Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Matemáticas

Grupos definibles en estructuras o-minimales

Antonio Ceres Sánchez

Trabajo de Fin de Grado, Julio 2018

Dirigido por:
Elías Baro González

Resumen. El objetivo de este trabajo es el estudio de los grupos definibles en estructuras o-minimales. Estos pueden ser dotados de una estructura topológica, con similitudes con los grupos de Lie. En particular, probaremos que para todo grupo definible infinito G en una estructura o-minimal no existe un natural k tal que $g^k = 1$ para cada elemento g de G. Para ello, desarrollaremos la teoría de grupos definibles y demostraremos una versión del Primer teorema de Sylow basada en la característica de Euler.

Palabras clave: teoría de modelos, cuerpo realmente cerrado, estructura o-minimal, celda, característica de Euler, grupo definible, teoremas de Sylow.

Abstract. The aim of this article is the examination of definable groups in o-minimal structures. These can be attached with a topological structure and with simiarities to Lie groups. In particular, we will prove that for any infinite definable group G in an o-minimal structure there does not exist a natural number k such that $g^k = 1$ for each element g in G. For this purpose, we will develop the theory of definable groups and show a version of First Sylow theorem based on Euler characteristic.

Keywords: model theory, real closed field, o-minimal structure, cell, Euler characteristic, definable group, Sylow theorems.

Índice

1 Introducción

La *teoría de modelos* es una rama moderna de las matemáticas que estudia las estructuras desde un punto de vista lógico. Su origen va ligado al desarrollo de la lógica matemática a finales del siglo XIX a raíz de la búsqueda de sistemas axiomáticos como el de los números naturales desarrollado por Guiseppe Peano en 1889 o los axiomas de la geometría de David Hilbert en 1899. En el desarrollo de la teoría destaca por ejemplo el teorema de completitud de Kurt Gödel, demostrado en 1929, y el trabajo de Alfred Tarksi a mediados del siglo XX. Esta teoría permite abstraer los axiomas que caracterizan determinadas estructuras y generalizarlos mediante la lógica de primer orden, permitiendo encontrar nuevos resultados. En nuestro caso, la teoría de modelos nos permite generalizar la geometría semialgebraica a las llamadas *estructuras o-minimales*.

Uno de los objetivos fundamentales de la teoría es conocer qué objetos se pueden definir formalmente, es decir, mediante *fórmulas* con sentido matemático. En el caso de la geometría semialgebraica, los conjuntos definibles son por definición los semialgebraicos, que tienen un comportamiento sencillo e intuitivo. Por ejemplo, el teorema de Tarski-Seidenberg nos asegura que las proyecciones de los conjuntos semialgebraicos son conjuntos semialgebraicos. En las estructuras o-minimales los conjuntos definibles son uniones finitas de puntos e intervalos sobre un cuerpo realmente cerrado. Por resultados como el de A. Wilkie en 1996 (véase [18]), podemos añadir ciertas funciones a nuestras fórmulas sin perder la o-minimalidad, que garantiza que los conjuntos definibles sigan siendo sencillos. Por ejemplo, el teorema de monotonía 3.4 y el teorema de descomposición en celdas 3.9 ilustran que los conjuntos con los que trabajaremos son manejables y visualizables. Por tanto, no aparecerán ”anomalías” como el seno del topólogo o el conjunto de Cantor. Tampoco supondrán problemas desde el punto de vista lógico porque por ejemplo, el conjunto de los números naturales no es definible.

El trabajo se centra en el análisis de los grupos definibles en estructuras o-minimales. Gracias al teorema de Pillay 4.9, los grupos definibles se pueden dotar de una estructura topológica, compatible con la de grupo, que viene heredada de la topología del ambiente. Por tanto, buscamos resultados ya conocidos para grupos de Lie. Las técnicas disponibles para estudiar estos resultados están limitadas por la aproximación lógica, lo cual hace necesario buscar caminos alternativos para alcanzar los resultados. En particular, demostramos el siguiente resultado bien conocido para grupos de Lie: todo grupo de Lie conexo y abeliano G tal que existe un entero positivo k para el que $g^k = 1$ para todo $g \in G$, es trivial. La demostración alternativa que daremos se basa en la demostración del primer teorema de Sylow para grupos definibles 5.17. Este no requiere que los grupos sean finitos porque utiliza la característica de Euler y no el orden de los grupos.

2 Nociones de teoría de modelos

En esta sección se introducen las definiciones y resultados básicos de la teoría de modelos. Además, se estudian los conjuntos definibles de unas estructuras que serán de gran interés: los *cuerpos realmente cerrados.*

2.1 Lenguajes y estructuras

Comenzamos con una breve introducción de los principales conceptos de lógica de primer orden que serán necesarios. La principal referencia de esta sección es [9].

Definición 2.1. Un *lenguaje* $\mathscr{L}$ de primer orden es un conjunto de símbolos, cada uno de los cuales puede ser una constante, o un símbolo de función n-ádico para algún número natural $n \geq 1$, o, finalmente, un símbolo de relación n-ádico para algún natural $n \geq 1$.

Una *$\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{M}$* consta de un conjunto M no vacío llamado *universo* o *dominio*, y de una interpretación $s^{\mathscr{M}}$ de cada símbolo s en $\mathscr{L}$, satisfaciendo que:

(i) La interpretación de una constante c es un elemento $c^{\mathscr{M}} \in M$.

(ii) La interpretación de un símbolo f de función n-ádica es una función $f^{\mathscr{M}} : M^n \to M$.

(iii) La interpretación de un símbolo R de relación n-ádica es un un subconjunto $R^{\mathscr{M}} \subset R^n$.

Ejemplo 2.2. Sea $\mathscr{L}_{\mathrm{gr}} = \{e, \cdot\}$ el denominado como *lenguaje de grupo*, el cual consta de un símbolo e de constante y un símbolo $\cdot$ de función 2-aria. El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con las interpretaciones $e^{\mathbb{Z}} := 0$ y $\cdot^{\mathbb{Z}} := +$, es un ejemplo de una $\mathscr{L}_{\mathrm{gr}}$-estructura. O también, el conjunto $\mathbb{C}^*$ de los números complejos distintos de cero con las interpretaciones $e^{\mathbb{C}} := 1$ y $\cdot^{\mathbb{C}} := \cdot$, es un ejemplo de una $\mathscr{L}_{\mathrm{gr}}$-estructura. O por último, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con las interpretaciones $e^{\mathbb{N}} := 5$ y $\cdot^{\mathbb{N}} := +$, es una $\mathscr{L}_{\mathrm{gr}}$-estructura. Obviamente, este último no es un grupo: más adelante veremos el concepto de teoría, el cual nos permitirá ceñirnos a $\mathscr{L}_{\mathrm{gr}}$-estructuras con ciertas propiedades.

Notación. De ahora en adelante, y si no hay ambigüedad posible, dado un lenguaje $\mathscr{L}$ y una $\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{M}$, a la interpretación $s^{\mathscr{M}}$ de un símbolo $s \in \mathscr{L}$ la volveremos a denotar por s.

Definición 2.3. Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ dos $\mathscr{L} - estructuras$ de dominios M y N respectivamente. Una *$\mathscr{L}$-inmersión* es una aplicación $\sigma \colon M \to N$ inyectiva que preserva la interpretación de los símbolos de $\mathscr{L}$. Si además es sobreyectiva, decimos que es $\mathscr{L} - isomorfismo$.

Si $M \subset N$ y la inclusión es $\mathscr{L}$-inmersión decimos que $\mathscr{M}$ es una *subestructura* de $\mathscr{N}$. Lo denotamos por $\mathscr{M} \subset \mathscr{N}$.

Ejemplo 2.4. Si la $\mathscr{L}_{\mathrm{gr}}$-estructura $\mathscr{G} = \langle G, e, \cdot \rangle$ es un grupo entonces las subestructuras no tienen por qué ser subgrupos, por ejemplo, la $\mathscr{L}_{\mathrm{gr}}$-estructura $\langle \mathbb{R}_{>0}, 1, \cdot \rangle$ es una subestructura de $\langle \mathbb{C}^*, 1, \cdot \rangle$. Si por el contrario consideramos el lenguaje $\mathscr{L} = \{e, \cdot, ^{-1}\}$, donde $^{-1}$ es un símbolo de función 1-aria, y se tiene que $\mathscr{G} = \langle G, e, \cdot, ^{-1} \rangle$ es un grupo con la operación $\cdot$ y $^{-1}$ es interpretada como la inversa de $\cdot$, entonces sí es cierto que las subestruturas son exactamente los subgrupos de G. Además, las $\mathscr{L}$-inmersiones entre $\mathscr{L}$-estructuras son los homomorfismos inyectivos de grupos.

Escribimos fórmulas mediante los símbolos de $\mathscr{L}$, la igualdad $=$, variables $x_0, x_1, x_2, \ldots$ o $x, y, z, \ldots$, los conectores lógicos $\neg, \wedge, \vee$ y los cuantificadores $\exists, \forall$. Nótese que no cualquier concatenación de estos símbolos tiene sentido matemático, por lo que definimos los siguientes tipos de fórmulas.

Definición 2.5. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje. El conjunto $\mathscr{T}$ de *$\mathscr{L}$-términos* es el menor conjunto tal que

(i) contiene todos los símbolos de constantes,

(ii) contiene a las variables,

(iii) si $t_1, \ldots, t_n$ pertenecen a $\mathscr{T}$ y f es símbolo de $\mathscr{L}$ de una función n-aria, entonces

$$f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathscr{T}.$$

El conjunto $\mathscr{A}$ de *$\mathscr{L}$-fórmulas atómicas* es el menor conjunto que contiene a

(i) $t_1 = t_2$ para cada par de $\mathscr{L}$-términos t_1, t_2,

(ii) $R(t_1, \ldots, t_n)$ para cada símbolo de relación n-aria R y cada n-upla de $\mathscr{L}$-términos $t_1, \ldots, t_n$.

El conjunto $\mathscr{F}$ de *$\mathscr{L}$-fórmulas* es el menor conjunto tal que

(i) toda $\mathscr{L}$-fórmula atómica está en $\mathscr{F}$,

(ii) si $\phi \in \mathscr{F}$, entonces $\neg\phi \in \mathscr{F}$,

(iii) si $\phi, \psi \in \mathscr{F}$, entonces $\phi \wedge \psi$ está en $\mathscr{F}$

(iv) si $\phi \in \mathscr{F}$ y x_i es una variable, entonces $\exists x_i \phi$ está en $\mathscr{F}$.

Nótese que combinando (*ii*) y (*iii*), se tiene que $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$ y $\phi \leftrightarrow \psi$ están en $\mathscr{F}$. Similarmente, a partir de (*ii*) y (*iv*) se deduce que $\forall x_i \phi$ pertenece a $\mathscr{F}$.

Especialmente importantes serán aquellas fórmulas en la que todas las variables aparecen cuantificadas, que sólo pueden ser verdaderas o falsas en una estructura ya que no hacen referencia a una propiedad que pueda ser cierta para sólo algunos elementos de nuestra estructura. A este tipo de fórmulas las llamamos $\mathscr{L} -$ *sentencias* o *$\mathscr{L}$-fórmulas cerradas.*

Una variable *ocurre libre* en una fórmula dada si no está cuantificada. Por tanto, una sentencia no es más que una fórmula sin variables libres. Decimos que $\mathscr{M}$ es un *modelo* de una sentencia ϕ si ϕ es verdadera en $\mathscr{M}$, es decir, si $\mathscr{M}$ satisface la fórmula ϕ, y lo denotamos por $\mathscr{M} \models \phi$.

Escribimos $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ cuando queremos indicar que las variables $x_1, \ldots, x_n$ ocurren libres. Además, si $(a_1, \ldots, a_n)$ es una n-upla de elementos de M y ϕ es verdadera para $(a_1, ..., a_n)$ escribimos $\mathscr{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$.

Decimos que dos $\mathscr{L}$-sentencias $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ son *elementalmente equivalentes* si para toda $\mathscr{L}$-sentencia ϕ

$$\mathscr{M} \models \phi \iff \mathscr{N} \models \phi.$$

Es fácil ver que:

Proposición 2.6. Si $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ son estructuras isomorfas, entonces son elementalmente equivalentes.

Definición 2.7. Decimos que un conjunto $X \subset M^n$ es *definible* en una $\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{M}$ si existe una fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_{m+n})$ y elementos $b_1, \ldots, b_m \in M$ tal que:

$$X = \phi\,(M, b_1, \ldots, b_m) \coloneqq \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n \colon \mathscr{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)\}.$$

Si además podemos elegir $b_1, \dots, b_m \in A$ para cierto $A \subset M$, decimos que X es *A-definible* o *definible sobre A*.

Dada una aplicación $f\colon A \subset M^n \to M^l$ cuyo grafo $\Gamma(f) = \{(a, f(a))\colon a \in A\} \subset M^{n+l}$ es un conjunto definible, decimos que f es una *aplicación definible*.

Obsérvese que tanto el dominio como la imagen de una aplicación definibles son definibles

Definición 2.8. Dado un lenguaje $\mathscr{L}$, llamamos *$\mathscr{L}$-teoría* a un conjunto de $\mathscr{L}$-sentencias.

Ejemplo 2.9. En el *lenguaje de anillos* $\mathscr{L}_r = \langle +, -, \cdot, 0, 1\rangle$, podemos obtener la teoría ACF de los cuerpos algebraicamente cerrados añadiendo, a los axiomas que definen un cuerpo, el axioma

$$\forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{n-1} \exists y \quad y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \dots + x_1 y + x_0 = 0$$

para cada $n \geq 1$.

Por otro lado, tenemos las siguientes nociones de carácter sintáctico:

Definición 2.10. En lógica de primer orden disponemos de un *sistema formal* que nos permite manejar el concepto de demostración formal de una manera rigurosa. Damos una idea intuitiva del concepto, para más detalles véase [5, 15]. Un sistema formal consta de:

(i) Un conjunto de axiomas lógicos. Por ejemplo, el axioma proposicional asegura que $\neg\phi \vee \phi$ para cada $\mathscr{L}$-fórmula cerrada ϕ. Estos axiomas son comunes a cualquier teoría.

(ii) Un conjunto de axiomas no lógicos, los que forman parte de la teoría T que estamos estudiando.

(iii) Unas reglas de inferencia que permiten obtener fórmulas a partir de otras ya demostradas. Por ejemplo, la regla de expansión dice que si ϕ y ψ son $\mathscr{L}$-fórmulas cerradas y ϕ ha sido probada, entonces $\phi \vee \psi$ queda probada.

Decimos que T *demuestra* la fórmula cerrada φ si existe una demostración formal de φ usando el sistema formal con los axiomas de la teoría T.

Decimos que una teoría T es *consistente* si no existe una fórmula cerrada φ de forma que T demuestra φ y también demuestra $\neg\varphi$.

Observación 2.11. Intuitivamente, y dada la forma en que está definido un sistema formal, queda claro que si una teoría T demuestra una fórmula φ entonces todo modelo $\mathscr{M}$ de T va a satisfacer esa fórmula. Esta observación da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.12. Sea T una $\mathscr{L}$-teoría, decimos que $\mathscr{M}$ es un *modelo de T* y denotamos $\mathscr{M} \models T$ si $\mathscr{M} \models \phi$ para cada $\phi \in T$. Una $\mathscr{L}$-sentencia ϕ es *consecuencia lógica* de T si $\mathscr{M} \models \phi$ para cada $\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{M}$ que sea modelo de T. Lo denotamos $T \models \phi$.

Decimos que una *$\mathscr{L}$-teoría* T es *satisfactible* si existe una $\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{M}$ tal que $\mathscr{M} \models T$.

Un resultado fundamental en Lógica Matemática, demostrado por K. Gödel en 1929, nos asegura que el recíproco de la Observación 2.11 es cierto.

Teorema 2.13. completitud de Gödel] T es satisfactible si y solo si es consistente. Además, si T tiene infinitos modelos entonces T tiene un modelo de dominio un conjunto de cardinal κ para cada cardinal $\kappa \geq |\mathscr{L}| + \aleph_0$.

Teorema 2.14 (de compacidad)**.** Dada una teoría T, si todo subconjunto finito de T es satisfactible, entonces T es satisfactible.

Demostración. El resultado se debe a que una demostración formal usa un número finito de sentencias de la teoría de la que parte. Supongamos que T no es satisfactible. Por el Teorema de completitud 2.13, esto quiere decir que podemos llegar a contradicción a partir de T. Dicha contradicción se obtendrá de un subconjunto finito de sentencias de T por lo que, de nuevo por el Teorema de completitud, tendremos un subconjunto finito de T que no es satisfactible, contra la hipótesis. □

2.2 Eliminación de cuantificadores

Los conjuntos definibles por una fórmula sin cuantificadores son, en general, más fáciles de entender y manejar. Vamos a probar en esta sección que ciertas teorías tienen la propiedad de que todos los conjuntos definibles pueden ser definidos por una fórmula sin cuantificadores.

Definición 2.15. Sea T una $\mathscr{L}$-teoría. Decimos que T tiene *eliminación de cuantificadores* si para cada $\mathscr{L}$-fórmula $\phi(v_1, \ldots, v_m)$ existe una $\mathscr{L}$-fórmula $\psi(v_1, \ldots, v_m)$ sin cuantificadores de forma que $T \models \forall\vec{v}(\phi(\vec{v}) \longleftrightarrow \psi(\vec{v}))$. Diremos que $\phi(\vec{v})$ y $\psi(\vec{v})$ son equivalentes.

Más adelante veremos que la teoría de cuerpos realmente cerrados tiene eliminiación de cuantificadores en el lenguaje de cuerpos ordenados. Los siguientes resultados nos ayudarán a comprobar cuándo una teoría tiene eliminación de cuantificadores.

Teorema 2.16. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje con algún símbolo de constante c y sea T una $\mathscr{L}$-teoría. Entonces T tiene eliminación de cuantificadores para la fórmula $\phi(\vec{v})$ si y solo si verifica: para cualesquiera $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ modelos de T y toda subestructura $\mathscr{C}$ de ambos se tiene que $\mathscr{A} \models \phi(\vec{c})$ si y solo si $\mathscr{B} \models \phi(\vec{c})$ para cada $\vec{c} \in \mathscr{C}$.

Demostración. Supongamos que T tiene eliminación de cuantificadores y sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ en las hipótesis del enunciado. Sea $\psi(\vec{v})$ una fórmula sin cuantificadores tal que $T \models \forall\vec{v}(\phi(\vec{v}) \longleftrightarrow \psi(\vec{v}))$ y sea $\vec{c} \in \mathscr{C}$. Por ser las fórmulas equivalentes, se tiene que $\mathscr{A} \models \phi(\vec{c})$ si y solo si $\mathscr{A} \models \psi(\vec{c})$ y lo mismo ocurre con $\mathscr{B}$. Ahora es claro que, como las fórmulas sin cuantificadores no hacen referencia a la existencia de elementos, su veracidad se mantiene cuando tomamos subestructuras o extensiones, es decir, $\mathscr{A} \models \psi(\vec{c})$ si y solo si $\mathscr{C} \models \psi(\vec{c})$ si y solo si $\mathscr{B} \models \psi(\vec{c})$ de donde se deduce que $\mathscr{A} \models \phi(\vec{c})$ si y solo si $\mathscr{B} \models \phi(\vec{c})$.

Veamos ahora el resultado recíproco. Supongamos que $T \models \forall\vec{v}\phi(\vec{v})$. Entonces es evidente que $T \models \forall\vec{v}(\phi(\vec{v}) \leftrightarrow c = c)$ y por tanto la fórmula $\phi(v)$ es equivalente a la formula sin cuantificadores $c = c$. En caso de que $T \models \forall\vec{v}\neg\phi(\vec{v})$ entonces $\phi(\vec{v})$ es equivalente a la fórmula $c \neq c$. Así, una vez excluidos los casos anteriores, podemos suponer que existen modelos tanto de $T \cup \exists\vec{v}\phi(\vec{v})$ como de $T \cup \exists\vec{v}\neg\phi(\vec{v})$.

Sea $\Gamma(\vec{v}) = \{\psi(\vec{v})\colon \psi$ no tiene cuantificadores $T \models \forall\vec{v}(\phi(\vec{v}) \longrightarrow \psi(\vec{v}))\}$. Denotemos $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y añadamos nuevos símbolos de constantes a nuestro lenguaje $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{d_1, \ldots, d_m\}$. Si sustituimos las apariciones de $\vec{v}$ por $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ en las fórmulas de $\Gamma(\vec{v})$, obtenemos que $\Gamma(\vec{d})$ son fórmulas cerradas en el lenguaje $\mathscr{L}'$. Nótese que la interpretación de estos símbolos de constantes no está definida. Afirmamos que $T + \Gamma(\vec{d}) \models \phi(\vec{d})$. Una vez visto esto, como por compacidad las demostraciones formales usan un números finito de axiomas de la teoría, existirán $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ tales que $T + \bigwedge \psi_i(\vec{d}) \models \phi(\vec{d})$, esto es, $T \models \bigwedge \psi_i(\vec{d}) \longrightarrow \phi(\vec{d})$. Por la arbitrariedad en la interpretación de los símbolos, se tiene $T \models \forall\vec{v}(\bigwedge \psi_i(\vec{v}) \longrightarrow \phi(\vec{v}))$ y como $\bigwedge \psi_i(\vec{v})$ no tiene cuantificadores habremos terminado.

Demostremos ahora la afirmación anterior $T + \Gamma(\vec{d}) \models \phi(\vec{d})$. Supongamos que no. Entonces existe un modelo $\mathscr{A} \models T + \Gamma(\vec{d})$ con $\mathscr{A} \not\models \phi(\vec{d}^{\mathscr{A}})$ por lo que $\mathscr{A} \models \neg\phi(\vec{d}^{\mathscr{A}})$, donde $\vec{d}^{\mathscr{A}}$ es la interpretación de las constantes en la estructura $\mathscr{A}$. Sea $\mathscr{C}$ la subestructura de $\mathscr{A}$ generada por $\vec{d}^{\mathscr{A}}$. Su dominio, el conjunto C, es el que obtenemos al aplicar composiciones de las funciones en el lenguaje a los elementos $d_1^{\mathscr{A}}, \ldots, d_n^{\mathscr{A}}$, y al cual dotamos de la $\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{C}$ evidente. Sea $Diag(\mathscr{C}) = \{\varphi(\vec{c})\colon \varphi$ es atómica o $\neg\varphi$ es atómica $\vec{c} \in \mathscr{C}$ y $\mathscr{C} \models \varphi(\vec{c})\}$.

Llamemos ahora $\Sigma = T + Diag(\mathscr{C}) + \phi(\vec{d})$ y veamos que es consistente. Si fuese inconsistente, no sería satisfactible, por lo que $T + Diag(\mathscr{C}) \models \neg\phi(\vec{d})$ y por compacidad deducimos que existen fórmulas $\psi_1, \ldots, \psi_n \in Diag(\mathscr{C})$ tal que $T \models \bigwedge \psi(\vec{d}) \longrightarrow \neg\phi(\vec{d})$. De donde obtenemos que $T \models \forall\vec{v}(\bigwedge \psi(\vec{v}) \longrightarrow \neg\phi(\vec{v}))$, que es equivalente a $T \models \forall\vec{v}(\phi(\vec{v}) \longrightarrow \bigvee \neg\psi_i(\vec{v}))$. Como $\bigvee \neg\psi_i(\vec{v})$ carece de cuantificadores, está en $\Gamma(\vec{v})$ y por tanto $\mathscr{A} \models \bigvee \neg\psi_i(\vec{d})$. De hecho, $\bigvee \neg\psi_i(\vec{v})$ sigue siendo cierta si tomamos subestructuras, por lo que $\mathscr{C} \models \bigvee \neg\psi_i(\vec{d})$, lo cual es una contradicción con $\psi_1, \ldots, \psi_n \in Diag(\mathscr{C})$. Así, Σ es consistente.

Sea ahora $\mathscr{B}$ un modelo de la teoría consistente Σ. Como $Diag(\mathscr{C}) \subset \Sigma$ tenemos una copia de $\mathscr{C}$ contenida en $\mathscr{B}$. Finalmente, como $\mathscr{A} \models \neg\phi(\vec{d})$ se tiene por la hipótesis del enunciado $\mathscr{B} \models \neg\phi(\vec{d})$, que es una contradicción. $\square$

Ahora demostramos un resultado que simplifica considerablemente las fórmulas para las que hay que verificar la eliminación de cuantificadores.

Lema 2.17. Sea T una $\mathscr{L}$-teoría y supongamos que para cada $\mathscr{L}$-fórmula sin cuantificadores $\theta(\vec{v}, x)$ existe una $\mathscr{L}$-fórmula sin cuantificadores $\psi(\vec{v})$ tal que $T \models \forall\vec{v}(\exists x\theta(\vec{v}, x) \longleftrightarrow \psi(\vec{v}))$. Entonces T tiene eliminación de cuantificadores para cada $\mathscr{L}$-fórmula $\phi(\vec{v})$.

Demostración. Sea $\phi(\vec{v})$ una fórmula en el lenguaje $\mathscr{L}$ y veamos que existe $\psi(\vec{v})$ sin cuantificadores equivalente a $\phi(\vec{v})$. Lo probamos por inducción en la complejidad de la fórmulas $\phi(\vec{v})$.

Si $\phi(\vec{v})$ es atómica entonces es obvio porque no tiene cuantificadores. Si $\phi(\vec{v})\colon \neg\phi_0(\vec{v})$ para cierta formula $\phi_0(\vec{v})$, entonces por hipótesis de inducción existe $\psi_0(\vec{v})$ una fórmula sin cuantificadores equivalente a $\phi_0(\vec{v})$. Obviamente $\phi(\vec{v})$ es entonces equivalente a la fórmula sin cuantificadores $\neg\psi_0(\vec{v})$. Si $\phi(\vec{v})\colon \phi_1(v) \wedge \phi_2(\vec{v})$ para ciertas fórmulas $\phi_1(\vec{v})$ y $\phi_2(\vec{v})$, entonces por hipótesis de inducción existen $\psi_1(\vec{v})$ y $\psi_2(\vec{v})$ fórmulas sin cuantificadores equivalentes a $\phi_1(\vec{v})$ y $\psi_2(\vec{v})$ respectivamente. Obviamente $\phi(\vec{v})$ es entonces equivalente a la fórmula sin cuantificadores $\psi_1(\vec{v}) \wedge \psi_2(\vec{v})$.

Si $\phi(\vec{v})\colon \exists x\phi_0(\vec{v}, x)$ para cierta fórmula $\phi_0(\vec{v}, x)$, entonces por hipótesis de inducción existe $\theta(\vec{v}, x)$ sin cuantificadores equivalente a $\phi_0(\vec{v}, x)$. Así, $\phi(\vec{v})$ es equivalente a la fórmula $\exists x\theta(\vec{v}, x)$. Por la hipótesis en el enunciado, existe una fórmula $\psi(\vec{v})$ sin cuantificadores equivalente a $\exists x\theta(\vec{v}, x)$, y por tanto a $\phi(\vec{v})$, como queríamos probar. $\square$

Vamos a estudiar los conjuntos definibles en la teoría de los *cuerpos realmente cerrados* CRC en el *lenguaje de los anillos ordenados* $\mathscr{L}_{\mathrm{or}} = \{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$. Comenzamos con la teoría de cuerpos ordenados que viene dada por los axiomas que definen los cuerpos y el de orden lineal junto con los axiomas:

$$Ax1\colon \forall x\forall y\forall z(x < y \longrightarrow x + z < y + z)$$
$$Ax2\colon \forall x\forall y\forall z((x < y \wedge 0 < z) \longrightarrow xz < yz)$$

Se puede demostrar que en esta teoría se tiene la siguiente eliminación de cuantificadores

$$0 < x \longleftrightarrow \exists y(x = y \cdot y \wedge y \neq 0).$$

En efecto, si $0 < y$ por $Ax2$ vemos que $0 = 0 \cdot 0 < y \cdot y = x$ y si $y < 0$, por $Ax1$ tenemos $0 = y - y < 0 - y = -y$ y aplicamos lo anterior a $-y$ usando que $(-1)^2 = 1$, que se ve directamente de los axiomas de cuerpo. Esta eliminación deja de ser posible si nos restringimos al lenguaje $\mathscr{L}_r$.

Para construir CRC añadimos a la teoría de cuerpos ordenados los siguientes axiomas para cada n impar:

$$\begin{aligned} &\text{Ax3}\colon \forall x \left(x > 0 \longrightarrow \exists y\; y^2 = x\right) \\ &\text{AxImp}_n\colon \forall x_0 \ldots \forall x_{n-1} \exists y\; y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \cdots + x_0 = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.18. (i) El cuerpo ordenado de los números reales $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, < \rangle$ es un modelo de CRC.

(ii) Si denotamos $\overline{\mathbb{Q}}$ a la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$, el cuerpo $\overline{\mathbb{Q}}^{\text{real}} := \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ de los *números reales algebraicos* es un cuerpo realmente cerrado.

(iii) Definimos el cuerpo $\mathbb{R}(t)^\wedge$ de las series de Puiseux con coeficientes en $\mathbb{R}$ como el conjunto de expresiones formales

$$f = \sum_{k=k_0}^{+\infty} c_k t^{\frac{k}{n}}$$

donde n es un entero positivo, $k_0 \in \mathbb{Z}$ y $c_{k_0} \neq 0$, y donde la suma y producto de series es el usual. Establecemos que una serie de Puiseux $f = \sum_{k=k_0}^{+\infty} c_k t^{\frac{k}{n}}$ es mayor estricta que cero si $c_{k_0} > 0$. Con este orden, el cuerpo $\mathbb{R}(t)^\wedge$ es un cuerpo realmente cerrado (véase [2, Thm 9.21]). De hecho el resultado es cierto para cualquier cuerpo realmente cerrado sobre el que definimos las series de Puiseux de manera análoga.

Obsérvese que la serie t es un *infinitésimo*, puesto que $0 < t < 1/m$ para todo entero positivo m. Se puede ver que $U = \cup_{m=1}^{\infty}(\frac{1}{m}, \infty)$ es un abierto de $\mathbb{R}(t)^\wedge$, pero también su complementario $\mathbb{R}(t)^\wedge \setminus U$ es abierto. En efecto, dado $f \notin U$, no es difícil comprobar que $(f - t, f + t) \subset \mathbb{R}(t)^\wedge \setminus U$. En particular, y al contrario que el cuerpo de los números reales, deducimos que $\mathbb{R}(t)^\wedge$ no es conexo con la topología del orden. Esta y otras "patologías" desaparecerán cuando consideremos la categoría de los conjuntos definibles en un estructura o-minimal.

En el caso de los números reales observamos que los conjuntos definibles por fórmulas sin cuantificadores más sencillos son desigualdades polinomiales $\{x \in \mathbb{R}^m \colon p(x) > 0\}$ donde $p(x) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$. Usando los conectores lógicos obtenemos todos los conjuntos definibles por fórmulas sin cuantificadores como combinaciones booleanas de las desigualdades anteriores, es decir, uniones o intersecciones finitas y complementarios de desigualdades polinomiales. Estos conjuntos se llaman *semialgebraicos.*

Vamos a ver que CRC tiene eliminación de cuantificadores en $\mathscr{L}_{\text{or}}$ por lo que los conjuntos definibles son exactamente los semialgebraicos. Para ello usamos que todo cuerpo ordenado tiene una extensión algebraica realmente cerrada que es única salvo isomorfismo y que si R es un cuerpo realmente cerrado, entonces $R(i)$ es algebraicamente cerrado, donde i denota una raíz del polinomio $x^2 + 1 = 0$. En particular, todo polinomio $p(x) \in R[x]$ factoriza en factores irreducibles lineales y cuadráticos. Podemos asegurar entonces que si R_0 es otro cuerpo realmente cerrado que extiende a R y $b \in R_0$ es una raíz de p entonces $b \in R$. En efecto, si $b \notin R$ entonces es una raíz de un factor cuadrático irreducible y por tanto $i \in R_0$, que es una contradicción. Estos y más resultados sobre la teoría de cuerpos realmente cerrados se pueden encontrar en [7].

Teorema 2.19. CRC tiene eliminación de cuantificadores en $\mathscr{L}_{\text{or}}$

Demostración. Sean $\mathscr{R}_0$ y $\mathscr{R}_1$ cuerpos realmente cerrados de dominios R_0 y R_1 respectivamente y $\mathscr{D}$ una subestructura común a ambos con dominio D. Así, $\mathscr{D}$ contiene a las constantes $0, 1$ pero puede perder los inversos, por lo que en general será un dominio ordenado. Sea $\mathscr{L}$ la clausura real del cuerpo ordenado $qf(\mathscr{D})$, cuyo dominio denotamos por L. Como esta clausura es única salvo isomorfismo, podemos suponer que $\mathscr{L}$ es una subestructura de $\mathscr{R}_0$ y $\mathscr{R}_1$. Por el Teorema 2.16 y el Lema 2.17 es suficiente ver que si $\phi(\vec{u}, v)$ es una fórmula sin cuantificadores y $\mathscr{R}_0 \models \phi(\vec{a}, b)$ para cierto $\vec{a} \in L$ y $b \in R_0$, entonces $\mathscr{R}_1 \models \exists c\phi(\vec{a}, c)$.

Como $\phi(\vec{a}, v)$ no tiene cuantificadores, reordenando se podrá escribir como

$$\bigvee_{i=1}^{l} \left(\bigwedge_{j=1}^{m} f_{i,j}(v) = 0 \wedge \bigwedge_{k=1}^{n} g_{i,k}(v) > 0 \right)$$

para ciertos polinomios $f_{i,j}, g_{i,k} \in D[X]$ con $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, m$ y $k = 1, \ldots, n$. Por tanto, se tiene $\mathscr{R}_0 \models \bigwedge_{j=1}^{m} f_{i,j}(b) = 0 \wedge \bigwedge_{k=1}^{n} g_{i,k}(b) > 0$ para cierto i, que fijamos en adelante. Podemos suponer entonces que $\phi(\vec{a}, x)$ es de la forma

$$\bigwedge_{j=1}^{m} f_{i,j}(v) = 0 \wedge \bigwedge_{k=1}^{n} g_{i,k}(v) > 0.$$

Si alguno de los polinomios $f_{i,j}$ es no nulo para algún j, entonces b es algebraico sobre D. Como L contiene a todos los elementos algebraicos sobre D que están contenidos en R_0, concluimos que $b \in L$. Así, se tendría $\mathscr{L} \models \phi(\vec{a}, b)$ de donde $\mathscr{L} \models \exists v\phi(\vec{a}, v)$ y por tanto $\mathscr{R}_1 \models \exists v\phi(\vec{a}, v)$.

En consecuencia, podemos suponer que $\phi(\vec{a}, v)$ es

$$\bigwedge_{k=1}^{n} g_{i,k} > 0.$$

Para cada k, el polinomio $g_{i,k}$ factoriza en factores lineales $X - c$ y cuadráticos $X^2 + bX + c$, con $b^2 - 4c < 0$ porque no tienen soluciones en L. Los primeros cambian de signo en c y los segundos no cambian de signo. Por tanto, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in L \cup \{-\infty\}$ y $\beta_1, ..., \beta_s \in L \cup \{\infty\}$ de forma que para cualquier $d \in R_0$ se cumple $g_{i,k}(d) > 0$ si y solo si

$$\bigvee_{i=1}^{s} \alpha_i < d < \beta_i.$$

En particular, el conjunto $\phi(a, R_0)$ de elementos $d \in R_0$ tales que $R_0 \models \phi(\vec{a}, d)$ es no vacío (porque contiene a b) y es una intersección finita de uniones finitas de intervalos abiertos cuyos extremos pertenecen a $L \cup \{-\infty, \infty\}$. Así pues, existe un intervalo abierto $(\alpha, \beta) \subset \phi(\vec{a}, R_0)$ donde $\alpha, \beta \in L$ y por tanto concluimos que $R_1 \models \phi(\vec{a}, \frac{1}{2}(\alpha + \beta))$ con $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \in L \subset R_1$, como queríamos probar. $\square$

Corolario 2.20. Sea R un cuerpo realmente cerrado y sea $X \subset R$ un subconjunto definible en el lenguaje $\mathscr{L}_{\text{or}}$. Entonces X es una unión finita de puntos e intervalos con extremos en $R \cup \{-\infty, \infty\}$.

Demostración. Sea $\phi(x, y)$ una fórmula y sean $\vec{b} \in R$ tales que $X = \phi(R, \vec{b})$. Por eliminación de cuantificadores existe una fórmula ψ sin cuantificadores de forma que $X = \psi(R, \vec{b})$. Por lo explicado en la demostración del Teorema 2.19, el conjunto $\psi(R, \vec{b})$ es una combinación booleana de puntos e intervalos abiertos con extremos en $R \cup \{-\infty, \infty\}$, lo cual tiene como resultado de nuevo una unión finita de intervalos y puntos. $\square$

3 Estructuras o-minimales

En esta sección definimos las estructuras o-minimales y comentamos algunas propiedades básicas y resultados que serán fundamentales en su análisis. Posteriormente, estudiaremos los conceptos geométricos de dimensión y característica de Euler en el contexto de las estructuras o-minimales. La principal referencia de esta sección es [17].

3.1 Nociones básicas

Comenzamos introduciendo las estructuras o-minimales y la noción de celdas. También se recogen dos teoremas centrales en estas estructuras: el teorema de monotonía y el teorema de descomposición en celdas.

Definición 3.1. Sea $\mathscr{M} = \langle M, <, +, -, \cdot, 0, 1 \ldots \rangle$ una expansión de un cuerpo realmente cerrado M, es decir, $\mathscr{M}$ es una $\mathscr{L}_{\text{or}}$-estructura y M con las interpretaciones de estos símbolos es un cuerpo realmente cerrado. Decimos que $\mathscr{M}$ es o-minimal si todo conjunto definible $X \subset M$ en $\mathscr{M}$ es una unión finita de puntos e intervalos con extremos en $M \cup \{-\infty, \infty\}$.

Ejemplo 3.2. (i) Por el Corolario 2.20, todo cuerpo realmente cerrado con la estructura de cuerpo ordenado es una estructura o-minimal.

(ii) $\mathbb{R}_{\exp} := \langle \mathbb{R}, <, +, -, \cdot, 0, 1, \exp \rangle$ es una estructura o-minimal. Este es un resultado de A. Wilkie, que se puede consultar en [18].

(iii) $\langle \mathbb{R}, <, +, -, \cdot, 0, 1, \text{sen}|_{[0,1]} \rangle$ es una estructura o-minimal, véase [3].

(iv) El cuerpo ordenado de las series de Puiseux con símbolos de función para ciertas series convergentes restringidas a $[0, 1]$ es una estructura o-minimal, véase [8].

Observación 3.3. (i) Los subconjuntos definibles más sencillos que podemos definir en un cuerpo ordenado son precisamente las uniones finitas de puntos e intervalos. La nomenclatura *o-minimal* viene precisamente de que dichas estructuras son mínimales respecto al orden: no podemos definir nada más complicado que una unión finita de puntos e intervalos usando nuestro lenguaje.

(ii) Si una estructura de cuerpo ordenado $\mathscr{M} = \langle M, <, +, -, \cdot, 0, 1, \ldots \rangle$ tiene la propiedad de que los conjuntos definibles son uniones finitas de intervalos y puntos entonces necesariamente M es un cuerpo realmente cerrado y por tanto es o-minimal (véase [17, Prop. 4.6])

(iii) Sea $\mathscr{L} = \{<, +, \cdot, 0, 1, \ldots\}$ un lenguaje y sea $\mathscr{L}' = \{<, +, \cdot, 0, 1, \ldots\} \subset \mathscr{L}$ un lenguaje que resulta de suprimir algunos símbolos de $\mathscr{L}$. Dada una $\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{R}$, podemos considerar la $\mathscr{L}'$-estructura $\mathscr{R}'$ que se obtiene al obviar las interpretaciones de los símbolos que no están en $\mathscr{L}'$. También es evidente que si $\mathscr{R}$ es o-minimal entonces $\mathscr{R}'$ es o-minimal. El recíproco no es cierto. Considérese la estructura o-minimal $\mathscr{R} = \langle \mathbb{R}, <, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ y su expansión $\langle \mathscr{R}, \text{sen} \rangle$ que no es o-minimal porque $2\pi\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \colon sin(x)\}$ es un conjunto infinito y discreto de puntos.

(iv) La base de la topología del orden en M es *uniformemente definible*, esto es, cada conjunto es definible con parámetros sobre un conjunto definible. En efecto, podemos escribir la base como $\mathscr{B} = \{I_{a,b} \colon a, b \in M \text{ y } a < b\}$ donde $I_{a,b} = (a, b) := \{x \in M \colon a < x < b\}$ es un conjunto definible para cada par $(a, b) \in H$ con H el conjunto definible dado por $\{(x, y) \in M^2 \colon x < y\}$.

El siguiente teorema es central en el desarrollo de la teoría de las estructuras o-minimales e ilustra cómo la aproximación lógica da lugar a comportamientos sencillos. La demostración se puede encontrar en [14, Thm 4.2].

Teorema 3.4 (de monotonía)**.** Sea $\mathscr{M}$ una estructura o-minimal y $f\colon (a,b) \to M$ una aplicación definible. Entonces existen puntos $a = a_0 < \ldots < a_k = b$ tal que para cada $j = 0, \ldots, k-1$ la restricción $f|_{(a_j, a_{j+1})}$ es o bien constante, o bien una biyección estrictamente monótona y continua sobre un intervalo.

Observación 3.5. Una consecuencia inmediata del Teorema de monotomía es que para todo $c \in (a,b)$ los límites $\lim_{x \to c^+} f(x)$ y $\lim_{x \to c^-} f(x)$ existen y pertenecen a $M \cup \{-\infty, \infty\}$. En particular, eso nos permite hablar de diferenciabilidad. Y a su vez, podemos demostrar una versión refinada del Teorema de monotonía en el que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar una partición del intervalo (a,b) en el que las restricciones $f|_{(a_j, a_{j+1})}$ no son solo continuas sino también de clase C^n.

De ahora en adelante, vamos a fijar una estructura o-minimal $\mathscr{M}$.

A continuación, vamos a introducir la noción de celda de una estructura o-minimal, una importante herramienta que nos permitirá, por ejemplo, definir un concepto de dimensión. Para ello, conviene denotar $(f,g)_X \coloneqq \{(x,y) \in X \times M\colon f(x) < y < g(x)\}$ para cada conjunto definible $X \subset M^n$ y para cada par de funciones $f, g\colon X \to M$ continuas, o constantes $-\infty, \infty$, tales que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$.

Definición 3.6. Sea $(i_1, \ldots, i_n)$ una secuencia de ceros y unos. Se define una $(i_1, \ldots, i_n)$-celda de M^n inductivamente de la siguiente manera:

(i) Una (0)-*celda* es un subconjunto unipuntual de M. Una (1)-*celda* es un intervalo abierto.

(ii) Supongamos definidas las $(i_1, \ldots, i_{n-1})$-celdas de M^{n-1}. Una $(i_1, \ldots, i_{n-1}, 0)$-*celda* es el grafo de una función continua f cuyo dominio es una $(i_1, \ldots, i_{n-1})$-celda. Llamamos $(i_1, \ldots, i_{n-1}, 1)$-*celda* a un conjunto de la forma $(f,g)_X$ donde X es una $(i_1, \ldots, i_{n-1})$-celda y f, g cumplen las condiciones anteriores.

En general, una *celda* es una $(i_1, \ldots, i_n)$-celda para ciertos $i_1, \ldots, i_n = 0, 1$.

Observación 3.7. (i) Sea $C \subset M^{m+n}$ una $(i_1, \ldots, i_m, i_{m+1}, \ldots, i_{m+n})$-celda. Es claro, por la definición de las celdas, que si π denota la proyección en las m primeras coordenadas, entonces $\pi(C)$ es una $(i_1, \ldots, i_m)$-celda. Veamos que, además, para cada $a \in \pi(C)$ se cumple que C_a es una $(i_{m+1}, \ldots, i_{m+n})$-celda. En efecto, para $n = 1$, por o-minimalidad, C_a es un punto o un intervalo. Supuesto cierto el resultado para $n > 1$, veamos que es cierto para $n+1$. Llamemos π_1 a la proyección de M^{m+n+1} en M^{m+n}. Por hipótesis de inducción $\pi_1(C)_a$ es una $(i_m, \ldots, i_{m+n})$-celda.

Si $C = \Gamma(f)$, donde $f\colon \pi_1(C) \to M$ es una función continua y definible, observamos que $C_a = \{b \in M^{n+1} | (a,b) \in C\} = \{(\tilde{b}, b_0) \in M^{n+1} | (a, \tilde{b}) \in \pi_1(C), f(a,\tilde{b}) = b_0\} = \{(\tilde{b}, b_0) \in M^{n+1} | \tilde{b} \in \pi_1(C)_a, f(a, \tilde{b}) = b_0\}$. Ahora, llamando $f_a\colon \pi_1(C)_a \to M$ a la función definible y continua dada por $f_a(b) = f(a,b)$ y recordando que su dominio es una $(i_m, ..., i_{m+n})$-celda concluimos que $C_a = \Gamma(f_a)$ y por tanto C_a es una $(i_{m+1}, \ldots, i_{m+n}, 0)$-celda.

De manera completamente análoga, si $C = (f,g)_{\pi_1(C)}$ con f, g continuas y definibles, $C_a = (f_a, g_a)_{\pi_1(C)_a}$ y C_a es una $(i_{m+1}, \ldots, i_{m+n}, 1)$-celda.

Nótese que los índices $(i_m, \ldots, i_{m+n})$ de la celda no dependen del punto $a \in \pi(C)$ elegido.

(ii) Sean C una $(i_1, \ldots, i_n)$-celda, $k = i_1 + \ldots + i_n$ y denotemos $j_1 < \ldots < j_k$ a los números que cumplen $i_{j_1} = \ldots = i_{j_k} = 1$. Entonces la proyección $\pi\colon C \to M^k$ sobre las coordenadas $j_1, \ldots, j_k$ es claramente un homeomorfismo sobre una celda abierta de M^k. Como consecuencia, una celda de M^n es abierta si y solo si es una $(1, \ldots, 1)$-celda.

Definición 3.8. Una *descomposición* $\mathscr{D}$ de un conjunto definible $S \subset M^n$ se define por inducción como:

(i) Una *descomposición de* $S \subset M$ es una partición finita de S en celdas disjuntas.

(ii) Una *descomposición de* $S \subset M^n$ es una partición finita $\mathscr{D}$ de S en celdas disjuntas tal que, si denotamos por $\pi \colon S \to M^{n-1}$ a la proyección en las $n-1$ primeras coordenadas, entonces $\pi(\mathscr{D}) := \{\pi(B) \colon B \in \mathscr{D}\}$ es una descomposición de $\pi(S)$.

En el caso de que $S = M^n$, se dice que $\mathscr{D}$ es una *descomposición de* M^n.

La importancia de las celdas radica en que caracterizan a los conjuntos definibles de M^n como muestra el siguiente resultado, cuya demostración se puede ver en [6].

Teorema 3.9 (de descomposición en celdas)**.** Para cada n entero positivo se tiene:

(i) Para cualesquiera conjuntos $A_1, \dots, A_k \subset M^n$ definibles, existe una descomposición de M^n que particiona a su vez a A_i para cada $i = 1, \dots, k$.

(ii) Sean $A \subset M^n$ un conjunto definible y $f \colon A \to M$ una aplicación definible, entonces existe una descomposición $\mathscr{D}$ de M^n que particiona a A y tal que, para cada $B \in \mathscr{D}$ con $B \subset A$, la restricción $f|_B$ es continua.

Observación 3.10. Recúerdese que por la Observación 3.7(ii), dada una celda $C \subset M^n$ existe una proyección $\pi \colon M^n \to M^k$ tal que π es un homeomorfismo de C en un abierto de M^k. Dada una función definible $f \colon C \to M$ y un entero $m \geq 0$, decimos que f es de clase C^m si la aplicación $f \circ \pi^{-1}$ es de clase C^m. Es posible refinar la demostración del Teorema de descomposición en celdas de forma que en (ii) la restricción $f|_B$ no solo sea continua sino de clase C^m.

Corolario 3.11. Sea $S \subset M^{n+1}$ un conjunto definible. Entonces existe un entero positivo $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $a \in M^n$ la fibra

$$S_a := \{b \in M \colon (a, b) \in S\}$$

consta de, a lo sumo, N puntos e intervalos.

Demostración. Por el Teorema de descomposición en celdas 3.9 podemos tomar una descomposición de S de modo que $S = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ para ciertas celdas de M^{n+1} y fijamos C_i una de ellas. Ahora, denotamos por $\pi \colon M^{n+1} \to M^n$ la proyección en las n primeras coordenadas y para cada $a \in M^n$ distinguimos dos casos: o bien $a \notin \pi(C_i)$ en cuyo caso $(C_i)_a = \emptyset$, o bien $a \in \pi(C_i)$. En este último caso, la fibra $(C_i)_a$ es, o bien un punto si C_i es una $(i_1, \dots, i_n, 0)$-celda, o bien un intervalo si C_i es una $(i_1, \dots, i_n, 1)$-celda. Finalmente, observamos que $S_a = (C_1)_a \cup \cdots \cup (C_k)_a$ y tomando $N = k$ se tiene el resultado. □

Corolario 3.12. Sea $X \subset M^n$ un subconjunto definible y abierto. Si $A_1, \dots, A_\ell \subset X$ son subconjuntos definibles cuya unión es todo X, entonces existe una celda abierta de M^n contenida A_i para algún i.

Demostración. Basta tomar una descomposición de X en celdas compatible con los conjuntos $A_1, \dots, A_\ell$. Como X es abierto, debe existir una celda abierta C en dicha descomposición que está contenida en X. Dado que X es la unión de $A_1, \dots, A_\ell$ y la descomposición es compatible con estos últimos, se tiene que C está contenida en A_i para algún i. □

Ya vimos en el Ejemplo 2.18(ii) que los cuerpos realmente cerrados son disconexos en general. Este hecho va (relativamente) en contra de nuestra intuición al imaginarlos como un cuerpo ordenado similar al cuerpo de los números reales, extendidos sobre una recta conexa. Si restringimos la noción de conexión topológica a la categoría definible, entonces recuperamos la conexión de dichos cuerpos:

Definición 3.13. Sea S un conjunto definible de M^n. Se dice que S es definiblemente conexo si no existen conjuntos abiertos definibles y disjuntos $U_1, U_2 \subset M^n$ tales que $S \subset U_1 \cup U_2$ y con $S \cap U_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$.

Con esta definición ahora es evidente que si $\mathscr{M}$ es una estructura o-minimal entonces el conjunto M es definiblemente conexo. En efecto, un subconjunto definible abierto de M es una unión finita y disjunta de intervalos abiertos con extremos en M, por tanto es imposible encontrar un par de dichos abiertos no vacíos y disjuntos cuya unión sea M.

El concepto de conexión definible tiene propiedades similares al concepto topológico clásico:

Lema 3.14. Sea $S \subset M^n$ un conjunto definible y definiblemente conexo. Sea $f\colon S \to M^m$ una aplicación continua definible. Entonces $f(S)$ es definiblemente conexo.

Demostración. Supongamos que no. Entonces existe $A \subset f(S)$ un conjunto definible abierto y cerrado de $f(S)$ con $A \neq \emptyset, f(S)$. Por la continuidad de f, el conjunto $f^{-1}(A)$ es abierto y cerrado de S. Además, como f es definible, $f^{-1}(A)$ es definible. De la conexión definible de S tenemos que o bien $f^{-1}(A) = \emptyset$ o bien $f^{-1}(A) = S$. De la sobreyectividad de f decucimos en el primer caso que $A = \emptyset$ y en el segundo vemos que $A = f(S)$, lo cual contradice la elección de A. □

Por último, tenemos la siguiente importante consecuencia al Teorema de descomposición en celdas:

Lema 3.15. Toda celda es definiblemente conexa. Dado un conjunto definible $X \subset M^n$, existen subconjuntos disjuntos y definibles $X_1, \ldots, X_\ell$ de X cuya unión es X y tales que si Y es un subconjunto definible de X definiblemente conexo entonces $Y \subset X_i$ para algún $i = 1, \ldots, \ell$. A dichos subconjuntos $X_1, \ldots, X_\ell$ los denominamos *componentes definiblemente conexas.*

Demostración. Es fácil demostrar por inducción en la dimensión que las celdas son definiblemente conexas usando el Lema 3.11 (véase [17, Ch 3 Prop 2.9]). Sea $\mathscr{D}$ una descomposición en celdas de X, y sea X' una unión de celdas en $\mathscr{D}$ que sea definiblemente conexa y maximal con esa propiedad, es decir, que si X'' es otra unión de celdas de $\mathscr{D}$ definiblemente conexa y $X' \subset X''$, entonces $X' = X''$. Veamos que si Y es un subconjunto definible de X definiblemente conexo e $Y \cap X' \neq \emptyset$ entonces $Y \subset X'$. En efecto, sea X_Y la unión de las celdas $C \in \mathscr{D}$ tales que $Y \cap C \neq \emptyset$. Obviamente $Y \subset X_Y$. Si X_Y no está contenido en X' entonces, $X' \subsetneq X' \cup X_Y$ y por la maximalidad de X', el conjunto $X' \cup X_Y$ no es definiblemente conexo. Por tanto, existen abiertos definibles U_1 y U_2 disjuntos y no vacíos tales que $X' \cup X_y = U_1 \cup U_2$. Puesto que X' es definiblemente conexo, podemos suponer que $X' \subset U_1$. Ahora bien, dado que $X' \cap Y \neq \emptyset$, $Y \subset U_1 \cup U_2$ e Y también es definiblemente conexo, tenemos $Y \subset U_1$. En particular, se cumple que $X_Y \cap U_2 = \emptyset$, ya que dada una celda C de $\mathscr{D}$ tal que $C \cap Y \neq \emptyset$, por ser definiblemente conexa se tiene que $C \subset U_1$. Así pues, deducimos que $X' \cup X_Y \subset U_1$ y por tanto $U_2 = \emptyset$, contradicción. □

3.2 Dimensión

Introducimos ahora una noción de dimensión para conjuntos definibles en una estructura o-minimal y estudiamos algunas de sus propiedades básicas.

Definición 3.16. Sea $X \subset M^n$ subconjunto definible no vacío de una estructura o-minimal $\mathscr{M} = \{M, <, +, -, \cdot, 0, 1, \ldots\}$. Definimos la *dimensión* de X como

$$\dim X := \max\{i_1 + \cdots + i_m \colon X \text{ contiene una } (i_1, \ldots, i_m)\text{-celda}\}$$

Si X es vacío, decimos que su dimensión es $-\infty$.

Obsérvese que $\dim X = n$ si y solo si X contiene una $(1, 1, \ldots, 1)$-celda es decir, si y solo si X contiene una celda abierta. Además, $\dim X = 0$ si y solo si X es no vacío y es unión finita (por la o-minimalidad) de $(0, 0, \ldots, 0)$-celdas, esto es, de puntos.

Lema 3.17. Sea $A \subset M^n$ una celda abierta y $f \colon A \to M^n$ una aplicación definible inyectiva, entonces $f(A)$ contiene una celda abierta.

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n = 1$, el conjunto $f(A)$ es definible y por tanto unión finita de puntos e intervalos. Como A es un abierto, contiene un intervalo, infinito, y por la inyectividad de f, el conjunto definible $f(A)$ debe contener un intervalo.

Ahora lo probamos para $n > 1$ supuesto cierto el resultado para $n - 1$. Sea $\{C_1, \ldots, C_\ell\}$ una descomposición de M^n que particione a $f(A)$. Podemos suponer que

$$f(A) = C_1 \cup \ldots \cup C_k$$

Por la inyectividad de f se tiene

$$A = f^{-1}(C_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(C_k).$$

Como A es abierto, por el Corolario 3.12 alguno de los $f^{-1}(C_j)$, supongamos que $f^{-1}(C_1)$, contiene un rectángulo abierto B. Reduciendo B si es necesario, podemos suponer que $f|_B$ es continua por el Teorema 3.9(ii). Veamos que C_1 es una celda abierta.

Si no lo es, proyectando como en la Observación 3.7(ii) , la celda C_1 es homeomorfa a una celda de M^{n-1} mediante una proyección π. Componiendo con f nos queda $g = f \circ \pi \colon B \to M^{n-1}$ continua e inyectiva.

Escribimos $B = B' \times (a, b)$ para otro rectángulo abierto B' de M^{n-1} y fijemos $c \in (a, b)$. Sea ahora $h \colon B' \to M^{n-1}$ la aplicación definida por $h(x) = g(x, c)$, que es claramente definible e inyectiva por serlo g. Por tanto, podemos aplicar la hipótesis de inducción sobre el abierto B' y la función h, de lo que deducimos que existe una celda abierta C de M^{n-1} contenida en $h(B')$.

Sea $y_0 \in C$ y tomemos $x_0 \in B'$ tal que $h(x_0) = y_0$. Como g es continua, el conjunto $g^{-1}(C)$ es un entorno abierto de (x_0, c). En particular, existe $(x_0, c') \in g^{-1}(C)$ tal que $c \neq c'$. Entonces $g(x_0, c') \in C \subset h(B')$ y deducimos que existe $x_0' \in B'$ tal que $g(x_0, c') = h(x_0') = g(x_0', c)$, lo cual contradice la inyectividad de g. Concluimos que C_1 es necesariamente una celda abierta, como queríamos probar.

□

Este resultado nos garantiza una noción de dimensión para estructuras o-minimales acorde a nuestra intuición, descartando comportamientos como el de las biyecciones de Cantor entre $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ para $m \neq n$.

Proposición 3.18. (i) Sean $X \subset Y \subset M^n$ definibles, entonces $\dim(X) \leq \dim Y$.

(ii) Sean $X \subset M^m$ y $Y \subset M^n$ definibles y supongamos que existe una biyección definible entre X e Y, entonces $\dim(X) = \dim(Y)$.

(iii) Una $(i_1, \ldots, i_n)$-celda $C \subset M^n$ tiene dimensión $i_1 + \cdots + i_n$.

(iv) Sean $X \subset M^n$ un conjunto definible y $\mathscr{D}$ es una descomposición en celdas de X, entonces $\dim(X)$ es el máximo de las dimensiones de las celdas en dicha descomposición.

(v) Sean $X, Y \subset M^m$ conjuntos definibles, entonces $\dim(X \cup Y) = \text{máx}\{\dim(X), \dim(Y)\}$.

Demostración. (i) Es claro porque toda celda contenida en X está contenida en Y.

(ii) Llamemos f a dicha biyección. Por simetría, es suficiente ver que $d \coloneqq \dim(X) \leq \dim(Y)$. Supongamos primero que $d = m$ y X es una celda abierta. Sea $Y = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ una descomposición de $Y = f(X)$ en celdas. Entonces $X = f^{-1}(C_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(C_k)$ y como X es abierto, por el Corolario 3.12 existe una celda abierta B contenida en $f^{-1}(C_i)$ para algún i.

Supongamos que $C_i \subset M^n$ es una $(j_1, \ldots, j_n)$-celda. Veamos que $d \leq j_1 + \cdots + j_n \leq dim(Y)$. Supongamos que $d > j_1 + \cdots + j_n$ y consideremos la composición $p_{C_i} \circ f|_B \colon B \to p_{C_i}(C_i) \subset M^{j_1 + \cdots + j_n}$, donde $p_{C_i} \colon C_i \to M^{j_1 + \cdots + j_n}$ es la proyección que induce un homeomorfismo entre C_i y su imagen. Identificando $M^{j_1 + \ldots + j_n}$ con el subconjunto $M^{j_1 + \ldots + j_n} \times \{0\}$ de M^d, llegamos a que $f_B \circ p_{C_i} \colon B \to M^d$ es una aplicación definible e inyectiva cuyo dominio es una celda abierta B pero cuya imagen no contiene un abierto de M^d, lo cual contradice el Lema 3.17.

Supongamos ahora que X es una $(i_1, \ldots, i_m)$-celda de M^m no necesariamente abierta. Denotemos $d \coloneqq i_1 + \cdots + i_m$ y sea p_X la proyección correspondiente de M^m en M^d, de forma que $p_X(X)$ es una celda abierta de M^d de dimensión d. Aplicando el resultado el resultado anterior a la biyección definible $f \circ (p_X)^{-1} \colon p_X(X) \to f(X)$ obtenemos que $\dim(X) = d = \dim(p_X(X)) \leq \dim(f(X)) \leq \dim(Y)$.

Para el caso general, sea C una celda contenida en X tal que $\dim(C) = \dim(X)$. En particular, tenemos que $f|_C : C \to f(C)$ es una biyección definible y por los casos anteriores y por (i) se tiene que $\dim(X) = \dim(C) \leq \dim(f(C)) \leq \dim(Y)$, como queríamos probar.

(iii) Consideramos la proyección $p_C \colon C \to M^{i_1 + \cdots + i_n}$ que induce una biyección definible sobre su imagen $p_C(C)$. El resultado se sigue de (ii) observando que la celda abierta $p_C(C)$ de $M^{i_1 + \cdots + i_n}$ tiene dimensión $i_1 + \cdots + i_n$.

(iv) Llamamos $d = \dim(X)$ y comencemos suponiendo que X es una $(i_1, \ldots, i_n)$-celda. Sea $p_X \colon X \to M^d$ la proyección habitual que induce un homeomorfismo entre X y su imagen $p_X(X)$. Entonces $p_X(\mathscr{D}) = \{p_X(B) \colon B \in \mathscr{D}\}$ es claramente una descomposición de $p_X(X)$ con $\dim(p_X(B)) = \dim(B)$ para cada $B \in \mathscr{D}$. Como $p_X(X)$ es abierto, por el Corolario 3.12 llegamos a que $p_X(B_0)$ es abierto para cierto $B_0 \in \mathscr{D}$. Por tanto, concluimos que $d = \dim(p_X(B_0)) = \dim(B_0) \leq \text{máx}\{\dim(B) \colon B \in \mathscr{B}\}$. La otra desigualdad se sigue directamente de la definición y se tiene el resultado para celdas.

En el caso general, sea C una celda de X de dimensión d. Entonces basta aplicar el resultado anterior a la celda C cuya dimensión coincide con la de X.

(v) Por el Teorema 3.9 podemos tomar una descomposición $\mathscr{D}$ que particione a X y a Y. Por (iv) observamos que $\dim(X \cup Y) = \text{máx}\{\dim(B) \colon B \in \mathscr{D}\}$. Llamemos B_0 a alguna celda que cumpla $\dim(X \cup Y) = \dim(B_0)$. De la construcción de la descomposición se tiene que $B_0 \subset X$ o $B_0 \subset Y$, de modo que $\dim(B_0) \leq \text{máx}\{\dim(X), \dim(Y)\}$ y se tiene una desigualdad. Para la otra basta aplicar a (i) a $X, Y \subset X \cup Y$. $\square$

La dimensión que hemos introducido tiene un buen comportamiento con respecto a las fibras de conjuntos definibles, lo cual tiene como consecuencia que la dimensión de la frontera de un conjunto es estrictamente menor que la dimensión del conjunto. Omitimos las demostraciones dada su longitud, véase [17, Ch 4 Prop 1.5] y [17, Ch 4 Thm 1.8].

Proposición 3.19. Sea $S \subset M^{m+n}$ definible y denotemos las fibras por $S_a = \{b \in M^n : (a,b) \in S\}$ para cada $a \in M^m$. Para todo $d \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, n\}$ sea $S(d) \coloneqq \{a \in M^m : \dim(S_a) = d\}$. Entonces $S(d)$ es definible y la región de S sobre $S(d)$, $\pi^{-1}(S(d))$, tiene dimensión

$$\dim\left(\bigcup_{a \in S(d)} \{a\} \times S_a\right) = \dim(S(d)) + d.$$

Teorema 3.20. Sea $S \subset M^n$ un conjunto definible no vacío y denotemos por ∂S su frontera $\overline{S} \setminus S$. Entonces

$$\dim(\partial S) < \dim(S).$$

En particular, S tiene interior no vacío en $\overline{S}$.

3.3 Característica de Euler

Podemos definir una noción de característica de Euler para conjuntos definibles en estructuras o-minimales que coincida con la definición topológica usual (véase [10, p. 115]). Veremos que en nuestro caso para asegurar su invariancia basta con tomar como transformaciones al conjunto de las biyecciones definibles, sin requerir condiciones de continuidad.

Comenzamos observando que para todo segmento abierto, es decir (1)-celda, cualquier partición finita suya en celdas consta de k puntos y $k+1$ intervalos abiertos, por lo que el número entero *n° de puntos* $-$ *n° de intervalos* $= -1$ es independiente de la partición considerada. Para todo punto, la única partición finita en celdas es la dada por el propio punto, con lo que la cantidad anterior vale 1 en este caso.

Esto nos lleva a dar la siguiente definición:

Definición 3.21. Sea $C \subset M^n$ una celda de dimensión d, decimos que *su característica de Euler* es $E(C) \coloneqq (-1)^d$. Para un conjunto definible arbitrario $S \subset M^n$ y una descomposición $\mathscr{P}$ de S, llamamos *caracterísitca de Euler de S respecto a la descomposición $\mathscr{P}$* a

$$E_{\mathscr{P}}(S) \coloneqq \sum_{C \in \mathscr{P}} E(C) = k_0 - k_1 + \ldots + (-1)^m k_m \tag{1}$$

donde k_i es el número de celdas de dimensión i contenidas en $\mathscr{P}$.

Vamos a demostrar que esta cantidad es independiente de la descomposición de S elegida, por lo que podremos hablar de la *característica de Euler de S* como $E(S) \coloneqq E_{\mathscr{P}}(S)$ para cualquier descomposición $\mathscr{P}$ de S.

Para probarlo, primero necesitamos mostrar que para una celda C, la definición de $E(C)$ es consistente con la definición dada para descomposiciones, esto es:

Lema 3.22. Sea $\mathscr{D}$ una descomposición de una celda $C \subset M^n$, entonces $E_{\mathscr{D}}(C) = E(C)$.

Demostración. Veámoslo por inducción sobre n. Para $n = 1$, la celda $C \subset M$ es un punto o un intervalo abierto y el resultado no es más que la observación del principio de la sección.

Supuesto cierto el resultado para n, sea $C \subset M^{n+1}$ y distingamos dos casos: C es una $(i_1, \dots, i_n, 0)$-celda y C es una $(i_1, \dots, i_n, 1)$-celda.

En el primer caso se tiene que C es el grafo de una función definible y continua $f\colon \pi(C) \to M$, donde π es la proyección de C sobre las n primeras coordenadas. Obsérvese que por definición $\pi(C)$ es una celda de la misma dimensión que C y por tanto $E(C) = E(\pi(C))$. Sea $B \in \pi(\mathscr{D})$. Entonces $\pi^{-1}(B) = \Gamma(f|B)$ y por tanto $\dim(B) = \dim(\Gamma(f|B))$, de donde se tiene que

$$\sum_{\substack{C' \in \mathscr{D} \\ \pi(C')=B}} E(C') = E(\Gamma(f|_B)) = E(B)$$

Por tanto, usando la hipótesis de inducción $E_{\pi(\mathscr{D})}(\pi(C)) = E(\pi(C))$ se tiene

$$\begin{aligned} E_{\mathscr{D}}(C) &= \sum_{C' \in \mathscr{D}} E(C') = \sum_{B \in \pi(\mathscr{D})} \sum_{\substack{C' \in \mathscr{D} \\ \pi(C')=B}} E(C') \\ &= \sum_{B \in \pi(\mathscr{D})} E(B) = E_{\pi(\mathscr{D})}(\pi(C)) = E(\pi(C)) = E(C) \end{aligned}$$

como queríamos probar.

En el segundo caso, sean g_0 y g_1 las funciones definibles y continuas que definen C. Obsérvese que $\dim(C) = \dim(\pi(C)) + 1$ y por tanto $E(C) = -E(\pi(C))$. Dada $B \in \pi(\mathscr{D})$ de dimensión d, las celdas de $\mathscr{D}$ cuya imagen por π es B son $\Gamma(f_1), \dots, \Gamma(f_t), (f_0, f_1), \dots, (f_t, f_{t+1})$ para ciertas $f_1, \dots, f_t$ continuas y definibles y donde $f_0 = g_0|_B$ y $f_{t+1} = g_{t+1}|_B$. Observamos que las celdas que son grafos tienen dimensión $d \coloneqq \dim(B)$ y las otras $d+1$, por lo que

$$\sum_{\substack{C' \in \mathscr{D} \\ \pi(C')=B}} E(C') = t(-1)^d + (t+1)(-1)^{d+1} = (-1)^{d+1} = -E(B)$$

De nuevo por la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} E_{\mathscr{D}}(C) &= \sum_{C' \in \mathscr{D}} E(C') = \sum_{B \in \pi(\mathscr{D})} \sum_{\substack{C' \in \mathscr{D} \\ \pi(C')=B}} E(C') \\ &= -\sum_{B \in \pi(\mathscr{D})} E(B) = -E_{\pi(\mathscr{D})}(\pi(C)) = -E(\pi(C)) = E(C) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Lema 3.23. Dadas dos descomposiciones $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ de un conjunto definible $S \subset M^m$, existe $\mathscr{P}_0$ descomposición de S en celdas que es refinamiento de las anteriores, es decir, para cada $C \in \mathscr{P} \cup \mathscr{P}'$ la restricción $\mathscr{P}_0|_C \coloneqq \{C' \in \mathscr{P}_0 \colon C \cap C' \neq \emptyset\}$ es una descomposición de C.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 3.9, existe una descomposición $\mathscr{D}$ de M^m que particiona cada celda de $\mathscr{P} \cup \mathscr{P}'$ y es claro que basta tomar $\mathscr{P}_0 = \mathscr{D}|_S$ su restricción al conjunto S. □

Ahora podemos probar que la característica de Euler de un conjunto definible S está bien definida

Proposición 3.24. Sean $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ descomposiciones de S, entonces $E_{\mathscr{P}}(S) = E_{\mathscr{P}'}(S)$.

Demostración. Dadas las descomposiciones $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$ tomamos $\mathscr{P}_0$ en las condiciones del Lema 3.23. Es suficiente ver que $E_{\mathscr{P}}(S) = E_{\mathscr{P}_0}(S)$. Aplicando el Lema 3.22 a la descomposición $\mathscr{P}_0|C$ de cada $C \in \mathscr{P}$ obtenemos

$$E_{\mathscr{P}}(S) = \sum_{C\in\mathscr{P}} E(C) = \sum_{C\in\mathscr{P}} \sum_{\substack{C'\in\mathscr{P}_0 \\ C'\subset C}} E(C') = \sum_{C'\in\mathscr{P}_0} E(C') = E_{\mathscr{P}_0}(S).$$

□

Corolario 3.25. Sean $S_1, S_2 \subset M^n$ conjuntos definibles. Entonces $E(S_1 \cup S_2) = E(S_1) + E(S_2) - E(S^1 \cap S^2)$.

Demostración. De la definición dada por (1) es claro que si S_1 y S_2 son disjuntos, se cumple $E(S_1 \cup S_2) = E(S_1) + E(S_2)$. Si no son disjuntos, observamos que $E(S_1) = E(S_1 \setminus (S_1 \cap S_2)) + E(S_1 \cap S_2)$ por lo que $E(S_1 \cup S_2) = E(S_1 \setminus (S_1 \cap S_2)) + E(S_2) = E(S_1) + E(S_2) - E(S_1 \cap S_2)$. □

Proposición 3.26. Sea $S \subset M^{m+n}$ definible, $\mathscr{D}$ una descomposición de M^{m+n} que particione a S y $\pi\colon M^{m+n} \to M^m$ la proyección en las m primeras coordenadas. Entonces para cada celda $A \in \pi(\mathscr{D})$ existe una constante $e_A \in \mathbb{Z}$ tal que $E(S_a) = e_A$ para todo $a \in A$. Además, se cumple

$$E(\pi^{-1}(A) \cap S) = E(A)e_A.$$

En particular, $E(S_a)$ toma un número finito de valores y el conjunto $\{a \in M^m | E(S_a) = e\}$ es definible para cada $e \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $A \in \pi(\mathscr{D})$ una $(i_1, \ldots, i_m)$-celda y sea $C \in \mathscr{D}$ una celda contenida en S de forma que $\pi(C) = A$. Por la Observación 3.7(i), C es una $(i_1, \ldots, i_m, i_{m+1}, \ldots, i_{m+n})$-celda para ciertos $i_{m+1}, \ldots, i_{m+n}$ y para cada $a \in A$ el conjunto C_a es una $(i_{m+1}, \ldots, i_{m+n})$-celda. Se tiene entonces $E(C) = (-1)^{dim C} = (-1)^{dim A}(-1)^{dim C_a} = E(A)E(C_a)$. De nuevo por la Observación 3.7(i), los índices $(i_{m+1}, \ldots, i_{m+n})$ de la celda C_a, y por tanto su dimensión y característica de Euler no dependen del punto $a \in A$. Ahora basta notar que $S_a = \bigcup_{C\in\mathscr{D}|_S} C_a$ por lo que se tiene

$$E(\pi^{-1}(A) \cap S) = \sum_{\substack{C\in\mathscr{D}|_S \\ \pi(C)=A}} E(C) = E(A) \sum_{\substack{C\in\mathscr{D}|_S \\ \pi(C)=A}} E(C_a) = E(A)E(S_a)$$

con el último factor constante e_A.

Nótese que como el número de celdas en una descomposición es finito, $E(S_a)$ toma un número finito de valores y el conjunto $\{a \in M^m | E(S_a) = e\}$ es definible para cada $e \in \mathbb{Z}$ por ser unión finita de celdas. □

Terminamos esta disgresión sobre la característica de Euler con un resultado importante cuya demostración vamos a omitir dada su extensión. Se puede ver en [17, p. 72].

Teorema 3.27. Sea $S \subset M^m$ definible y $f\colon S \to M^n$ una aplicación definible inyectiva, entonces

$$E(S) = E(f(S)).$$

Corolario 3.28. Sean $X \subset M^n$ e $Y \subset M^m$ conjuntos definibles y $f\colon X \to Y$ una aplicación definible sobreyectiva tal que $E(f^{-1}(y)) = e$ para todo $y \in Y$. Entonces $E(X) = E(Y)e$. En particular, $E(X \times Y) = E(X)E(Y)$.

Demostración. Consideremos el conjunto definible $S := \{(f(x), x) : x \in X\} \subset M^{m+n}$ cuyas fibras son $S_y = \{x \in X : f(x) = y\} = f^{-1}(y)$. Obsérvese que por el Teorema 3.27, se tiene que $E(X) = E(S)$. Sea $\mathscr{D}$ una descomposición en celdas de S y denotemos $\pi : M^{m+n} \to M^m$ la proyección en las m primeras coordenadas. Entonces, $\pi(\mathscr{D}) = \{\pi(C) : C \in \mathscr{D}\}$ es una descomposición en celdas de $\pi(S) = Im(f) = Y$. Por la Proposición 3.26,

$$E(S) = \sum_{a \in \pi(\mathscr{D})} E(\pi^{-1}(A) \cap S) = \sum_{a \in \pi(\mathscr{D})} E(A)e = E(Y)e.$$

□

3.4 Eliminación de imaginarios

En esta sección vamos a mostrar que en las estructuras o-minimales tenemos asegurado una especie de axioma de elección en conjuntos definibles. Este resultado nos permitirá tratar al conjunto cociente de una relación de equivalencia definible como un conjunto definible.

Dada una estructura o-minimal $\mathscr{M}$ de dominio M vamos a definir la *función elección*

$$e(\cdot) : \{\text{Subconjuntos definibles no vacíos}\} \longrightarrow \bigcup_{n \geq 1} M^n$$

de forma que se cumpla $e(X) \in X$ para todo subconjunto definible no vacío X de M^n. Comencemos definiendo la función e en los subconjuntos definibles no vacíos de M. Sea $X \subset M$ definible no vacío. Si X tiene elemento mínimo, definible mediante la fórmula $\exists x(x \in X \wedge \forall y(y \in X \to \neg(y < x)))$, tomamos ese elemento como $e(X)$. Si no tiene elemento mínimo, tomamos el ínfimo $a := \text{ínf}(X)$ de X, que existe por o-minimalidad, y donde escribimos $a = -\infty$ en caso de que X no tenga ínfimo en M. Considérese también $b = \sup\{x \in M : (a, x) \subset X\}$, el cual de nuevo existe por o-minimalidad, y donde escribimos $b = \infty$ si no existe dicho supremo en M. Tomamos entonces:

$$e(X) = \begin{cases} 0, & \textit{si } a = -\infty, b = +\infty \\ b - 1, & \textit{si } a = -\infty, b \in M \\ a + 1, & \textit{si } a \in M, b = +\infty \\ (a + b)/2, & \textit{si } a, b \in M \end{cases}$$

Definimos ahora la función e en los subconjuntos definibles de M^n suponiendo que ya la hemos definido para los subconjuntos definibles de M^{n-1}. Sea $X \subset M^n$ definible y no vacío. Proyectamos X sobre las $n - 1$ primeras coordenadas mediante π. Por hipótesis de inducción tenemos definido $e(\pi(X)) \in \pi(X)$ al que llamamos $a \in M^{n-1}$. Tomando ahora la sección $X_a = \{y \in M^n | (a, y) \in X\}$ que es un subconjunto definible y no vacío, podemos elegir $b = e(X_a)$ de forma que $e(X) = (a, b) \in X$.

En principio, es impreciso hablar de definibilidad para la función e, cuyo dominio ni siquiera es un subconjunto de ningún M^n. Sin embargo, dada la definición de e, es evidente que dicha función es definible en el siguiente sentido:

Lema 3.29. Sea $S \subset M^m \times M^n$ un conjunto definible, y denotemos por $\pi : M^m \times M^n \to M^n$ la proyección en las últimas n coordenadas. Llamemos $Y := \pi(S) \subset M^n$ y para cada $y \in Y$ escribamos $S_y = \{x \in M^n | (x, y) \in S\}$. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \widetilde{e} : Y &\longrightarrow S \\ y &\longmapsto \tilde{e}(y) = (e(S_y), y) \end{aligned}$$

es definible.

Como veremos a continuación, la función e nos permite encontrar conjuntos de representantes definibles de relaciones de equivalencia definibles:

Proposición 3.30. Sea $S \subset M^m$ un conjunto definible y $E \subset S \times S$ relación de equivalencia definible en S. Entonces existe una función definible $f\colon S \to S$ tal que $f(a) \in [a]$ para cada $a \in S$ y $f(a) = f(b)$ si y solo si $(a, b) \in E$. En particular, $Im(f)$ es un conjunto definible de representantes de E.

Demostración. Sean $\pi_1\colon S \times S \to S$ la proyección en las m primeras coordenadas y $\pi_2\colon S \times S \to S$ la proyección en las m últimas coordenadas. Evidentemente $\pi_2(E) = S$ y E_a es la clase de equivalencia $[a]$. Por el Lema 3.29 se tiene que $\widetilde{e}\colon S \to E\colon a \mapsto (e([a]), a)$ es definible y por tanto $f := \pi_1 \circ \widetilde{e}$ es definible. Obsérvese que por definición $f(a) = e([a]) \in [a]$ para todo $a \in S$. Es más, $(a, b) \in E \iff [a] = [b] \underset{*}{\iff} e([a]) = e([b]) \iff f(a) = f(b)$ donde la implicación hacia la izquierda en $(*)$ se tiene porque si $[a] \neq [b]$ entonces son disjuntos y llegamos a la contradicción $e([b]) = e([a]) \in [a]$ $\square$

4 Grupos definibles

Introducimos la noción a la cual dedicaremos el resto del trabajo, y sus principales propiedades. Para el resto de la sección fijamos una estructura o-minimal $\mathscr{M}$. Si decimos que un conjunto X es definible, nos referimos a que X es un subconjunto de M^n para algún natural $n \geq 1$ y definible en la estructura $\mathscr{M}$. Las principales referencias a esta sección son [11] y [13].

4.1 Nociones básicas

Definición 4.1. Un *grupo definible* es un par $(G, \cdot)$ donde G es un conjunto definible y la operación de grupo $\cdot\colon G \times G \to G\colon (g,h) \mapsto g \cdot h$ es una aplicación definible.

Observación 4.2. La aplicación inversa $\mathrm{inv}\colon G \to G\colon g \mapsto g^{-1}$ es automáticamente definible. En efecto, su grafo $\Gamma(\mathrm{inv}) = \{(g,h) \in G \times G\colon gh = e\}$ es definible.

Definición 4.3. Un *grupo algebraico* es un par $(G, \cdot)$ donde G es un conjunto *algebraico*, es decir combinaciones booleanas de ceros de polinomios, y la operación de grupo $\cdot\colon G \times G \to G$ es algebraica, esto es, su grafo es un conjunto algebraico.

Análogamente, llamamos *grupo semialgebraico* a un par $(G, \cdot)$ donde G es un conjunto semialgebraico y la operación de grupo $\cdot\colon G \times G \to G$ es semialgebraica.

Ejemplo 4.4. (1) Los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ son grupos semialgebraicos. También el grupo

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

con el producto usual de matrices, es un grupo semialgebraico. En general, todo subgrupo de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ que venga definido por una relación algebraica entre los elementos de la matriz, es un grupo semialgebraico (de hecho, algebraico).

(2) El grupo $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ es semialgebraico, pero no es algebraico. Es la componente definiblemente conexa de 1 del grupo algebraico $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

(3) Consideremos los grupos semialgebraicos $G_1 := (\mathbb{R}, +)$ y $G_2 := (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Como grupos definibles en la estructura o-minimal $\mathbb{R}_{exp}$ (recuérdese el Ejemplo 3.2(ii)), G_1 y G_2 son claramente isomorfos mediante la función definible $exp\colon G_1 \to G_2\colon t \mapsto e^t$, que es isomorfismo de grupos. Decimos que son *definiblemente isomorfos*.

Sin embargo, como grupos semialgebraicos, es decir, como grupos definibles en la estructura o-minimal del cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ no son isomorfos. Véase el Ejemplo 4.8.

(4) Considérese el subgrupo de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ dado por

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} e^t & te^t & u \\ 0 & e^t & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t, u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

El grupo G es definible en la estructura o-minimal $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$. Sin embargo, G no es definiblemente isomorfo en $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ a un grupo semialgebraico, véase [12, §1].

(5) Sea el conjunto semialgebraico $G = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ que dotamos de estructura de grupo semialgebraico mediante la operación:

$$(x,y) \in G^2 \longmapsto x +_G y := x + y \pmod 1 = \begin{cases} x + y & \text{si } x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{si } x + y \geq 1 \end{cases}$$

A este grupo semialgebraico lo denotaremos por $([0,1), \mathrm{mod}\ 1)$.

Nótese que para todos los grupos descritos en (1)-(4), la operación de grupo es continua cuando consideramos la topología inducida por el ambiente. Obviamente, esto no es cierto para el grupo $([0,1), \mathrm{mod}\ 1)$. En efecto, en los puntos de $(0,1)$ es claro que la topología usual hace continua la operación de grupo. Sin embargo, la base entornos de $\{0\}$ heredada de $\mathbb{R}$ no hace continua a la operación porque $1/2 +_G 1/2 = 0$ y para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $(1/2-\varepsilon) +_G 1/2 = 1-\varepsilon$. Sin embargo, si en el conjunto $[0,1)$, añadimos el punto $\{1\}$ e identificamos el 0 con el 1 obtendremos un espacio homeomorfo a la circunferencia y con esa topología el grupo sí es un grupo topológico (véase el Ejemplo 4.11 para más detalle).

Lo expuesto en este ejemplo es un fenómeno general demostrado por A. Pillay en el artículo [13], el cual supuso el comienzo del estudio de los grupos definibles en estructura o-minimales. Desarrollemos las nociones necesarias para explicar dicho resultado. Comenzamos definiendo el concepto de variedad definible, que luego asociaremos a los grupos definibles.

Definición 4.5. Sea X un conjunto definible. Una *carta definible* es una terna $\mathscr{c} = \langle U, \phi, n\rangle$, donde U es un subconjunto definible de X, $n \geq 0$ y ϕ es una biyección definible de U en un abierto de M^n. Decimos que n es la *dimensión* de la carta $\mathscr{c}$.

Se dice que dos cartas definibles son C^0*-compatibles* si lo son según la definición usual. Por el teorema de invariancia del dominio la dimensión de ambas es la misma.

Un C^0*-atlas definible* en X es un conjunto finito $\mathscr{A}$ de cartas de X que son C^0-compatibles dos a dos y cuyos dominios cubren X. Llamamos C^0*-variedad definible* a un par $\mathbf{X} = \langle X, \mathscr{C}\rangle$ donde X es un conjunto definible y $\mathscr{C}$ es un C^0-atlas definible en X. Al igual que en el contexto clásico, tenemos asociada una topología de variedad: un subconjunto $B \subset X$ es abierto si y solo si para toda carta $\langle U, \phi, n\rangle$ se tiene que $\phi(B \cap U)$ es un abierto de M^n.

Dadas $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ dos C^0-variedades y una aplicación $f\colon X \to Y$ definible, decimos que f es de clase C^0 si es continua respecto a las topologías de variedad de $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$.

En el contexto de grupos definibles, nos van a interesar las estructuras de variedad definibles compatibles con la operación de grupo.

Definición 4.6. Llamamos C^0*-grupo definible* a un par $\langle G, \mathscr{A}\rangle$ donde G es un grupo definible en $\mathscr{M}$ tal que $\mathscr{A}$ es un C^0-atlas definible en G y la operación de grupo es de clase C^0.

Observación 4.7. Nótese que si $\langle G, \mathscr{A}\rangle$ es un C^0-grupo definible, la aplicación $\tau_{a,b}\colon G \to G\colon x \mapsto xa^{-1}b$ es una biyección definible y continua con inversa $\tau_{b,a}$ continua, por lo que es un homeomorfismo que transforma a en b. Esta es una propiedad general de grupos topológicos que permite estudiar las propiedades locales en un punto cualquiera del grupo, normalmente el elemento neutro.

Ejemplo 4.8. Estamos en disposición de ver que no existe un isomorfismo semialgebraico entre los grupos G_1 y G_2 definidos en el Ejemplo 4.4. En efecto, supongamos que $f\colon G_1 \to G_2\colon t \mapsto f(t)$ es un homomorfismo de grupos definibles en la estructura o-minimal $\mathbb{R}$. En particular, $f(t_1+t_2) = f(t_1)\cdot f(t_2)$ y $f(0) = 1$. Además, como consecuencia del Teorema de descomposición en celdas 3.9(ii), existe $a \in G_1$ tal que f es continua en a. Entonces, por la homogeneidad de los grupos que comentamos en la Observación 4.7, f es continua en G_1. Como la función exponencial exp está caracterizada por $exp(1) = e$, es continua y $exp(s+t) = exp(s)exp(t)$, es inmediato ver que f es necesariamente la función exponencial, que no es una aplicación semialgebraica, como queríamos demostrar.

Podemos enunciar ahora el resultado que anticipamos anteriormente de A.Pillay de 1988, el cual se basa a su vez en un resultado fundamental de Teoría de Modelos probado por E. Hrushovski y denominado *configuración de grupo*.

Teorema 4.9 (de Pillay)**.** Sea G un grupo definible. Entonces existe un único atlas $\mathscr{A}$ en G tal que $\langle G, \mathscr{A}\rangle$ es un C^0-grupo definible.

Obviamente, de ahora en adelante para un C^0-grupo definible la topología que nos va a interesar no es la heredada por el ambiente, sino la topología de variedad. Afortunadamente, el siguiente resultado [17, Ch 10 Thm 1.8] nos permite eliminar esta ambigüedad:

Teorema 4.10. Sea G un C^0-grupo definible. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y una aplicación definible $f\colon G \to M^n$ tal que f es homeomorfismo entre G y su imagen $f(G)$, cuya topología es la que hereda como subespacio de M^n.

Por tanto, de ahora en adelante pordemos suponer que todo grupo definible G es un C^0-grupo cuya topología es la heredada del espacio ambiente.

Ejemplo 4.11. Considérese el grupo semialgebraico $([0,1), \mathrm{mod}\ 1)$. Sobre él definimos las cartas $\langle U_1, \phi_1, 1\rangle$ y $\langle U_2, \phi_2, 1\rangle$ donde $U_1 = (0,1)$ con $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R} : x \mapsto x$, y $U_2 = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ con

$$\phi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ x-1 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

El grupo semialgebraico $([0,1), \mathrm{mod}\ 1)$ es un C^0-grupo semialgebraico con el C^0-atlas definible formado por las dos cartas anteriores.

Busquemos un modelo de G como en el Teorema 4.10. Para ello, observamos que topológicamente el punto $\{0\}$ está "pegado" a la parte superior del intervalo. Con más precisión, nuestro espacio es homeomorfo al resultado de identificar los extremos del intervalo $[0,1]$, que es en esencia una circunferencia. Por tanto, consideramos la aplicación definible $f\colon G \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (-4x+1, \sqrt{1-(4x-1)^2}) & \text{si } x \in [0, 1/2) \\ (4x-3, \sqrt{1-(4x-3)^2}) & \text{si } x \in [1/2, 1) \end{cases}$$

que transforma 0 en $(1,0)$ y recorre la circunferencia $\mathbb{S}^1$ en sentido antihorario. Nótese que la operación de grupo en $\mathbb{S}^1$ es la inducida por f y no coincide con la definición de grupo topológico usual dada por la identificación con los complejos $x \cdot y := e^{i\theta_x} e^{i\theta_y}$.

Observación 4.12. (i) Aunque para los objetivos del trabajo es suficiente con el caso C^0, todas la nociones y resultados tienen su equivalente para clase C^p para un $p \in \mathbb{N}$ fijo.

(ii) Si la estructura o-minimal $\mathscr{M}$ tiene como universo el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ entonces observamos que un C^0-grupo definible G es un grupo topológico que localmente es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y por tanto, por el problema quinto de Hilbert resuelto por Montgomery, Zippin y Gleason, el grupo G es un grupo de Lie, es decir, admite una estructura de variedad analítica de forma que la operación de grupo es una aplicación analítica. Este es uno de los motivos por los que los grupos definibles en estructuras definibles han sido estudiados durante los últimos 30 años: en el caso de que la estructura o-minimal expanda a los números reales, un grupo definible es un tipo de grupo de Lie con muy buenas propiedades.

Por otro lado, los grupos de Lie son una fuente de inspiración a la hora de determinar resultados para grupos definibles cuando la estructura o-minimal no expande necesariamente a los números reales. Por ejemplo, uno de las primeros resultados que se prueba en un curso sobre grupos de Lie es que todo grupo de Lie conexo y abeliano es isomorfo a $\mathbb{R}^n \times [\mathbb{S}^1]^m$ para ciertos $n, m \in \mathbb{N}$ y donde

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

con la multiplicación usual de matrices (véase [1, Thm 2.9]). Desafortunadamente, para demostrar este resultado es necesario utilizar herramientas que no están disponibles en nuestro contexto o-minimal, por ejemplo, la integración. Si integramos la función semialgebraica $\frac{1}{x}$ obtenemos la función $\ln(x)$, la cual ya no es semialgebraica. Es más, el resultado anterior es directamente falso para grupos definibles: si R denota un cuerpo realmente cerrado entonces los grupos semialgebraicos $(R, +)$ y $(R_{>0}, \cdot)$ no son semialgebraicamente isomorfos, ni siquiera si $R = \mathbb{R}$ (aunque en este último caso sí es cierto que dichos grupos son isomorfos como grupos de Lie, véase el Ejemplo 4.4(iii)). Incluso podríamos encontrar ejemplos más complicados usando variedades abelianas, lo cual evidentemente no tiene cabida en este tipo de trabajo.

Sin embargo, observamos que una consecuencia casi trivial del hecho de que todo grupo de Lie abeliano y conexo sea isomorfo a $\mathbb{R}^n \times [\mathbb{S}^1]^m$ es que si L es un grupo de Lie abeliano y conexo para el cual existe un entero positivo k tal que $x^k = 1$ para todo $x \in L$, entonces L es trivial. Y esta consecuencia sí que podemos considerarla en nuestro contexto, es decir, ¿es cierto que si G es un grupo definible conexo para el cual existe k tal que $x^k = 1$ para todo $x \in G$, entonces G es trivial? La respuesta es afirmativa, pero la demostración es radicalmente distinta en el contexto o-minimal. Usaremos para ello una versión de los Teoremas de Sylow a través de la característica de Euler.

4.2 Condición de cadena descendente

Una vez introducidos los C^0-grupos definibles, veamos algunas de sus propiedades más relevantes. Nuestro objetivo principal es probar la condición de cadena descendente 4.17. Comencemos estudiando los subgrupos definibles de un grupo definible.

Lema 4.13. Sea H un subgrupo definible de un grupo definible G. Se cumple:

(i) Si H es un subgrupo definible de G, entonces $\overline{H}$ es un subgrupo definible de G.

(ii) Si H tiene interior no vacío en G, entonces H es abierto.

(iii) H es cerrado.

Demostración. (i) Sean $x, y \in \overline{H}$ y veamos que $xy \in \overline{H}$. Dado un entorno U de xy, queremos comprobar que $U \cap H \neq \emptyset$. Por la continuidad de la operación de grupo existen entornos U^x y U^y de x e y respectivamente, tales que $U^x \cdot U^y \subset U$. Puesto que $x, y \in \overline{H}$ sabemos que existen $u \in U^x \cap H$ y $v \in U^y \cap H$ y por tanto $u \cdot v \in (U^x \cap H)(U^y \cap H) \subset U \cap H$, como queríamos probar.

Veamos ahora que si $x \in \overline{H}$, entonces $x^{-1} \in \overline{H}$. Sea U un entorno de x^{-1} y comprobemos que $U \cap H \neq \emptyset$. Por la continuidad de la aplicación inversa el conjunto U^{-1} es un entorno abierto de x. Dado que $x \in \overline{H}$, existe $u \in U^{-1} \cap H$, por lo que $u^{-1} \in U \cap H$, como queríamos probar.

(ii) Sea U un abierto no vacío de G contenido en H. Fijado $u \in U$, observamos que por la continuidad de la operación de grupo el subconjunto $V := u^{-1}U \subset HU \subset H \subset G$ es abierto definible de G que contiene a e. Finalmente, dado cualquier $x \in H$ tenemos que $xV \subset H$ es un abierto definible de G que contiene a x. Por tanto, H es abierto.

(iii) Por el apartado (i) la adherencia $\overline{H}$ es un subgrupo definible de G. Además, según el Teorema 3.20, el grupo H tiene interior no vacío en $\overline{H}$. Entonces por el apartado (ii) anterior, el grupo H es abierto en $\overline{H}$. Ahora podemos escribir $\overline{H} = \bigcup_{i \in I} h_i H$ para ciertos $h_i \in \overline{H}$ representantes de las clases de equivalencia por la relación dada por los cosets por la izquierda. Entonces, prescindiendo del representante de la clase del neutro e, al que denotamos i_0, tenemos $\overline{H} \setminus H = \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} h_i H$.

Observamos que para cada $i \in I$ la clase h_iH es un abierto de $\overline{H}$ ya que la aplicación definible

$$\overline{H} \longrightarrow \overline{H} \colon x \longmapsto h_i x$$

es un homeomorfismo cuya inversa es $y \mapsto h_i^{-1}y$. Así pues, $\overline{H} \setminus H$ es abierto y por tanto H es cerrado en $\overline{H}$, es decir, $H = \overline{H}$ de donde deducimos que H es cerrado en G. □

Un subgrupo definible de especial importancia será la componente definiblemente conexa de la identidad.

Proposición 4.14. Sea G un grupo definible y denotemos por G^0 a la componente definiblemente conexa de su elemento neutro e. Entonces G^0 es un subgrupo normal de G.

Demostración. Como la operación $\cdot \colon G \times G \to G$ y su inversa son continuas, transforman conexos definibles en conexos definibles. En particular se tiene que $G^0 \cdot G^0$ es definiblemente conexo y contiene a e, por tanto $G^0 \cdot G^0 \subset G^0$. De forma similar, $[G^0]^{-1}$ es definiblemente conexo y contine a e, por tanto $[G^0]^{-1} \subset G^0$. Por tanto, G^0 es un subgrupo de G. Veamos que es normal. Para cada $g \in G$, la aplicación conjugación

$$c_g \colon G \longrightarrow G \colon x \longmapsto c_g(x) = g^{-1}xg$$

es definible y continua. Por tanto $c_g(G^0)$ es definiblemente conexo y como $c_g(e) = e$ concluimos que $c_g(G^0) \subset G^0$. Así, G^0 es subgrupo normal de G. □

Corolario 4.15. Dado un grupo definible G, la componente definiblemente conexa G^0 es abierta y cerrada en G y tiene índice $[G \colon G^0]$ finito.

Demostración. G^0 es cerrado por el Lema 4.13. Por continuidad de la operación de grupo, gG^0 es conexo para cada $g \in G$, de hecho así se obtienen todas las componentes definiblemente conexas. Como hay un número finito de estas, el índice es finito y podemos escribir $G = g_1G^0 \cup \cdots \cup g_nG^0$ como unión de conjuntos disjuntos, para ciertos $g_i \in G$ con $i = 1, \ldots, n$ y $g_1 = e$. Por tanto $G \setminus G^0 = g_2G^0 \cup \cdots g_nG^0$ es cerrado y G^0 es abierto. □

Proposición 4.16. Sean G un grupo definible y H un subgrupo de G definible. Entonces son equivalentes:

(1) H tiene índice finito en G.

(2) $\dim(H) = \dim(G)$.

(3) H contiene un entorno abierto de e.

(4) H es abierto en G.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Sean $g_1 = e, \ldots, g_n \in G$ tales que $G = g_1H \cup \cdots \cup g_nH$. Entonces tomamos una descomposición en celdas de G compatible con g_iH para cada $i = 1, \ldots, n$. De la Proposición 3.18(iv) es claro que $\dim(G) = \text{máx}\{\dim(g_iH) : i \in I\}$. Además, cada g_iH tiene la misma dimensión que H por la Proposición 3.18(ii). Por tanto, concluimos que $\dim(G) = \dim(H)$.

$2 \Rightarrow 3$. Si $\dim(H) = \dim(G)$, tomando una celda de dimensión máxima en H, encontramos un abierto U de G contenido en H. Para un $g \in U$ consideramos el homeomorfismo definible $f \colon G \to G \colon x \mapsto g^{-1}x$. Por tanto, $V := g^{-1}U$ es un abierto de G que contiene a e y de hecho $g^{-1}U \subset H$ por ser H un subgrupo de G.

$3 \Rightarrow 4$. Es consecuencia directa del Lema 4.13(ii).

$4 \Rightarrow 1$. Observamos que H es abierto y cerrado en G por el Lema 4.13(iii). Además, por el Corolario 4.15, H^0 es abierto y cerrado en H y por tanto en G. Tenemos entonces que $H^0 \cap G^0$ es abierto y cerrado definible de G^0, que es definiblemente conexo y es no vacío, pues contiene a e. Concluimos que $H^0 = G^0$ y de nuevo por el Corolario 4.15, el índice $[G\colon H] \leq \left[G\colon H^0\right]$ es finito. □

Ahora podemos pasar a probar la *condición de cadena descendente*:

Proposición 4.17. Sea G un grupo definible. Sea

$$H_1 \geq H_2 \geq \dots$$

una familia descendente de subgrupos definibles de G. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H_i = H_n$ para todo $i \geq n$.

Demostración. Como la dimensión de G es finita, $\dim(H_i)$ no puede descender infinitamente, por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dim(H_i) = \dim(H_{n_0})$ para todo $i \geq n_0$. Ahora, por la Proposición 4.16 vemos que $H^0_{n_0} = H^0_i$ para todo $i \geq n_0$, por lo que $[H_{n_0}\colon H_i] \leq \left[H_{n_0}\colon H^0_i\right] = \left[H_{n_0}\colon H^0_{n_0}\right]$ donde el último término es finito. Por tanto, el índice se estabiliza, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[H_n\colon H_i] = 1$ para todo $i \geq n$ y llegamos a que $H_n = H_i$ para todo $i \geq n$, como queríamos demostrar. □

5 Teoremas de Sylow para grupos definibles

En esta sección vamos a demostrar el resultado principal del trabajo:

Teorema 5.1. Sea $\mathscr{M}$ una estructura o-minimal y sea G un grupo definible en $\mathscr{M}$. Si G es abeliano e infinito, entonces no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k = 1$ para todo $g \in G$.

La estrategia general, extraída del trabajo de A. Strzebonski [16], es la aplicación conveniente de una versión de los Teoremas de Sylow de los grupos finitos, pero en nuestro caso, en vez de usar el orden de un grupo finito en dichos teoremas (cosa que no tiene sentido porque nuestros grupos son infinitos en general), usaremos la característica de Euler introducida en la sección 3.3.

Así pues, fijemos una estructura o-minimal $\mathscr{M}$. Obsérvese que si $H < G$ son grupos definibles, entonces podemos considerar la relación de equivalencia dada por los cosets por la izquierda $\{gH : g \in G\}$. Por la Proposición 3.29 tenemos una aplicación definible $\mathtt{r}\colon G \to G$ tal que para todo $x \in G$ se tiene que $\mathtt{r}(x) \in xH$ y para cualesquiera $x, y \in G$ se cumple que $xH = yH$ si y solo si $\mathtt{r}(x) = \mathtt{r}(y)$. Podemos por tanto identificar G/H con la imagen de $\mathtt{r}$, el cual es un conjunto definible de representantes de G/H. Obsérvese que de hecho, si H es normal en G, entonces la operación de grupo en G/H induce la operación

$$Im(\mathtt{r}) \times Im(\mathtt{r}) \longrightarrow Im(\mathtt{r}) : (x, y) \longmapsto \mathtt{r}(xy)$$

la cual es definible. *De ahora en adelante*, trataremos G/H como un conjunto cociente y denotaremos como es usual a sus elementos por xH. Sin embargo, si hacemos mención explícita a una propiedad definible de dicho cociente habrá de entenderse que estamos usando la identificación de G/H con su conjunto de representantes definibles. Por ejemplo, al decir que la proyección usual $G \to G/H : g \mapsto gH$ es un homomorfismo definible, nos estamos refiriendo a que la aplicación $G \to Im(\mathtt{r})\colon x \mapsto \mathtt{r}(x)$ es definible, lo cual es obvio.

Estos cocientes aparecerán típicamente cuando consideramos un homomorfismo definible $f : G_1 \to G_2$ entre dos grupos definibles G_1 y G_2. Por el Primer teorema de isomorfía el grupo $G_1/\mathrm{Ker}(f)$ es isomorfo al subgrupo definible $Im(f)$ de G_2. De hecho, dicho isomorfismo es claramente definible cuando identificamos $G_1/\mathrm{Ker}(f)$ con el conjunto definible de representantes.

Observación 5.2. (i) Observamos que para conjuntos definibles finitos, la característica de Euler coincide con el cardinal. En particular, para grupos definibles finitos el orden y la característica de Euler coinciden. Es más, el índice de un subgrupo coincide con la característica de Euler del conjunto cociente siempre que este sea un conjunto finito.

(ii) Si $H < G$ son grupos definibles, entonces $E(G) = E(H)E(G/H)$. En efecto, consideremos la aplicación definible

$$\begin{aligned} \varphi\colon G &\longrightarrow H \times (G/H) \\ g &\longmapsto \big(g^{-1}\mathtt{r}(g), gH\big) \end{aligned}$$

donde $\mathtt{r}$ es la función de elección. Se comprueba que φ es una biyección ya que $(h, gH) = \varphi(\mathtt{r}(g)h^{-1})$ y si tomamos $g_1, g_2 \in G$ distintos con $g_1H = g_2H$ se tiene $h_1 := g_1^{-1}\mathtt{r}(g_1) \neq g_2^{-1}\mathtt{r}(g_2) =: h_2$. Además es definible, ya que φ induce la aplicación

$$G \longrightarrow H \times Im(\mathtt{r})\colon g \longmapsto (g^{-1}\mathtt{r}(g), \mathtt{r}(g))$$

la cual es obviamente definible. Entonces, por el Teorema 3.27 tenemos que $E(G) = E(H)E(G/H)$. Nótese la analogía con la relación $|G| = [G\colon H]\,|H|$ para el orden y el índice en el caso de grupos finitos.

Así, tenemos una generalización a determinados resultados ya conocidos en el caso de grupos finitos.

Proposición 5.3. Sean $H < G$ grupos definibles con índice $[G\colon H] = n$ finito y supongamos que para todo primo p menor que n, se tiene $p \not| E(H)$. Entonces H es un subgrupo normal de G

Demostración. Como el índice es finito, podemos considerar el grupo de permutaciones $\mathcal{S}_n$ del conjunto cociente G/H y definimos la aplicación

$$\begin{aligned}\Phi\colon G &\longrightarrow \mathcal{S}_n\\ g &\longmapsto s_g\end{aligned}$$

donde $s_g \in \mathcal{S}_n$ viene dada por $s_g(aH) = gaH$. Para ver que está bien definida, como G/H es finito, es suficiente ver la inyectividad:

$$gaH = gbH \iff \exists h, h' \in H \text{ tal que } gah = gbh' \iff ah = bh' \iff aH = bH.$$

Además, la aplicación Φ es homomorfismo de grupos puesto que:

$$s_{fg}(aH) = fgaH = s_f(gaH) = s_f \circ s_g(aH).$$

Por último, vemos que es definible porque

$$(g, \sigma) \in \Gamma(\Phi) \iff \sigma = s_g \iff \sigma(aH) = gaH \quad \forall a \in G.$$

Veamos ahora que $K \coloneqq ker\,(\Phi) \subset H$. En efecto, $g \in ker(\Phi) \iff gaH = aH \;\; \forall a \in G$, en particular $gH = H$, esto es, $g \in H$. Se tiene entonces que $[G\colon K] = [G\colon H]\,[H\colon K]$. Además, por el Primer teorema de isomorfía, G/K es definiblemente isomorfo a un subgrupo de $\mathcal{S}_n$ y por tanto $[G\colon K]$ divide a $|\mathcal{S}_n| = n!$. Así que, como el índice $[H\colon K]$ es finito, por la Observación 5.2(i) vemos que $[H\colon K] = E(H/K)$ divide a $E(H)$ pero también divide a $(n-1)!$, por lo que es menor que n. Por la condición del enunciado concluimos que $[H\colon K] = 1$ y por tanto $H = K$ es un subgrupo normal. □

Observando que $E(H) | \, E(G)$ tenemos la siguiente consecuencia:

Corolario 5.4. Sean $H < G$ grupos definibles con índice $[G\colon H] = p$ donde p es el menor primo que divide a $E(G)$, entonces H es un subgrupo normal de G.

Veamos que si el conjunto cociente no es finito y cambiamos la condición en el índice $[G\colon H] = p$ por $E(G/H) = p$, con p el menor primo que divide a $E(G)$, el resultado deja de ser cierto.

Ejemplo 5.5. Tomemos los grupos semialgebraicos $\mathbb{R}_{>0}$ y $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned}\Psi\colon \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow Aut(\mathbb{R})\\ a &\longmapsto \Psi_a\end{aligned}$$

donde Ψ_a es el automorfismo *multiplicar por a*. La aplicación Ψ es homomorfismo de grupos porque $\Psi_{ab}(x) = abx = \Psi_a(bx) = \Psi_a \circ \Psi_b(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Llamemos entonces G' al producto semidirecto $\mathbb{R}_{>0} \ltimes_\Psi \mathbb{R}$, donde recuérdese que el producto viene dado por:

$$(a, x)(b, y) = (ab, x + \Psi(a)y).$$

Denotemos por H' al subgrupo $\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$, que no es normal en G' porque Ψ no es el automorfismo constante identidad. Tomemos $G \coloneqq G' \times \mathbb{Z}_2$ y $H \coloneqq H' \times \{0\}$. Por las propiedades de la característica de Euler, probadas en la Sección 3.3, se tiene que $E(G) = E(\mathbb{R}_{>0})E(\mathbb{R})E(\mathbb{Z}_2) = 2$ y $E(H) = E(\mathbb{R}_{>0}) = -1$, de donde $E(G/H) = -2$. Sin embargo, como H' no es normal en G', tampoco es normal H en $G' \times \{0\}$ y finalmente H no es normal en G.

Definición 5.6. Sea p un primo o 0. Decimos que un grupo definible G es un *p-grupo* si para todo subgrupo propio definible H de G se tiene:

$$E(G/H) \equiv 0 \bmod p$$

donde por $\equiv 0 \bmod 0$ entendemos $=$. Si además $p \neq 0$ y $E(G) \neq 0$ se dice que G es un *p-grupo fuerte*.

Lema 5.7. Sea G un grupo definible con $E(G) = 0$. Entonces existe un 0-subgrupo definible H no trivial de G.

Demostración. Sea H un subgrupo definible de característica 0 minimal, que existe por la Propposición 4.17. Entonces, $E(K) \neq 0$ para todo K subgrupo definible propio de H. Como $E(H) = E(H/K)E(K)$, necesariamente $E(H/K) = 0$ para todo K subgrupo definible propio de H, esto es, H es un 0-grupo □

Observación 5.8. Si G es finito, entonces G es un p-grupo en el sentido de la Definición 5.6 si y solo si su orden es p^n para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, si es un p-grupo en el sentido de la teoría de grupos finitos. En efecto, escribamos su característica de Euler como $E(G) = mp^n$ para cierto n entero positivo y m natural no divisible por p. Supongamos que $m \neq 1$. Entonces, por el Primer Teorema de Sylow para grupos finitos, G tiene un subgrupo H de orden p^n. Nótese que este grupo es definible porque es finito y está contenido en G. Además, es propio porque $E(G/H) = m \neq 1$ y llegamos a la contradicción $E(G/H) = m \not\equiv 0 \bmod p$. El recíproco es claro.

En adelante, la letra p denotará un primo o 0.

Definición 5.9. Decimos que H actúa definiblemente sobre un conjunto definible S si existe una aplicación definible $H \times S \to S : (h, s) \mapsto hs$ que es un acción en el sentido usual.

En general, usaremos la notación estándar en lo referente a acciones de grupos sobre conjuntos (véase [4]). Por ejemplo, recuérdese que dado $s \in S$, la órbita de s por la acción es el conjunto $O_s := \{hs \colon h \in H\}$.

Lema 5.10. Sea H un p-grupo que actúa definiblemente sobre un conjunto definible S y sea $S_0 = Fix(H) := \{x \in S \colon hx = x \ \forall h \in H\}$. Entonces $E(S) \equiv E(S_0) \bmod p$.

Demostración. Consideremos la relación de equivalencia definible dada por las órbitas de la acción, es decir,

$$O := \{(x, y) \in S \times S \colon \exists h \in H \ \ y = hx\}.$$

Dado $x \in S$, observamos que su órbita coincide con la fibra $O_x = \{y \in S \colon \exists h \in H \ \ y = hx\}$ y la notación es consistente. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, por la Proposicón 3.26, el conjunto $\mathscr{E}_n := \{x \in S \colon E(O_x) = n\}$ es definible y $E(O_x)$ toma un número finito de valores, por lo que podemos escribir S como unión finita disjunta de conjuntos definibles

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathscr{E}_n.$$

Además, observamos que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathscr{E}_n &\longrightarrow \{O_x \in S/O \colon E(O_x) = n\} \\ x &\longmapsto O_x \end{aligned}$$

es definible porque no es más que la restricción a un subconjunto definible de la función elección de 3.29. Nótese que en $\mathscr{E}_n$ las órbitas son subconjuntos, mientras que en la imagen de φ son elementos del conjunto cociente. También es claramente sobreyectiva y dado $O_a \in S/0$ con $E(O_a) = n$, es claro que $\varphi^{-1}(O_a) = O_a \subset S$. Por tanto, por el Corolario 3.28, se tiene $E(\mathscr{E}_n) = nE(\{O_x \in S/0 \colon E(O_x) = n\})$ y encontramos la expresión

$$E(S) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E(\mathscr{E}_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} nE(\{O_x \in S/O \colon E(O_x) = n\}).$$

Para cada $x \in S$, denotamos su estabilizador por $H_x := \{h \in H \colon hx = x\}$. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \psi \colon H/H_x &\longrightarrow O_x \\ hH_x &\longmapsto hx \end{aligned}$$

es una biyección definible. Veamos que es inyectiva y está bien definida:

$$gx = hx \iff x = g^{-1}hx \iff g^{-1}h \in H_x \iff gH_x = hH_x.$$

Para la sobreyectividad, observamos que $y \in O_x$ se puede escribir como $y = hx$ para cierto $h \in H$. Entonces, la imagen de hH_x por ψ es precisamente y. La definibilidad se debe a que:

$$\begin{aligned} \Gamma(\psi) &= \{(hH_x, y) \in H/H_x \times O_x \colon hx = y\} \\ &\equiv \{(g, y) \in H \times S \colon \exists h \in H \text{ tal que } g = \mathtt{r}(h) \text{ e } y = hx\} \\ &= \{(g, y) \in H \times S \colon g \in Im(\mathtt{r}), y = gx\}, \end{aligned}$$

donde $\mathtt{r}$ denota la función de elección del cociente H/H_x.

Ahora, por el Teorema 3.27 obtenemos que $E(O_x) = E(H/H_x)$[1]. Distinguimos dos casos: $H \neq H_x$ y $H = H_x$. En el primero, como H es p-grupo por hipótesis, $E(H/H_x) \equiv 0 \bmod p$. En el segundo caso, $E(H/H_x) = 1$. Además, $H = H_x$ es equivalente a que $x \in S_0$.

Ahora, por lo anterior si p es primo tenemos

$$E(S) = E(S_0) + \sum_{n \equiv 0 \bmod p} nE(\{O_x \in S/O \colon E(O_x) = n\})$$

y por tanto $E(S) \equiv E(S_0) \bmod p$. Y si $p = 0$, directamente $E(S) = E(S_0)$. □

También disponemos de una versión del Teorema de Cauchy que estudiamos para grupos finitos:

Teorema 5.11. Sea G un grupo definible y p un primo que divida a $E(G)$, entonces G contiene un elemento de orden p.

Demostración. Sea S el conjunto definible $\{(a_1, \dots, a_p) \in G^p \colon a_1 \cdot \ldots \cdot a_p = e\}$ y la aplicación definible:

$$\begin{aligned} G^{p-1} &\longrightarrow S \\ (a_1, \dots, a_p) &\longmapsto (a_1, \dots, a_{p-1}, (a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1})^{-1}) \end{aligned}$$

que es claramente una biyección. Entonces $E(S) = E(G)^{p-1}$, lo cual implica que $E(S) \equiv 0 \bmod p$. Definimos la acción del grupo definible $\mathbb{Z}_p$ sobre S mediante $k \cdot (a_1, \dots, a_p) = (a_{k+1}, \dots, a_p, a_1, \dots, a_k)$. Tomando S_0 como en el Lema 5.10, sus elementos son las p-uplas constantes y encontramos el elemento $(e, \dots, e) \in S_0$. También por el Lema 5.10, $E(S_0) \equiv E(S) \equiv 0 \bmod p$. Por tanto, S_0 tiene algún otro elemento, es decir, existe $a \in G$ tal que $a^p = e$. □

[1]Este es el análogo a que el cardinal de la órbita de un punto es el índice de su estabilizador.

Denotemos $N_G(H)$ el normalizador de un subgrupo H de G.

Lema 5.12. Sea H un p-subgrupo definible de un grupo definible G, entonces $E(N_G(H)/H) \equiv E(G/H) \bmod p$.

Demostración. Denotemos $S = G/H$ y considérese la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi \colon H \times S &\longrightarrow S \\ (h, xH) &\longmapsto hxH \end{aligned}$$

la cual es una acción definible. En efecto, fijado $h \in H$ denotemos por φ_h a la aplicación definible dada por $S \to S \colon xH \mapsto hxH$. Dados $x_1H, x_2H \in S$, vemos que φ_h es inyectiva y está bien definida:

$$\varphi_h(x_1H) = \varphi_h(x_2H) \iff hx_1H = hx_2H \iff x_1H = x_2H.$$

Para la sobreyectividad, obsérvese que $G \to G \colon x \mapsto hx$ es una biyección definible para cada $h \in H$. Por lo que, dado $y \in G$, existe $x \in G$ tal que $y = hx$, de donde $yH = \varphi_h(xH)$. Además, $\varphi_{hg}(xH) = hgxH = \varphi_h(gxH) = \varphi_h \circ \varphi_g(xH)$, lo cual implica que φ es homomorfismo de grupos. Por último, la definibilidad se tiene porque:

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi) &= \{(h, xH, yH) \in H \times G/H \times G/H \colon hxH = yH\} \\ &\equiv \{(h, f, g) \in H \times G \times G \colon f \in Im(\mathtt{r}) \text{ y } \mathtt{r}(hf) = g\}, \end{aligned}$$

donde hemos denotado por $\mathtt{r}$ a la función elección del cociente G/H, que es definible.

Sea $xH \in S$. Entonces, definiendo S_0 como en el Lema 5.10, se tiene:

$$xH \in S_0 \iff hxH = xH \quad \forall h \in H \iff x^{-1}hx \in H \quad \forall h \in H \iff x^{-1}Hx \subset H$$

Supongamos que la inclusión es estricta: $x^{-1}Hx \subsetneq H$. Entonces, por inducción vemos que el contenido $x^{-k-1}Hx^{k+1} \subsetneq x^{-k}Hx^k$ es en efecto estricto para todo $k \in \mathbb{N}$. Supuesto cierto para k, supongamos que $x^{-k-2}Hx^{k+2} = x^{-k-1}Hx^{k+1}$. Entonces llegamos a $x^{-k-1}Hx^{k+1} = x^{-k}Hx^k$, contradicción. Así, tenemos una familia descendente de subgrupos definibles

$$H \supsetneq x^{-1}Hx \supsetneq x^{-2}Hx^2 \supsetneq \dots$$

que no estabiliza, en contradicción con la Proposición 4.17. Por tanto, $x^{-1}Hx = H$ y

$$xH \in S_0 \iff x \in N_G(H).$$

Por otro lado, si $xH \cap N_G(H) \neq \emptyset$, existen $h \in H$ y $g \in N_G(H)$ tal que $xh = g$ y observamos que:

$$H = g^{-1}Hg = h^{-1}x^{-1}Hxh \Rightarrow x^{-1}Hx = H \Rightarrow x \in N_G(H),$$

de modo que $h'^{-1}x^{-1}Hxh' = H$ para todo $h' \in H$. O lo que es lo mismo, $xH \subset N_G(H)$. Así, las clases de equivalencia de G/H particionan $N_G(H)$, por lo que $S_0 = N_G(H)/H$. Ahora, como H es p-subgrupo, aplicamos el Lema 5.10 y concluimos que $E(G/H) = E(S) \equiv E(S_0) = E(N_G(H)/H) \bmod p$. ☐

Corolario 5.13. Sea H un p-subgrupo definible de un grupo definible tal que $E(G/H) \equiv 0 \bmod p$. Entonces $N_G(H) \neq H$

Demostración. Basta observar que si $N_G(H) = H$, entonces $E(N_G(H)/H) = 1 \not\equiv 0 \bmod p$. ☐

Ahora nos disponemos a demostrar el Primer Teorema de Sylow para grupos definibles, para lo que necesitamos ver algunos resultados previos, los cuales son versiones ligeramente más generales de los teorema de isomorfía que se vieron durante el Grado (véase [4, Ch 2]) y en los que tenemos en cuenta la definibilidad de las aplicaciones. Recuérdese que si G es un grupo y N y K son subgrupos, entonces $NK\colon = \{nk\colon n \in N, k \in K\}$ es un subconjunto de G, que de hecho es un subgrupo si N o K es normal en G. Obsérvese que si G, N, K son definibles, también lo es el subconjunto NK.

Lema 5.14. Sean $K, N < G$ grupos definibles. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi\colon N/(N\cap K) &\longrightarrow NK/K \\ n(N\cap K) &\longmapsto nK \end{aligned}$$

es una biyección definible. Si además N es normal en G, entonces Φ es isomorfismo de grupos definibles.

Demostración. Comenzamos viendo que Φ está bien definida. Sean $n, m \in N$ tal que $n(N\cap K) = m(N\cap K)$, entonces $n^{-1}m \in N\cap K \subset K$, con lo que $nK = mK$. Además es inyectiva porque si $\Phi(n(N\cap K)) = \Phi(m(N\cap K))$, entonces:

$$nK = mK \Rightarrow n^{-1}m \in K \Rightarrow n^{-1}m \in N\cap K \Rightarrow n(N\cap K) = m(N\cap K).$$

Puesto que $NK = \{nk\colon n \in N, k \in K\}$, los elementos de NK/K son de la forma nK, que es la imagen por Φ de $n(N\cap K)$. Por tanto, Φ es sobreyectiva.

Finalmente, Φ es definible porque podemos identificar su grafo con el conjunto definible:

$$\begin{aligned} \Gamma(\Phi) &= \{(m(N\cap K), nK) \in N/(N\cap K)\times NK/K\colon mK = nK\} \\ &\equiv \{(x,y) \in N\times NK\colon x \in Im(\mathtt{r_1}), \mathtt{r_2}(x) = y\} \end{aligned}$$

donde $\mathtt{r_1}$ y $\mathtt{r_2}$ denotan a las funciones elección definibles de los cocientes $N/(N\cap K)$ y NK/K, respectivamente. $\square$

Lema 5.15. Sean $K < H < G$ grupos definibles y sea $\mathtt{r} : G \to G$ la función de elección del cociente G/H. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : G/H\times H/K &\longrightarrow G/K \\ (gH, hK) &\longmapsto \mathtt{r}(g)hK \end{aligned}$$

es una biyección definible.

Demostración. Primero obsérvese que la aplicación está bien definida ya que si $gH = g'H$ entonces $\mathtt{r}(g) = \mathtt{r}(g')$. Veamos que es inyectiva: si $\Phi(gH, hK) = \Phi(g'H, h'K)$ entonces

$$\mathtt{r}(g)hK = \mathtt{r}(g')h'K \Rightarrow h^{-1}\mathtt{r}(g)^{-1}\underset{*}{\mathtt{r}}(g')h' \in K \Rightarrow \mathtt{r}(g)^{-1}\mathtt{r}(g') \in hKh'^{-1} \subset H \Rightarrow \mathtt{r}(g) = \mathtt{r}(g')$$

y en particular $gH = g'H$. Además, por $(*)$ deducimos que $hK = h'K$ y por tanto Φ es inyectiva, como queríamos probar. Para la sobreyectividad, dado $xK \in G/K$ observamos que $\mathtt{r}(x) = xh$ para cierto $h \in H$, por lo que se tiene $\mathtt{r}(x)^{-1}x \in H$ y por tanto $\Phi(xH, \mathtt{r}(x)^{-1}xK) = \mathtt{r}(x)\mathtt{r}(x)^{-1}xK = xK$.

Por último, comprobemos que es definible. Si $\mathtt{r}_1\colon G \to G$ y $\mathtt{r}_2\colon H \to H$ y son los funciones de elección de G/K y H/K respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \Gamma(\Phi) &= \{(gH, hK, zK) \in G/H\times H/K\times G/K\colon \mathtt{r}(g)hK = zK\} \\ &\equiv \{(g', h', z') \in G\times H\times G\colon g' \in Im(\mathtt{r}), h' \in Im(\mathtt{r_2}) \text{ y } \mathtt{r_1}(g'h') = z'\}. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 5.16. Sean $K < H < G$ grupos definibles tal que K es normal en G. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi\colon (G/K)/(H/K) &\longrightarrow G/H \\ (gK)(H/K) &\longmapsto gH \end{aligned}$$

es una biyección definible.

Demostración. Nótese que en particular K es normal en H, por lo que H/K es un subgrupo y el cociente $(G/K)/(H/K)$ tiene sentido. Sean $g, g' \in G$. Observamos que:

$$\begin{aligned} (gK)(H/K) = (g'K)(H/K) &\iff (gK)^{-1}(g'K) \in H/K \iff g^{-1}g'K \in H/K \\ &\iff g^{-1}g' \in H \iff gH = g'H, \end{aligned}$$

por lo que Φ es inyectiva y está bien definida. La sobreyectividad es clara porque $K < H$.

Por último, para comprobar la definibilidad, sean $\mathtt{r_1} : G \to G$ y $\mathtt{r_2}\colon G \to G$ las funciones de elección de G/K y G/H respectivamente, y sea $\widetilde{\mathtt{r}}\colon Im(\mathtt{r_1}) \to Im(\mathtt{r_1})$ la función de elección de $(G/K)/(H/K)$. Entonces observamos que el grafo de Φ, identificando el conjunto cociente con el conjunto de representantes, es definible:

$$\begin{aligned} \Gamma(\Phi) &= \{((gK)(H/K), zH) \in (G/K)/(H/K) \times G/H\colon gH = zH\} \\ &\equiv \{(g', z') \in G \times G\colon z' \in Im(\mathtt{r_2}) \text{ y } \exists h' \in Im(\mathtt{r_1}) \text{ tal que } g' = \widetilde{\mathtt{r}}(h) \text{ y } z' = \mathtt{r_2}(g')\}. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.17. [Primer Teorema de Sylow] Sea G un grupo definible. Si H es un p-subgrupo (fuerte) y $E(G/H) \equiv 0 \bmod p$, entonces existe un p-subgrupo (fuerte) K de G tal que H es un subgrupo propio normal de K.

Demostración. Por el Lema 5.12:

$$E(N_G(H)/H) \equiv E(G/H) \equiv 0 \bmod p,$$

y H es un subgrupo propio normal de $N_G(H)$, por lo que $N_G(H)/H$ es un grupo definible. Si p es primo, por el Teorema 5.11, el grupo $N_G(H)/H$ contiene un elemento de orden p, que a su vez genera a un grupo definible K/H de orden p. Si $p = 0$, por el Lema 5.7, $N_G(H)/H$ contiene un 0-subgrupo definible no trivial K/H. Como $K \subset N_G(H)$, el subgrupo H es normal en K.

Veamos que K es un p-subgrupo. Sea $M < K$ un subgrupo definible propio. Como H es normal en K, HM es subgrupo de K. Así, por el Lema 5.15, tenemos que $E(K/M) = E(K/HM)E(HM/M)$ y por el Lema 5.14, llegamos a que $E(HM/M) = E(H/(H \cap M))$. Por tanto, para probar que $E(K/M) \equiv 0 \bmod p$ basta mostrar que $E(H/(H \cap M)) \equiv 0 \bmod p$.

Si $H \cap M \neq H$, el subgrupo $H \cap M$ es propio de H. Entonces, como H es un p-grupo, $E(H/(H \cap M)) \equiv 0 \bmod p$. En otro caso, $H \cap M = H$, lo cual implica que $H < M$ y por el Lema 5.16, obtenemos $E(K/M) = E[(K/H)/(M/H)]$. Además, si $p > 0$ entonces K/H es un p-grupo porque tiene orden p, y si $p = 0$ entonces K/H es un 0-grupo por hipótesis.En particular,

$$E(K/M) = E[(K/H)/(M/H)] \equiv 0 \bmod p,$$

como queríamos probar. Así pues, K es un p-grupo.

Por último, si p es primo, $E(K/H) = p$, y como $E(K) = E(H)E(K/H)$ se tiene que $E(K) = 0$ si y solo si $E(H) = 0$, lo cual quiere decir que si H es un p-subgrupo fuerte, K también lo es. □

Corolario 5.18. Los p-grupos fuertes son grupos finitos de orden p^n con $n \geq 0$.

Demostración. Sea G un p-grupo fuerte. Entonces, su característica de Euler es no nula y podemos factorizarla como $E(G) = mp^n$ donde $n \geq 0$ y m es un entero no divisible por p. Aplicando el Teorema 5.17 a $H = \{e\}$ sucesivamente, encontramos un subgrupo definible M de G de orden p^n. Finalmente, $E(G/M) = m \not\equiv 0 \bmod p$ y concluimos que M no es subgrupo propio de G, esto es, $G = M$ y G tiene orden p^n. □

Ahora podemos demostrar el resultado el central del trabajo:

Teorema 5.19. Sea $\mathscr{M}$ una estructura o-minimal y sea G un grupo definible en $\mathscr{M}$. Si G es abeliano e infinito, entonces no existe k entero positivo tal que $g^k = 1$ para todo $g \in G$.

Demostración. Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k = 1$ para todo $g \in G$. Como el orden de cada elemento de G está acotado por k, por el Teorema 5,11, $E(G) \neq 0$. Consideremos su descomposición en factores primos $E(G) = \pm p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$ para ciertos primos distintos $p_1 \ldots, p_n$ y $a_1, \ldots, a_n$ enteros positivos. Para cada p_i con $i = 1, \ldots, n$, sea H_i un subgrupo definible de G de orden $p_i^{a_i}$ construido como en la demostración del Corolario 5.18. Como G es abeliano, el producto $H \coloneqq H_1 \cdots H_n$ es un subgrupo finito de G. Dado que $H_1 \cap H_2$ es trivial ya que su orden divide tanto a $p_1^{a_1}$ como a $p_2^{a_2}$, se tiene que $H_1 \times H_2 \to H_1H_2 \colon (x, y) \mapsto xy$ es un isomorfismo definible. Por inducción, deducimos que $H_1 \times \cdots \times H_n$ es isomorfo a H y por tanto, por el Corolario 3.28 se cumple que $E(H) = E(H_1) \cdots E(H_n) = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$. Así pues, $E(G/H) = \pm 1$.

Por otro lado, dado $xH \in G/H$, el grupo $\langle xH \rangle$ que genera xH en G/H es finito y su orden está acotado por k ya que por hipótesis $x^k = 1$. En particular, se tiene que

$$E(\langle xH \rangle)E[(G/H)/\langle xH \rangle] = E(G/H)$$

y puesto que $E(G/H) = \pm 1$, deducimos que $E(\langle xH \rangle) = 1$, es decir, $xH = H$ por ser un grupo finito. Esto demuestra que $G = H$ y por tanto G es finito, como queríamos probar.

□

Referencias

[1] J. F. Adams. *Lectures on Lie groups.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[2] S. Basu, R. Pollack, and M.-F. Roy. *Algorithms in real algebraic geometry*, volume 10 of *Algorithms and Computation in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.

[3] J. Denef and L. van den Dries. p-adic and real subanalytic sets. *Ann. of Math. (2)*, 128(1):79–138, 1988.

[4] J. F. Fernando and J. M. Gamboa. *Estructuras algebraicas: Teoría elemental de grupos.* Sanz y Torres, 2013.

[5] R. E. Hodel. *An introduction to mathematical logic.* Courier Corporation, 2013.

[6] J. F. Knight, A. Pillay, and C. Steinhorn. Definable sets in ordered structures. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 295(2):593–605, 1986.

[7] S. Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[8] L. Lipshitz and Z. Robinson. Overconvergent real closed quantifier elimination. *Bull. London Math. Soc.*, 38(6):897–906, 2006.

[9] D. Marker. Introduction to model theory. In *Model theory, algebra, and geometry*, volume 39 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 15–35. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[10] V. Muñoz and J. J. Madrigal. *Topología algebraica.* Sanz y Torres, 2015.

[11] Y. Peterzil, A. Pillay, and S. Starchenko. Definably simple groups in o-minimal structures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(10):4397–4419, 2000.

[12] Y. Peterzil, A. Pillay, and S. Starchenko. Linear groups definable in o-minimal structures. *J. Algebra*, 247(1):1–23, 2002.

[13] A. Pillay. On groups and fields definable in o-minimal structures. *J. Pure Appl. Algebra*, 53(3):239–255, 1988.

[14] A. Pillay and C. Steinhorn. Definable sets in ordered structures. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 295(2):565–592, 1986.

[15] J. R. Shoenfield. *Mathematical logic.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1967.

[16] A. W. Strzebonski. Euler characteristic in semialgebraic and other o-minimal groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 96(2):173–201, 1994.

[17] L. van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures*, volume 248 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[18] A. J. Wilkie. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(4):1051–1094, 1996.