VARIEDADES DIFERENCIABLES EN EL ESPACIO EUCLIDEO

Grupos A y B

Curso 2008-2009

(Resúmenes de las secciones del libro de J.M. Gamboa y J.M. Ruiz, "Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables", Sanz y Torres, 2006, 2^a edición)

1. VARIEDADES DIFERENCIABLES

1.1. Definición de variedad

• Aplicación $f : U(\text{abierto} \subset \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^q$ **diferenciable** (C^∞)
• Aplic. $f : X(\text{subconjunto} \subset \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^q$ **diferenciable** (via ext. locales)
· La composición preserva la diferenciabilidad
• *(Def. 1.1.1)* Una aplic.$f : X(\subset \mathbb{R}^p) \to Y(\subset \mathbb{R}^q)$ se dice **difeomorfismo** si es biyectiva, C^∞ y con inversa C^∞; y se dice **difeomorfismo local en** $a \in X$ si proporciona un difeomorfismo de un entorno de a sobre su imagen
• *(Def. 1.1.3)* **Variedad (diferenciable)**: subconjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ tal que: $\forall x \in M$, $\exists$ abiertos $U(\subset M)$ conteniendo a x y $W(\subset$ algún $\mathbb{R}^m)$ y $\exists$ difeomorfismo $\varphi : W \to U$ (**parametrización de** M **en** x)

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Sistema de coord. (} \equiv \textbf{ carta) en } x\text{: inversa } \mathbf{x} \equiv \varphi^{-1} \text{ de alguna} \\ \qquad \text{parametrización } \varphi \text{ de } M \text{ en } x \text{ (Notación: } \mathbf{x}_i := x_i \circ \mathbf{x},\ i = 1, ..., m) \\ \textbf{Cambio de carta}\text{: difeom. } \psi^{-1} \circ \varphi : (\text{algún } \mathbb{R}^n \supset) W \to \bar{W} (\subset \text{algún } \mathbb{R}^m) \end{array} \right.$$

• *(Ejemplos 1.1.4): (1)* Unión de rectas secantes no es variedad (Ej. 1.1.5)
(2),(3) Proyecciones estereográficas en $\mathbb{R}^{m+1}$: se necesitan <u>dos</u> para recubrir la esfera $\{x_1^2 + ... + x_{m+1}^2 = 1\}$ y <u>sólo una</u> para recubrir el cilindro $\{x_1^2 + ... + x_m^2 = 1, 0 < x_{m+1} < 1\}$ [**Detalle1**] (ver Ejercicio 1.1.9)
• *(Observ. 1.1.5): (1)* Difeomorfismo $\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < a\} \to \mathbb{R}^m, x \mapsto x/\sqrt{a^2 - \|x\|^2}$ con inversa $X \mapsto aX/\sqrt{1 + \|X\|^2})$ (ver Ejercicio 1.1.2) $\rightsquigarrow$ siempre hay parametrizaciones con dominio todo $\mathbb{R}^m$
(2) La topología de las variedades es <u>localmente la del espacio afín</u>. En particular son localmente conexas (Ejercicio 1.1.3), localmente compactas, metrizables (por tanto normales/T_4) y tienen una base de abiertos numerable
• *(Def.)* Dados aplic. diferenciable $f : U(\text{abierto} \subset \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^q$ y $a \in U$, se define la (aplicación lineal) **derivada** $d_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ via la jacobiana $J_f(a)$:

$$d_a f(u \equiv \sum_{1 \le j \le p} u_j e_j) := \sum_{1 \le i \le q} (\sum_{1 \le j \le p} \underbrace{(\partial f_i / \partial x_j(a))}_{(J_f(a))_{ij}} u_j)\ \bar{e}_i \quad = \quad \lim_{t \to 0} \left(f(a + tu) - f(a) \right) / t$$

· La derivada de una aplicación lineal es ella misma
· Regla de la **cadena** $d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$
· **Teorema de inversión local (TIL):** f es un difeomorfismo local en $a \in U$ si [!] y sólo si [cadena] $d_a f$ es un isomorfismo ($\Rightarrow p = q$)
• *(Def.)* Para cada $a \in M$, $\dim_a M$ está <u>bien definida</u> por el TIL; $\rightsquigarrow$ **dimensión** $\dim M$ **de** M (función discreta y localmente constante)
· Salvo aviso, $\dim M \equiv m = cte.$ ($\rightsquigarrow$ **curvas**, **superficies**, ...)
· **Codimensión de** $M(\subset N)$ **en** N (si es 1, M se dice **hipersuperficie**)
• *(Def. 1.1.6)* Dadas aplic. $f : M \to N$ (C^0) y param. $\varphi : A \to U \subset M$ y $\psi : B \to V \subset N$ (con $f(U) \subset V$), $\rightsquigarrow$ **localización** $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : A \to B$ **de** f
· f es diferenciable si [$f \mid U = \psi \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$] y sólo si [obvio] todas sus localizaciones lo son

1.2. Construcción de variedades

(A) • Dada aplicación $g : V(\text{abierto} \subset \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^p$ diferenciable, **¿es** g **una parametrización de** $g(V)$ **(y por tanto** $g(V)$ **es una variedad)?**:

· *(1.2.a)* Sólo si $d_a g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es <u>inyectiva</u> para todo $a \in V$ [Inmediato: si $\mathbf{x} \equiv g^{-1} : g(V) \to V$ posee ext. local diferenciable $\tilde{\mathbf{x}}$ a un $\mathbb{R}^p$-entorno de $g(a)$, entonces $d_{g(a)}\tilde{\mathbf{x}} \circ d_a g = d_a(\tilde{\mathbf{x}} \circ g) = Id_{\mathbb{R}^m}$, con lo que $d_a g$ resulta inyectiva]

· *(Prop. 1.2.1)* Si $d_a g$ es inyectiva, existe un $\mathbb{R}^m$-entorno $W(\subset V)$ de a tal que $g \mid W : W \to g(W)$ es un <u>difeomorfismo</u>

[La aplicación $d_a g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ (inyectiva) se "extiende" a un isomorfismo $h : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{p-m} \equiv)\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, $\Rightarrow$ la aplicación $f := g \circ \pi_m + h \circ \pi_{p-m} : (\mathbb{R}^p \supset)V \times \mathbb{R}^{p-m} \to \mathbb{R}^p$ da lugar a un isomorfismo: $d_{(a,0)} f \overset{1.1}{=} d_a g \mid \mathbb{R}^m + h \mid \mathbb{R}^{p-m} = h$, $\overset{TIL}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\mathbb{R}^p$-entorno $W \times W'$ $(\subset V \times \mathbb{R}^{p-m})$ de $(a, 0)$ difeomorfo bajo f a su imagen , $\overset{f|W\times\{0\}=g|W}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\mathbb{R}^m$-ent. $W(\subset V)$ de a difeom. bajo g a su imagen]

· Pero de momento la variedad $g(W)$ es sólo un "trozo" de $g(V)$. Si además $g(W)$ es un $g(V)$-abierto, entonces $g \mid W$ es parametrización de $g(V)$ (cuidado: ver *Observ. 1.2.2*, o "el ocho" del Ejercicio 1.2.1, o la curva densa en el toro del Ejerc. 3.2.10)

· Si $d_a g$ es inyectiva para todo $a \in V$, <u>todos</u> los "trozos" $g(W)$ son $g(V)$-abiertos ($\Leftrightarrow g^{-1}$ es continua) y la propia g es inyectiva ($\Leftrightarrow \exists g^{-1} : \operatorname{Im} g \to V$), entonces g es parametrización (global) de $g(V)$

• Cuando una variedad contiene a otra, existen **cartas adaptadas**:

· *(Prop. 1.2.3)* Si $\overset{m}{M} \subset \overset{n}{N}$ y $a \in M$, entonces $\exists$ carta $\mathbf{x} : (N \supset)U \to \mathbb{R}^n$ en a tal que: $\mathbf{x}(U \cap M) = \mathbf{x}(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{\overset{n-m}{0}\})$

[S.p.d.g. $N = \mathbb{R}^n$. Sea $\varphi : (\mathbb{R}^m \supset)V \to M(\subset \mathbb{R}^n)$ una param. de M en a.

La aplicación $d_{\varphi^{-1}a}\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (inyectiva) se "extiende" a un isomorfismo $h : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \equiv)\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Rightarrow$ la aplicación $f := \varphi \circ \pi_m + h \circ \pi_{n-m}$: $(\mathbb{R}^n \supset)V \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ da lugar a un isomorfismo: $d_{(\varphi^{-1}a,0)} f \overset{1.1}{=} d_{\varphi^{-1}a}\varphi \mid \mathbb{R}^m + h \mid \mathbb{R}^{n-m} = h$, $\overset{TIL}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\mathbb{R}^n$-entorno $W \times W'$ $(\subset V \times \mathbb{R}^{n-m})$ de $(\varphi^{-1}a, 0)$ difeomorfo bajo f a su imagen , $\overset{f|W\times\{0\}=\varphi|W}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\mathbb{R}^m$-ent. $W(\subset V)$ de $\varphi^{-1}a$ difeom. bajo φ a su imagen.

Tomando entonces: $\left\{ \begin{array}{l} U := f(W \times W') \quad (\Rightarrow U \cap M = g(W) \\ \mathbf{x} := (f \mid W \times W')^{-1} \end{array} \right\}$, se concluye: $\mathbf{x}(U \cap M) = W \times \{0\} \equiv \mathbf{x}(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{\overset{n-m}{0}\})$]

· *(1.2.b)* Si $\overset{m}{M} \subset \overset{n}{N}$ y $m = n$, cada $\mathbf{x}(U \cap M)$ en (1.2.3) es abierto en $\mathbb{R}^n$, $\Rightarrow$ cada $U \cap M$ en (1.2.3) es abierto en N , $\Rightarrow$ M es abierto en N

(B) • En torno a cada punto regular, los conjuntos de nivel son variedades:

· *(Def.)* Se dice que $\overset{m}{M}(\subset \overset{n}{N})$ es **intersección completa en** N si existe $f \equiv (f_1, ..., f_{n-m}) : N \to \mathbb{R}^{n-m}$ (C^∞) tal que $M = f^{-1}(0)$ y $d_x f$ es suprayectiva, $\forall x \in M$. En tal caso $f_i(x) = 0, 1 \leq i \leq n-m$, se dicen **ecuaciones globales de** M **en** N

· *(Prop. 1.2.4)* Sean $f : (\mathbb{R}^p \supset \text{abierto})V \to \mathbb{R}^q$ diferenciable y $a \in V$. Si $d_a f$ es suprayectiva, existe un $\mathbb{R}^p$-entorno $U(\subset V)$ de a tal que $M \equiv U \cap f^{-1}(f(a))$ es variedad de dim. $p-q$ y además una inters. completa en U

[Al ser $d_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ suprayectiva, $\exists$ isomorfismo $(\mathbb{R}^p \supset) \ker(d_a f) \to \mathbb{R}^{p-q}$ que se "extiende" a una aplicación lineal suprayectiva $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p-q}$, $\Rightarrow$ la aplicación $h := (f, g) : (\mathbb{R}^p \supset)V \to \mathbb{R}^p$ da lugar a un isomorfismo: $d_a h = (d_a f, d_a g = g) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p-q} \equiv \mathbb{R}^p$, $\overset{TIL}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\mathbb{R}^p$-entorno $U(\subset V)$ de a difeomorfo bajo h a su imagen.

Llamando entonces $M \equiv U \cap f^{-1}(f(a))$, se concluye que M es difeomorfo bajo $\mathbf{x} \equiv h \mid M$ a un abierto $h(U) \cap (\{f(a)\} \times \mathbb{R}^{p-q})$ de $\mathbb{R}^{p-q}$, $\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ es una carta global de M, que resulta variedad de dim. $p-q$.

Además: $d_x g = g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p-q}$ es suprayectiva $(\forall x \in U)$ y $d_x h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ es isomorfismo $(\forall x \in U)$, $\Rightarrow$ $d_x f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es suprayectiva $(\forall x \in M)$, con lo que M resulta una intersección completa en U]

· [Otra demostr. (habitual) de este resultado prueba (via el T. de la función implícita) que existe un entorno $\bar{U}(\subset V)$ de a tal que $\bar{U} \cap f^{-1}(f(a)) \subset R^p$ es la gráfica de una función diferenciable $\pi_{\ker(d_a f)}(\bar{U}) \to R^p$, lo que inmediatamente proporciona una param. global del conjunto $\bar{U} \cap f^{-1}(f(a))$]

· *(1.2.c)* Toda variedad $\overset{m}{M}(\subset \overset{n}{N})$ $(m < n)$ es <u>localmente</u> (no siempre globalmente) una intersección completa en N

[$\forall a \in M$, $\exists$ (1.2.3) carta $\mathbf{x} : (N \supset)U \to \mathbb{R}^n$ en a tal que: $\mathbf{x}(U \cap M) = \mathbf{x}(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{\overset{n-m}{0}\})$. Llamando $F \equiv (x_{m+1}, ..., x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ y $f \equiv F \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^{n-m}$, se sigue: $\mathbf{x}(U \cap M) = \mathbf{x}(U) \cap F^{-1}(0)$, $\Rightarrow$ $U \cap M = f^{-1}(0)$.

Además: $J_F(x) = \begin{pmatrix} 0_{n-m,m} & I_{n-m} \end{pmatrix}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$, $\Rightarrow$ $d_x f : T_x N \to \mathbb{R}^{n-m}$ es suprayectiva $(\forall x \in U)$, con lo que $U \cap M$ es una intersecc. completa en U]

• *(Ejemplos 1.2.5): (1)* $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, *(2)* Toro de rev. $T \subset \mathbb{R}^3$ (Ej. 1.2.4)

(4) El conjunto $M \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ de las matrices cuadradas de orden 3 y rango 1 es una variedad de dimensión 5 [**Detalle1**]

(5) La función $f(x, y) = x^3 + xy^2$ tiene derivada nula en $(0, 0)$ y $f^{-1}(0)$ es el eje $x = 0$ (y análogamente con $f(x, y, z) = z^2$ y $f^{-1}(0)$)

• *(Def.)* **Variedad producto** $M \times N$: Dadas cartas $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$ en $a \in M$, $\mathbf{y} : (N \supset)V \to \mathbb{R}^n$ en $b \in N$, la aplicación $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : (M \times N \supset)U \times V \to \mathbb{R}^{m+n}$ es carta en (a, b)

1.3. Particiones diferenciables de la unidad

· *(1.3.a)* Sean M variedad , U(abierto $\subset M$) y $f \in C_c^\infty(U)$ (soporte compacto). Entonces $f \equiv 0$ en la intersección de U con un entorno de $M \backslash U$, luego se extiende por 0 a todo M y puede escribirse $f \in C_c^\infty(M)$.

• *(Prop. y Def. 1.3.1):* Sean M variedad y $\mathcal{U} = \{U_i \subset M\}$ recubrimiento abierto de M. Entonces $\exists$ familia $\Theta = \{\theta_i \in C^\infty(M)\}$ tal que:
(1) $\forall i$, $0 \leq \theta_i \leq 1$
(2) $\forall x \in M$, $\exists$ entorno W de x t.q. $\theta_i \mid W \equiv 0$ ($\forall i$, salvo número finito)
(3) La suma $\sum_i \theta_i$ está bien definida y vale $\equiv 1$
(4) $\forall i$, $sop(\theta_i) := \{x \in M : \theta_i(x) \neq 0\}^{cl} \subset U_i$
· *(Terminología):* Θ se dice **partición diferenciable de la unidad (PDU)** (por 1-3), **localmente finita** (por 2) y **subordinada a $\mathcal{U}$** (por 4).
[La demostración usa: (i) M puede recubrirse por sucesión de compactos $\{L_k \subset M : k \in \mathbb{N}\}$ t.q. $L_k \subset L_{k+1}$ (1.1.5(3)), y (ii) la función C^∞ (no analítica!) $g : \mathbb{R} \to [0, 1)$, $t \mapsto \begin{cases} 0, \text{ si } t \leq 0 \\ e^{-1/t}, \text{ si } t > 0 \end{cases}$, que genera muchas funciones diferenciables $\mathbb{R} \to [0, 1]$ interesantes, **Detalle1**]

• *(Prop. 1.3.2)*: Sea M variedad. *(1)* Sean $A(\subset M)$ cerrado y U entorno abierto de A. Entonces existe (**función meseta**) $\theta \in C^\infty(M)$ tal que: $\theta \mid A \equiv 1$, $sop(\theta) \subset U$ y $\theta \geq 0$ [Eligiendo $V = M \backslash A$ y PDU $\{\theta, \eta\}$ subordinada (1.3.1) a $\{U, V\}$, se tiene: $A \cap sop(\eta) = \emptyset$, $\Rightarrow$ $\theta \mid A \equiv 1$]
(2) Sean $A, B(\subset M)$ cerrados disjuntos. Entonces existe (**función separante de Uryshon**) $\theta \in C^\infty(M)$ tal que: $\theta \mid A \equiv 1$, $\theta \mid B \equiv 0$ y $\theta \geq 0$ [Eligiendo $U = M \backslash B$, $V = M \backslash A$ y PDU $\{\theta, \eta\}$ subordinada (1.3.1) a $\{U, V\}$, se tiene: $A \cap sop(\eta) = \emptyset$, $\Rightarrow$ $\theta \mid A \equiv 1$ y $B \cap sop(\theta) = \emptyset$, $\Rightarrow$ $\theta \mid B \equiv 0$]
(3) Sean $A(\subset M)$ cerrado y $f \in C^\infty(A)$. Entonces existe (**extensión de Tietze**) $F \in C^\infty(M)$ tal que: $F \mid A = f$ [Eligiendo recubrimiento abierto $\{U_i \subset M\}$ de A, conjunto $\{F_i \in C^\infty(U_i)\}$ de extensiones diferenciables de f, $V = M \backslash A$ y PDU $\{\theta_i, \eta\}$ subordinada (1.3.1) a $\{U_i, V\}$ ($\Rightarrow \sum_i \theta_i \mid A \equiv 1$), cada producto $\theta_i F_i \in C^\infty(U_i)$ puede considerarse definido en todo M (1.3.a). Definiendo $F := \sum_i \theta_i F_i \in C^\infty(M)$ (suma finita en cada punto, por ser localmente finita la partición), se tiene ($\forall x \in A$): $F(x) = \sum_i (\theta_i f)(x) = f(x)$, con lo que F extiende en efecto a f]
· En la categoría C^0, los resultados (2) y (3) son caracterizaciones de que M es un espacio normal/T_4 (1.1.5(2))

• *(Ejemplo 1.3.3)* Dadas variedad M y abiertos $U, V \subset M$ tales que $\bar{V} \subset U$, toda $f \in C^\infty(U)$ se deja "extender C^∞ a M <u>sin modificar en V</u>" [Dada $\theta : M \to \mathbb{R}$ función ("meseta") tal que $\theta \mid \bar{V} \equiv 1$, $sop(\theta) \subset U$ y $\theta \geq 0$ (1.3.2(1)), $\theta f \in C^\infty(U)$ puede considerarse definida en todo M (1.3.a), con lo que podemos escribir $\theta f \in C^\infty(M)$, y este producto coincide con f en V]

1.4. Variedades con borde

• **Semiesp. (afín) cerrado** $\mathbb{H}^m := \{x \in \mathbb{R}^m : \lambda(x) \overset{s.p.d.g.}{=} x_1 \geq 0\}$

• **Borde** $(\mathbb{H}^m \supset)\partial\mathbb{H}^m := \{x \in \mathbb{R}^m : x_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ (la "frontera topológica" $fr(\mathbb{H}^m)$), cerrado en $\mathbb{H}^m$.

· El cálculo diferencial usual se extiende a abtos. de $\mathbb{H}^m$ [si $f \in C^\infty(\mathbb{H}^m)$ y $a \in \partial\mathbb{H}^m$, $d_a f := d_a F = \text{lím}_{x\to a, \lambda(x)>0}\, d_x f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ está bien definida]

• *(Def. 1.4.1)*: **Variedad con borde**: subconjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ tal que: $\forall x \in M$, $\exists$ abiertos $U(\subset M)$ (conteniendo a x) y $W(\subset$ algún $\mathbb{H}^m)$ y $\exists$ difeomorfismo (**parametrización de** M **en** x) $\varphi : W \to U$

$$\begin{cases} \textbf{Sistema de coord. (} \equiv \textbf{carta) en } x\text{: inversa } \mathbf{x} \equiv \varphi^{-1} \text{ de alguna} \\ \quad \text{parametrización } \varphi \text{ de } M \text{ en } x \text{ (Notación: } \mathbf{x}_i := x_i \circ \mathbf{x},\ i = 1, ..., m) \\ \textbf{Cambio de carta}\text{: difeom. } \psi^{-1} \circ \varphi : (\text{algún } \mathbb{H}^n \supset)W \to \bar{W}(\subset \text{algún } \mathbb{H}^m) \\ \textbf{Borde } (M \supset)\partial M := \{x \in M : \forall \text{ carta } \varphi, \text{ es } \varphi^{-1}(x) \in \text{algún } \partial\mathbb{H}^m\} \\ \textbf{Interior } (M \supset)Int(M) := M \backslash \partial M \end{cases}$$

· *(Lema 1.4.2)* La definición de borde es "buena" [$\forall a \in \partial M$, $m \equiv \dim_a M$ está bien definida por el TIL; y si fuera $\varphi^{-1}(a) \notin \partial\mathbb{H}^m$ pero $\psi^{-1}(a) \in \partial\mathbb{H}^m$, sería (!): $d_{\varphi^{-1}a}\left(\psi^{-1} \circ \varphi\right)(\mathbb{R}^m) \subset \partial\mathbb{H}^m = \{0\}\times\mathbb{R}^{m-1}$, absurdo por TIL].

· ∂M ($\overset{loc}{=} \mathbf{x}^{-1}(\partial\mathbb{H}^m)$) es cerrado en M y variedad (sin b.) de dim. $m-1$.

· *(1.4.a)* $\partial M \subset fr(M)$ [**Detalle1**] , $\Rightarrow \overset{\circ}{M} \equiv M\backslash fr(M) \subset Int(M)$ (ver Ejerc. 1.4.8)

• *(Ejemplos 1.4.3 "planos")*: *(1)* Banda lineal $M = \{r_1 \leq ax+by \leq r_2\} \subset \mathbb{R}^2$, *(2)* Disco $\mathbb{D}^2 = \{x^2+y^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^2$, también $M = \{x^2+y^2 \geq r^2\} \subset \mathbb{R}^2$, *(3)* Corona $M = \{0 < r_1^2 \leq x^2+y^2 \leq r_2^2\} \subset \mathbb{R}^2$. Generalizar en dimensión.

• Sobre la construcción de variedades con borde:

· *(Prop. 1.2.1 modif.)*: Sean $g : (\mathbb{H}^m \supset \text{abierto})V \to \mathbb{R}^p$ diferenciable y $a \in V$. Si $d_a g$ es inyectiva, existe un $\mathbb{H}^m$-entorno $W(\subset V)$ de a tal que $g \mid W : W \to g(W)$ es un difeomorfismo.

· *(Prop. 1.2.3 modif.)* Si M (con borde) $\subset N$ (sin borde!!) y $a \in M$, $\exists$ carta $\mathbf{x} : (N \supset)U \to \mathbb{R}^n$ en a tal que: $\mathbf{x}(U \cap M) = \mathbf{x}(U) \cap (\mathbb{H}^m \times \{\overset{n-m}{0}\})$.

· *(Def.)* Se dice que una variedad con borde $\overset{m}{M}$ ($\subset \overset{n}{N}$ sin borde) es **intersección completa en** N si existe $f \equiv (f_1, ..., f_{n-m+1}) : N \to \mathbb{R}^{n-m+1}$ (C^∞) tal que $M = f^{-1}(\{\overset{n-m}{0}\} \times [0,\infty))$ y $d_x f$ es suprayectiva, $\forall x \in M$

· *(Prop. 1.4.4 ≡ Prop. 1.2.4 modif.)* Sean $f \equiv (\bar{f}, f_q) : (\mathbb{R}^p \supset \text{abierto})V \to \mathbb{R}^q$ diferenciable y $a \in V$. Si $d_a f$ es suprayectiva, existe un $\mathbb{R}^p$-entorno $U(\subset V)$ de a tal que $M \equiv U \cap f^{-1}(\{\bar{f}(a)\} \times [f_q(a), \infty))$ es variedad de dim. $p-q+1$ con borde $\partial M \equiv U \cap f^{-1}(f(a))$. Además M es una intersección completa en U y $f_q - f_q(a) \mid M : M \to [0,\infty)$ es coordenada de una carta de M en torno a $a \in \partial M$ [**Demostración2**]

· *(1.4.b)* M es inters. compl. en $N \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} Int(M)$ es inters. compl. en N

· *(1.4.c)* Toda variedad con borde $\overset{m}{M}(\subset \overset{n}{N}$ sin borde$)$ $(m < n)$ es localmente (no siempre glob.) una intersección completa en N [**Detalle3**]

2. CÁLCULO EN VARIEDADES

2.1. Espacio tangente

• *(Def. 2.1.1)*: Dada variedad (sin o con borde) $\overset{m}{M}\,(\subset \mathbb{R}^p)$, **espacio tangente a** M **en** $a \in M$: subespacio vectorial $T_aM := \mathrm{Im}(d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi) \subset \mathbb{R}^p$, con $\varphi : (\mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{H}^m \supset)W \to U$ parametrización de M en a.

· La definición de espacio tangente es "buena" [al ser $h \equiv \psi^{-1} \circ \varphi$ difeomorfismo, resulta: $\mathrm{Im}(d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi) \overset{cadena}{=} \mathrm{Im}(d_{\psi^{-1}(a)}\psi \circ d_{\varphi^{-1}(a)}h) \overset{TIL}{=} \mathrm{Im}(d_{\psi^{-1}(a)}\psi)$]

· $\dim T_aM = m$ [$d_a\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es inyectiva (1.2.a) para toda φ]

· Sean $M \subset N\,(\subset \mathbb{R}^p)$. Entonces $T_aM \subset T_aN$ [inmediato]. Además $T_aM = T_aN$ si [trivial] y (para M sin borde) sólo si [(1.2.b)] M y N coinciden localmente en torno a a.

• *(2.1.3)* **Ecuaciones paramétricas**: Sea $\varphi : (\mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{H}^m \supset)W \to U$ param. de M en a ($\rightsquigarrow$ carta $\mathbf{x} : U \to W$). Definiendo

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\,|_a := d_{\mathbf{x}(a)}\varphi(e_i) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}(a)), ..., \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i}(\mathbf{x}(a))\right) \;\; (1 \leq i \leq m) \;\; ,$$

resulta: $B_a^{\mathbf{x}} \overset{Notación}{\equiv} \{\partial/\partial \mathbf{x}_i\,|_a\}$ es base de T_aM [$rango(J_\varphi(\mathbf{x}(a))) = m$]

· *(Ejemplo 2.1.2)*: $T_{(a,b,c)}\mathbb{S}^2$ es el plano perpendicular a (a, b, c) [**Detalle1**]

• *(2.1.4)* **Ecuaciones implícitas**: (sin borde) Si $V(\subset \mathbb{R}^p)$ es entorno de $a \in M$ tal que $V \cap M = f^{-1}(f(a))$, con $f : V \to \mathbb{R}^{q \equiv p-m}$ diferenciable y d_af suprayectiva, entonces: $\underline{T_aM = \{u \in \mathbb{R}^m : d_af(u) = 0\}}$

[Si $\varphi \equiv \mathbf{x}^{-1}$ es la param. de $U \cap M$ en a de (1.2.4), se sigue: $Id_{\mathbb{R}^{p-q}} \equiv d_a\mathbf{x} \circ d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi = d_ah \circ d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi$. Puesto que $d_ah : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ y $d_ah \mid \ker(d_af) : \ker(d_af) \to \mathbb{R}^{p-q \equiv m}$ son isomorfismos, debe ser: $\ker(d_af) = \mathrm{Im}(d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi)$].

· O bien: (con borde) Si $V(\subset \mathbb{R}^p)$ es entorno de $a \in M$ tal que $V \cap M = f^{-1}(\{\bar{f}(a)\} \times [f_q(a), \infty))$, con $f \equiv (\bar{f}, f_q) : V \to \mathbb{R}^{q \equiv p-m+1}$ diferenciable y d_af suprayectiva, entonces: $\underline{T_aM = \{u \in \mathbb{R}^m : d_a\bar{f}(u) = 0\}}$ [**Detalle2**]

· *(Ejemplos 2.1.5): (1)* Otra vez $T_{(a,b,c)}\mathbb{S}^2$, *(2)* $T_{(a,b,c)}C$, siendo $C(\subset \mathbb{R}^3)$ una curva intersección completa.

• *(2.1.a)* Dados $M\,(\subset \mathbb{R}^p)$, $a \in M$, $u \equiv (u_1, ..., u_p) \in T_aM$ y carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{H}^m$ en a, existen únicas [(2.1.3)] $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $u = \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}(a)$, $\Rightarrow$ se pueden despejar las λ_i's como funciones (C^∞) de las $u_1, ..., u_p$ y de a

• *(2.1.6)*: **Fibrado tangente** $TM := \cup_{x \in M}\{x\} \times T_xM \subset M \times \mathbb{R}^p$

· Aplicación (C^∞) suprayectiva $\pi : TM \to M$ (restricción de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, (x, u) \mapsto x$), con fibras $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times T_xM \equiv T_xM$

· TM es variedad de dim. $2m$ [cada carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbf{x}(U)$, induce (2.1.a) carta $T\mathbf{x} : (TM \supset)\pi^{-1}(U) \to \mathbf{x}(U) \times \mathbb{R}^m, (a, u) \mapsto (\mathbf{x}(a), \lambda_1, ..., \lambda_m)$]

· *(Ejemplo 2.1.7(1))*: Difeomorfismo $\mathbb{S} \times \mathbb{R} \to T\mathbb{S}$ [**Detalle3**]

· *(Obs. 2.1.8)*: otro enfoque del Ejerc. 1.2.2 (ver Ejerc. 2.1.6 y 2.2.10)

2.2. Derivada de aplicaciones entre variedades

• *(2.2.1)* Dados aplic. (C^∞) $f : \overset{m}{M} \to \overset{n}{N}$ y $a \in M$, se define la (aplic. lineal) **derivada** $d_a f := d_a F \mid T_a M : T_a M \to T_{f(a)} N$ (F ext. local de f):

$$d_a f(u \equiv \sum_{1\le j\le p} u_j e_j) := \sum_{1\le i\le q} (\sum_{1\le j\le p} \underbrace{(\partial F_i/\partial x_j(a))}_{(J_F(a))_{ij}} u_j)\, \bar{e}_i$$

· La def. de derivada es "buena" (no depende de F y tiene imagen en $T_{f(a)}N$) [Dadas ext. local F y localiz. $\mathfrak{f} \equiv \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ en torno a a, se tiene: $F \circ \varphi = f \circ \varphi = \psi \circ \mathfrak{f}$, $\overset{1.1}{\Rightarrow}$ $d_a F(u) = (d_{\psi^{-1}(f(a))}\psi \circ d_{\varphi^{-1}a}\mathfrak{f} \circ (d_{\varphi^{-1}a}\varphi)^{-1})(u)$ ($\forall u \in T_a M$), donde el miembro izquierdo de la igualdad no depende de $\mathfrak{f}$, el derecho no depende de F y ambos están (2.1.1) en $T_{f(a)}N$]

· Si $U \subset M$ es abto. conexo, $f \mid U = cte. \Leftrightarrow d_a f = 0, \forall a \in U$ [$d_a f = d_{\psi^{-1}(f(a))}\psi \circ d_{\varphi^{-1}a}\mathfrak{f} \circ (d_{\varphi^{-1}a}\varphi)^{-1}$, con lo que: $d_a f = 0 \Rightarrow d_{\varphi^{-1}a}\mathfrak{f} = 0$]

· Regla de la **cadena** $d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$ (como en 1.1) [ext. local]

· Derivada de la aplicación identidad $d_a Id_M = Id_{T_a M}$ y de la inclusión $d_a(Incl_{M\hookrightarrow N}) = Incl_{T_a M \hookrightarrow T_a N}$ (como en 1.1) [ext. local]

· *(2.2.a)* **TIL para variedades (sin borde):** f es un difeomorfismo local en a si y sólo si $d_a f$ es un isomorfismo ($\Rightarrow m = n$) [localiz. y TIL]

• *(Ejemplos 2.2.2): (1)* Dados $\overset{m}{M} (\subset \mathbb{R}^p)$ y $a \in M$, cualquier proyección afín suprayectiva $\pi : \mathbb{R}^p \to H = a + T_a M$ define una carta de M en a [$d_a(\pi \mid M) := d_a \pi \mid T_a M =: d_a(\pi \mid H) = d_a Id_H = Id_{T_a M}$, y por (2.2.a)]

(2) otro enfoque del resultado del Ejercicio 1.1.4

• *(2.2.b)* La matriz de $d_a f$ en las bases asociadas (2.1.3) a dos param. φ de M en a ($\rightsquigarrow$ carta $\mathbf{x}$) y ψ de N en $f(a)$ ($\rightsquigarrow$ carta $\mathbf{y}$), con $f(U) \subset V$, es la jacobiana de la localización $\mathfrak{f} \equiv \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$:

$$\underbrace{(d_a f(\partial/\partial \mathbf{x}_1 \mid_a), ..., d_a f(\partial/\partial \mathbf{x}_m \mid_a))}_{\equiv(\underline{Notación})\ d_a f(B_a^{\mathbf{x}})} = \underbrace{\big(\partial/\partial \mathbf{y}_1 \mid_{f(a)}, ..., \partial/\partial \mathbf{y}_n \mid_{f(a)}\big)}_{\equiv B^{\mathbf{y}}_{f(a)}} J_{\mathbf{y}\circ f\circ \mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}(a))\ .$$

[$d_a f(\partial/\partial \mathbf{x}_j \mid_a) \overset{(2.1.3)}{:=} \big(d_a f \circ d_{\mathbf{x}(a)}\varphi\big)(e_j) \overset{\text{cad.}}{=} d_{\mathbf{x}(a)}(\psi \circ \mathfrak{f})(e_j) \overset{\text{cad.}}{=} (d_{\mathfrak{f}(\mathbf{x}(a))}\psi \circ d_{\mathbf{x}(a)}\mathfrak{f})(e_j) \overset{1.1}{:=} d_{\mathbf{y}(f(a))}\psi \left(\sum_{1\le i\le n} J_{\mathfrak{f}}(\mathbf{x}(a))_{ij}\bar{e}_i\right) \overset{(2.1.3)}{=:} \sum_i J_{\mathfrak{f}}(\mathbf{x}(a))_{ij}(\partial/\partial \mathbf{y}_i \mid_{f(a)})$]

· En particular, si $f = Id_M$ se tiene: $\underline{B_a^{\mathbf{x}} = B_a^{\mathbf{y}} J_{\mathbf{y}\circ\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}(a))}$

• *(2.2.3)* Dada **curva (parametrizada) en** M, esto es, aplic. diferenciable $c : I \to M, t \mapsto c(t)$, se define su **velocidad** $c'(t) := d_t c(1) \in T_{c(t)}M$.

· *(2.2.c)* $\forall a \in M$, biyección: $T_a M \to \{c'(0) : c \text{ curva en } M \text{ con } c(0) = a\}$ [Dado $u \in T_a M$ basta tomar, $\forall$ carta $\mathbf{x}$ en a, $c := \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{c}$, con $\bar{c}(t) \equiv \mathbf{x}(a) + t d_a \mathbf{x}(u)$, y se tiene: $c'(0) := d_0 c(1) \overset{\text{cad.}}{=} d_a \mathbf{x}^{-1}(\bar{c}'(0)) = d_a \mathbf{x}^{-1}(d_a \mathbf{x}(u)) \overset{\text{cad.}}{=} u$]

· *(2.2.d)* Dados $f : M \to N$ (C^∞) y $a \in M$, **interpret. geom. de** $d_a f$:

$$\underline{d_a f(u)} \overset{(2.2.c)}{\equiv} d_a f(c'(0)) := (d_a f \circ d_0 c)(1) \overset{\text{cadena}}{=} d_0(f \circ c)(1) =: \underline{(f \circ c)'(0)}$$

2.3. Derivaciones

· Dados variedad $\overset{m}{M}\,(\subset \mathbb{R}^p)$ y $a \in M$, el conjunto $C^\infty(M,a) \equiv \{f : M \to \mathbb{R}$ es C^∞ en torno a $a\}$ es anillo conmutativo y $\mathbb{R}$-espacio vectorial

• *(Def. 2.3.1)* **Derivación en** a: aplicación $\mathbb{R}$-lineal $D : C^\infty(M,a) \to \mathbb{R}$ tal que (Leibnitz) $D(fg) = f(a)D(g) + g(a)D(f)$ $\rightsquigarrow$ Conjunto $Der(a)$

• *(Observaciones 2.3.2): (1)* $f = c$ *(cte.)* $\Rightarrow D(f) = 0$, $\forall D \in Der(a)$ $[D(1) \overset{Leibnitz}{=} 2D(1)$, $\Rightarrow$ $D(1) = 0$, $\Rightarrow$ $D(c) \overset{lineal}{=} cD(1) = 0]$

(2) Si U es entorno de a, $f \mid U = g \mid U \Rightarrow D(f) = D(g)$ $(\forall D \in Der(a))$ [Dada $\theta \in C^\infty(M,a)$ función ("meseta") tal que $\theta(a) = 1$, $sop(\theta) \subset U$ y $\theta \geq 0$ (1.3.2(1)), $\theta(f-g)(\equiv 0) \in C^\infty(U)$ puede considerarse definida en todo M (1.3.a) y se tiene: $0 \overset{(2.3.2(1))}{=} D(\theta(f-g)) \overset{Leib.}{=} D(f-g) \overset{\mathbb{R}-lineal}{=} D(f) - D(g)$]

(3) $Der(a)$ es $\mathbb{R}$-espacio vectorial

• *(Ejemplo 2.3.3)* $\forall u \in T_aM$, se define: $D_u \in Der(a)$ por $D_u(f) := d_af(u)$

· Si $c(t)$ es curva en M con $c(0) = a$, se tiene: $D_{c'(0)}(f) \overset{(2.2.3)}{=} (f \circ c)'(0)$

· Si $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$ es carta de M en a, se tiene:

$$D_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}|_a}(f) := d_af\left(\partial/\partial \mathbf{x}_i\mid_a\right) \overset{(2.1.3)}{:=} \left(d_af \circ d_{\mathbf{x}(a)}\mathbf{x}^{-1}\right)(e_i) \overset{\text{cad.}}{=} \frac{\partial(f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_i}(\mathbf{x}(a)) \overset{\underline{Not.}}{\equiv} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}(a)\ , \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial \mathbf{x}_i}(a) \overset{\mathbf{x}_j := x_j \circ \mathbf{x}}{=} \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}(a)) = \delta_{ij} \\ \\ d_af(u \equiv \sum_{1 \leq i \leq m} u_i \partial/\partial \mathbf{x}_i\mid_a) = \sum_{1 \leq i \leq m} u_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}(a) \end{cases}$$

• *(Teor. 2.3.4)* La aplic. $\delta_a : T_aM \to Der(a)$, $u \mapsto D_u$ es isomorfismo ("interpretación analítica" de T_aM, $\rightsquigarrow$ no diferencia entre u y D_u), esto es:

· $\mathbb{R}$-lineal $[D_{\lambda u + \mu v}(f) := d_af(\lambda u + \mu v) = \lambda d_af(u) + \mu d_af(v) =: (\lambda D_u + \mu D_v)(f)]$

· inyectiva [$\forall$ carta $\mathbf{x}$ en a: $D_u = 0 \overset{(2.3.1)}{\Rightarrow} 0 = \sum_i u_i D_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}|_a}(\mathbf{x}_j) \overset{(2.3.3)}{=} u_j, \forall j$]

· suprayectiva [$\forall f \in C^\infty(M,a)$ y $\forall \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^m$ carta en a con $\mathbf{x}(U)$ *convexo*, se tiene (via **desarrollo Taylor con parámetros**, *Lema 2.3.5*): $f \equiv f(a) + (f \circ \mathbf{x}^{-1})(\mathbf{x}) - (f \circ \mathbf{x}^{-1})(\mathbf{x}(a)) \overset{(2.3.5)}{=} f(a) + \sum_{1 \leq i \leq m} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i(a)) g_i$ (*), con $g_i \in C^\infty(M,a)$ y $g_i(a) = \frac{\partial(f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_i}(\mathbf{x}(a))$. Así, para cada $D \in Der(a)$ es:

$$D(f) \overset{(*)}{=} D(f(a)) + \sum_i D(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i(a)) \frac{\partial(f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_i}(\mathbf{x}(a)) \overset{(2.3.2(1))}{=}$$

$$= \sum_i D(\mathbf{x}_i) \frac{\partial(f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_i}(\mathbf{x}(a)) \overset{(2.3.3)}{=} \sum_i D(\mathbf{x}_i) D_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}|_a}(f) = D_{\sum_i D(\mathbf{x}_i) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}|_a}(f)\ ]$$

• *(Prop. 2.3.6)* Dados $f : M \to N$ (C^∞) y $a \in M$, la aplic. $f_{*,a} : Der(a) \to Der(f(a))$ dada por: $(f_{*,a}(D_u))(g) := D_u(g \circ f)$ $(\forall g \in C^\infty(N, f(a)))$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} T_aM & \overset{d_af}{\to} & T_{f(a)}N \\ \delta_a \downarrow & & \downarrow \delta_{f(a)} \\ Der(a) & \overset{f_{*,a}}{\to} & Der(fa) \end{array}}$$

cierra el diagrama [$(f_{*,a}(D_u))(g) := D_u(g \circ f) :=$ $:= d_a(g \circ f)(u) = \left(d_{f(a)}g \circ d_af\right)(u) =: D_{d_af(u)}(g)$]

($\rightsquigarrow$ no diferencia entre d_af y $f_{*,a}$)

3. CAMPOS Y ECS. DIFERENCIALES

3.1. Campos en variedades

• *(Def. 3.1.1)* **Campo (tangente) en** $M\,(\subset \mathbb{R}^p)$: aplicación $X : M \to TM(\subset M\times\mathbb{R}^p), x \mapsto (x, X_x)$, con $X_x \in T_xM$. Se dice que X es **diferenciable** si la función $x \mapsto X_x$ es diferenciable $\rightsquigarrow$ Conjunto $\mathfrak{X}(M)$

· $\mathfrak{X}(M)$ es un $C^\infty(M)$-módulo, con $(fX+gY)_x := f(x)X_x + g(x)Y_x$

· *(Ejem. 3.1.2(1))* Campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2k-1})$ nunca nulo (imposible en $\mathbb{S}^{2k}$)

• *(Def. 3.1.3)* Dada carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{H}^m$, se tienen **campos coordenados** $\partial/\partial\mathbf{x}_i : U \to \mathbb{R}^p, a \mapsto d_{\mathbf{x}(a)}\varphi(e_i)$ $(i = 1, ..., m)$ en U (2.1.3). En particular, los campos "constantes" $\partial/\partial x_i : x \mapsto (x, e_i)$ en $\mathbb{R}^m$.

· $\forall$ campo X tiene **expresión local**: $\underline{X \mid U = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}}$, con $X_i : U \to \mathbb{R}$

· *(3.1.a)* Puesto que la "localización" (1.1.6) de la aplicación X en cartas $\mathbf{x}$ de M y $T\mathbf{x}$ de TM (2.1.6) es $\mathbf{x}(a) \mapsto (\mathbf{x}(a), X_1(a), ..., X_m(a))$, se concluye: $\underline{X \mid U \in \mathfrak{X}(U) \Leftrightarrow X_1, ..., X_m \in C^\infty(U)}$. En partic., $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \in \mathfrak{X}(U)$ $(i = 1, ..., m)$.

· *(Ejemplo 3.1.4)* Un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ [**Detalle1**]

• *(Def. 3.1.5)* $\overset{m}{M}$ se dice **paralelizable** si admite una **referencia móvil**, esto es, un conjunto de campos $X^{(1)}, ..., X^{(m)} \in \mathfrak{X}(M)$ "independientes"

· *(Ejemplos 3.1.6): (1)* El dominio de cualquier carta [2.1.3] , *(2)* Las esferas $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$ (y sólo éstas), *(3)* El producto (1.2) de var. paralelizables

· *(3.1.7)* Dada ref. móvil $X^{(1)}, ..., X^{(m)} \in \mathfrak{X}(M)$, todo campo X en M verifica: $X = \sum_j \alpha_j X^{(j)}$ (con $\alpha_j : M \to \mathbb{R}$). Y se concluye: $X \in \mathfrak{X}(M) \Leftrightarrow \alpha_1, ..., \alpha_m \in C^\infty(M)$ [$\forall$ carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$ es: $\sum_i X_i \partial/\partial\mathbf{x}_i \overset{(3.1.3)}{=} X \mid U \overset{(3.1.3)}{=} \sum_{ij} (\alpha_j \mid U)\, c_{ij} \partial/\partial\mathbf{x}_i$, $\Rightarrow X_i = \sum_j (\alpha_j \mid U)\, c_{ij}$. Al ser $c_{ij} \in C^\infty(U)$ y $\det(c_{ij}) \neq 0$, es: $X \mid U \in \mathfrak{X}(U) \overset{(3.1.a)}{\Leftrightarrow} X_i \in C^\infty(U), \forall i \Leftrightarrow \alpha_j \mid U \in C^\infty(U), \forall j$]

• *(3.1.b)* Dados campo X en M, $f \in C^\infty(M)$ y carta $\mathbf{x}$ de M, la función $Xf : M \to \mathbb{R}, x \mapsto X_x(f) \overset{(2.3.4)}{\equiv} D_{X_x}(f)$ verifica: $(Xf) \mid U \overset{(2.3.3)}{=} \sum_i X_i \partial f/\partial\mathbf{x}_i$

· En particular: $X(\mathbf{x}_j) \overset{(2.3.3)}{=} X_j$. De donde se sigue: $X \in \mathfrak{X}(M) \overset{(3.1.a)}{\Leftrightarrow} Xf \in C^\infty(M)$, $\forall f \in C^\infty(M)$.

• *(Def. 3.1.8)* Una curva (parametrizada) (2.2.3) $c : t \mapsto c(t) \in M$ se dice **curva integral (CI) de** $X \in \mathfrak{X}(M)$ si $X_{c(t)} = c'(t), \forall t$

· *(Obs. 3.1.9)* Una reparam. $c \circ \varphi$ de una CI c de X es a su vez CI de X si y sólo si: $t \equiv \varphi(s) = s + cte$. $[(c \circ \varphi)'(s) = d_s(c \circ \varphi)(1) \overset{\text{cad.}}{=} \varphi'(s) X_{(c\circ\varphi)(s)}]$

• *(Lema 3.1.10)* Sea $f : M \to N$ difeomorfismo. Entonces:

(1) la aplicación $f_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ dada por: $\underline{(f_*X)_{f(a)} := f_{*,a}(X_a)} \overset{(2.3.6)}{=} d_af(X_a)$ está bien definida [**Demostración2**]

(2) la curva c es CI de X si y sólo si la curva $f \circ c$ es a su vez CI de f_*X $[(f \circ c)'(t) := d_t(f \circ c)(1) \overset{\text{cadena}}{=} d_{c(t)}f(c'(t)) \overset{(2.3.6)}{=} f_{*,c(t)}(c'(t))]$

· *(Ejemplo 3.1.11)* Aplicación de lo anterior [**Detalle3**]

3.2. Flujos completos

• *(Def. 3.2.1)* **Flujo completo en** $M\,(\subset \mathbb{R}^p)$: aplicación diferenciable $\varphi : \mathbb{R}\times M \to M, (t,x) \mapsto \varphi_t(x)$ (el dominio es "todo" $\mathbb{R}\times M$) tal que:

(1) $\varphi_0(x) = x,\ \forall x \in M$ (esto es, $\varphi_0 = Id_M$)

(2) $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x),\ \forall x \in M$ y $\forall s,t \in \mathbb{R}\quad (\Rightarrow \varphi_t^{-1} = \varphi_{-t})$

· El conjunto $G_\varphi := \{\varphi_t : t \in \mathbb{R}\}$ resulta ser un grupo de difeomorfismos de M y la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to G_\varphi, t \mapsto \varphi_t$ un homomorfismo de grupos

· Se llama **flujo trivial** al flujo completo $\varphi_t(x) = x, \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times M$

• *(Prop. y Def. 3.2.2)* Sea $\varphi : \mathbb{R}\times M \to M$ un flujo completo y, para cada $a \in M$, sea $X_a := c_a'(0) \in T_aM$, con $c_a(t) := \varphi_t(a)$. Entonces:

(1) Como derivación: $X_a(f) \overset{(2.3.3)}{:=} d_af(c_a'(0)) \overset{\text{cad.}}{=} (f\circ c_a)'(0), \forall f \in C^\infty(M,a)$

(2) El campo (**generador infinitesimal de** φ) $X \equiv \{X_a : a \in M\} \in \mathfrak{X}(M)$, esto es, es C^∞ [Inmediato: en cada carta $\mathbf{x} : (M\supset)U \to \mathbb{R}^m$, se tiene: $X_a(\mathbf{x}_i) \overset{(3.2.2(1))}{=} (\mathbf{x}_i\circ c_a)'(0) = \frac{\partial(\mathbf{x}_i\circ\varphi)}{\partial s}(0,a) = \frac{d}{ds}\mid_{s=0} (\mathbf{x}_i\circ\varphi_s)(a)$, y se concluye: $X_i \overset{(3.1.b)}{=} X(\mathbf{x}_i) = \frac{d}{ds}\mid_{s=0} (\mathbf{x}_i\circ\varphi_s) \mid U \in C^\infty(U)\ ,\ \overset{(3.1.a)}{\Rightarrow}\ X \mid U \in \mathfrak{X}(U)\ ]$

· *Notaciones:* $\frac{d}{ds}\mid_{s=0} \varphi_s(a) \equiv X_a$ y $\frac{d}{ds}\mid_{s=0} \varphi_s \equiv X$

• *(Ejemp. 3.2.3): (1)* $M = \mathbb{R}^m,\ \varphi_t(x) = x+tu\ (u \in \mathbb{R}^m) \rightsquigarrow X = \sum_i u_i\frac{\partial}{\partial x_i}$

(2) $M = \mathbb{R}^2, \varphi_t(x,y) = (x\cos t + y sen t, -x sen t + y\cos t) \rightsquigarrow X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$

• *(Prop. y Def. 3.2.4)* Sea $\varphi : \mathbb{R}\times M \to M$ flujo completo ($\rightsquigarrow X \in \mathfrak{X}(M)$):

(1) $\underline{(\varphi_{t,*}X)_{\varphi_t(a)} = X_{\varphi_t(a)}}, \forall (t,a) \in \mathbb{R}\times M$ ("X es invariante por φ")
$[(\varphi_{t,*}X)_{\varphi_t(a)} \overset{(3.1.10(1))}{:=} \varphi_{t,*,a}(X_a) \overset{(2.3.6)}{=} d_a\varphi_t(X_a) \overset{(3.2.2)}{:=} d_a\varphi_t(c_a'(0)) \overset{\text{cadena}}{=} \frac{d}{ds}\mid_{s=0} (\varphi_t\circ\varphi_s)(a) \overset{(3.2.1(2))}{=} \frac{d}{ds}\mid_{s=0} \varphi_s(\varphi_t(a)) \overset{(3.2.2)}{=:} X_{\varphi_t(a)}]$

(2) $\forall a \in M,\ c_a(t) := \varphi_t(a)$ es CI de X (su imagen se llama **órbita** $\bigcirc_a$)
$[X_{\varphi_t(a)} \overset{(3.2.2)}{\equiv} \frac{d}{ds}\mid_{s=0} \varphi_s(\varphi_t(a)) \overset{(3.2.1(2))}{=} \frac{d}{ds}\mid_{s=0} \varphi_{t+s}(a) \equiv \frac{d}{d\bar{s}}\mid_{\bar{s}=t} \varphi_{\bar{s}}(a) =: c_a'(t)]$

· Las órbitas de φ son disjuntas $[\varphi_s(a) = \varphi_t(b) \Rightarrow b \overset{(3.2.1)}{=} \varphi_{s-t}(a) \Rightarrow \bigcirc_b \subset \bigcirc_a$; de hecho $\bigcirc_b = \bigcirc_a]$ y forman una partición de M

• *(Pr. 3.2.5)* Sean $\varphi : R\times M \to M$ flujo compl. ($\rightsquigarrow X \in \mathfrak{X}(M)$) y $a \in M$

(1) Si $X_a = 0$ (respectivamente, $\neq 0$), la CI $c_a(t) := \varphi_t(a)$ de X es constante (respectivamente, regular) $[\varphi_{t,*,a}(X_a) \overset{(3.2.4(1))}{=} X_{\varphi_t(a)} \overset{(3.2.4(2))}{=} c_a'(t)]$

(2) Si $X_a \neq 0$, es $H_a := \{t \in \mathbb{R} : \varphi_t(a) = a\} \neq \mathbb{R}$. Entonces:

(i) $H_a = \{0\}, \Rightarrow$ la CI c_a es inyectiva (cuidado: la órbita $\bigcirc_a$ no tiene por qué ser difeomorfa a $\mathbb{R}$, **Detalle1**);

(ii) $H_a \neq \{0\}$. Pero H_a (**isotropía de** a) es subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ $[\varphi_t(a) = \varphi_s(a) = a \overset{(3.2.1(2))}{\Rightarrow} \varphi_{t+s}(a) = a, \forall s,t \in \mathbb{R}]$ cerrado [obvio], $\Rightarrow H_a$ es [!] *discreto* ($\equiv$ cada $t \in H_a$ posee un entorno que consta sólo de $\{t\}$), $\Rightarrow H_a = \gamma\mathbb{Z}$ (con $\gamma := \text{mín}\{t(>0) \in H_a\}$), $\Rightarrow$ la CI c_a es periódica, $\Rightarrow$ la órbita $\bigcirc_a$ es [**Detalle2**] difeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

3.3. Flujos

· Para que un flujo dé lugar a un campo y parametrice sus curvas integrales no precisa ser "completo"

• *(Def. 3.3.2)* **Flujo en** M $(\subset \mathbb{R}^p)$: aplicación diferenciable $\varphi : (\mathbb{R}\times M \supset) W \to M, (t,x) \mapsto \varphi_t(x)$ (con W entorno abierto de $\{0\}\times M$) tal que:

(1) $\varphi_0(x) = x$, $\forall x \in M$ (esto es, $\varphi_0 = Id_M$)

(2) $I(x) := \{t \in \mathbb{R} : (t,x) \in W\}$ es un intervalo (conexo) abierto, posiblemente infinito, de extremos $\alpha(x) < 0 < \beta(x), \forall x \in M$

(3) $I(\varphi_s(x)) = I(x) - s$, $\forall x \in M$ y $\forall s \in I(x)$

(4) $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$, $\forall x \in M$, $\forall s \in I(x)$ y $\forall t \in I(\varphi_s(x))$

• *(Ejemplo 3.3.1)* Sean $M = \mathbb{R}$ y $\varphi(t,x) := \frac{x}{1+xt}$ (**Detalle1**)

• *(Prop. y Def. 3.2.2 modif.)* Sea $\varphi : (\mathbb{R}\times M \supset) W \to M$ un flujo y, para cada $a \in M$, sea $X_a := c_a'(0) \in T_aM$, con $c_a(t) := \varphi_t(a)$. Entonces:

(1) Como derivación: $X_a(f) = (f \circ c_a)'(0), \forall f \in C^\infty(M,a)$ [igual]

(2) El campo (**generador infinitesimal de** φ) $X \equiv \{X_a : a \in M\} \in \mathfrak{X}(M)$, esto es, es C^∞ [igual]

· Notaciones*:* $\frac{d}{ds}\mid_{s=0} \varphi_s(a) \equiv X_a$ y $\frac{d}{ds}\mid_{s=0} \varphi_s \equiv X$

• *(Prop. 3.3.3)* Sean $\varphi : (\mathbb{R}\times M \supset) W \to M$ un flujo y $t \in \mathbb{R}$. Entonces:

(1) $W_t := \{x \in M : (t,x) \in W\}$ es abierto $[W_t = \varphi(t,.)^{-1}(M)]$, quizás $\emptyset$

(2) $\varphi_t(W_t) = W_{-t}$ y $\varphi_t : W_t \to W_{-t}$ es difeom. con inversa φ_{-t}. [Se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{t \in I(x)}_{x\in W_t} \overset{(3.3.2(3))}{\Rightarrow} \underbrace{-t \in I(\varphi_t(x))}_{\varphi_t(x)\in W_{-t}}, \Rightarrow \varphi_t(W_t) \subset W_{-t} \\ \varphi_{-t}(\varphi_t(x)) \overset{(3.3.2(4))}{=} x \;, \Rightarrow \varphi_{-t}(\varphi_t(W_t)) = W_t \end{array}\right\}, \overset{t\leftrightarrow -t}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} \varphi_t(W_t) = W_{-t} \\ \varphi_{-t} = \varphi_t^{-1} \end{array}\right. \quad]$$

• *(Prop. 3.2.4 modif.)* Sea $\varphi : (\mathbb{R}\times M \supset) W \to M$ flujo ($\rightsquigarrow X \in \mathfrak{X}(M)$):

(1) $\left(\varphi_{t,*}X\right)_{\varphi_t(a)} = X_{\varphi_t(a)}, \forall (t,a) \in W$ ("X es invariante por φ") [igual]

(2) $\forall a \in M$, $c_a(t) := \varphi_t(a)$ es CI de X (imagen **órbita** $\bigcirc_a$) [igual]

· Las órbitas de φ son disjuntas y forman una partición de M

• *(Prop. 3.2.5 modif.)* Sean $\varphi : W \to M$ flujo ($\rightsquigarrow X \in \mathfrak{X}(M)$) y $a \in M$

(1) Si $X_a = 0$ (respectivamente, $\neq 0$), la CI $c_a(t) := \varphi_t(a)$ de X es constante (respectivamente, regular) [igual]

(2) Si $X_a \neq 0$, es $H_a := \{t \in I(a) : \varphi_t(a) = a\} \neq \mathbb{R}$. Entonces:

(i) $H_a = \{0\}$, $\Rightarrow$ la CI c_a es inyectiva (cuidado: la órbita $\bigcirc_a$ no tiene por qué ser difeomorfa a $\mathbb{R}$) [igual]

(ii) $H_a \neq \{0\}$, $\Rightarrow I(a) = \mathbb{R}$ $[\varphi_{t_1}(a) = \varphi_{t_2}(a)$ (con $t_1, t_2 \in I(a))\overset{(3.3.2(3))}{\Rightarrow}$ $I(a) - t_1 = I(a) - t_2 \overset{t_1\neq t_2}{\Rightarrow} I(a) = \mathbb{R}]$. Pero entonces H_a (**isotropía de** a) es subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ cerrado, $\Rightarrow H_a$ es *discreto*, $\Rightarrow H_a = \gamma\mathbb{Z}$ (con $\gamma := \text{mín}\{t(>0) \in H_a\}$), $\Rightarrow$ la CI c_a es periódica, $\Rightarrow$ la órbita $\bigcirc_a$ es difeomorfa a $\mathbb{S}^1$ [igual]

3.4. Integración de campos

Sean *variedad sin borde* $\overset{m}{M}$ $(\subset \mathbb{R}^p)$ y campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

• *(3.4.1)* (Determinación local del flujo de X) $\forall$ carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$, es: $X \mid U \overset{(3.1.3)}{=} \sum_{1\le i\le m} X_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}$, con $X_i \in C^\infty(U)$ (3.1.a). Y se tiene :

· El conjunto de coordenadas $\{c_i \equiv \mathbf{x}_i \circ c : 1 \le i \le m\}$ de cada curva integral (3.1.8) $c : t \mapsto c(t)$ de $X \mid U$ es solución del <u>sistema de EDO de 1er orden</u>: $c_i'(t) = X_i(c(t)) \equiv (X_i \circ \mathbf{x}^{-1})(c_1(t), ..., c_m(t))$ $(1 \le i \le m)$ $\quad (^*)$.

· (Teor. de Picard para $(^*)$, "trasladado" de $\mathbf{x}(U)$ a U): $\forall a \in U$, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists$entorno $(U \supset)V$ de a y $\exists \psi : (-\varepsilon, \varepsilon)\times V \to U$ (C^∞) tales que: *(1)* $\forall x \in V$, $\psi(., x) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ es CI de $X \mid U$ con $\psi(0, x) = x$, y *(2)* cualquier otra CI de X con $\psi(0, x) = x$ coincide con $\psi(., x)$ en la intersec. de sus dominios $\rightsquigarrow$

· *(Prop. 3.4.2, en toda M)* $\forall x \in M$, $\exists$ <u>única</u> CI $c_x : I(x) \equiv (\alpha(x), \beta(x)) \to M$ de X "maximal" para la condición inicial $c_x(0) = x$ [**Demostración1**]

· La aplic. $\varphi : (\mathbb{R} \times U \supset) \{(t, x) : t \in I(x) \text{ con } c_x(t) \in U\} \to U$, $(t, x) \mapsto \varphi_t(x) := c_x(t)$ es un flujo en U con gener. infinit. $X \mid U$ (**flujo de** X **en** U)

• *(3.4.3)* La aplic. $\varphi : (\mathbb{R} \times M \supset) W \equiv \{(t, x) : t \in I(x)\} \to M, (t, x) \mapsto \varphi_t(x) := c_x(t)$ es [**Dem.2**] un flujo en M, con gener. infinit. X (**flujo de** X)

· Observación sobre lo que implicaría que M tuviera borde

• *(Ejemplos 3.4.4): (1)* Todo flujo en $\mathbb{R}^m$ de la forma $\varphi_t(x) = f(t)x$, con $f(t)$ diferenciable, es completo y con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{f'(0)t}$ [**Detalle3**]

(2) El campo $X = (1 + x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ tiene flujo (no completo) $\varphi_t(x, y) = (\frac{sent+x\cos t}{\cos t - xsent}, y + t)$ y órbitas las curvas $y = \arctan x + C$ [**Detalle4**]

(4) El campo $X = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ tiene por órbitas el origen, las 6 semirrectas (abiertas) $y = \pm\sqrt{3}x (\ne 0)$ ó $y = 0$ y el haz de curvas $3x^2y - y^3 = C$ [**Detalle5**]

• *(3.4.5)* <u>Biyección</u> $\mathfrak{X}(M) \longleftrightarrow \{\text{flujos en } M\}$ [(3.4.3) y (3.2.2(2) modif.)]

· Los campos cuyos flujos son completos se dicen **completos**.

· *(3.4.a)* Sea $f : M \to N$ difeomorfismo. Entonces el flujo φ_t del campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y el flujo Φ_t del campo $f_*X \in \mathfrak{X}(N)$ (3.1.10(1)) verifican: $\varphi_t = f^{-1}\circ\Phi_t\circ f, \forall t$ [Basta ver (3.4.5) que el gener. infinit. del flujo $f^{-1}\circ\Phi_t\circ f : M \to M$ es X. Pues bien $(\forall a \in M)$: $\frac{d}{dt}\mid_{t=0} (f^{-1} \circ \Phi_t \circ f)(a) := (f^{-1} \circ c_{f(a)})'(0) \overset{\text{cad.}}{=} d_{f(a)}f^{-1}(c'_{f(a)}(0)) := d_{f(a)}f^{-1}(f_*X)_{f(a)} \overset{(3.1.10(1))}{=} d_{f(a)}f^{-1}(d_af(X_a)) \overset{\text{cad.}}{=} X_a$]

• *(Prop. 3.4.6)* $\underline{sop(X) := \{x \in M : X_x \ne 0\}^{cl} \text{ compacto} \Rightarrow X \text{ completo}}$ (así, todo flujo en variedad sin borde compacta es completo) [Si $X_a = 0$, es $I(a) = \mathbb{R}$ (3.2.5(1)). Si $X_a \ne 0$, es $c_a : I(a) \to M$ regular (3.2.5(1)), $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} c_a \subset sop(X)$, $\overset{sop(X) \text{ compacto}}{\Rightarrow}$ $\forall x \in sop(X), \exists\varepsilon > 0$ (Picard) tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times sop(X) \subset W$, $\Rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \subset I(c_a(t))$ $(\forall t \in I(a))$, $\Rightarrow \varepsilon < \beta(\varphi_t(a)) \overset{(3.3.2(3))}{=} \beta(a) - t$ $(\forall t \in I(a))$, $\Rightarrow \beta(a) = \infty$; y análogamente $\alpha(a) = -\infty$]

• *(Ejemp. 3.4.7(1))* Flujo de un campo en el espacio hiperbólico [**Det.6**]

3.5. Derivada de Lie

• *(Def. 3.5.1)* **Algebra de Lie**: espacio vectorial real $\mathfrak{X}$ dotado de una aplicación (**corchete de Lie**) $[,] : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ bilineal, antisimétrica y (que verifica la identidad de) Jacobi

· *(Ejemplo 3.5.2)* Matrices $m \times m$ reales, con $[A, B] := AB - BA$

• *(Prop. 3.5.3)* Sea M variedad. Entonces $\mathfrak{X}(M)$ es álgebra de Lie, con $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ [**Demostración1**: se prueba que $[X, Y]_a \in Der(a) \overset{(2.3.4)}{\equiv} T_aM$ y que $[X, Y] : M \to TM$ es diferenciable]

• *(Ejemplo 3.5.4)* Los corchetes de Lie dan sistemas de EDP de 1er orden en las componentes del campo [**Detalle2**]

• *(Def.)* Sea $f : M \to N$ aplic. C^∞. Se dice que $X^{(1)} \in \mathfrak{X}(M)$ está **f-relacionado** con $X^{(2)} \in \mathfrak{X}(N)$ si $X^{(2)}_{f(a)} = f_{*,a}(X^{(1)}_a)$ $(\forall a \in M)$, o equivalentemente [ya que $X^{(2)}_{f(a)}g \overset{(3.1.b)}{=} (X^{(2)}g)(f(a))$ y $(f_{*,a}(X^{(1)}_a))g \overset{(2.3.6)}{:=} X^{(1)}_a(g \circ f)$] si $(X^{(2)}g) \circ f = X^{(1)}(g \circ f)$ $(\forall g \in C^\infty(N))$

· Así p.ej. $X^{(1)}$ y $X^{(2)} := f_*X^{(1)} \in \mathfrak{X}(N)$, con f difeomorfismo (3.1.10(1)).

• *(Lema 3.5.5)* Si $X^{(1)}, Y^{(1)} \in \mathfrak{X}(M)$ están f-relacionados con $X^{(2)}, Y^{(2)} \in \mathfrak{X}(N)$, respectivamente, entonces $[X^{(1)}, Y^{(1)}]$ está f-relacionado con $[X^{(2)}, Y^{(2)}]$

[Inmediato: $\forall g \in C^\infty(N)$, se tiene: $(X^{(2)}(Y^{(2)}g)) \circ f = X^{(1)}((Y^{(2)}g) \circ f) = X^{(1)}(Y^{(1)}(g \circ f))$, e igualmente $(Y^{(2)}(X^{(2)}g)) \circ f = Y^{(1)}(X^{(1)}(g \circ f))$]

• *(Prop. 3.5.6)* Sean M variedad, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y φ flujo de X. Entonces se verifica $(\forall a \in M)$: $[X, Y]_a = \lim_{t\to 0} \left((\varphi_{-t,*}Y)_a - Y_a\right)/t$

3.6. Campos coordenados

• *(Prop. 3.6.1)* Dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ conmutan (esto es, $[X, Y] = 0$) si y sólo si $\psi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \psi_s$ $(\forall s, t)$ [consecuencia de (3.5.6)]

• *(Prop. 3.6.2)* Sean $X^{(1)}, ..., X^{(r)} \in \mathfrak{X}(M)$ y $a \in M$. Entonces resultan equivalentes: *(1)* En alguna carta en a, los $X^{(i)}$ son campos coordenados, y *(2)* En algún entorno de a, los $X^{(i)}$ son independientes y conmutan

[*(1)* $\Rightarrow$ *(2)*: $\forall$ carta $\mathbf{x} : (M \supset U) \to \mathbb{R}^m$ y $\forall f \in C^\infty(M)$, se tiene: $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_j}\right) \overset{(2.3.3)}{\equiv} \frac{\partial^2(f\circ\mathbf{x}^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} \circ \mathbf{x} \overset{Schwartz}{=} \frac{\partial^2(f\circ\mathbf{x}^{-1})}{\partial x_j \partial x_i} \circ \mathbf{x} \overset{(2.3.3)}{\equiv} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i}\right)$.

(2) $\Rightarrow$ *(1)*. Al ser los $X^{(i)}_a$ lin. independientes ($\Rightarrow r \leq m$), $\exists$ (Ejerc. 2.1.7) carta $\mathbf{x} : (M \supset U) \to \mathbb{R}^m$ en a tal que $\mathbf{x}(a) = 0$ y $X^{(i)}_a = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\mid_a$, $1 \leq i \leq r$. Dada $h : \mathbf{x}(U) \to M, x \equiv (x_1, .., x_m) \mapsto \left(\varphi^{(1)}_{t=x_1} \circ .. \circ \varphi^{(r)}_{t=x_r}\right)(\mathbf{x}^{-1}(0, .., 0, x_{r+1}, ..x_m))$,

es: $\left\{\begin{array}{l} d_xh(e_i) \overset{1.1}{:=} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \overset{(3.6.1)}{=} [\mathbf{Det.3}]\ X^{(i)}_{h(x)} \left(\Rightarrow d_0h(e_i) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\mid_a\right),\ 1 \leq i \leq r\ (^*) \\ d_0h(e_\mu) \overset{1.1}{:=} \frac{\partial h}{\partial x_\mu}(0) \overset{\mathbf{x}(a)=0}{=} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\mu}\mid_a\ ,\ \ r+1 \leq \mu \leq m\ , \end{array}\right\} \overset{(2.2.a)}{,\Rightarrow}$

$\exists W(\subset \mathbb{R}^m)$ entorno de 0 tal que $h \mid W : W \to h(W)$ es difeomorfismo, $\Rightarrow$
$\exists$ carta $\mathbf{y} := (h \mid W)^{-1} : h(W) \to W$ en a con $\partial/\partial \mathbf{y}_i \overset{(^*)}{=} X^{(i)}$, $1 \leq i \leq r$]

4. FORMAS DIFERENCIALES

4.1. Aplicaciones multilineales alternadas

• *(Def.)* **Forma multineal de grado** r (en un esp. vect. real $\overset{m}{E}$): aplicación $\alpha : E \times \overset{r}{\ldots} \times E \to \mathbb{R}$ que es $\mathbb{R}$-multilineal ($\rightsquigarrow$ espacio vectorial $\mathcal{J}^r(E)$)

• *(Def.)* **Producto tensorial** $\otimes : \mathcal{J}^r(E) \times \mathcal{J}^s(E) \to \mathcal{J}^{r+s}(E)$, con $(\alpha \otimes \beta)(v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_{r+s}) := \alpha(v_1, ..., v_r)\beta(v_{r+1}, ..., v_{r+s})$ (bilineal y asociat.)

· *(Prop. 4.1.1)* Sean $\{u_1, ..., u_m\}$ base de E y $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ la base dual de $E^* = \mathcal{J}^1(E)$). Entonces [**Demostración1**]:

(1) $\{\varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{i_r} : 1 \leq i_1, ..., i_r \leq m\}$ base de $\mathcal{J}^r(E) (\Rightarrow \dim \mathcal{J}^r(E) = m^r)$

(2) $\forall \alpha \in \mathcal{J}^r(E)$, se tiene: $\underline{\alpha = \sum_{1 \leq i_1, ..., i_r \leq m} \alpha(u_{i_1}, ..., u_{i_r}) \varphi_{i_1} \otimes ... \otimes \varphi_{i_r}}$

• *(Def.)* Se dice que $\alpha \in \mathcal{J}^r(E)$ es **alternada** si $\underline{\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_r) = -\alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_r), \forall i, j}$; o equivalentemente, si es cierta la implicación: $\underline{v_i = v_j \Rightarrow \alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_r) = 0, \forall i, j}$ ($\rightsquigarrow$ espacio vectorial $\Lambda^r(E)$)

• *(Def.)* **Permutación** de r objetos: "reordenación de sus posiciones" $\sigma : \{1, ..., r\} \to \{\sigma(1), ..., \sigma(r)\}$ ($\rightsquigarrow$ grupo $\mathfrak{G}_r$, con $r!$ elementos)

· **Signatura** $(-1)^\sigma$ **de** $\sigma \in \mathfrak{G}_r$: $+1$ ó -1, según la paridad (bien definida!) del "número de trasposiciones de σ" ; $\Rightarrow$ $(-1)^{\tau \circ \sigma} = (-1)^\tau (-1)^\sigma$

· *(4.1.a)* $\forall \alpha \in \mathcal{J}^r(E)$ y $\forall \sigma \in \mathfrak{G}_r$, se define $\alpha^\sigma \in \mathcal{J}^r(E)$ por $\underline{\alpha^\sigma(v_1, ..., v_r) := \alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(r)})}$ $(\Rightarrow (\alpha^\sigma)^\tau = \alpha^{\sigma \circ \tau})$. Así, $\underline{\alpha \in \Lambda^r(E) \Leftrightarrow \alpha^\sigma = (-1)^\sigma \alpha, \forall \sigma \in \mathfrak{G}_r}$

· *(4.1.b)* **Operador de alternación en** $\mathcal{J}^r(E)$: $\underline{Alt(\alpha) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}_r} (-1)^\sigma \alpha^\sigma}$

· *(Prop. 4.1.2)* Dada $\alpha \in \mathcal{J}^r(E)$, es: *(1)* $Alt(\alpha) \in \Lambda^r(E)$ [ya que: $(Alt(\alpha))^\tau = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}_r} (-1)^\sigma (\alpha^\sigma)^\tau \overset{(4.1.a)}{=} (-1)^\tau \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \circ \tau \in \mathfrak{G}_r} (-1)^{\sigma \circ \tau} \alpha^{\sigma \circ \tau} =: (-1)^\tau Alt(\alpha)$]

(2) $\alpha \in \Lambda^r(E) \Rightarrow Alt(\alpha) \overset{(4.1.a)}{=} \frac{1}{r!}(\sum_{\sigma \in \mathfrak{G}_r} 1)\ \alpha = \alpha$

• *(Def. 4.1.3)* **Producto exterior** $\wedge : \Lambda^r(E) \times \Lambda^s(E) \to \Lambda^{r+s}(E)$, con $\underline{\alpha \wedge \beta := \frac{(r+s)!}{r!s!} Alt(\alpha \otimes \beta)} \overset{(4.1.b)}{=} \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}_{r+s}} (-1)^\sigma (\alpha \otimes \beta)^\sigma$ ($\rightsquigarrow \wedge$ es bilineal)

· El produco exterior $\wedge$: *(1)* verifica $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$ [**Demostr.2**] y *(2)* *(Prop. 4.1.5)* es asociativo con: $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_k = \frac{(r_1 + ... + r_k)!}{r_1! ... r_k!} Alt(\alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_k)$

· *(Prop. 4.1.6)* Sea $\{u_1, ..., u_m\}$ base de E ($\rightsquigarrow$ base dual $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ de $E^* = \mathcal{J}^1(E)$). Entonces [**Demostración3**]:

(1) $\{\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_r} : 1 \leq i_1 < ... < i_r \leq m\}$ es base de $\Lambda^r(E)$, $\Rightarrow$ $\dim \Lambda^r(E) = \binom{m}{r}$ si $r \leq m$, $= 0$ si $r > m$.

(2) $\forall \alpha \in \Lambda^r(E)$, se tiene: $\underline{\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_r \leq m} \alpha(u_{i_1}, ..., u_{i_r}) \varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_r}}$

• *(Def.)* **Imagen inversa por** $f : E \to F$ (lineal): aplicación lineal $f^* : \Lambda^r(F) \to \Lambda^r(E)$ dada por $f^*\alpha(v_1, ..., v_r) := \alpha(f(v_1), ..., f(v_r))$

· *(4.1.c)* Se tiene: *(1)* $\underline{f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta}, \forall \alpha \in \Lambda^r(F), \forall \beta \in \Lambda^s(F)$,y *(2)* $\underline{(g \circ f)^*\alpha = (f^* \circ g^*)\alpha}, \forall g : F \to G$ (lin.), $\forall \alpha \in \Lambda^r(G)$ [**Demostración4**]

4.2. Determinantes

Sean $\overset{m}{E}$ esp. vectorial real, $B \equiv \{u_i\}$ base de E y $\{\varphi_i\}$ base dual de E^*

- *(Def.)* **Determinante respecto de** B: $\det_B := \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m (\overset{\text{Ejerc. 4.1.6}}{\neq} 0)$.
- *(4.2.a)* $\forall \alpha \in \Lambda^m(E)$, es: $\alpha \overset{(4.1.6)}{=} \alpha(u_1, ..., u_m) \det_B$, de donde se sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(B) \overset{Notación}{\equiv} \alpha(u_1, ..., u_m) = 1 \; \Leftrightarrow \; \alpha = \det_B \\ \\ \forall B' \text{ base de } E, \; \underline{\det_{B'} = \det_{B'}(B) \det_B} \end{array} \right\} , \; \Rightarrow \; \det{}_{B'}(B) = (\det{}_B(B'))^{-1} \neq 0$$

- Si $v_1, ..., v_m \in E$ son tales que $v_j = \sum_i a_{ij} u_i$ (o también: $B' = BA$, donde aquí $B' \equiv \{v_i\}$ no necesariamente es una base), se tiene:

· *(4.2.b)* $\underbrace{\det{}_B(v_1, ..., v_m)}_{\equiv \det_B(B')} \overset{\text{Prop. 4.1.5}}{=} m! Alt(\varphi_1 \otimes ... \otimes \varphi_m)(v_1, ..., v_m) :=$

$$:= \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}_m} (-1)^\sigma \varphi_1 \otimes ... \otimes \varphi_m (v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(m)}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}_m} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} \cdot ... \cdot a_{m\sigma(m)} = \det A \; , \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det_B(u_1, ..., u_{k-1}, v_j, u_{k+1}, ..., u_m) = a_{kj} \\ \\ \varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_r}(v_{j_1}, ..., v_{j_r}) \overset{\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_r}(u_{i_1}, ..., u_{i_r}) = 1}{=} \det(a_{ij})_{i = i_1, ..., i_r \, , \, j = j_1, ..., j_r} \\ \quad (\rightsquigarrow \text{cualquier } \alpha \in \Lambda^r(E) \text{ es combin. lineal de determs. de orden } r, [\textbf{Det.1}]) \end{array} \right.$$

· *(4.2.c)* $\underbrace{\det{}_B(v_1, ..., v_m)}_{\equiv \det_B(B')} \equiv \det{}_B(v_1, ...)(v_2, ..., v_m) \overset{(4.1.6)}{=}$

$$= \sum_{1 \le k \le m} \underbrace{\det{}_B(v_1, u_1, ..., u_{k-1}, u_{k+1}, ..., u_m)}_{(-1)^{k-1} \det_B(u_1, ..., u_{k-1}, v_1, u_{k+1}, ..., u_m)} \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_{k-1} \wedge \varphi_{k+1} \wedge ... \wedge \varphi_m (v_2, ..., v_m) \overset{(4.2.b)}{=}$$

$$= \sum_{1 \le k \le m} (-1)^{k-1} a_{k1} \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_{k-1} \wedge \varphi_{k+1} \wedge ... \wedge \varphi_m (v_2, ..., v_m) \overset{(4.2.b)}{=}$$

$$= \sum_{1 \le k \le m} a_{k1} \underbrace{(-1)^{k-1} \det(a_{ij})_{i \neq k \, , \, j \neq 1}}_{\textit{adjunto con signo de } a_{k1}} .$$

- *(Prop. 4.2.1)* (**Teorema del determinante**) Sean aplicación lineal $f : \overset{m}{E} \to \overset{m}{F}$, bases $B \equiv \{u_i\}$ de E y $B' \equiv \{v_j\}$ de F (con $f u_j = \sum_i f_{ij} v_i$) y bases duales $\{\varphi_i\}$ de E^* y $\{\psi_j\}$ de F^*. Entonces:

$$\underline{f^*(\det{}_{B'}) = \det{}_{B'}(f(B)) \det{}_B} \overset{(4.2.b)}{=} \det(f_{ij}) \det{}_B$$

[$f^*(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_m) \overset{4.1.6(2)}{=} f^*(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_m)(u_1, ..., u_m) \;\; \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m :=$ $\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_m(f(u_1), ..., f(u_m)) \; \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m \equiv \det{}_{B'}(f(B)) \det{}_B$]

4.3. Formas en variedades

· Dado $r \in \mathbb{N}$, sea $\Lambda^r(M) := \cup_{x\in M}\{x\} \times \Lambda^r(T_xM)$ (y $\Lambda^0 M := \mathbb{R}$)

• *(Def. 4.3.1)* **Forma (diferencial) de grado** $r(\geq 0)$ **(ó** r**-forma) en** M: aplicación $\alpha : M \to \Lambda^r(M), x \mapsto (x, \alpha_x)$, con $\alpha_x \in \Lambda^r(T_xM)$. Se dice que α es **diferenciable** si, $\forall X^{(1)}, ..., X^{(r)} \in \mathfrak{X}(M)$, la función $x \mapsto \alpha_x(X_x^{(1)}, ..., X_x^{(r)})$ es diferenciable $\rightsquigarrow$ Conjunto $\Gamma^r(M)$

· $\forall r \geq 0$, $\Gamma^r(M)$ es $C^\infty(M)$-módulo (en particular, $\Gamma^0(M) = C^\infty(M)$)

· El conjunto $\cup_{r\geq 0}\Gamma^r(M)$, con el **producto exterior** $\wedge : \Gamma^r(M) \times \Gamma^s(M) \to \Gamma^{r+s}(M), (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ (def. punto a punto, 4.1.3), es $\mathbb{R}$-álgebra

· *(Def. 4.3.2)* La **diferencial de** $f \in C^\infty(M)$ es la 1-forma $df : M \to \Lambda^1(M), x \mapsto d_xf$. Al ser $df(X) \overset{(2.3.3)}{=} Xf \overset{(3.1.b)}{\in} C^\infty(M)$, es (4.3.1) $df \in \Gamma^1(M)$

• *(Def. 4.3.3)* Dada carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$, se tiene (3.1.6(1)) refer. móvil $\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m}\}$ en U. Al ser $d\mathbf{x}_i(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}) \overset{(2.3.3)}{=} \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial \mathbf{x}_i} = \delta_{ij}$, el conjunto $\{d\mathbf{x}_1, ..., d\mathbf{x}_m\}$ da, en cada punto, la base dual. Y toda $\alpha \in \Gamma^r(M)$ tiene **expresión local**: $\underline{\alpha \mid U \overset{(4.1.6)}{=} \sum_{1\leq i_1<...<i_r\leq m} \alpha(\partial/\partial \mathbf{x}_{i_1}, ..., \partial/\partial \mathbf{x}_{i_r}) d\mathbf{x}_{i_1} \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_{i_r}}$.

• *(Ejem. 4.3.4): (1)* $\forall f \in C^\infty(M), df \mid U = \sum_i df(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}) d\mathbf{x}_i \overset{(2.3.3)}{=} \sum_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i} d\mathbf{x}_i$

(2) Sea $\det_B \equiv d\mathbf{x}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_m \in \Gamma^m(U)$. $\forall X = \sum_{1\leq i\leq m} X_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \in \mathfrak{X}(U)$, es: $\det{}_B(X, ...) = \sum_{1\leq i\leq m} (-1)^{i-1} X_i d\mathbf{x}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_{i-1} \wedge d\mathbf{x}_{i+1} \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_m$; con lo que: $\forall \omega \in \Gamma^{m-1}(U), \exists X \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $\omega = \det_B(X, ...)$ [Ejerc. 4.2.2]

• *(Def.)* **Imagen inversa por** $f : M \to N$ (diferenc.): aplic. $C^\infty(M)$-lineal $f^* : \Gamma^r(N) \to \Gamma^r(M)$ dada por $(f^*\alpha)_x (u_1, ..., u_r) := \alpha_{f(x)}(d_xf(u_1), ..., d_xf(u_r))$.

· *(4.3.a)* Se verifica [(4.1.c) en cada punto]: *(1)* $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta, \forall \alpha, \beta \in \Gamma(N)$ y *(2)* $(g \circ f)^*\alpha = (f^* \circ g^*)\alpha, \forall g : N \to P, \forall \alpha \in \Gamma(P)$

· *(4.3.5)* $\forall g \in \Gamma^0(N)$, $\underline{f^*g = g \circ f}$ [obvio] y $\underline{f^*(dg) = d(g \circ f)}$ $[(f^*(dg))_x (u) := (dg)_{f(x)}(d_xf(u)) \overset{(4.3.2)}{:=} d_{f(x)}g(d_xf(u)) \overset{\text{cad.}}{=} d_x(g \circ f)(u) \overset{(4.3.2)}{=:} (d(g \circ f))_x (u)]$. Así, $\forall$carta $\mathbf{y} : (N \supset)V \to \mathbb{R}^n$ y $\forall \alpha = \sum_{1\leq i_1<...<i_r\leq n} \alpha_{i_1...i_r} d\mathbf{y}_{i_1} \wedge ... \wedge d\mathbf{y}_{i_r} \in \Gamma^r(V)$, es: $f^*\alpha = \sum_{1\leq i_1<...<i_r\leq n} (\alpha_{i_1...i_r} \circ f) d(\mathbf{y}_{i_1} \circ f) \wedge ... \wedge d(\mathbf{y}_{i_r} \circ f)$

· *(Ejemplos 4.3.6): (1)* Imagen inversa de una 1-forma en $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ por la parametrización polar [**Detalle1**], y *(2)* Una 2-forma en $\mathbb{S}^2$ no puede tener cualesquiera componentes en la carta estereográfica [**Detalle2**]

• *(Def. y Observ. 4.3.7): (1)* Dadas $M \subset N$ (con j: $M \hookrightarrow N$ la inclusión), se define la **restricción a** M **de** $\alpha \in \Gamma^r(N)$ como $\underline{\alpha \mid M := \mathrm{j}^*\alpha \in \Gamma^r(M)}$; $\Rightarrow$ $\forall x \in M, (\mathrm{j}^*\alpha)_x = \alpha_x \mid T_xM \times \overset{r}{...} \times T_xM$. Si M es cerrada en N, cualquier forma en M es restricción [Prop. 1.3.2(3)] de otra(s) en N

(2) Sobre formas en $\mathbb{S}^2$ como restricción de formas en $\mathbb{R}^3$ [**Detalle3**]

• *(Prop. 4.3.8)* Sean aplic. $f : \overset{m}{M} \to \overset{m}{N}$ (C^∞) y cartas $\mathbf{x}$ de M, $\mathbf{y}$ de N ($f(U) \subset V$). Entonces: $\underline{f^*(d\mathbf{y}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{y}_m) = \det(J_{\mathbf{y}\circ f\circ \mathbf{x}^{-1}} \circ \mathbf{x}) d\mathbf{x}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_m}$ $[d_af(B_a^{\mathbf{x}}) \overset{(2.2.b)}{=} B_{f(a)}^{\mathbf{y}} J_{\mathbf{y}\circ f\circ \mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}(a)), \Rightarrow f^*(\det{}_{B_{f(a)}^{\mathbf{y}}}) \overset{(4.2.1)}{=} \det{}_{B_{f(a)}^{\mathbf{y}}}(d_af(B_a^{\mathbf{x}})) \det{}_{B_a^{\mathbf{x}}} \overset{(4.2.b)}{=} \det J_{\mathbf{y}\circ f\circ \mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}(a)) \det{}_{B_a^{\mathbf{x}}}]$

4.4. Diferencial exterior

• *(Teor. y Def. 4.4.1)* Dada variedad M, existe una única aplicación $\mathbb{R}$-lineal $d : \Gamma^r(M) \to \Gamma^{r+1}(M)$ (**diferencial exterior**) tal que:

(1) Para $r = 0$, d es la diferencial de funciones (4.3.2), *(2)* $d \circ d = 0$, y *(3)* $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$ (siendo r el grado de α)

[Unicidad: *(3)* implica que d es "local" (esto es: $\alpha \mid U \equiv 0 \Rightarrow (d\alpha) \mid U \equiv 0$); y *(1-3)* prescribe, en cada carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$:

$$\alpha \mid U = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_r \leq m} c_{i_1 ... i_r} d\mathbf{x}_{i_1} \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_{i_m} \ \Rightarrow \ d_U (\alpha \mid U) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_r \leq m} dc_{i_1 ... i_r} \wedge d\mathbf{x}_{i_1} \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_{i_m} .$$

Existencia: la expresión local (en cada entorno coordenado) d_U obtenida, que es $\mathbb{R}$-lineal, verifica *(1-3)*. Entonces se define d en todo M por: $(d\alpha)_a := (d_U(\alpha \mid U))_a$, para cualquier carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$ en a]

• *(Ejemplo 4.4.2)* Sea carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$ y denotemos $\det_B \equiv d\mathbf{x}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_m \in \Gamma^m(U)$. Dado $X = \sum_{1 \leq i \leq m} X_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \in \mathfrak{X}(U)$, resulta:

$$d\,(\det{}_B(X, ...)) \overset{(4.3.4(2))}{=} d(\sum (-1)^{i-1} X_i d\mathbf{x}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_{i-1} \wedge d\mathbf{x}_{i+1} \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_m) \overset{(4.4.1)}{=}$$

$$= \sum (-1)^{i-1} dX_i \wedge d\mathbf{x}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_{i-1} \wedge d\mathbf{x}_{i+1} \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_m \overset{(4.3.4(1))}{=} (\sum \partial X_i / \partial \mathbf{x}_i) \det{}_B .$$

· *(4.4.a)* Si U es abierto de $\mathbb{R}^m$ y $(x_1, ..., x_m)$ es la carta estándar, la función $div\ X := \sum_{1 \leq i \leq m} \partial X_i / \partial x_i$ se llama **divergencia de** X (Nota: el "rotacional" en $\mathbb{R}^3$ es un concepto métrico, ver Ejercicios 6.1.9 y 6.1.10).

• *(Prop. 4.4.3)* Dada $f : M \to N$ (C^∞), resulta: $\underline{d \circ f^* = f^* \circ d}$ [Ya conocido (4.3.5) sobre $\Gamma^0(N)$. Sea ahora $\alpha \in \Gamma^r(N), r \geq 1$, s.p.d.g. (en carta $\mathbf{y} : (N \supset)V \to \mathbb{R}^n$) $\alpha = g d\mathbf{y}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{y}_r$, con $g \in C^\infty(V)$. Entonces: $d(f^*\alpha) \overset{(4.3.a)}{=} d(f^*g \cdot f^*d\mathbf{y}_1 \wedge ... \wedge f^*d\mathbf{y}_r) \overset{(4.4.1)}{=} d\,(f^*g) \wedge f^*d\mathbf{y}_1 \wedge ... \wedge f^*d\mathbf{y}_r \overset{(4.3.a)}{=} f^*(dg \wedge d\mathbf{y}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{y}_r) \overset{(4.4.1)}{=} f^*d\alpha$]

· En particular, $d(\alpha \mid M) \overset{(4.3.7)}{:=} d\,(\mathrm{j}^*\alpha) \overset{(4.4.3)}{=} \mathrm{j}^*\,(d\alpha) \overset{(4.3.7)}{=:} (d\alpha) \mid M$.

• *(Def. 4.4.4)* Dada $\alpha \in \Gamma^r(M)$, se dice que es **cerrada** si $d\alpha = 0$, y que es **exacta** si $\alpha = d\beta, \beta \in \Gamma^{r-1}(M)$. Obviamente: α exacta $\overset{d \circ d = 0}{\Rightarrow}$ α cerrada.

• *(Ejemplos 4.4.5)* *(1)* La forma $\alpha := \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \in \Gamma^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$ (Ejemplo 4.3.6(1)) es cerrada pero no exacta [**Detalle1**]

(2) La forma $\omega := xvdy \wedge du - yudx \wedge dv \in \Gamma^2(\mathbb{R}^4)$ no es cerrada ($\Rightarrow$ no es exacta). Sin embargo, la restricción (4.3.7) $\alpha \mid T \in \Gamma^2(T)$ al toro (Ejercicio 1.2.4) $T : x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$ es exacta [**Detalle2**]

(3) La forma $\omega := \frac{2}{(z+1)^2} dx \wedge dy \in \Gamma^2(\mathbb{R}^3 \backslash \{z \leq -1\})$ no es cerrada ($\Rightarrow$ no es exacta). Sin embargo, la restricción (4.3.7) $\alpha \mid M \in \Gamma^2(M)$ al paraboloide $M : z = x^2 + y^2$ es exacta [**Detalle3**]

5. INTEGRACIÓN EN VARIEDADES

5.1. Orientación de variedades

• *(Def.)* **Orientación en un espacio vectorial real** $\overset{m}{E}$: Si $m \geq 1$, clase de equivalencia $\zeta = [B]$ de bases de E, para la relación dada por: $B' \in [B] \Leftrightarrow \det_B(B') > 0$ (Notación, 4.2.a). Si $m = 0$, un signo $+1$ ó -1

· Cada E posee 2 orientaciónes. Si ζ es una, la otra se denota $-\zeta$.

· Si $E = \mathbb{R}^m$, se denota $\zeta^{(m)} \equiv [B_0]$, con $B_0 \equiv \{e_i\}$ base canónica

• *(Def.)* **Orientación en una variedad** M (sin o con borde): elección $\zeta \equiv \{\zeta_x : x \in M\}$ de una orientación en cada T_xM que verifique: $\forall a \in M$, existe carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{H}^m$ en a tal que (**compatible con** ζ): $\underline{\forall x \in U,\ \exists \text{ base } B \in \zeta_x \text{ con } d_x\mathbf{x}(B) \in \zeta^{(m)}\ \ (*)}$ (Notación, 2.2.b)

· *(5.1.a)* $\mathbf{x}$ es compat. con $\zeta \Leftrightarrow B_x^{\mathbf{x}} \in \zeta_x$ (Not., 2.1.3) $[\det_{B_0}(d_x\mathbf{x}(B)) \det_B(B_x^{\mathbf{x}}) \overset{(4.2.1)}{=} \det_{B_0}(d_x\mathbf{x}(B_x^{\mathbf{x}})) \det_{B_x^{\mathbf{x}}}(B_x^{\mathbf{x}}) \overset{(4.2.a)}{=} \det_{B_0}(d_x\mathbf{x}(B_x^{\mathbf{x}})) \overset{(2.3.3)}{=} \det_{B_0}(B_0) \overset{(4.2.a)}{=} 1]$

· *(5.1.b)* $B \in \zeta_x$ verifica $(*) \Rightarrow$ <u>toda</u> $B' \in \zeta_x$ verifica $(*)$ $[\det_{B_0}(d_x\mathbf{x}(B)) \det_B(B') \overset{(4.2.1)}{=} \det_{B_0}(d_x\mathbf{x}(B')) \det_{B'}(B') \overset{(4.2.a)}{=} \det_{B_0}(d_x\mathbf{x}(B'))]$

· *(5.1.c)* $\mathbf{x}$ (carta de $\mathbb{R}^m$) es compatible con $\zeta^{(m)} \Leftrightarrow \det(J_{\mathbf{x}}) > 0$ $[B_0 \overset{(2.3.3)}{=} d_x\mathbf{x}(B_x^{\mathbf{x}}) \overset{(2.2.b)}{=} B^{\mathbf{x}}_{\mathbf{x}(x)} J_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(x))\ ,\ \overset{(4.2.b)}{\Rightarrow} \det_{B^{\mathbf{x}}_{\mathbf{x}(x)}}(B_0) = \det J_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(x))]$

• *(Def. y Prop. 5.1.1)* M es **orientable** ($\equiv$ admite orientación) si [trivial] y sólo si admite atlas con (todos los) determinantes de jacobianas de cambio de carta positivos [Sólo si: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ (atlas compatible con una orientación), es: $B_x^{\mathbf{x}} \overset{(2.2.b)}{=} B_x^{\mathbf{y}} J_{\mathbf{y}\circ\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}(x))\ ,\ \overset{(4.2.b)}{\Rightarrow} \det J_{\mathbf{y}\circ\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}(x)) = \det_{B_x^{\mathbf{y}}}(B_x^{\mathbf{x}}) \overset{(5.1.a)}{>} 0]$

• *(Obs. 5.1.2): (1)* M orientable *conexa* $\Rightarrow$ M admite 2 orient. (1.1.5(4))

(2) Si M es una variedad con borde ∂M, entonces M es orientable si [**Detalle1**] y sólo si [trivial] $Int(M) := M \backslash \partial M$ es orientable

(3) $M \times N$ (1.2) es orientable si [trivial] y sólo si [$\forall$ cartas $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ de M, $\mathbf{y}$ de N, resulta: $\det J_{\left(\mathbf{x}^{(\alpha)}\times\mathbf{y}\right)\circ\left(\mathbf{x}^{(\beta)-1}\times\mathbf{y}^{-1}\right)} = \det J_{\mathbf{x}^{(\alpha)}\circ\mathbf{x}^{(\beta)-1}}$] lo son M y N.

• *(Ejemplo 5.1.3)* Sea $M = U \cup V$, con U, V abiertos (en M) *conexos* orientados (ζ_U, ζ_V) y sean $a, b \in U \cap V$ tales que $\zeta_{U,a} \neq \zeta_{V,a}$ y $\zeta_{U,b} = \zeta_{V,b}$. Entonces M *no es orientable* [Si $\exists\zeta$, debe ser $\zeta \mid U \cap V = \varepsilon_U \zeta_U = \varepsilon_V \zeta_V$, con lo que $\varepsilon_U(a) \neq \varepsilon_V(a)$ y $\varepsilon_U(b) = \varepsilon_V(b)$ (contradicción)] ($\rightsquigarrow$ banda Moebius)

• *(5.1.4)* Se dice que $f : (M, \zeta_M) \to (N, \zeta_N)$ (difeom. local en $a \in M$) **conserva** (resp. **invierte**) **la orient. en** a si $d_af(\zeta_a) = \zeta_{f(a)}$ (resp. $= -\zeta_{f(a)}$)

· *(5.1.d)* $\underline{f \text{ conserva la orient. en } a \text{ si y sólo si } \det(J_{\mathbf{y}\circ f\circ\mathbf{x}^{-1}})(\mathbf{x}(a)) > 0}$ $(\forall$ cartas $\mathbf{x}$ de M en a, $\mathbf{y}$ de N en $f(a)$ compatibles con ζ_M y ζ_N, respect.) $[d_af(B_a^{\mathbf{x}}) \overset{(2.2.b)}{=} B^{\mathbf{y}}_{f(a)} J_{\mathbf{y}\circ f\circ\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}(a)), \overset{(4.2.b)}{\Rightarrow} \det_{B^{\mathbf{y}}_{f(a)}}(d_af(B_a^{\mathbf{x}})) = \det J_{\mathbf{y}\circ f\circ\mathbf{x}^{-1}}(\mathbf{x}(a))]$

• *(Prop. 5.1.5)* M es orientable si y sólo si tiene una forma diferencial de grado máximo nunca nula [**Demostración2**]

5.2. Orientación de hipersuperficies

(A) Sea M hipersuperficie (sin o con borde) de $(\mathbb{R}^{m+1}, <,>, \zeta^{(m+1)})$

• *(Def. 5.2.1)* **Campo normal (a M)**: aplicación diferenciable $\vartheta : M \to \mathbb{R}^{m+1} \backslash \{0\}$ con $\vartheta(x) \perp T_x M, \forall x \in M$. **Normal unitaria** (o **aplicación de Gauss**): campo normal $\nu : M \to \mathbb{S}^m$

• *(5.2.2)* En cada entorno coordenado, M tiene normal unitaria

[Dados carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{H}^m$ ($\rightsquigarrow$ param. φ), $a \in U$ y $u \in \mathbb{R}^{m+1}$, el conjunto $A^\varphi(u) \equiv \{u, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}\mid_a, ..., \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m}\mid_a\}$ verifica (con $B_0 \equiv \{e_i\} \in \zeta^{(m+1)}$):

$$\det{}_{B_0}(A^\varphi(u)) \overset{(4.2.c)}{=} \sum_{1\le k\le m+1} u_k \underbrace{(-1)^{k-1}\det(A^\varphi(u)_{ij})_{i\neq k\,,\, j\neq 1}}_{\equiv\, \vartheta^\varphi_k(a),\ \text{indep. de } u} \left(\overset{\text{Ejerc. 4.2.1}}{=} 0 \text{ si } u \in T_a M\right) \quad (^*)\ ,$$

con lo que la aplicación $\vartheta^\varphi : U \to \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$ $(= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2}$ si $m = 2)$ es un campo normal y $\nu^\varphi := \vartheta^\varphi / \|\vartheta^\varphi\|$ es una normal unitaria en U. Además:

(i) El conjunto $\mathcal{R}_\varphi \equiv \{\nu^\varphi, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m}\}$ verifica:

$$\det{}_{B_0}(\mathcal{R}_\varphi) \overset{(^*)}{=} <\nu^\varphi, \vartheta^\varphi> = \|\vartheta^\varphi\| > 0 \ , \ \overset{5.1}{\Rightarrow} \ \mathcal{R}_\varphi \in \zeta^{(m+1)} \mid U \ .$$

(ii) $\forall$ carta $\mathbf{y} : (M \supset)V \to \mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{H}^m$ ($\rightsquigarrow$ param. ψ) con $U \cap V \neq \emptyset$, debe ser: $\nu^\varphi = \varepsilon\nu^\psi$, para cierto signo $\varepsilon : U \cap V \to \{\pm 1\}$, y se verifica:

$$\mathcal{R}_\varphi \overset{(2.2.b)}{=} \mathcal{R}_\psi \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & J_{\mathbf{y}\circ\mathbf{x}^{-1}} \circ \mathbf{x} \end{pmatrix} \ , \overset{(4.2.b)}{\Rightarrow} \ \varepsilon \det(J_{\mathbf{y}\circ\mathbf{x}^{-1}} \circ \mathbf{x}) = \det{}_{\mathcal{R}_\varphi}(\mathcal{R}_\psi) \overset{(5.2.2.i)}{>} 0\ ]$$

• *(Prop. 5.2.3)* <u>M es orientable si y sólo si M tiene normal unitaria</u>

[M es orientable $\overset{\text{Prop. 5.1.1}}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ atlas $\{U_i, \mathbf{x}^{(i)}\}$ con $\det(J_{\mathbf{x}^{(i)}\circ\mathbf{x}^{(j)-1}}) > 0$ $\overset{(5.2.2.ii)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ atlas $\{U_i, \mathbf{x}^{(i)}\}$ con $\nu^{\varphi_i} \mid U_i \cap U_j = \nu^{\varphi_i} \mid U_i \cap U_j$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ normal unitaria ν]

· Si ϑ es un campo normal, $\det_{B_0}(\vartheta, ...) \mid M$ nunca se anula [(5.2.2.i)]

• *(Ejemplos 5.2.4) (1)* La banda-Moebius no tiene normal [Ejem. 5.1.3]

(2) Si M es intersección completa, es orientable [**Detalle1**]

• *(Def. 5.2.5)* Un campo normal ϑ a M es **compatible con una orientación** ζ de M si: $\forall a \in M$ y $\forall \{u_i\} \in \zeta_a$, es: $\det_{B_0}(\vartheta(a), u_1, ..., u_m) > 0$. Si M es conexa, basta para ello que algún a y $\{u_i\} \in \zeta_a$ lo cumplan [Ejerc. 5.1.9]

· *(5.2.a)* <u>Salvo aviso</u>, la orientación ζ de $\mathbb{S}^m_\rho$ es la compatible con $\nu(x) = x/\rho$. Es interesante "comparar la orient. en puntos antipodales" [**Detalle2**]

• *(Def. 5.2.6)* Sean $\nu : M \to \mathbb{S}^m$ una normal unitaria ($\rightsquigarrow$ orient. ζ) y $a \in M$. Se llama **curvatura de Gauss** $K(a)$ **de** M **en** a al determinante de $d_a\nu : T_aM \to T_{\nu(a)}\mathbb{S}^m$. Puesto que: $T_aM \overset{(5.2.1)}{=} \nu(a)^\perp = T_{\nu(a)}\mathbb{S}^m$ y $\zeta_a \overset{(5.2.a)}{=} \zeta_{\nu(a)}$, se sigue que: ν preserva la orientación en a (5.1.4) si y sólo si $K(a) > 0$.

• *(Ejemplos 5.2.7): (1)* La curvatura de Gauss de hiperplanos, cilindros y conos es nula. *(2)* La aplicación de Weingarten de $\mathbb{S}^m_\rho$ es una homotecia de razón $1/\rho$, con lo que la curvatura de Gauss de $\mathbb{S}^m_\rho$ es $1/\rho^m$. *(3)* La curvatura de Gauss distingue (a veces) entre hipersuperficies difeomorfas.

(B) Sea $\overset{m\geq 2}{M}$ variedad con borde de $\mathbb{R}^p$ ($\overset{1.4}{\Rightarrow}$ ∂M es hipersuperficie de M)

• *(Def. 5.2.8)* Dado $a \in \partial M$, se dice que $u \in T_aM$ es **saliente (resp. de** M) si, para cada carta $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{H}^m$ en a con $\mathbf{x}_1 \geq 0$, es: $d_a\mathbf{x}_1(u) < 0$.

· La definición de saliente es "buena" [$\forall$ carta $\mathbf{y} : (M \supset)V \to \mathbb{H}^m$ en a con $\mathbf{y}_1 \geq 0$, la función $h \equiv \mathbf{y}_1 \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbb{H}^m \to [0,\infty)$ verifica:

$$h(0, x_2, ..., x_m) \equiv 0 \ , \ \Rightarrow \ \partial h/\partial x_i(\mathbf{x}(a)) = 0 \underset{2\leq i\leq m}{,} \ \overset{d_{\mathbf{x}(a)}(\mathbf{y}\circ\mathbf{x}^{-1}) \ isom.}{\Rightarrow} \ \partial h/\partial x_1(\mathbf{x}(a)) \neq 0 \ , \ \underset{h(\mathbf{x}(a))=0}{\overset{h\geq 0}{\Rightarrow}}$$

$\Rightarrow \ \partial h/\partial x_1(\mathbf{x}(a)) > 0$. De donde se sigue: $d_a\mathbf{y}_1(u) < 0 \ \Leftrightarrow \ d_a\mathbf{x}_1(u) < 0$]

• *(Def. 5.2.9)* Cada orientación ζ en M define la **orientación inducida** $\partial\zeta$ **en** ∂M: Dados $a \in \partial M$ y base $\{u_2, ..., u_m\}$ de $T_a(\partial M)$, se dice que $[u_2, ..., u_m] =: \partial\zeta_a$ si, para cada $u_1 \in T_aM$ saliente, es $[u_1, u_2, ..., u_m] = \zeta_a$.

· La definición de orientación inducida es "buena" [**Detalle1**]

• *(Ejemplos 5.2.10): (1)* Si una hipersuperficie (sin borde) de $\mathbb{R}^{m+1}$ es intersección completa, entonces (otra vez!) es orientable

[En efecto: si $f : (\mathbb{R}^{m+1} \supset \text{abto})U \to \mathbb{R}$ es diferenciable y d_xf suprayectiva ($\forall x \in f^{-1}(0)$), entonces la hipersuperficie (1.2.4) $f^{-1}(0)$ (que no tiene borde) es el borde de $M \equiv f^{-1}([0,\infty))$ (1.4.4). Pero M es orientable, por serlo $Int(M) = f^{-1}((0,\infty))$ (abierto de $\mathbb{R}^{m+1}$) y por (5.1.2(2)). Con lo que $\partial M = f^{-1}(0)$ es (5.2.9) orientable, otra vez!; ya sabíamos que lo era (5.2.4(2))]

(2) Que ∂M sea orientable no implica que M lo sea [**Detalle2**]

(3) Si $\zeta := \zeta^{(m)} \mid \mathbb{H}^m$, entonces: $\partial\zeta = [e_2, ..., e_{m-1}, -e_m] \equiv -\zeta^{(m-1)}$

(4) Sea M (sin borde) orientada (ζ) y consideremos $N := [0,1] \times M$ (con borde $\partial N = M_0 \cup M_1$, donde $M_i \equiv \{i\} \times M$), que está "naturalmente" orientada ($\xi_{(t,x)} := [(1,0), (0,u_1), ..., (0,u_m)]$, con $[u_1, ..., u_m] =: \zeta_x$). Entonces se tiene: $(\partial\xi)_{(0,x)} = -\zeta_x$ y $(\partial\xi)_{(1,x)} = \zeta_x$ ($\rightsquigarrow$ Notación: $\partial N = M_1 - M_0$)

[En efecto: $\forall x \in M$, cada param. $\varphi : (\mathbb{R}^m \supset)A \to U$ de M en x induce parametrizaciones de N en $(0,x)$ y $(1,x)$ (respectivamente)

$$\begin{cases} \psi(t,z) := (t, \varphi(z)) \ , & \overset{\text{usando } \mathbf{x}\equiv\psi^{-1}, \text{ con } \mathbf{x}_1\geq 0}{\Rightarrow} \ \frac{-\partial}{\partial t} |_{(0,x)} \equiv (-1,0) \text{ es saliente} \\ \chi(t,z) := (1-t, \varphi(z)) \ , & \overset{\text{usando } \mathbf{y}\equiv\chi^{-1}, \text{ con } \mathbf{y}_1\geq 0}{\Rightarrow} \ \frac{\partial}{\partial t} |_{(1,x)} \equiv (1,0) \text{ es saliente} \end{cases} ;$$

de donde se sigue que, tanto $(-1,0) \in T_{(0,x)}N$ como $(1,0) \in T_{(1,x)}N$ son salientes. Y de la definición de $\xi_{(t,x)}$ se concluye:

$$\begin{cases} (\partial\xi)_{(0,x)} \overset{(5.2.9)}{:=} -[(0,u_1), ..., (0,u_m)] \ \equiv \ -[u_1, ..., u_m] =: -\zeta_x \\ (\partial\xi)_{(1,x)} \overset{(5.2.9)}{:=} [(0,u_1), ..., (0,u_m)] \ \equiv \ [u_1, ..., u_m] =: \zeta_x \quad] \end{cases}$$

(5) Orientación en la corona plana [**Detalle3**]

• *(Convenio 5.2.11)* Ua curva diferenciable con borde (localmente, $[0,\varepsilon)$ o $(-\varepsilon, 0]$) se orienta por un "signo en 0" (-1 o $+1$, respectivamente)

5.3. Integral de una forma diferencial

(A) • *(Def. 5.3.a)* Dados abierto $U \subset \mathbb{E}^m (= \mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{H}^m)$ con coord. canónicas (x_i) y $\omega \equiv f dx_1 \wedge ... \wedge dx_m \in \Gamma_c^m(U)$ (m-forma en U con soporte compacto), la **integral (en U) de** ω es $\underline{\int_U \omega := \int_U f := \int_{\mathbb{E}^m} f dx_1...dx_m}$ (integral Riemann), sobreentendiendo $f \in \Gamma_c^0(\mathbb{E}^m)$ ("extensión por cero", 1.3.a)

· Para cualquier otro abierto $V \supset sop(\omega)$, es $\int_V \omega = \int_U \omega$.

· *(5.3.b)* La integral de formas de grado máximo (*pero no la de funciones*) "se comporta bien" bajo imagen inversa por difeomorfismos

[Dados abierto $V \subset \mathbb{E}^m$ con coord. canónicas (y_i) y $h : V \to U$ difeomorfismo que conserva/invierte la orient. $\zeta^{(m)}$ ($\overset{(5.1.c)}{\Leftrightarrow}$ $\det(J_h) \gtrless 0$), se tiene:

$$\begin{cases} \pm \int_V h^*\omega \overset{(4.3.5)}{:=} \pm \int_V (f \circ h) h^*(dx_1 \wedge .. \wedge dx_m) \overset{(4.3.8)}{:=} \int_V (f \circ h) \left|\det(J_h)\right| dy_1 \wedge .. \wedge dy_m \overset{(5.3.a)}{:=} \\ \quad := \int_{\mathbb{E}^m} (f \circ h) \left|\det(J_h)\right| dy_1..dy_m \overset{\text{cambio variables}}{=} \int_{\mathbb{E}^m} f dx_1..dx_m \overset{(5.3.a)}{=:} \int_U \omega \\ \pm \int_V h^* f \overset{(4.3.5)}{:=} \pm \int_V (f \circ h) \overset{(5.3.a)}{:=} \pm \int_{\mathbb{E}^m} (f \circ h) dy_1..dy_m \neq \text{(en general, [}\mathbf{Det.1}\text{])} \\ \quad \neq \int_{\mathbb{E}^m} (f \circ h) \left|\det(J_h)\right| dy_1..dy_m \overset{\text{cambio variables}}{=} \int_{\mathbb{E}^m} f dx_1..dx_m \overset{(5.3.a)}{=:} \int_U f \quad] \end{cases}$$

• *(Prop. y Def. 5.3.1)* Dada $(\overset{m}{M}, \zeta)$ variedad (sin o con borde) orientada, existe una única aplicación $\mathbb{R}$-lineal $\int_M \equiv \int_{(M,\zeta)} : \Gamma_c^m(M) \to \mathbb{R}, \omega \mapsto \int_M \omega$ (**integral de** ω) que verifica (+): "Si $\mathbf{x} : (M \supset) U (\supset sop(\omega)) \to \mathbb{E}^m$ es una carta ($\rightsquigarrow$ param. φ) compatible con ζ, entonces: $\int_M \omega = \int_{\mathbf{x}(U)} \varphi^* \omega$ "

[Unicidad: Dados $\{U_i, \mathbf{x}^{(i)}\}$ atlas de M ($\rightsquigarrow$ param. φ_i) compat. con ζ y $\{\theta_i\}$ PDU subord. a $\{U_i\}$ (Prop. 1.3.1), se tiene (introduciendo $I_\omega := \{i : \exists x \in M$ con $\theta_i(x)\omega_x \neq 0\}$, finito y que verifica: $\omega = \sum_{i \in I_\omega} \theta_i \omega$ (*), [**Det.2**]):

$$\int_M \omega \underset{I_\omega \text{ finito}}{\overset{(*)}{=}} \sum_{i \in I_\omega} \int_M \theta_i \omega \underset{U_i \supset sop(\theta_i\omega)}{\overset{(+) \text{ para } \theta_i\omega}{=}} \sum_{i \in I_\omega} \int_{\mathbf{x}^{(i)}(U_i)} \varphi_i^* (\theta_i \omega) \overset{\text{suma ceros}}{=} \sum_i \int_{\mathbf{x}^{(i)}(U_i)} \varphi_i^* (\theta_i \omega) \quad (^1)$$

Existencia: La expresión (^{1}), que es $\mathbb{R}$-lineal, verifica (+). En efecto: si $\mathbf{x}$ es una carta como en el enunciado ($\Rightarrow \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{(i)-1}$ preserva $\zeta^{(m)}$ (**)), se tiene:

$$\int_M \omega \underset{sop(\omega) \subset U}{\overset{(^1)}{=}} \sum_i \int_{\mathbf{x}^{(i)}(U_i \cap U)} \varphi_i^* (\theta_i \omega) \underset{(**)}{\overset{(5.3.a)}{=}} \sum_i \int_{\mathbf{x}(U_i \cap U)} \varphi^* (\theta_i \omega) \underset{\text{quita ceros}}{\overset{sop(\theta_i) \subset U_i}{=}}$$

$$= \sum_{i \in I_\omega} \int_{\mathbf{x}(U)} \varphi^* (\theta_i \omega) \overset{I_\omega \text{ finito}}{=} \int_{\mathbf{x}(U)} \varphi^* (\sum_{i \in I_\omega} \theta_i \omega) \overset{(*)}{=} \int_{\mathbf{x}(U)} \varphi^* \omega \quad]$$

• *(5.3.b) No existe* una aplicación $\int_M : \Gamma_c^0(M) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_M f$ que verifique (+) ($\rightsquigarrow$ "no está definida" la integral de funciones)

[Dadas cartas $\mathbf{x}, \mathbf{y} : (M \supset) U (\supset sop(f)) \to \mathbb{E}^m$ ($\rightsquigarrow$ parametrizaciones φ, ψ) compatibles con ζ, se tiene (denotando $h \equiv \mathbf{x} \circ \mathbf{y}^{-1} : \mathbf{y}(U) \to \mathbf{x}(U)$):

$$\int_{\mathbf{y}(U)} f \circ \psi = \int_{\mathbf{y}(U)} (f \circ \varphi \circ h) \overset{(5.3.b)}{\neq} \textit{(en general)} \int_{\mathbf{x}(U)} f \circ \varphi \quad]$$

(B) Sea $(\overset{m}{M}, \zeta)$ variedad (sin o con borde) orientada

• *(Obs. 5.3.2): (1)* La integral $\int_M : \Gamma_c^m(M) \to \mathbb{R}, \omega \mapsto \int_M \omega$ (5.3.1) puede también <u>caracterizarse por verificar (±)</u>: "Si $\mathbf{x} : (M \supset) U (\supset sop(\omega)) \to \mathbb{E}^m$ es una carta ($\rightsquigarrow$ param. φ) compat. con $\pm\zeta$, entonces: $\int_M \omega = \pm \int_{\mathbf{x}(U)} \varphi^* \omega$ "

[La aplicación $\mathbf{y} := (\pm \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m) : (M \supset) U (\supset sop(\omega)) \to \mathbb{E}^m$ es una carta ($\rightsquigarrow$ param. ψ) compatible con ζ. Escribiendo $\omega \equiv f d\mathbf{y}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{y}_m = \pm f d\mathbf{x}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_m$ y denotando $h \equiv \mathbf{x} \circ \mathbf{y}^{-1} : \mathbf{y}(U) \to \mathbf{x}(U)$ (con lo que $\det J_h = \pm 1$ y $\psi = \varphi \circ h$), se tiene:

$$\int_M \omega \overset{(+)\ para\ \mathbf{y}}{=} \int_{\mathbf{y}(U)} \psi^* \omega \overset{(5.3.a)}{:=} \int_{\mathbb{E}^m} (f \circ \psi) dy_1 ... dy_m \overset{\text{cambio variables}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{E}^m} (f \circ \varphi) \underbrace{|\det(J_{h^{-1}})|}_{=1} dx_1 ... dx_m \overset{(5.3.a)}{=:} \pm \int_{\mathbf{x}(U)} \varphi^* \omega \quad]$$

(2) La integral $\int_M$ <u>depende de la orientación</u> [Si $\mathbf{x}$ es una carta ($\rightsquigarrow$ param. φ) compatible con $\zeta = -(-\zeta)$, resulta: $\int_{(M,\zeta)} \omega \overset{(+)}{=} \int_{\mathbf{x}(U)} \varphi^* \omega \overset{(\pm)}{=} - \int_{(M,-\zeta)} \omega$]

(3) Dados difeom. $f : (M, \zeta_M) \to (N, \zeta_N)$ que conserva/invierte la orient. y $\omega \in \Gamma_c^m(N)$, se tiene (**Teor. del cambio de variables**): <u>$\int_N \omega = \pm \int_M f^* \omega$</u>

[Si $\mathbf{y} : (N \supset) V (\supset sop(\omega)) \to \mathbb{E}^m$ es carta ($\rightsquigarrow$ param. ψ) compatible con ζ_N, entonces $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y} \circ f \mid U : (M \supset) U (\supset sop(f^* \omega)) \to \mathbb{E}^m$ (con $U \equiv f^{-1}(V)$) es carta ($\rightsquigarrow$ param. $\varphi = f^{-1} \circ \psi$) compatible con $\pm \zeta_M$. Y se tiene:

$$\pm \int_M f^* \omega \overset{(\pm)\ para\ \mathbf{x}}{=} \int_{\mathbf{x}(U)} \varphi^* (f^* \omega) \overset{(4.3.a)}{=} \int_{\mathbf{y}(V)} \psi^* \omega \overset{(+)\ para\ \mathbf{y}}{=} \int_N \omega \quad]$$

(4) Si M es un punto $a \in \mathbb{R}^p$ y $A \in \mathbb{R} \equiv \Gamma^0(M)$, es $\int_M A := \pm A$ (según la orientación ± 1 elegida en a, ver 5.1)

• *(5.3.3)* (Cálculo de integrales) Dada $\omega \in \Gamma_c^m(M)$:

(i) existen un <u>abierto</u> $W (\supset sop(\omega))$ y un conjunto T de <u>medida nula</u> tales que $W \backslash T = \cup_\alpha U_\alpha$, con $\{U_\alpha\}$ un conjunto <u>finito</u> de entornos coordenados <u>disjuntos</u>, correspondientes a cartas $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ ($\rightsquigarrow$ parametrizaciones φ_α) <u>compatibles</u> con ζ [la demostración general no es sencilla, pero tampoco "útil" ya que en cada caso hay que encontrarlo todo explícitamente], y

(ii) $\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \omega \left(\overset{(+)\ para\ \mathbf{x}^{(\alpha)}}{=} \int_{\mathbf{x}^{(\alpha)}(U_\alpha)} \varphi_\alpha^* \omega \right)$ [unicidad de Prop. 5.3.1]

• *(Ejemplos 5.3.4): (1)* Integral de una 2-forma sobre semiesfera en $\mathbb{R}^3$.

(2) Integral de la imagen inversa $f^* \omega$ de una 2-forma ω sobre $\mathbb{S}^2$ por una aplicación diferenciable $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$.

5.4. Teorema de Stokes

• *(Teor. 5.4.1)* (**Stokes**) Dadas var. orientada $(\overset{m}{M},\zeta)$con borde (quizás vacío) orientado (5.2.9) $(\partial M,\partial\zeta)$ y $\omega\in\Gamma_c^{m-1}(M)$, es: $\underline{\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega\mid\partial M}$

[Dados $\mathbb{H}^m$-abto. orientado $(W,\zeta:=\zeta^{(m)}\mid W)(\overset{(5.2.10)}{\Rightarrow}\partial\zeta=-\zeta^{(m-1)}\mid\partial W)$ y $\alpha\overset{(4.3.3)}{\equiv}\sum_{1\le k\le m}a_k dx_1\wedge...\wedge dx_{k-1}\wedge dx_{k+1}\wedge...\wedge dx_m\in\Gamma_c^{m-1}(W)$, se tiene (entendiendo $\alpha\in\Gamma_c^{m-1}(\mathbb{H}^m)$ y $sop(\alpha)\subset K\equiv[0,t_1]\times[s_2,t_2]\times...\times[s_m,t_m]$):

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\mid\partial W\underset{dx_1|\partial W=0}{\overset{x_1|\partial W=0}{=}}a_1(0,x_2,...,x_m)\,dx_2\wedge...\wedge dx_m\mid\partial W\\ d\alpha\overset{(4.4.1)}{=}\sum_{1\le k\le m}(-1)^{k-1}\frac{\partial a_k}{\partial x_k}dx_1\wedge...\wedge dx_m\end{array}\right\}\ ,\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int_W d\alpha\overset{(+)\ para\ (x_1,...,x_m)}{=}\sum_{1\le k\le m}(-1)^{k-1}\int_K\frac{\partial a_k}{\partial x_k}(x_1,...,x_m)dx_1...dx_m\overset{Fubini}{=}$$

$$=\sum_{1\le k\le m}(-1)^{k-1}\int_0^{t_1}..\widehat{\int_{s_k}^{t_k}}..\int_{s_m}^{t_m}(\underbrace{a_k(x_1,..,t_k,..,x_m)}_{=0,\ \forall k}-\underbrace{a_k(x_1,..,s_k,..,x_m)}_{=\delta_{k1}\cdot a_1(0,x_2,...,x_m)})dx_1..\widehat{dx_k}..dx_m=$$

$$=\underbrace{-\int_{[s_2,t_2]}...\int_{[s_m,t_m]}a_1(0,x_2,...,x_m)dx_2...dx_m}_{0,\text{ si }sop(\alpha)\cap\partial W=\emptyset}\overset{(-)\ para\ (x_2,...,x_m)}{=}\int_{\partial W}\alpha\mid\partial W\qquad(^*)$$

Dados $\{U_i,\mathbf{x}^{(i)}\}$ atlas de M ($\rightsquigarrow$ par. φ_i) comp. con ζ y $\{\theta_i\}$ PDU sub. a $\{U_i\}$:

$$\int_M d\omega\overset{\sum_i d\theta_i\equiv 0}{=}\int_M\sum_i d(\theta_i\omega)\overset{(5.3.1)}{=}\sum_i\int_{\mathbf{x}^{(i)}(U_i)}\varphi_i^*\left(d\left(\theta_i\omega\right)\right)\overset{(4.4.3)}{=}\sum_i\int_{\mathbf{x}^{(i)}(U_i)}d\left(\varphi_i^*\left(\theta_i\omega\right)\right)\overset{(^*)}{=}$$

$$=\underbrace{\sum_i\int_{\partial(\mathbf{x}^{(i)}(U_i))}\varphi_i^*\left(\theta_i\omega\right)\mid\partial(\mathbf{x}^{(i)}(U_i))}_{0,\text{ si }sop(\omega)\cap\partial M=\emptyset}\overset{(1.4.2)}{=}\sum_i\int_{\mathbf{x}^{(i)}(\partial U_i)}\varphi_i^*\left(\theta_i\omega\mid\partial U_i\right)\overset{(5.3.1)}{=}\int_{\partial M}\omega\mid\partial M\ \ ]$$

• *(Obs. 5.4.2): (1)* Dados $([a,b]\subset\mathbb{R},\zeta^{(1)})$ y $f\in C_c^\infty([a,b])$, es (**Barrow**):

$$\int_{[a,b]}f'dt\overset{(4.3.4(1))}{=}\int_{[a,b]}df\overset{Stokes}{=}\int_{\partial[a,b]}f\mid\partial[a,b]\underset{(5.3.2(4))}{\overset{(5.2.11)}{=}}f(b)-f(a)$$

(2) Dadas $M(\subset\mathbb{R}^2)$ superficie compacta con borde C y $f,g\in C_c^\infty(M)$, es (**Green**): $\int_M\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\int_C fdx+gdy$ [**Detalle1**]

(3) Dadas $M(\subset\mathbb{R}^3)$ variedad 3-dim. compacta con borde S y $f,g,h\in C_c^\infty(M)$, es: $\int_M\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)dxdydz=\int_S fdydz-gdxdz+hdxdy$ [**Det.2**]

(4) Si $\partial M=\emptyset$, entonces $\int_M d\omega=0,\ \forall\omega\in\Gamma_c^{m-1}(M)$ (!)

(5) Dada $f(t)=-1/t\in C^\infty((0,1])$ ($\Rightarrow sop(f)=(0,1]$, no compacto), es:

$$\int_{(0,1]}df\overset{(4.3.4(1))}{=}\int_{(0,1]}f'(t)dt\overset{5.3}{:=}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f'(t)dt=\infty\neq f(1)\underset{(5.3.2(4))}{\overset{(5.2.11)}{=}}\int_{\partial(0,1]}f\mid\partial(0,1]$$

• *(Ejemplos 5.4.3)* Comprobación de Stokes para: *(1)* una 2-forma sobre un tronco del hiperboloide reglado $x^2+y^2-3z^2=1$, y *(2)* una 2-forma sobre un tronco de la gráfica (de revolución) $z=f(x^2+y^2)$, con $f\in C^\infty(\mathbb{R})$

6. MEDICIONES EN VARIEDADES

6.1. Métrica riemanniana

• *(Def.)* **Producto escalar** (en un espacio vectorial real E): aplicación $<,>: E \times E \to \mathbb{R}$ bilineal, simétrica y definida positiva

· Salvo aviso, el producto escalar en $\mathbb{R}^m$ será el **euclídeo**: $< u, v >:= \sum_{1 \le i \le m} u_i v_i$, con $u \equiv \sum_{1 \le i \le m} u_i e_i$ y $\{e_i\}$ la base canónica.

· *(6.1.a)* Cualquier producto escalar $<,>'$ en $\mathbb{R}^m$ verifica: $< u, v >' = < A(u), A(v) >$, para el isomorfismo lineal $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ que cumple: $A(e'_i) = e_i$ $(1 \le i \le m)$, siendo $\{e'_i\}$ una base $<,>'$-ortonormal.

• *(Def. 6.1.1)* **Variedad riemanniana** (M, g): var. (sin o con b.) M con elección (**métrica**) $g \equiv \{g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}\}$ de un prod. escalar en cada T_xM, tal que: $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $g(X, Y) : M \to \mathbb{R}, x \mapsto g_x(X_x, Y_x)$ es C^∞

· Dada carta $\mathbf{x} : (M \supset) U \to \mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{H}^m$ ($\overset{(3.1.3)}{\rightsquigarrow}$ campos coordenados $\partial/\partial \mathbf{x}_i \in \mathfrak{X}(U)$), se definen n^2 funciones $\underline{g_{ij} := g(\partial/\partial \mathbf{x}_i, \partial/\partial \mathbf{x}_j) \in C^\infty(U)}$ ($\rightsquigarrow$ sólo $n(n+1)/2$ son independientes).

· Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (con $X \mid U = \sum_{1 \le i \le m} X_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}, Y \mid U = \sum_{1 \le i \le m} Y_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}$), se tiene: $\underline{g(X, Y) \mid U = \sum_{1 \le i,j \le m} g_{ij} X_i Y_j}$.

· Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se dice que son **ortogonales** si $g(X, Y) = 0$

• *(Ejemplos 6.1.2): (1)* **Espacio euclídeo**: espacio afín $\mathbb{R}^m$ equipado con métrica (**euclídea**) g dada por $g_x = <,>$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$

(2) **Variedad euclídea**: variedad $M \subset \mathbb{R}^p$ equipada con métrica g dada por $g_x = <,> \mid T_xM$, para todo $x \in M$

(3) En una hipersuperficie (sin o con borde) euclídea, la curvatura de Gauss (5.2.6) asociada a cada aplicación de Gauss (local, 5.2.2), es función exclusivamente de su métrica (**Teorema egregio de Gauss**)

• *(6.1.3)* Sea (M, g) variedad riemanniana (sin o con borde)

· Dado un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, la función (**norma de** X) $\|X\| := \sqrt{g(X, X)} : M \to \mathbb{R}$ es continua y es diferenciable en los puntos en que no se anula. Se dice que X es **unitario** si $\|X\| = 1$

· Se dice que una referencia móvil (3.1.5) $(X^{(1)}, ..., X^{(m)})$ en M es **ortonormal** si $g(X^{(i)}, X^{(j)}) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, ..., m)$

· *(6.1.b)* Toda ref. móvil da lugar (Gram-Schmidt) a otra ortonormal, $\Rightarrow$ En cualquier dominio coordenado hay una referencia móvil ortonormal

• *(Ejemplo 6.1.4)* Ortonormalización de la ref. móvil $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ en $(\mathbb{R}^2 \cap \{x > 0\}, (g_{ij}) = \begin{pmatrix} a/x^2 & b/x \\ b/x & c \end{pmatrix}$, con $ac - b^2 > 0, a > 0)$ [Gram-Schmidt: se parte del campo unitario $X := x/\sqrt{a}\ \partial/\partial x$ y del campo $Z := \partial/\partial y - g(\partial/\partial y, X)X$, que es ortogonal a X y nunca nulo; al ser $\|Z\|^2 = g(Z, \partial/\partial y) = (ac - b^2)/a$, se obtiene una ref. móvil ortonormal $(X, Y := \sqrt{ac - b^2})/a\ Z)$]

6.2. Elemento de volumen

(A) Sea $(\overset{m}{M} \subset \mathbb{R}^p, g_M, \zeta_M)$ variedad (sin o con b.) riemanniana orientada

• *(Prop. y Def. 6.2.1)* $\exists!\ \Omega_M \equiv \Omega_{(M,g,\zeta)} \in \Gamma^m(M)$ (**elemento de volumen**) tal que: $\forall x \in M$ y $\forall$ base ortonormal $B \in \zeta_x$, es $\Omega_M(B) = 1$ [**Dem.1**]

· *(Obs. 6.2.2)* Dada $f : (M, g_M, \zeta_M) \to (N, g_N, \zeta_N)$ $(m = n)$ C^∞, es $f^*\Omega_N = h\Omega_M$, para cierta $h \in C^\infty(M)$; $\Rightarrow \forall a \in M$ y $\forall$ base ortonormal $B \in \zeta_{M,a}$, es $h(a) = \Omega_{N,f(a)}(d_a f(B))$. Entonces: f es difeom. local en $a \overset{(2.2.a)}{\Leftrightarrow}$ $h(a) \neq 0$, y f conserva/invierte la orientación en $a \overset{(5.1.4)}{\Leftrightarrow} h(a) \gtrless 0$.

· *(Ejemplo 6.2.3)* Si $f : (M, g_M, \zeta_M) \to (N, g_N, \zeta_N)$ (var. *euclídeas*) es difeom. restricción de homotecia de razón $\lambda > 0$, es $f^*\Omega_N = \pm\lambda^m \Omega_M$ [**Det.2**]

• *(Prop. 6.2.4)* Sean $(M \subset \mathbb{R}^{m+1}, g, \zeta)$ hipersuperficie (sin o con borde) euclídea (6.1.2(2)) orientada y $\nu : M \to \mathbb{S}^m$ normal unitaria compatible (5.2.5) con ζ. Entonces $\Omega_M = \det_{B_0}(\nu, ...) \mid M$ [Dada $\{u_i\} \in \zeta_a$ ortonormal, es: $0 \overset{(5.2.5)}{<} \det_{B_0}(\nu(a), u_1, .., u_m) \overset{(4.2.b)}{=} \pm 1$; más unicidad en (6.2.1)]

· *(Ejemplos 6.2.5): (a)* $\Omega_{\mathbb{S}^m_\rho} = \frac{(-1)^m \rho}{x_{m+1}} dx_1 \wedge ...dx_m \mid \mathbb{S}^m_\rho$ [**Detalle3**]

(b) $\nu^*\Omega_{\mathbb{S}^m} = K_M \Omega_M$ [**Det.4**]. Así, ν preserva la or. en $a \overset{(6.2.2)}{\Leftrightarrow} K_M(a) > 0$

• *(6.2.6)* $\forall$ carta $\mathbf{x} : (M \supset) U \to A (\subset \mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{H}^m)$ ($\rightsquigarrow$ param. φ) compat. con $\pm\zeta$, se tiene la **expres. local**: $\Omega_M \mid U = \pm\sqrt{\det(g_{ij})} d\mathbf{x}_1 \wedge ... \wedge d\mathbf{x}_m$, $\overset{(4.3.5)}{\Rightarrow}$ $\varphi^*\Omega_M = \pm\sqrt{\det((g \circ \varphi)(\partial\varphi/\partial x_i, \partial\varphi/\partial x_j))}\ dx_1 \wedge ... \wedge dx_m$

[Dadas referencias móviles $B \equiv \{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\} \overset{(5.1.a)}{\in} \pm\zeta$ y otra $B' \in \zeta$ ortonormal en U (6.1.b), es: $B = B'A$ (con $A \equiv (a_{ij})$), $\Rightarrow g_{ij} = \sum_k a_{ki} a_{kj} = (A^t A)_{ij}$, $\Rightarrow \sqrt{\det(g_{ij})} = \pm \det A$. Y se concluye: $\Omega_M \mid U \overset{(4.3.3)}{=} \Omega_M(B') \det_{B'} \overset{(6.2.1)}{=} \det_{B'} \overset{(4.2.a)}{=} \det_{B'}(B) \det_B \overset{(4.2.b)}{=} (\det A) \det_B = \pm\sqrt{\det(g_{ij})} \det_B$]

· Si (M, g) es var. euclídea (6.1.2(2)), $\varphi^*\Omega_M = \pm\sqrt{\det\left(\sum_{1 \le k \le p} (\partial\varphi_k/\partial x_i)(\partial\varphi_k/\partial x_j)\right)}$ $dx_1 \wedge ... \wedge dx_m$. En particular (y en carta canónica): $\Omega_{\mathbb{R}^m} = dx_1 \wedge ... \wedge dx_m$

· *(Ejemplo 6.2.7)* El elemento de volumen de un producto

(B) • *(6.2.a)* (**T. de la divergencia**) Sea D **dominio regular de** $\mathbb{R}^{m+1}$ ($\equiv$ var. de dim. $m+1$ con borde euclídea) orientado, $\Rightarrow M \equiv \partial D$ es hipersup. (sin borde) euclídea orientada (5.2.9) y $\Omega_M = \det_{B_0}(\nu, ...) \mid M$, para cierta $\nu : M \to \mathbb{S}^m$ (6.2.4). Sea $X \in \mathfrak{X}(D)$ con $sop(X)$ compacto. Entonces [**Det.5**]: $\int_D (div\ X)\, dx_1 ... dx_{m+1} = \int_M < X, \nu > \Omega_M$ ($\equiv$ **flujo de** X **a través de** M)

• *(6.2.b)* (**Teor. de la circulación**) Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con borde euclídea compacta orientada, $\Rightarrow \Omega_M = \det_{B_0}(\nu, ...) \mid M$, para cierta $\nu : M \to \mathbb{S}^m$ (6.2.4) y $C \equiv \partial M$ es curva (sin borde) euclídea compacta orientada (5.2.9). Sean $c : [0, 1] \to C$ parametrización de C con $c(0) = c(1)$ y $X \in \mathfrak{X}(U)$ con $(M \subset) U$ abierto. Entonces se tiene [**Detalle6**]: $\int_M < rotX, \nu > \Omega_M = \int_0^1 < X_{c(t)}, c'(t) > dt$ ($\equiv$**circ. de** X **a lo largo de** c)

6.3. Volumen

Sea $(\overset{m}{M} \subset \mathbb{R}^p, g, \zeta)$ variedad (sin o con borde) riemanniana orientada

· *(Lema 6.3.1)* Sea $h \in \Gamma_c^0(M) \geq 0$ y no $\equiv 0$. Entonces el elem. de volumen $\Omega_M \in \Gamma^m(M)$ (6.2.1) verifica: $h\Omega_M \in \Gamma_c^m(M)$ y $\int_M h\Omega_M > 0$ [**Dem.1**]

• *(Def. 6.3.a)* Sean $\{K_r \subset M\}$ sucesión de compactos $K_r \subset \overset{\circ}{K}_{r+1}$ que recubren M (1.1.5(3)) y $\{\theta_r\}$ sucesión de funciones meseta con $\theta_r \mid K_r \equiv 1$, $sop(\theta_r) \subset K_{r+1}$ y $1 \geq \theta_r \geq 0$ (1.3.2(1)). Entonces el **volumen de** M (**área** si $m = 2$, **longitud** si $m = 1$) $vol(M) \overset{Notación}{\equiv} \int_M \Omega_M := \lim_{r\to\infty} \int_M \theta_r \Omega_M > 0$ (tal vez infinito) existe y es independiente de $\{K_r, \theta_r\}$

[Para cada $r \in \mathbb{N}$, existe $\int_M \theta_r \Omega_M > 0$ (6.3.1). Puesto que $\{\int_M \theta_r \Omega_M\}$ es no-decreciente ($\theta_{r+1} \geq \theta_r$, por def.), existe $\lim_{r\to\infty} \int_M \theta_r \Omega_M$ (tal vez infinito). Sean $\{K_r, \theta_r\}$ y $\{L_s, \eta_s\}$ como en el enunciado: $\forall r$, $\exists s$ tal que $K_{r+1} \subset L_s$ y:

$$\eta_s(x) - \theta_r(x) \left\{ \begin{array}{ll} \overset{\eta_s|L_s\equiv 1}{=} 1 - \theta_r(x) \overset{1\geq\theta_r}{\geq} 0 \ , & \text{si } x \in L_s \\ \overset{sop(\theta_r)\subset K_{r+1}\subset L_s}{=} \eta_s(x) \geq 0 \ , & \text{si } x \notin L_s \end{array} \right\} , \Rightarrow \int_M \eta_s \Omega_M \geq \int_M \theta_r \Omega_M \ ;$$

de donde se concluye (por simetría): $\lim_{s\to\infty} \int_M \eta_s \Omega_M = \lim_{r\to\infty} \int_M \theta_r \Omega_M$]

· *(6.3.b)* El elemento de volumen depende de la orientación, <u>no el volumen</u>

[$\int_{(M,-\zeta)} \Omega_{(M,g,-\zeta)} \overset{(5.3.2(2))}{=} -\int_{(M,\zeta)} \Omega_{(M,g,-\zeta)} \overset{(6.2.1)}{=} \int_{(M,\zeta)} \Omega_{(M,g,\zeta)}$]

· *(6.3.c)* Sean $(M \subset \mathbb{R}^{m+1}, g, \zeta)$ hipersup. (sin o con borde) euclídea orientada, $\nu : M \to \mathbb{S}^m$ normal unitaria compatible (5.2.5) con ζ y $a \in M$ con curvatura de Gauss (5.2.6) $K(a) \neq 0$. Entonces (**Teor. de la curvatura de Gauss**): $|K(a)| = \lim_{U\to\{a\}} vol(\nu(U))/vol(U)$ [**Demostración2**]

· *(Obs. 6.3.2)* Si M es compacta y $m = 2n$, la integral $\int_M K\Omega_M$ resulta ser (**Teor. de Gauss-Bonnet**) $\frac{1}{2}vol(\mathbb{S}^m) \overset{(6.3.4(3))}{=} 2^n\pi^n/3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)$ veces el entero $\chi(M)$ (**característica de Euler de** M, 4.5)

• *(Prop. 6.3.3)* (Cálculo de volúmenes) Se reduce (5.3.3) al cálculo de volúmenes de dominios coordenados disjuntos ($vol(M) = \sum_\alpha vol(U_\alpha)$). Y, si $\mathbf{x} : (M \supset)U \to \mathbb{E}^m$ es una carta ($\rightsquigarrow$ param. φ) compatible con $\pm\zeta$, se tiene:

$$vol(U) \overset{(\pm)\ para\ \mathbf{x}}{=} \pm \int_{\mathbf{x}(U)} \varphi^*\Omega_M \overset{(6.2.6)}{=} \int_{\mathbf{x}(U)} \sqrt{\det\left((g\circ\varphi)(\partial\varphi/\partial x_i, \partial\varphi/\partial x_j)\right)}\, dx_1 \ldots dx_m \ .$$

• *(Ejemplos 6.3.4): (1)* El paralelepíp. (sin o con b.) euclídeo $R \subset \mathbb{R}^m$ generado por base $B \equiv \{u_i\}$ admite la param. $\varphi : (0,1)^m \to R$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \mapsto \sum_j \lambda_j u_j (\Rightarrow J_\varphi = A)$, con $R \backslash \operatorname{Im}\varphi$ ($= \emptyset$ si R abierto) medida nula; $\Rightarrow$ $vol(R) \overset{(6.3.3)}{=} \int_{\mathbf{x}(U)} \sqrt{\det(A^tA)}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_m = |\det A| \overset{(4.2.b)}{=} |\det{}_{B_0}(B)|$

(2) El área de la porción $M \subset \mathbb{R}^3$ del cilindro $x^2 + z^2 = r^2$ limitada por los planos $z = ay$ y $z = by$ es: $área(M) = 4\frac{a-b}{ab}r^2$ [**Detalle3**]

$$\textit{(3)}\ vol(\mathbb{S}_\rho^m) \overset{\text{(Ejerc. 6.3.10)}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2^n\pi^n}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\rho^m = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}\rho^m \ , & \text{si } m = 2n-1 \\ \frac{2^{n+1}\pi^n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\rho^m \ , & \text{si } m = 2n \end{array} \right.$$

• *(Obs. 6.3.5)* El volumen de (M, g, ζ) (que es independiente de ζ, 6.3.b) <u>puede definirse para (M, g) no-orientable</u> [(6.3.3)].

6.4. Distancia geodésica

(A) Sea ($\overset{m}{M} \subset \mathbb{R}^p, g$) variedad (sin o con borde) riemanniana

• *(Def)* **Arco diferenciable a trozos**: aplicación $c : [a, b] \to M$ continua, con partición $a \equiv t_0 < t_1 < ... < t_r \equiv b$ tal que cada $c_i \equiv c \mid [t_{i-1}, t_i]$ es inyectiva, diferenciable (C^∞) y con (primera) derivada nunca nula.

• *(6.4.a)* Cada ($\gamma_i \equiv c([t_{i-1}, t_i]), g \mid \gamma_i, \zeta = [d/dt]$) es curva con borde conexa riemanniana orientada, cuyo elemento de volumen (6.2.1) Ω_{γ_i} verifica:
$\underline{c_i^*\Omega_{\gamma_i} = \|c_i'\|_g}$, $\Rightarrow$ $long(\gamma_i) \overset{(6.3.a)}{\equiv} \int_{\gamma_i} \Omega_{\gamma_i} \overset{(6.3.3)}{=} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|c_i'\|_g \, dt$

[La aplicación c_i es *homeomorfismo* ($[t_{i-1}, t_i]$ compacto, γ_i Hausdorff y c_i biyección C^0). Además: $d_t c_i$ inyectiva, $\overset{(1.2.1)}{\Rightarrow}$ $\exists$ entorno abierto $J(\subset [t_{i-1}, t_i])$ de t tal que $c_i \mid J : J \to c_i(J)$ es difeomorfismo, $\overset{\forall t}{\Rightarrow}$ c_i es ($c_i(J)$ abierto en γ_i) difeomorfismo local, por tanto (c_i inyectiva) difeomorfismo de $[t_{i-1}, t_i]$ sobre γ_i. Se sigue que γ_i es una curva con borde $\partial\gamma_i = \{c(t_{i-1})\} \cup \{c(t_i)\}$. Finalmente (la param. c_i conserva la orientación): $c_i^*\Omega_{\gamma_i} \overset{(6.2.6)}{=} +\sqrt{(g \circ c_i)(dc_i/dt, dc_i/dt)} \, dt$]

• Se dice que la imagen $\gamma \equiv c([a, b]) \subset M$ **une** $x \equiv c(a)$ **con** $y \equiv c(b)$. Y se define la **longitud de** γ por $L(\gamma) := \sum_{1 \le i \le r} long(\gamma_i)$.

• *(Prop. 6.4.1)* Si (M, g) es variedad euclídea (6.1.2(2)), entonces es: $\underline{L(\gamma) = \sup\{L_{<,>}(P) : P \subset \mathbb{R}^p \text{ poligonal inscrita en } \gamma\}}$ ($\ge \|y - x\|$) [**Dem.1**]

(B) Sea ahora M además *conexa*:

• *(Def)* **Distancia geodésica**: aplicación $d_g : M \times M \to R$, $(x, y) \mapsto \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ une } x \text{ con } y\}$ (siempre existe tal γ, (1.1.5(5)))

• *(6.4.b)* Si (M, g) es var. euclídea (6.1.2(2)), es: $d_g(x, y) \overset{(6.4.1)}{\ge} \|y - x\|$

• *(Prop. 6.4.2)* d_g es distancia y la topología que define en M es la de M

[La aplicación $d_g \ge 0$ es simétrica y verifica: $x = y \Rightarrow d_g(x, y) = 0$ (obvio) y la desigualdad triangular (inmediato). Y se demuestra (!) que, en una bola euclídea en torno a cada punto de M, existen $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que la distancia euclídea $d_{<,>}$ verifica: $\sqrt{a} d_{<,>} \le d_g \le \sqrt{b} d_{<,>}$, con lo que d_g es (en dicha bola) equivalente a $d_{<,>}$, y por tanto: $d_g(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (obvio si (M, g) es variedad euclídea, 6.4.b). Se sigue que d_g es una distancia y, por definir localmente la topología de M, lo hace globalmente]

• *(Obs. 6.4.3)* En el espacio afín $\mathbb{R}^m$ equipado con métrica g **constante** (no necesariamente la euclídea), esto es, tal que $g_x = <, >'$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ y para cierto producto escalar $<, >'$, resulta: $d_g(x, y) = \|y - x\|_g$

[Sea $c : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ arco C^∞ a trozos ($a = t_0 < t_1 < ... < t_r = b$) cuya imagen $\gamma \equiv c([a, b])$ une x con y. Se tiene (denotando $\gamma_i \equiv c([t_{i-1}, t_i])$):
$L_g(\gamma) \overset{(6.4.a)}{=} \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|c_i'\|_g \, dt \overset{(6.1.a)}{=} \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|(A \circ c_i)'\| \overset{(6.4.a)}{=} L_{<,>}(A \circ \gamma)$ (con $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ isom.). Y se sigue: $d_g(x, y) := \inf_\gamma\{L_g(\gamma)\} = \inf_\gamma\{L_{<,>}(A \circ \gamma)\} =: d_{<,>}(A(x), A(y)) = \|A(y) - A(x)\| = \|A(x - y)\| \overset{(6.1.a)}{=} \|x - y\|_g$]

6.5. Isometrías

Sean $(\overset{m}{M} \subset \mathbb{R}^p, g), (\overset{m}{M'} \subset \mathbb{R}^q, g')$ varied. (sin o con borde) riemannianas

• *(Def. 6.5.1)* Un difeomorfismo $f : M \to M'$ se dice **isometría** si $\underline{g'(d_x f(u), d_x f(v)) = g(u,v)}$, $\forall x \in M, \forall u, v \in T_x M$

• *(Def. 6.5.2)* Una aplicación C^∞ $f : M \to M'$ se dice **isometría local en** $a \in M$ si: $\exists$ entornos U de a y V de $f(a)$ t.q. $f \mid U : U \to V$ es isometría

· Si f es isometría local en a, f es difeomorfismo local (1.1.1) en a

· (sin borde) Si $d_a f$ es isomorfismo, f es [2.2.a] difeom. local en a. Pero si $d_a f$ es isometría lineal, f no tiene por qué ser isometría local en a

• *(Obs. 6.5.3): (1)* Isometrías conservan volumen [Si $U \subset M$ es dominio coord.: $vol(f(U)) \overset{(6.3.a)}{\equiv} \int_{(f(U),\zeta')} \Omega_{(f(U),g',\zeta')} \overset{(5.3.2(3))}{=} \pm \int_{(U,\zeta)} f^*\Omega_{(f(U),g',\zeta')} \overset{(6.2.2)}{=} \int_{(U,\zeta)} \Omega_{(U,g,\zeta)} \overset{(6.3.a)}{\equiv} vol(U)$; y por (5.3.3)] (esto no las caracteriza, Ejerc. 6.5.2)

(2) Isometrías conservan longitud (de la imagen) de arcos C^∞ a trozos $[L'(f \circ \mathrm{Im}\, c) \overset{(6.4.a)}{=} L(\mathrm{Im}\, c)]$ (esto las caracteriza!) , $\Rightarrow$ conservan dist. geodésica

• *(Ejemplos 6.5.4): (1)* Existe isometría $f : (M = \mathbb{R}^2 \backslash \{x > 0\}, g_{\text{Ejerc. 6.4.6}}) \to (M, <,>)$ que lleva $x = \frac{1}{2}(y^2+1)$ sobre $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (sin el origen)

(2) Existe isometría $\varphi : (\mathbb{R}^2, g_{\text{Ejerc. 6.4.10}}) \to \mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\} \subset (\mathbb{R}^3, <,>)$ que lleva la circunferencia $x^2 + y^2 = d^2$ sobre el paralelo $z = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}}$

(3) Existe isometría $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, cierta $g) \to \mathbb{S}^2 \backslash \{polos\} \subset (\mathbb{R}^3, <,>)$ que lleva los paralelos del cilindro sobre paralelos de la esfera

(4) $\exists$ isom. local $\varphi : (\mathbb{R}^2, <,>) \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y $vol(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \overset{(6.2.7)}{=} (2\pi)^2$

• *(Obs. 6.5.5): (1)* Si $f : (\mathbb{R}^m, <,>) \to (\mathbb{R}^m, <,>)$ es isometría, f es afín

[f conserva (6.5.3(2)) dist. geodésica (euclídea), $\Rightarrow F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, x \to f(x) - f(0)$ también la conserva, $\Rightarrow F$ conserva normas $(\|F(x)\| \overset{F(0)=0}{=} d(F(x), F(0)))$, $\Rightarrow F$ conserva productos escalares $(2 < x, y >\equiv -d^2(x,y) + \|x\|^2 + \|y\|^2)$, $\Rightarrow F$ transforma base orton. $\{u_i\}$ en orton. y, por tanto (!) en base. Entonces F es lineal $(< F(\lambda_j u_j) - \lambda_j F(u_j), F(u_i) >= 0 \Rightarrow F(\lambda_j u_j) = \lambda_j F(u_j))$, $\Rightarrow F(x) = Ax$, con $A \in O(m)$, $\Rightarrow f(x) = Ax + f(0)$]

(2) Todas las métricas riemannianas g en $\mathbb{R}^m$ ctes. (esto es, $g_x =<,>', \forall x$, 6.4.3) son isométricas [$\exists$ (6.1.a) isomorfismo ($\Rightarrow$ difeom.) $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que: $< d_x A(u), d_x A(v) >=< A(u), A(v) >=< u, v >', \forall x, u, v$]

(3) Las isometrías de $(\mathbb{R}^p, <,>)$ dan lugar a isometrías de cualquier variedad $M \subset \mathbb{R}^p$ que preserven (éstas se dicen entonces **isometrías ambiente** o **congruencias**), a veces las únicas que M posee (M se dice entonces **rígida**)

(4) Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ hipersup. (sin b.) euclídea conexa. Si $K \neq 0$ siempre, entonces (**T. Hadamard**): M nunca atraviesa sus espacios afines tangentes (M se dice entonces **convexa**), es difeomorfa a $\mathbb{S}^m$ y (si m es par) $K > 0$. Si M es compacta, convexa y $m = 2$, entonces (**T. Cohn-Vossen**) M es rígida

• *(6.5.a)* Un difeom. $f : M \to M'$ se dice **conforme** si $\exists h (> 0) \in C^\infty(M)$ tal que: $\underline{g'(d_x f(u), d_x f(u)) = h(x) g(u,u)}$, $\forall x \in M, \forall u \in T_x M$ [**Detalle1**]

7. EJERCICIOS

1. VARIEDADES DIFERENCIABLES

1.1.1 (Difeomorfismos locales e inyectividad), 1.1.2 (Difeomorfismos sobre exterior de bola y sobre corona), 1.1.4 (La cúspide no es variedad), 1.1.5 (El cono con vértice no es variedad), 1.1.9 (Espacio hiperbólico) y 1.1.10 (Aplicaciones lineales que dejan invariante una curva)

1.2.3 (Algunas superficies de revolución), 1.2.4 (Toro de revolución), 1.2.6 (Hipersuperficies con ecuación global desconectan), 1.2.9 (Matrices 2×2 ortogonales) y 1.2.10 (Matrices $n \times n$ ortogonales)

1.3.6 (Funciones con producto idénticamente nulo) y 1.3.8 (Conjuntos de nivel no necesariamente regulares)

1.4.1 (Arco de parábola), 1.4.2 (Sólido entre conjuntos de nivel regulares), 1.4.3 (Troncos de cono y de cilindro cerrados), 1.4.4 (Región cerrada entre secciones cónicas), 1.4.5 (Toro sólido) y 1.4.9 (Adherencia de un abierto cuya frontera es variedad)

2. CÁLCULO EN VARIEDADES

2.1.3 (Espacio tangente a matrices 3×3 de rango 1), 2.1.4 (Plano tangente a materices 2×2 no nulas con determinante y traza nulos), 2.1.6 (Paraguas de Whitney), 2.1.7 (Hallar parametrización con vectores coordenados en un punto fijados) y 2.1.8 (Grafos)

2.2.1 (Derivada de aplicación entre superficies), 2.2.2 (Suprayectividad de la derivada de cierta función), 2.2.3 (Retracción radial), 2.2.4 (Difeomorfismo local entre superficies), 2.2.5 (Hallar una función con derivada en un punto fijada) y 2.2.6 (Derivada de la pseudoinversión en el espacio hiperbólico).

2.3.1 (Derivaciones en los polos de $\mathbb{S}^2$), 2.3.2 (Derivaciones independientes y vectores coordenados) y 2.3.3 (Difeomorfismo local en un punto y derivaciones).

3. CAMPOS Y ECUACIONES DIFERENCIALES

3.1.1 (Campo sobre $\mathbb{S}^2$ en coordenadas estereográficas), 3.1.2 (Otro campo sobre $\mathbb{S}^2$ en coordenadas estereográficas), 3.1.7 (Meridianos y paralelos paralelizan las superficies de revolución) y 3.1.8 (Paralelizaciones del cono).

3.2.1 ((Flujos completos fuente y sumidero en $\mathbb{R}^2$), 3.2.2 (Flujo completo en el paraboloide con órbitas meridianos), 3.2.3 (Flujo completo circulación en $\mathbb{R}^2$), 3.2.4 (Flujo completo en $\mathbb{S}^2$ con órbitas meridianos o paralelos), 3.2.5 (Flujo completo en el semicono con órbitas generatrices) y 3.2.6 (Flujo completo en superficies de revolución con órbitas paralelos).

3.3.3 (Un flujo en $\mathbb{R}$) y 3.3.4 (Construir el flujo de cierto campo en $\mathbb{R}^2$).

3.4.1 (Campo en $\mathbb{R}$ con coeficiente potencia), 3.4.2 (Campo silla en $\mathbb{R}^2$) y 3.4.3 (Campo dipolo en $\mathbb{R}^2$).

3.5.3 (El corchete de Lie de campos no es F-lineal) y 3.5.5 (Si un campo no es idénticamente nulo, hay otro cuyo corchete con él tampoco)

3.6.1 (Paralelización coordenada de cualquier gráfica en $\mathbb{R}^3$), 3.6.4 (Campos en $\mathbb{R}^m$ que conmutan con uno coordenado), 3.6.6 (Campos en $\mathbb{R}^2$ que conmutan con dos dados) y 3.6.10 (Campos en el cilindro que conmutan con uno dado)

4. FORMAS DIFERENCIALES

4.1.4 (Cualquier r-forma se anula sobre r vectores dependientes), 4.1.5 (Si todas las r-formas se anulan sobre r vectores, éstos son dependientes) y 4.1.6 (Condición necesaria y suficiente para la dependencia de 1-formas)

4.2.1 (Dependencia lineal y anulación del determinante) y 4.2.2 (Formas alternadas de grado igual a la dimensión menos 1)

4.3.1 y 4.3.2 (Formas de grado 2 en $\mathbb{S}^2$), 4.3.3 (Restricción a una superficie de $\mathbb{R}^3$) y 4.3.4 (Restricción a una gráfica en $\mathbb{R}^{n+1}$)

4.4.1 (Diferencial de función cuadrática en $\mathbb{R}^m$), 4.4.3 (Una clase de 1-formas en $\mathbb{R}^4$), 4.4.4 (Una clase de 1-formas en $\mathbb{R}^3$), 4.4.5 (Una clase de 2-formas en $\mathbb{R}^3$) y 4.4.6 (Rotacional de una 1-forma en $\mathbb{R}^3$)

5. INTEGRACIÓN EN VARIEDADES

5.1.3 (El fibrado tangente siempre es orientable), 5.1.7 (Una forma de grado máximo nunca nula en $\mathbb{S}^m$) y 5.1.9 (Forma de grado máximo compatible con una orientación)

5.2.1 (Extremos de la función distancia a un punto), 5.2.2 (Extremos de la función distancia a un hiperplano), 5.2.3 (Toda intersección completa es orientable), 5.2.5 (Aplicación del toro en el cilindro y orientaciones), 5.2.6-5.2.7 (Aplicación de Gauss de superficies orientables), 5.2.8 (Aplicación de Gauss del toro de revolución), 5.2.9 (Orientar el tronco de cilindro) y 5.2.10 (Orientar el tronco de toro)

5.3.1 (Integral de una 1-forma sobre una circunferencia en $\mathbb{R}^2$), 5.3.2 (Integral de una 1-forma sobre un meridiano de una esfera en $\mathbb{R}^3$), 5.3.4 (Integral de una 2-forma sobre un tronco de cilindro), 5.3.5 (Integral de una 2-forma sobre un elipsoide) y 5.3.10 (Integral de la imagen inversa de una 2-forma por una aplicación)

5.4.1 (Green), 5.4.2 (Green en $\mathbb{R}^3$), 5.4.3 (Integral de una 2-forma exacta sobre un tronco de cono), 5.4.7 (Stokes requiere soporte compacto), 5.4.8 (Integral de una 2-forma exacta sobre un tronco de cilindro) y 5.4.9 (Integral de una 2-forma no exacta sobre un toro)

MEDICIONES EN VARIEDADES

6.1.1 (Una clase de métricas no euclídeas en $\mathbb{R}^{m+1}$), 6.1.4 (Gradiente de una función), 6.1.7 (Una métrica en un abierto de $\mathbb{R}^2$) y 6.1.8 (Restricción de la métrica euclídea en $\mathbb{R}^3$ a una superficie topográfica)

6.2.1 (Imagen inversa del elemento de volumen en $\mathbb{S}^2$ por una aplicación), 6.2.2 (Normal unitaria y elemento de volumen en el toro), 6.2.3 (Normal unitaria y elementos de volumen en los troncos de cono y de cilindro), 6.2.4 (Elemento de volumen de los isomorfismos lineales que dejan invariante una gráfica) y 6.2.9 (Circulación de un campo en $\mathbb{R}^3$ a lo largo de curva cerrada)

6.3.1 ((Area de una porción de cilindro en $\mathbb{R}^3$), 6.3.2 (Area de otra porción de cilindro en $\mathbb{R}^3$), 6.3.3 (Ciertas gráficas tienen curvatura de Gauss nula), 6.3.4 (Sobre áreas y volúmenes de revolución) y 6.3.10 (Volúmenes de la bola y su borde en $\mathbb{R}^{m+1}$)

6.4.3 (Loxodroma), 6.4.4 (Longitud de las rotaciones en $\mathbb{R}^2$), 6.4.6 (El Teorema de Heine-Borel requiere en $\mathbb{R}^m$ la distancia euclídea) y 6.4.7 (Semiplano de Poincaré)

6.5.2 (La proyección cilíndrica ortogonal de la esfera no es isometría local en ningún punto), 6.5.3 (No existen isometrías locales entre la esfera y el paraboloide) y 6.5.5 (Isometría entre un abierto del plano con cierta métrica y el plano con métrica constante)

VARIEDADES DIFERENCIABLES EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

Grupos A y B - curso 2008-09 (1er. cuatrimestre)

Clases: Teoría (29 h.) *Prácticas (27 h.)*

	L	M	X	J	V	
9:00	VDEE(B)	*vdee(B)*	VDEE(B)	VDEE(B)		Aula B07
10:00	VDEE(A)	VDEE(A)	VDEE(A)	*vdee(A)*		Aula B14

Texto J.M.Gamboa y J.M.Ruiz, "Variedades diferenciables", Sanz y Torres, 2006, 2ª ed.

Resúmenes 'NOTAS VDEE08" (Fichero.pdf en http://www.mat.ucm.es/~edaguirr)

Tutorías: L,M,J 11:00-13:00 (Despacho 439 / Tf. 91-3944464 / edaguirr@mat.ucm.es)

Examen: FEBRERO: L 16.2.09 (9:00h) / SEPTIEMBRE: M 8.9.09 (9:00h)

Calendario		**Teoría (secciones del texto)**	**Ejercicios propuestos (en cada sección del texto)**
~~L~~	~~29.9~~		
~~M~~	~~30.9~~		
~~X~~	~~1.10~~		
J	2.10	Introducción	
L	6.10	1.1	1,2,4,5,9,10
M	*7.10*		
X	8.10	1.2A	
J	*9.10*		
L	13.10	1.2B	3,4,6,9,10
M	*14.10*		
X	15.10	1.3	6,8
J	*16.10*		
L	20.10	1.4	1,2,3,4,5,9
M	*21.10*		
X	22.10	2.1	3,4,6,7,8
J	*23.10*		
L	27.10	2.2	1,2,3,4,5,6
M	*28.10*		
X	29.10	2.3	1,2,3
J	*30.10*		
L	3.11	3.1	1,2,7,8
M	*4.11*		
X	5.11	3.2	1,2,3,4,5,6
J	*6.11*		

L 10.11 M 11.11 *X 12.11* J 13.11	3.3 3.4 3.5 / 3.6	3,4 1,2,3 3,5 / 1,4,6,10
L 17.11 *M 18.11* X 19.11 *J 20.11*	4.1 4.2 	4,5,6 1,2
L 24.11 *M 25.11* X 26.11 *J 27.11*	4.3 4.4 	1,2,3,4 1,3,4,5,6
L 1.12 *M 2.12* X 3.12 *J 4.12*	5.1 5.2A 	3,7,9
~~L 8.12~~ M 9.12 *X 10.12* J 11.12	 5.2B 5.3A	 1,2,3,5,6,7,8,9,10
L 15.12 *M 16.12* X 17.12 *J 18.12*	5.3B 5.4 	1,2,4,5,10 1,2,3,7,8,9
~~L 5. 1.04~~ ~~M 6. 1~~ ~~X 7. 1~~ *J 8. 1*		
L 12 1 *M 13. 1* X 14. 1 *J 15. 1*	6.1 6.2 	1,4,7,8 1,2,3,4,9
L 19. 1 *M 20. 1* X 21. 1 *J 22. 1*	6.3 6.4 	1,2,3,4,10 3,4,6,7
L 26. 1 *M 27. 1* ~~X 28. 1~~ *J 29. 1*	6.5	2,(3,5)