. J. Callahan. *The geometry of spacetime*. Springer, 2000.
- [3] T. M. Davis and C. H. Lineweaver. *Expanding confusion: Common Misconceptions of Cosmological Horizons and the Superluminal Expansion of the Universe*. Publications of the Astronomical Society of Australia, 21, 97-109, 2004.
- [4] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of spacetime*. Cambridge, 1973.
- [5] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, 1973.
- [6] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [7] W. Rindler. *Relativity: Special, General and Cosmological*. Oxford, 2001.
- [8] R. K. Sachs and H. Wu. *General Relativity for Mathematicians*. Springer, 1977.
- [9] B. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge, 1990.
- [10] J. H. Smith. *Introducción a la relatividad especial*. Reverté, 1978.
- [11] N. Straumann. *General Relativity and Relativistic Astrophysics*. Springer, 1984.
- [12] E. F. Taylor and J. A. Wheeler. *Spacetime Physics*. Freeman, 1966.
- [13] E. F. Taylor and J. A. Wheeler. *Spacetime Physics*. Freeman, 1992.
- [14] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley, 1972.
- [15] C. M. Will. *Tenía razón Einstein?* Gedisa, 1992.