APUNTES DE GEOMETRÍA LINEAL

FRANCISCO JAVIER GALLEGO RODRIGO

Versión preliminar

26 de julio de 2.016

TEMA 1: **REPASO DE GEOMETRÍA AFÍN**

1. El espacio afín

¿Qué es un espacio afín? Antes de dar una definición formal, damos una idea intuitiva. El plano afín es... la pizarra (que se prolonga hacia el infinito en dos direcciones). ¿Qué es el espacio afín (tridimensional)? El aula (que se prolonga hacia el infinito en tres direcciones). La pizarra o el aula están formadas por *puntos*. Dada una pareja ordenada de puntos podemos trazar el segmento orientado limitado por dichos puntos. Es lo que llamamos un *vector fijo*, que tiene un principio y un fin. Si consideramos todos los vectores fijos que se "originan" a partir de los puntos del plano (la pizarra) o del espacio (el aula) e identificamos entre sí todos aquellos que tienen la misma *dirección* (es decir, son *paralelos*), *longitud* y *sentido* (de forma "práctica" esto se puede hacer así: identificamos los vectores $\overrightarrow{p_1p_2}$ y $\overrightarrow{q_1q_2}$ si y solo si al trasladar paralelamente a sí mismo $\overrightarrow{q_1q_2}$ de forma que q_1 coincida con p_1, q_2 coincide con p_2), obtenemos un espacio vectorial (de dimensión 2 en el caso del plano y de dimensión 3 en el caso del espacio tridimensional; a los elementos de este espacio se les denomina *vectores libres*). Por ejemplo, la suma de dos vectores libres representados respectivamente por los vectores fijos $\overrightarrow{p_1p_2}$ y $\overrightarrow{q_1q_2}$ sería un vector libre representado por el vector fijo $\overrightarrow{p_1q_2'}$ donde q_2' es el fin del vector fijo que se obtiene al trasladar paralelamente el vector $\overrightarrow{q_1q_2}$ a un vector que comience en p_2.

Por tanto, cuando defininamos de forma rigurosa lo que es un espacio afín parece claro que tendremos que hablar por una parte de un conjunto de puntos, por otra parte de un espacio vectorial asociado a ese conjunto de puntos y por último de cómo se relaciona el conjunto de puntos y el espacio vectorial.

Definición 1.1. *(Definición formal de espacio afín).* Un *espacio afín* sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ es una terna (A, V, φ) donde A es un conjunto no vacío, V es un espacio vectorial sobre $\mathbf{k}$ y φ es una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A\times A & \longrightarrow & V \\ & (p,q) & \mapsto & \varphi(p,q):=\overrightarrow{pq} \end{array}$$

tal que,

(1) para cada $p \in A$, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi_p: & A & \longrightarrow & V \\ & q & \mapsto & \overrightarrow{pq} \end{array}$$

es una biyección, y

(2) para cualesquiera $p, q, r \in A$, se tiene $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.

A los elementos de A les llamaremos *puntos* del espacio afín y a V lo llamaremos *espacio vectorial asociado* al espacio afín. A veces abreviaremos y hablaremos solo de A al referirnos al espacio afín, pero siempre entendiendo que el espacio afín no es solamente A sino la terna (A, V, φ). Decimos que (A, V, φ) (o simplemente A) tiene dimensión n si $n = \dim V$. A los espacios afines de dimensión 1 les llamaremos *rectas* afines y a los espacios afines de dimensión 2 les llamaremos *planos* afines.

Observación 1.2. *(sobre el cuerpo base):* En la definición anterior hemos hablado de espacios afines sobre un cuerpo $\mathbf{k}$. Desde un punto de vista geométrico, el cuerpo "natural" sobre el que modelar nuestros espacios afines es desde luego el cuerpo $\mathbf{R}$ de los números reales (piensa por ejemplo que $\mathbf{R}$ se suele representar como la "recta real"). A lo largo del

curso veremos que otro cuerpo interesante con el que trabajar es el cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos. Al trabajar sobre $\mathbf{C}$ perderemos intuición geométrica pero obtendremos ventajas que de momento resumimos diciendo que los resultados tendrán enunciados más simples y homogéneos. Aun así, casi todos los resultados y nociones que iremos viendo tienen sentido sobre cualquier cuerpo (incluso cuando el cuerpo sea un cuerpo finito; otra cosa es que dar en esta situación el calificativo de geométrico a estos resultados lo tengamos que justificar usando una analogía). Por eso, aunque en el fondo estemos pensando que el cuerpo sobre el que trabajamos es $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$, siempre que nos sea posible enunciaremos los resultados para un cuerpo arbitrario $\mathbf{k}$ (y, cuando no sea posible, especificaremos qué propiedades debe satisfacer $\mathbf{k}$ en cada caso).

Observación 1.3. La propiedad (1) de la definición anterior nos dice que si tenemos un espacio afín y fijamos un punto, lo "convertimos" en un espacio vectorial (ese punto se convierte en nuestro cero, en nuestro origen; ¡piensa en cómo se representa un plano vectorial en la pizarra!). Por otra parte, la propiedad (2) captura la forma en que se define la suma de vectores libres.

Notación 1.4. A veces usaremos la siguiente notación: dado un espacio afín (A, V, φ), dos puntos $p, q \in A$ y un vector $v \in V$, escribimos $q = p + v$ si y solo si $\overrightarrow{pq} = v$. *¡Cuidado!* Hay que tener claro que esto es una notación y que el signo + no representa ninguna operación (en otras palabras, no tiene sentido hablar de una operación, en el sentido algebraico, que nos permita sumar puntos y vectores), aunque en ciertos ejemplos (véase el ejercicio 1.7 y el ejemplo 1.8) de espacios afines sí podríamos entender el signo + como una operación desde un punto de vista algebraico.

Ejercicio 1.5.
(1) Sean $p, q \in A$. Demuestra que $p = q$ si y solo si $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{0}$.
(2) Demuestra que dados $p \in A$ y $v \in V$ existe un único $q \in A$ tal que $q = p + v$.
(3) Demuestra que dados $p, q \in A$, $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$.
(4) Demuestra que dados $p, q \in A$ y $v, w \in V$, $\overrightarrow{(p+v)(q+w)} = \overrightarrow{pq} + w - v$.
(5) Demuestra la *ley del paralelogramo*: dados $p, q, p', q' \in A$, $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p'q'}$ es equivalente a $\overrightarrow{pp'} = \overrightarrow{qq'}$.

Ejercicio 1.6. Demuestra que A tiene dimensión 0 si y solo si A está formando por un solo punto.

Ejercicio 1.7. Demuestra que a $\mathbf{k}^n$ se le puede dotar de estructura de espacio afín de dimensión n de la forma obvia. Lo llamamos *espacio afín estándar de dimensión n* y lo denotaremos por $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ (reservando en general la notación $\mathbf{k}^n$ para el espacio vectorial estándar de dimensión n). Indicación: si $p = (x_1, \ldots, x_n)$ y $q = (y_1, \ldots, y_n)$ definimos $\overrightarrow{pq}$ como $(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$.

Contemplar $\mathbf{k}^n$ de esta forma como espacio afín es relativamente sencillo e intuitivo. La única dificultad reside en que tenemos que pensar un mismo conjunto $\mathbf{k}^n$ a la vez como el conjunto de puntos del espacio afín estándar y como el espacio vectorial asociado al espacio afín estándar. Es decir, dependiendo de la situación, un elemento de $\mathbf{k}^n$ será un punto o será un vector y conviene tener claro cómo lo estamos considerando en cada caso.

El ejercicio 1.7 puede generalizarse como sigue:

Ejemplo 1.8. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbf{k}$. Se puede dotar a V de estructura de espacio afín considerando (V, V, φ), donde

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (v_1, v_2) & \mapsto & v_2 - v_1 \end{array}.$$

2. Subespacios afines

En la asignatura de Álgebra Lineal, casi desde el comienzo, ya os habéis encontrado con espacios afines. En efecto, imaginemos en el espacio vectorial estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ el conjunto de soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = b_m \end{array} . \tag{2.0.1}$$

Si el sistema de ecuaciones (2.0.1) es homogéneo, su conjunto de soluciones tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbf{k}$ (es un subespacio vectorial de $\mathbf{k}^n$). En cambio, si el sistema no es homogéneo, el conjunto de soluciones no es un subespacio vectorial (por ejemplo, no contiene al vector $(0,\dots,0)$, que es una condición necesaria para que sea subespacio vectorial). Entonces cabe preguntarse qué estructura tiene el espacio de soluciones de un sistema no homogéneo, ya que parece claro que algún tipo de estructura tiene. Por ejemplo parece bastante intuitivo hablar de su dimensión, que de manera informal podríamos definir como el número mínimo de parámetros que nos hacen falta para expresar de manera explícita dicho conjunto (el número mínimo de parámetros que aparecen cuando resolvemos el sistema). La respuesta a nuestra pregunta de qué estructura tiene el conjunto de soluciones $\mathscr{S}$ de (2.0.1) es, como vemos en el ejercicio siguiente, que $\mathscr{S}$ es un espacio afín cuyo espacio vectorial asociado es el espacio de soluciones de su sistema homogéneo asociado, que es

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} . \tag{2.0.2}$$

Ejercicio 2.1. Demuestra usando la definición de espacio afín que, si (2.0.1) es un sistema compatible, el conjunto de soluciones de (2.0.1) es en efecto un espacio afín. Indicación: usa la aplicación φ del espacio afín estándar $(\mathbf{k}^n, \mathbf{k}^n, \varphi)$.

Recordemos que $\mathbf{k}^n$ no es solo un espacio vectorial, sino que también se le puede dotar de estructura de espacio afín. Si nos paramos a pensarlo un poco nos daremos cuenta de que la estructura de espacio afín que hemos dado al conjunto de soluciones de (2.0.1) es la "heredada" de la estructura de espacio afín de $\mathbf{k}^n$. Es decir, el conjunto de soluciones de (2.0.1) es un subconjunto del espacio afín $\mathbf{k}^n$ que tiene a su vez una estructura de espacio afín, compatible con la estructura de espacio afín de $\mathbf{k}^n$. Por otra parte, recuerda que, dada una solución particular $p = (x_1,\dots,x_n)$ de (2.0.1), un elemento q de $\mathbf{k}^n$ es una solución de (2.0.1) si y solo si existe una solución w de (2.0.2) tal que $q = p + w$. Por tanto, una manera de describir geométricamente el conjunto de soluciones de (2.0.1) es la siguiente: si W es el conjunto de soluciones de (2.0.2) y p es una solución particular de (2.0.1), el conjunto de soluciones de (2.0.1) es $p+W := \{p+w \mid w \in W\}$, es decir, el subconjunto de $\mathbf{k}^n$ que obtenemos al "trasladar paralelamente a sí mismo" el subespacio vectorial W de $(0,\dots,0)$ (que pertenece a W) a p (como al hacer esto $(0,\dots,0)$ se convierte en p, $p+W$ no tiene por qué contener a $(0,\dots,0)$). Todo esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.2. Sea (A, V, φ) un espacio afín, sea p un punto de A y sea W un subespacio vectorial de V. Llamamos *subespacio afín paralelo o con dirección W que pasa por p* y lo

denotamos como $p+W$ al subconjunto de puntos q de A para los que existe algún $w \in W$ tal que $q = p + w$, o lo que es lo mismo, para los que existe algún $w \in W$ tal que $\vec{pq} = w$.

Ejercicio 2.3. Sea (A, V, φ) un espacio afín. Consideramos un punto $p \in A$ y un subespacio vectorial W de V.

(1) Demuestra que existe un único subespacio afín por p paralelo a W.
(2) Si $q \in p + W$, entonces $q + W = p + W$.
(3) Si $q, r \in p + W$, entonces $\vec{qr} \in W$ (indicación: comprueba que $\vec{qr} = \vec{pr} - \vec{pq}$.)

Ejercicio 2.4.
(1) Demuestra que un subespacio afín $p+W$ de un espacio afín (A, V, φ) tiene a su vez estructura de espacio afín (indicación: considera $(p+W, W, \varphi')$, donde φ' es la restricción de φ a $(p + W) \times (p + W)$.
(2) Demuestra que el conjunto de soluciones de (2.0.1) es un subespacio afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ cuya dirección es el subespacio vectorial de $\mathbf{k}^n$ formado por las soluciones de su sistema homogéneo asociado (2.0.2).

Teniendo en cuenta el ejercicio 2.4, definimos la *dimensión* de una subvariedad afín como su dimensión como espacio afín. Es fácil ver que los subespacios afines de A de dimensión 0 son los puntos de A. Los subespacios afines de A de dimensión 1 y 2 son, como dijimos antes, rectas y planos (de A). Si A tiene dimensión n, sus subespacios afines de dimensión $n-1$ se llaman *hiperplanos afines de A*.

Ejercicio 2.5. Sean $A_1 \subseteq A_2$ dos subespacios afines.

(1) Demuestra que $\dim A_1 \leq \dim A_2$.
(2) Demuestra que $A_1 = A_2$ si y solo si $\dim A_1 = \dim A_2$.

Definición 2.6. Decimos que dos subespacios afines $p + W$ y $p' + W'$ de un espacio afín son *paralelos* si $W \subset W'$ o $W' \subset W$.

Proposición 2.7. *Sean A_1 y A_2 dos subespacios afines paralelos de A. Entonces ocurre una de las tres cosas siguientes:*

(1) $A_1 \subseteq A_2$;
(2) $A_2 \subseteq A_1$;
(3) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Demostración. Si se da (1) o (2) ya hemos terminado. Supongamos que no se da ni (1) ni (2) y que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ para llegar a una contradicción. Sean W_1 y W_2 las direcciones de A_1 y A_2 y sea $p \in A_1 \cap A_2$. Supongamos que $W_1 \subseteq W_2$ (si $W_2 \subseteq W_1$ el argumento es análogo). Entonces $A_1 = p + W_1 \subset p + W_2 = A_2$ y en efecto llegamos a una contradicción. □

Vemos a continuación qué "operaciones" podemos realizar con subespacios afines.

Proposición 2.8. *La intersección de (una colección arbitraria de) subespacios afines, si no es vacía, es un subespacio afín.*

Demostración. Hacemos la demostración en el caso de dos subespacios y dejamos como ejercicio el caso general. Sean A_1 y A_2 dos subespacios afines no disjuntos de un espacio afín A y sea $p \in A_1 \cap A_2$. Podemos escribir $A_1 = p + V_1$ y $A_2 = p + V_2$. En ese caso $A_1 \cap A_2 = p + (V_1 \cap V_2)$. En efecto, sea $q \in A_1 \cap A_2$ y sea $v = \vec{pq}$. Entonces $v = \vec{pq} \in V_1$ y $v = \vec{pq} \in V_2$, por lo que $v \in V_1 \cap V_2$ y $q = p + v$. Por otra parte, si $q \in p + (V_1 \cap V_2)$, entonces $q \in (p + V_1) \cap (p + V_2) = A_1 \cap A_2$. □

La unión de dos subespacios afines no es en general un subespacio afín, como se puede ver después de resolver el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2.9. (1) Demuestra, por medio de algún ejemplo, que la unión de dos subespacios afines no es en general un subespacio afín.
(2) Sea A un espacio afín sobre un cuerpo $\mathbf{k} \neq \mathbf{Z}_2$. Demuestra, que la condición necesaria y suficiente para que la unión de dos subespacios afines A_1 y A_2 sea un subespacio afín es que $A_1 \subseteq A_2$ o $A_2 \subseteq A_1$.

Como acabamos de ver en el ejercicio anterior la unión de dos subespacios afines A_1 y A_2 no es en general un subespacio afín. Lo que sí tiene sentido es considerar el subespacio afín "más pequeño" que contiene a A_1 y a A_2 (o lo que es lo mismo, a la unión de ambos):

Proposición 2.10. *Sean $A_1 = p_1 + W_1$ y $A_2 = p_2 + W_2$ dos subespacios afines de un espacio afín A. El subespacio afín $A' = p_1 + (W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{p_1p_2}))$ es el subespacio afín "más pequeño" que contiene a $A_1 \cup A_2$, en el sentido de que si A'' es otro subespacio afín que contiene a $A_1 \cup A_2$, se tiene que $A' \subseteq A''$.*

Demostración. Vemos que $A_1 \cup A_2 \subseteq A'$. En efecto, es claro que $A_1 \subset A'$. Por otra parte, si $q \in A_2$, q se puede escribir como $q = p_2 + w_2$, para algún $w_2 \in W_2$. En ese caso $q = p_1 + \overrightarrow{p_1p_2} + w_2 \in p_1 + (W_2 + L(\overrightarrow{p_1p_2})) \subseteq A'$. Vemos ahora que si $A_1 \cup A_2 \subseteq A''$, entonces $A' \subseteq A''$. Es claro que $p_1, p_2 \in A''$, por lo que podemos escribir $A'' = p_1 + W'' = p_2 + W''$, donde W'' es la dirección de A''. Como $A_1 \subseteq A''$, $W_1 \subseteq W''$ y como $A_2 \subseteq A''$, $W_2 \subseteq W''$. Además, como $p_1, p_2 \in A''$, $\overrightarrow{p_1p_2} \in W''$. Por ello $A' = p_1 + (W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{p_1p_2})) \subseteq p_1 + W'' = A''$. □

La proposición anterior motiva la siguiente definición:

Definición 2.11. Sean $A_1 = p_1 + W_1$ y $A_2 = p_2 + W_2$ dos subespacios afines de un espacio afín A. Entonces $A' = p_1 + (W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{p_1p_2}))$ se llama el *subespacio afín generado por A_1 y A_2* y se denota $< A_1, A_2 >$. En general, si S es un subconjunto no vacío de A, $< S >$ es el subespacio afín más pequeño entre los que contienen a S, que llamamos el *subespacio afín generado por S*.

Ejercicio 2.12. Demuestra que el subespacio afín más pequeño entre los que contienen a un subconjunto S de A existe y es único (indicación: considera la intersección de todos los subespacios afines de A que contienen a S.)

Observación 2.13. Consideramos dos subespacios afines $A_1 = p_1 + W_1$ y $A_2 = p_2 + W_2$.
(1) Del ejercicio 2.3 se sigue que $< A_1, A_2 >= p + (W_1 + W_2 + L(\overrightarrow{p_1p_2}))$ para cualquier $p \in A_1 \cup A_2$.
(2) Es claro que $< A_1, A_2 >=< A_1 \cup A_2 >$.

Ejercicio 2.14. Sean $p_1, \cdots, p_k$ puntos de un espacio afín A.
(1) Demuestra que si p_1 y p_2 son puntos distintos, entonces $< p_1, p_2 >$ es una recta afín de A.
(2) Demuestra que si p_1, p_2 y p_3 son puntos *no alineados* (es decir, no contenidos en nunguna recta), $< p_1, p_2, p_3 >$ es un plano afín de A.
(3) Demuestra que el subespacio generado por $p_1, p_2, \ldots, p_k$ es $< p_1, p_2, \ldots, p_k >= p_1 + L(\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_k})$.

Definición 2.15. Decimos que los puntos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ de un espacio afín A son puntos *afínmente independientes* si el subespacio afín $< p_1, p_2, \ldots, p_k >$ generado por ellos tiene dimensión $k - 1$.

Ejercicio 2.16. Sea (A, V, φ) un espacio afín.

(1) Sean $p_1, p_2, \ldots, p_k \in A$. Demuestra que $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son afínmente independientes si y solo si los vectores $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_k}$ de V son linealmente independientes.
(2) Si (A, V, φ) tiene dimensión n, demuestra que existen conjuntos $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ de puntos (distintos) afínmente independientes si y solo si $1 \leq k \leq n+1$.

Ejercicio 2.17. Estudia si los siguientes puntos de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ son afínmente independientes:

(1) $\{(1,-1,2),(2,0,2),(2,-2,2),(1,-1,3)\}$;
(2) $\{(1,2,3),(-1,3,1),(7,-1,9),(0,1,1)\}$;
(3) $\{(0,1,1),(1,1,2),(1,1,0),(0,2,1)\}$.

Para finalizar esta sección vemos cómo podemos describir usando ecuaciones los subespacios afines de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$. En realidad, todo subespacio afín A' de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ es el conjunto de soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales como (2.0.1). Decimos que las ecuaciones de dicho sistema son unas *ecuaciones implícitas* de A'. Por otra parte, si describimos de forma explícita los puntos de A' como el conjunto de soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales como (2.0.1), expresado de forma *paramétrica*, diremos que esas ecuaciones son unas *ecuaciones paramétricas* de A'. La descripción de los subespacios afines por medio de ecuaciones facilita su manejo; nos permite por ejemplo ver más fácilmente si un punto pertenece a un subespacio o expresar más fácilmente la intersección de subespacios o describir el subespacio generado por un subconjunto. En el siguiente ejercicio vemos con un ejemplo concreto cómo se obtienen ecuaciones implícitas y paramétricas de un subespacio afín. También vemos que las ecuaciones de un subespacio afín no son únicas.

Ejercicio 2.18. Consideramos en el espacio afín estándar $\mathbf{A}^4_{\mathbf{k}}$ el subespacio afín generado por los puntos $(1,0,1,0)$, $(1,-1,2,0)$ y $(0,1,1,1)$.

(1) ¿Cuál es la dimensión de A'?
(2) Encuentra al menos dos conjuntos de ecuaciones paramétricas de A'.
(3) Encuentra al menos dos conjuntos de ecuaciones implícitas de A'.

3. Aplicaciones afines

Al igual que se hace en álgebra lineal, en geometría afín estudiaremos aquellas aplicaciones entre espacios afines que *preserven la estructura afín*. ¿Qué queremos decir con eso? Son aplicaciones que conservan las propiedades geométricas de las que hemos estado hablando en los temas anteriores: la "linealidad" (es decir, la propiedad de ser subespacio afín), el paralelismo y, si es posible, la dimensión de un subespacio afín. Para esto parece sensato que, dada una aplicación entre los conjuntos de puntos A_1 y A_2 de dos espacios afines, consideremos también qué pasa con las direcciones V_1 y V_2 de dichos espacios y con las aplicaciones φ_1 y φ_2.

Definición, primeras propiedades y ejemplos

Definición 3.1. Una *aplicación afín* entre dos espacios afines (A_1, V_1, φ_1) y (A_2, V_2, φ_2) es una aplicación

$$f : A_1 \longrightarrow A_2$$

junto con una aplicación lineal

$$\vec{f} : V_1 \longrightarrow V_2$$

tal que para cualesquiera $p, q \in A_1$, $\vec{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$. A $\vec{f}$ la llamamos *aplicación lineal asociada* a f.

Observación 3.2. Otra forma de expresar la definición 3.1 es la siguiente: una aplicación $f : A_1 \longrightarrow A_2$ es una aplicación afín si y solo si existe una aplicación lineal $\vec{f} : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_1 \times A_1 & \xrightarrow{f \times f} & A_2 \times A_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ V_1 & \xrightarrow{\vec{f}} & V_2 \end{array}$$

es *conmutativo* (i.e, $\varphi_2 \circ (f \times f) = \vec{f} \circ \varphi_1$), donde, para todo $p, q \in A_1$, $(f \times f)(p, q) := (f(p), f(q))$.

Ejemplo 3.3. Vemos unos primeros ejemplos triviales de aplicaciones afines:

(1) Una aplicación constante entre dos espacios afines es una aplicación afín; su aplicación lineal asociada es la aplicación lineal nula.
(2) Sea (A, V, φ) un espacio afín. La aplicación id_A es una aplicación afín de A en A cuya aplicación lineal asociada es id_V.

Ejemplo 3.4. La aplicación de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{A}^4_{\mathbf{k}}$ dada por

$$f(x, y, z) = (y + z, -1 + 2x + 2y, 2 + x - z, 1 + x - y + 3z)$$

es una aplicación afín y su aplicación lineal asociada $\vec{f}$ (que va del espacio vectorial $\mathbf{k}^3$ al espacio vectorial $\mathbf{k}^4$) viene dada por

$$\vec{f}(x, y, z) = (y + z, 2x + 2y, x - z, x - y + 3z).$$

Proposición 3.5. *Sean (A_1, V_1, φ_1) y (A_2, V_2, φ_2) dos espacios afines.*

(1) *Sea f una aplicación entre A_1 y A_2. Si existe $o \in A_1$ tal que la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} f': & V_1 & \longrightarrow & V_2 \\ & \overrightarrow{op} & \mapsto & f(o)\overrightarrow{f(p)} \end{array}$$

es lineal, entonces f es una aplicación afín y f' es su aplicación lineal asociada.

(2) *Sea f una aplicación afín entre A_1 y A_2, sea $\overrightarrow{f}$ su aplicación lineal asociada y sea $o \in A_1$. Para todo $p \in A_1$ se tiene que $f(p) = f(o) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{op})$. De igual forma, para todo $v \in V_1$, $f(o+v) = f(o) + \overrightarrow{f}(v)$. Por tanto, f queda determinada de forma única si se conoce $\overrightarrow{f}$ y la imagen por f de un punto de A_1.*

(3) *Sea $p_1 \in A_1$, $p_2 \in A_2$ y sea $f' : V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicación lineal. Existe una única aplicación afín $f : A_1 \longrightarrow A_2$ tal que*
   (i) *$f(p_1) = p_2$; y*
   (ii) *la aplicación lineal asociada de f sea $\overrightarrow{f} = f'$.*

(4) *Sea $p_1 + W_1$ un subespacio afín de (A_1, V_1, φ_1), sea f una aplicación afín entre A_1 y A_2 y sea $\overrightarrow{f}$ su aplicación lineal asociada. Entonces $f(p_1 + W_1) = f(p_1) + \overrightarrow{f}(W_1)$. Por ello,*
   (a) *las aplicaciones afines transforman subespacios afines en subespacios afines;*
   (b) *las aplicaciones afines transforman subespacios afines paralelos en subespacios afines paralelos;*
   (c) *las aplicaciones afines transforman puntos alineados en puntos alineados.*

Demostración. Dejamos la demostración de (1) como un ejercicio teórico sencillo. (2) es simplemente la igualdad $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{op}) = f(o)\overrightarrow{f(p)}$ expresada de otro modo. En (3), para demostrar la existencia consideramos la aplicación $f : A_1 \longrightarrow A_2$ definida así: para cualquier $p \in A_1$, $f(p) := p_2 + f'(\overrightarrow{p_1p})$. En ese caso, si $p, q \in A_1$, $f(p)\overrightarrow{f(q)}$ es el vector que comienza en $p_2 + f'(\overrightarrow{p_1p})$ y termina en $p_2 + f'(\overrightarrow{p_1q})$, es decir, el vector $\overrightarrow{p_2p_2} + f'(\overrightarrow{p_1q}) - f'(\overrightarrow{p_1p})$ y, como f' es lineal, este último es igual a $f'(\overrightarrow{p_1q} - \overrightarrow{p_1p}) = f'(\overrightarrow{pp_1} + \overrightarrow{p_1q}) = f'(\overrightarrow{pq})$. Por tanto f es una aplicación afín y su aplicación lineal asociada es f'. Además $f(p_1) = p_2 + f'(\overrightarrow{p_1p_1}) = p_2 + f'(\overrightarrow{0}) = p_2$. La unicidad se sigue de (2). (4) se sigue de manera inmediata de (2). En cuanto a (a), (b) y (c), son corolarios inmediatos de (4). □

Ejemplos 3.6. En $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ consideramos los puntos $p_1 = (0,0), p_2 = (1,0), p_3 = (1,1)$ y $p_4 = (2,1)$, los puntos $p'_1 = (0,0), p'_2 = (1,0), p'_3 = (0,-1)$ y $p'_4 = (2,-1)$ y los puntos $q = (2,0)$ y $q' = (2,4)$.

(1) La aplicación f de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tal que $f(p_i) = p'_i$ para todo $i = 1, \ldots, 4$ no es una aplicación afín porque si lo fuera transformaría la recta $< p_1, p_3 >$ en la recta $< p'_1, p'_3 >$ y la recta $< p_2, p_4 >$ en la recta $< p'_2, p'_4 >$, pero las rectas $< p_2, p_4 >$ y $< p'_2, p'_4 >$ no son paralelas.

(2) La aplicación g de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que cumple $f((x,y)) = (x, x^2)$ no es una aplicación afín pues transforma los puntos p_1, p_2 y q, que están alineados, en los puntos p_1, p_3 y q', que no lo están.

Investigamos ahora cómo se comporta la composición de aplicaciones afines:

Proposición 3.7. *Sean A_1, A_2 y A_3 tres espacios afines, sean $g : A_1 \longrightarrow A_2$ y $h : A_2 \longrightarrow A_3$ dos aplicaciones afines y sean $\overrightarrow{g}$ y $\overrightarrow{h}$ sus aplicaciones lineales asociadas respectivas. La*

composición $h \circ g : A_1 \longrightarrow A_3$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es $\vec{h} \circ \vec{g}$.

Demostración. Se sigue de forma directa de la definición de aplicación afín, aplicación lineal asociada y del hecho de que g y h sean aplicaciones afines. □

Traslaciones

Vemos a continuación un ejemplo importante de aplicaciones afines de un espacio en sí mismo, las *traslaciones*:

Ejemplo 3.8. *(traslación)* Sea (A, V, φ) un espacio afín y sea $v \in V$. La aplicación

$$\begin{array}{rccc} t_v : & A & \longrightarrow & A \\ & p & \mapsto & p+v \end{array}$$

es una aplicación afín y su aplicación lineal asociada es la identidad. A t_v la llamamos la *traslación* de vector v.

Observación 3.9. Se tiene $t_v \circ t_w = t_{v+w}$. En particular una traslación t_v es una aplicación biyectiva (de forma más precisa, un *isomorfismo afín*; véase la definición 3.15) y $t_v^{-1} = t_{-v}$. Esto implica que el conjunto formado por las traslaciones de un espacio afín (A, V, φ) es un grupo abeliano isomorfo a $(V, +)$

La proposición 3.5 sugiere que la aplicación lineal asociada proporciona mucha información sobre la aplicación afín. Un ejemplo de esto es el siguiente resultado, donde se caracteriza a las traslaciones a partir de su aplicación lineal asociada.

Proposición 3.10. *Una aplicación afín de un espacio en sí mismo es una traslación si y solo si su aplicación lineal asociada es la identidad.*

Demostración. Que la aplicación lineal asociada a una traslación es la identidad es claro (y además es necesario comprobarlo para demostrar que una traslación es una aplicación afín). En efecto, basta comprobar que, para todo $p, q \in A$, el vector que comienza en $t_v(p)$ y termina en $t_v(q)$ es $\overrightarrow{pq}$. Por la definición de t_v, el vector que comienza en $t_v(p)$ y termina en $t_v(q)$ es $\overrightarrow{(p+v)(q+v)}$ y este último es, según el ejercicio 1.5 (4), igual a $\overrightarrow{pq} + v - v = \overrightarrow{pq}$. Para ver el recíproco, consideremos un espacio afín (A, V, φ) y una aplicación afín f de A en A, tal que su aplicación lineal asociada sea $\vec{f} = id_V$. Sea $p \in A$ y sea $v = \overrightarrow{pf(p)}$. Entonces la proposición 3.5 (2) implica que para todo $q \in A$, $f(q) = f(p) + \overrightarrow{pq}$. La ley del paralelogramo implica que $f(q) = q + v$. □

Observación 3.11. *(estructura de una aplicación afín)* Sean (A, V, φ) y (A', V', φ') dos espacios afines y sea $f : A \longrightarrow A'$ una aplicación afín. El objetivo de esta observación es mostrar cómo podemos "interpretar" f como la composición de una aplicación lineal de V a V' y una traslación de A' (hemos puesto interpretar entre comillas porque realmente *no es correcto* o, más bien, no tiene sentido, componer una aplicación lineal de V a V' con una aplicación afín de A' en A').

Para ello, fijamos un punto $o \in A$ y un punto $o' \in A'$. Esto nos permite "ver" A y A' como espacios vectoriales, ya que φ_o y $\varphi'_{o'}$ nos proporcionan sendas biyecciones de A y A' a V y V' respectivamente (recuerda la observación 1.3). Definimos el vector $v = \overrightarrow{o'f(o)}$. Definimos $g = t_{-v} \circ f$, que es una aplicación afín por la proposición 3.7. En ese caso $f = t_v \circ g$. Estudiamos ahora cómo es g. Usando las identificaciones de A con V y de A'

con V' que nos proporcionan φ_o y $\varphi'_{o'}$, podemos interpretar g como una aplicación lineal. De hecho podemos identificar g con la aplicación lineal asociada $\vec{f}$ de f. En efecto, si denotamos por $\vec{g}$ a la aplicación lineal asociada de g, es fácil ver que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_o} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'_{o'}} \\ V & \xrightarrow{\vec{g}} & V' \end{array}$$

es conmutativo, ya que $\vec{g}(\vec{op}) = g(o)\overrightarrow{g(p)} = \overrightarrow{o'g(p)}$. Por tanto, vía las identificaciones de A y A' con V y V' respectivamente, dadas por φ_o y $\varphi'_{o'}$, podemos identificar g con la aplicación lineal $\vec{g}$. Finalmente las proposiciones 3.7 y 3.10 nos permiten identificar g con la aplicación lineal asociada a f. Esto nos permite "ver" f como la composición de $\vec{f}$ seguida de t_v.

Vemos qué nos dice la construcción anterior en el caso en que $A = \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, $A' = \mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$, $o = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $o' = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$. En este caso las aplicaciones φ_o y $\varphi'_{o'}$ se convierten en la identidad en $\mathbf{k}^n$ y la identidad en $\mathbf{k}^m$. En este sentido, recuerda que, en la definición de espacio afín estándar de dimensión n, $\mathbf{k}^n$ juega a la vez el papel de conjunto de puntos del espacio afín y el papel de espacio vectorial asociado, por lo que la biyección $\varphi_o = \mathrm{id} : \mathbf{k}^n \longrightarrow \mathbf{k}^n$ (y análogamente $\varphi'_{o'} = \mathrm{id} : \mathbf{k}^m \longrightarrow \mathbf{k}^m$) es otra forma de decir que los elementos del conjunto $\mathbf{k}^n$ de la izquierda los vamos a ver como puntos del espacio afín estándar mientras que los elementos del conjunto $\mathbf{k}^n$ de la derecha los vamos a ver como vectores del espacio vectorial estándar. En esta situación, el diagrama conmutativo del párrafo anterior es entonces

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}^n & \xrightarrow{g} & \mathbf{k}^m \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ \mathbf{k}^n & \xrightarrow{\vec{g}} & \mathbf{k}^m \end{array}$$

y una aplicación afín f de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ se puede entender como la composición de una aplicación lineal de $\mathbf{k}^n$ a $\mathbf{k}^m$ (la aplicación lineal asociada a f) seguida de una traslación de $\mathbf{k}^m$ (de vector $v = \overrightarrow{o'f(o)}$). Así, para cualquier punto $p = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, el punto $f(p) = (y_1, \ldots, y_m)$ cumple

$$M \cdot X + B = Y,$$

donde M es la matriz de $\vec{f}$ respecto de las bases canónicas de $\mathbf{k}^n$ y $\mathbf{k}^m$, $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $B = (b_1, \ldots, b_m)^t$, $f(o) = (b_1, \ldots, b_m)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_m)^t$. Así pues, las aplicaciones afines entre $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ tienen el aspecto de la aplicación afín del ejemplo 3.4 en el sentido de que cada coordenada de una aplicación afín es una combinación lineal de las coordenadas de $\mathbf{k}^n$ más una constante.

Observación 3.12. Tanto la observación 3.11 como la proposición 3.5 nos dicen que, entre todas las aplicaciones que existen entre dos espacios afines, las aplicaciones afines forman una clase muy especial. Por ejemplo una aplicación que transforme un paralelogramo en un cuadrilátero que no lo sea (tal y como ocurre en el ejemplo 3.6 (1)) no podría ser una aplicación afín (¡piensa por qué!). De igual forma, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} \\ (x, y) & \mapsto & (x^2 - y^2 + 1, x - 3) \end{array}$$

tampoco es una aplicación afín (¡piensa por qué!). En general, si se nos da una aplicación entre dos espacios afines lo más probable es que esta no sea una aplicación afín.

Isomorfismos afines

Una aplicación afín *no* conserva necesariamente la dimensión de los subespacios afines. El ejemplo más sencillo de esto es si consideramos una aplicación constante desde un espacio afín de dimensión positiva. De la proposición 3.5 (3) se deduce que una condición necesaria y suficiente para que una aplicación afín conserve la dimensión de los subespacios afines es que $\vec{f}$ sea inyectiva (piénsalo, es solo álgebra lineal). Como comentamos antes, la aplicación lineal asociada $\vec{f}$ de una aplicación afín f nos dice mucho sobre f. Veremos ahora que $\vec{f}$ es inyectiva si y solo si f es inyectiva; no solo eso, se da también el resultado análogo para aplicaciones sobreyectivas y biyectivas:

Proposición 3.13. *Sea f una aplicación afín entre dos espacios afines (A_1, V_1, φ_1) y (A_2, V_2, φ_2) y sea $\vec{f}$ su aplicación lineal asociada.*

(1) *f es inyectiva si y solo si $\vec{f}$ es inyectiva;*
(2) *f es sobreyectiva si y solo si $\vec{f}$ es sobreyectiva;*
(3) *f es biyectiva si y solo si $\vec{f}$ es biyectiva;*
(4) *si A_1 y A_2 tienen la misma dimensión (por ejemplo, si $A_1 = A_2$), f es inyectiva si y solo si f es biyectiva si y solo si f es sobreyectiva.*

Demostración. Demostramos primero (1). Supongamos primero que f es inyectiva y probemos que en ese caso $\vec{f}$ también lo es. Sean v_1 y v_1' dos vectores de V_1, sea $p \in A_1$ y sean $p_1 = p + v_1$ y $p_1' = p + v_1'$. Supongamos que $\vec{f}(v_1) = \vec{f}(v_1')$. Entonces $f(p_1) = f(p) + \vec{f}(v_1) = f(p) + \vec{f}(v_1') = f(p_1')$ y como f es inyectiva, $p_1 = p_1'$. Como $(\varphi_1)_p$ es una biyección entre A_1 y V_1, se sigue que $v_1 = v_1'$. Ahora suponemos que $\vec{f}$ es inyectiva. Sean $q_1, q_1' \in A$ tales que $f(q_1) = f(q_1')$. Entonces $\vec{0}_{V_2} = f(q_1)\vec{f}(q_1') = \vec{f}(q_1\vec{q_1'})$, por lo que, al ser $\vec{f}$ inyectiva, $q_1\vec{q_1'} = \vec{0}_{V_1}$. Entonces, se sigue del ejercicio 1.5 (1) que $q_1 = q_1'$.
La afirmación (2) se sigue de la proposición 3.5 (4).
La afirmación (3) se sigue de (1) y (2).
La afirmación (4) se sigue de (1), (2) y (3) y del resultado análogo de álgebra lineal. □

Corolario 3.14. *Una aplicación afín inyectiva transforma puntos afínmente independientes en puntos afínmente independientes.*

Demostración. Sea f una aplicación afín entre dos espacios afines (A_1, V_1, φ_1) y (A_2, V_2, φ_2). Sean $p_1, \dots, p_k$ puntos de A_1 afínmente independientes. En ese caso se sigue del ejercicio 2.16, (1) que los vectores $p_1\vec{p}_2, \dots, p_1\vec{p}_k$ de V_1 son linealmente independientes. Si f es inyectiva, se sigue de la proposición 3.13, (1) que $\vec{f}$ es inyectiva, por lo que $\vec{f}(p_1\vec{p}_2), \dots, \vec{f}(p_1\vec{p}_k)$, o lo que es lo mismo, $f(p_1)\vec{f}(p_2), \dots, f(p_1)\vec{f}(p_k)$, son linealmente independientes. De nuevo el ejercicio 2.16, (1) implica que $f(p_1), \dots, f(p_k)$ son puntos afínmente independientes de A_2. □

Definición 3.15. (1) A una aplicación afín biyectiva la llamamos *isomorfismo afín.*
(2) Si existe un isomorfismo afín entre dos espacios afines A_1 y A_2, decimos que A_1 y A_2 son isomorfos.

Observación 3.16. Es un resultado conocido de álgebra lineal que dos espacios vectoriales son isomorfos (es decir, existe un isomorfismo de espacios vectoriales entre ellos) si y solo si tienen la misma dimensión. Esto y las proposiciones 3.5, (3) y 3.13 nos dicen que dos espacios afines son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión.

Investigamos ahora cómo se comportan las inversas de las aplicaciones afines biyectivas:

Proposición 3.17. (1) *El inverso de un isomorfismo afín es una aplicación afín, de hecho, es de nuevo un isomorfismo afín. En particular, la inversa de una isomorfismo afín es de nuevo una isomorfismo afín.*
(2) *El conjunto de los isomorfismos afines de un espacio afín en sí mismo es un grupo, en general no abeliano, con respecto a la composición de aplicaciones.*

Demostración. La dejamos como un (sencillo) ejercicio teórico. □

Más ejemplos

De los ejemplos que hemos visto hasta ahora, es claro que la identidad y las traslaciones son ejemplos de isomorfismos afines de un espacio afín en sí mismo. Obviamente, una aplicación constante no es inyectiva salvo que el espacio de partida sea un punto (ya lo vimos antes cuando observamos que en general las aplicaciones afines no conservaban las dimensiones). Vemos a continuación más ejemplos de aplicaciones afines y de isomorfismos afines.

Ejemplo 3.18. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales y sea f una aplicación lineal de V_1 a V_2. Entonces f da lugar de manera obvia a una aplicación afín entre los espacios afines que asociamos a V_1 y V_2 (véase el ejemplo 1.8).

Ejemplo 3.19. *(homotecia)* Sea (A, V, φ) un espacio afín, sea $\lambda \in \mathbf{k} \setminus \{0, 1\}$ y sea $o \in A$. La aplicación f de A en A que deja o fijo (es decir, $f(o) = o$) y que tiene por aplicación lineal asociada una *homotecia vectorial de razón* λ es un isomorfismo afín de A en sí mismo que llamamos *homotecia afín de razón* λ *y centro* o. Equivalentemente, h es una homotecia de de razón λ y centro o si, para todo $p \in A$, $h(p) = o + \lambda \cdot \overrightarrow{op}$.

Proposición 3.20. (1) *Una homotecia tiene un único punto fijo (el punto al que hemos llamado centro).*
(2) *Una aplicación afín de un espacio afín en sí mismo es una homotecia afín si y solo si su aplicación lineal asociada es una homotecia vectorial.*

Demostración. (1) Sea h una homotecia de razón λ, sea $o \in A$ tal que $h(o) = o$ y sea $p \in A$. Supongamos que $h(p) = p$. Entonces $p = h(p) = h(o) + \lambda \cdot \overrightarrow{op} = o + \lambda \cdot \overrightarrow{op}$, de donde $(1 - \lambda) \cdot \overrightarrow{op} = \overrightarrow{0}$. Como $\lambda \neq 1$, $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{0}$, que equivale a $o = p$.
(2) La aplicación lineal asociada de una homotecia es una homotecia vectorial por la definición de homotecia. Recíprocamente, si la aplicación lineal asociada $\overrightarrow{h}$ de una aplicación afín h es una homotecia vectorial (de razón $\lambda \neq 0, 1$) solo nos falta comprobar que h tiene algún punto fijo (que, por (1), a posteriori será único y el centro de h). Esto lo veremos en el ejercicio 4.16 (2), cuando hayamos ya hablado de la matriz asociada a una aplicación afín. □

Observación 3.21. Una homotecia h de centro o de razón λ es un isomorfismo afín. Esto se sigue de la proposición 3.13 (3), ya que $\vec{h}$ es una homotecia vectorial, que es un isomorfismo vectorial. Concretamente, la proposición 3.20 implica que h^{-1} es una homotecia de centro 0 y razón λ^{-1}.

Corolario 3.22. *El conjunto formado por las homotecias y las traslaciones de un espacio afín A forma un grupo respecto de la composición. Dicho grupo no es abeliano si A tiene dimensión positiva.*

Demostración. El conjunto formado por las homotecias y las traslaciones de A es un subgrupo del grupo de isomorfismos afines de A (recuerda la proposición 3.17 (2)). Esto se sigue de las proposiciones 3.7, 3.10 y 3.20 (2) y la observaciones 3.9 y 3.21. Para demostrar la segunda afirmación del enunciado, observa que una homotecia y una traslación de vector no nulo no conmutan. □

Ejercicio 3.23. Sea f una aplicación afín de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ no constante. Demuestra que f es una traslación o una homotecia. Esto quiere decir que en el caso de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ el subgrupo del grupo de isomorfismos afines de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ formado por las homotecias y las traslaciones es todo el grupo de isomorfismos afines de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$.

Antes de ver el siguiente ejemplo demostramos un lema sobre intersecciones de subespacios afines con direcciones complementarias:

Lema 3.24. *Dos subespacios afines de un espacio afín (A, V, φ) cuyas direcciones son subespacios vectoriales complementarios de V se cortan en un solo punto.*

Demostración. Sean $L_1 = p + W_1$ y $L_2 = q + W_2$ dos subespacios afines de (A, V, φ) tales que $W_1 \oplus W_2 = V$. Vemos primero que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Sean $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $\vec{pq} = w_1 + w_2$. Sea $p_1 = p + w_1$ (por tanto, p_1 está en L_1). Entonces $\vec{pq} = w_1 + w_2 = \vec{pp_1} + \vec{p_1q}$, por lo que $\vec{p_1q} = w_2 \in W_2$. Por ello, $\vec{qp_1} \in W_2$, por lo que $p_1 \in L_2$ y $p_1 \in L_1 \cap L_2$. Vemos ahora que $L_1 \cap L_2$ contiene un solo punto. Como $p_1 \in L_1 \cap L_2$, sabemos que $L_1 \cap L_2 = p_1 + (W_1 \cap W_2) = p_1 + \{\vec{0}\} = \{p_1\}$. □

Proposición 3.25. *En un espacio afín (A, V, φ) consideramos un subespacio afín L con dirección W y un subespacio U de V, complementario de W. Consideramos la aplicación π que envía cada $p \in A$ al único punto en $(p + U) \cap L$. La aplicación π es una aplicación afín y su aplicación lineal asociada es la proyección vectorial sobre W con dirección U (o paralelamente a U).*

Demostración. Sea $o \in L$. Dado $v \in V$, sea $p = o + v$ y sea $p' = \pi(p)$ (que está en $(p + U) \cap L$). Entonces $v = \vec{op} = \vec{op'} + \vec{p'p}$. Como $p' \in L$, $\vec{op'} \in W$. Como $p' \in p + U$, $\vec{p'p} = -\vec{pp'} \in U$. Entonces $v = \vec{op'} + \vec{p'p}$ es la descomposición (la única que existe) de v como suma de un vector de W y otro de U. Por tanto, $\vec{op'}$ es la proyección vectorial de v sobre W paralelamente a U. Por último, para que π sea una aplicación afín basta ver que para todo $v \in V$, la aplicación que manda v a $\pi(o)\overrightarrow{\pi(p)}$, donde $p = o + v$, es una aplicación lineal (que a posteriori concidirá con la aplicación lineal asociada de π). Como $o \in L$, $\pi(o) = o$ y $\pi(o)\overrightarrow{\pi(p)} = \vec{op'}$, por lo que la aplicación

$$v = \vec{op} \mapsto \pi(o)\overrightarrow{\pi(p)}$$

es la proyección vectorial sobre W paralelamente a U, que es una aplicación lineal. Por tanto, π es en efecto una aplicación afín y la aplicación lineal asociada a π es la proyección vectorial sobre W paralelamente a U. □

Definición 3.26. *(proyección)* A la aplicación π de la proposición 3.25 la llamamos *proyección (afín) sobre L con dirección U (o paralelamente a U).*

Proposición 3.27. *Una aplicación afín π de un espacio afín en sí mismo es una proyección si y solo si $\pi^2 = \pi$.*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 3.28. *Sea (A, V, φ) un espacio afín sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ de característica distinta de 2. Consideramos un subespacio afín L de A con dirección W y un subespacio U de V complementario de W. Consideramos la aplicación σ*

$$\sigma : p \mapsto \pi(p) + \overrightarrow{p\pi(p)}$$

donde π es la proyección sobre L paralelamente a U (observa que $\pi(p)+\overrightarrow{p\pi(p)} = p+2\overrightarrow{p\pi(p)}$). La aplicación σ es una aplicación afín y su aplicación lineal asociada es la simetría vectorial respecto de W con dirección U (o paralelamente a U).

Demostración. Damos un esbozo del argumento. Fijamos $o \in L$. Razonando como en el caso de las proyecciones, vemos que dado $p \in A$, el vector $\vec{op}$ se escribe como

$$\vec{op} = \overrightarrow{o\pi(p)} + \overrightarrow{\pi(p)p}.$$

Como $\overrightarrow{o\pi(p)} \in W$ y $\overrightarrow{\pi(p)p} \in U$, la imagen de $\vec{op}$ por la simetría vectorial respecto de W con dirección U es $\overrightarrow{o\pi(p)} - \overrightarrow{\pi(p)p}$. Por otra parte, $\sigma(o)\overrightarrow{\sigma(p)}$ se escribe como

$$\sigma(o)\overrightarrow{\sigma(p)} = \overrightarrow{o\sigma(p)} = \overrightarrow{o\pi(p)} + \overrightarrow{p\pi(p)} = \overrightarrow{o\pi(p)} - \overrightarrow{\pi(p)p},$$

es decir, la aplicación

$$\vec{op} \mapsto \sigma(o)\overrightarrow{\sigma(p)}$$

es la simetría vectorial respecto de W con dirección U. □

Definición 3.29. *(simetría)* A la aplicación σ de la proposición 3.28 la llamamos *simetría (afín) respecto de L con dirección U (o paralelamente a U).* A L lo llamamos *base* de σ.

Si la base de σ es un punto decimos que σ es una *simetría central*.
Si la base de σ es una recta decimos que σ es una *simetría axial*.
Si la base de σ es un plano decimos que σ es una *simetría especular*.

Proposición 3.30. *Una aplicación afín σ de un espacio afín A en sí mismo es una simetría si y solo si $\sigma^2 = id_A$.*

Demostración. Ejercicio. □

Asociada a una proyección y generalizando a una simetría (y también a las homotecias) tenemos otro ejemplo interesante de aplicación afín:

Ejercicio 3.31. *(dilatación)* Sea $f : A \longrightarrow A$ una proyección de base L y dirección W y sea $\lambda \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$. Definimos la aplicación $g : A \longrightarrow A$ como $g(p) = f(p) - \lambda\overrightarrow{pf(p)}$.

(1) Demuestra que g es una aplicación afín y halla su aplicación lineal asociada.

Decimos que g es una dilatación de base L, dirección W y razón λ (el nombre es autoexplicativo desde un punto de vista geométrico, ya que si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ y $\lambda > 1$, g "dilata" el espacio afín desde L en la dirección W.

(2) Demuestra que toda simetría es una dilatación. ¿De qué razón?

(3) Demuestra que toda homotecia es una dilatación. ¿De qué razón?

En los últimos ejemplos hemos visto que, para varios tipos de aplicaciones afines f de un espacio afín A en sí mismo, existen puntos $p \in A$ que cumplen $f(p) = p$. También es fácil ver en dichos ejemplos la existencia de subespacios afines L tales que $f(L) \subseteq L$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 3.32. (1) Decimos que un punto p de un espacio afín A es un *punto fijo* por una aplicación afín f de A en A si $f(p) = p$.

(2) Decimos que un subespacio afín L de A es *invariante* por una aplicación afín de A en A si $f(L) \subseteq L$.

Proposición 3.33. *Sea (A, V, φ) un espacio afín y sea f una aplicación afín de A en A.*

(1) *Si el conjunto de puntos fijos de f no es vacío, es un subespacio afín de A.*

(2) *Un subespacio afín $p + W$ de A es invariante por f si y solo si W es invariante por $\vec{f}$ (es decir, $\vec{f}(W) \subseteq W$) y $p\overrightarrow{f(p)} \in W$.*

(3) *Una recta afín $p + L(v)$ de A es invariante por f si y solo si v es un vector propio de $\vec{f}$ y $p\overrightarrow{f(p)}$ es un múltiplo de v.*

Demostración. Ejercicio (indicación para (1): demuestra que si p es un punto fijo de f, el conjunto de puntos fijos de f es $p + \ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_V)$, donde $\vec{f}$ es la aplicación lineal asociada a f). □

Observación 3.34. Ya vimos que el único punto fijo de una homotecia es su centro. Una traslación de vector v no tiene puntos fijos salvo si $v = \vec{0}$, en cuyo caso la traslación es la aplicación identidad y el conjunto de puntos fijos es todo es espacio afín. El subespacio de puntos fijos de una proyección sobre L es L (¡demuéstralo!). El subespacio de puntos fijos de una simetría y, en general, de una dilatación, de base L es L (¡demuéstralo!).

Ejercicio 3.35. Consideramos la aplicación afín

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{A}^3_{\mathbf{k}} & \longrightarrow & \mathbf{A}^3_{\mathbf{k}} \\ & (x,y,z) & \mapsto & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z, -y + 2z)\ . \end{array}$$

Demuestra que f es una dilatación y halla su base, su dirección y su razón.

Observación 3.36. Los subespacios que contienen al centro de una homotecia h son invariantes por h. Los subespacios cuya dirección contiene al vector de una traslación t son invariantes por t. Los subespacios contenidos en la base de una proyección π (respectivamente de una simetría σ; respectivamente de una dilatación g) son, obviamente, invariantes por π (respectivamente por σ; respectivamente por g).

Ejercicio 3.37. Demuestra que si la dirección de un subespacio L' contiene la dirección de una proyección π (idem de una simetría σ; idem de una dilatación g), L' es invariante por σ.

Observación 3.38. ¡Cuidado! En general existen otros espacios invariantes por las proyecciones, simetrías y dilataciones además de la base de las mismas y los que se describen en el ejercicio 3.37. ¿Puedes dar algún ejemplo más?

Definimos otro ejemplo interesante de isomorfismo afín especificando entre otras cosas su conjunto de puntos fijos:

Definición 3.39. Sea f un isomorfismo afín de un espacio afín (A, V, φ) en sí mismo. Decimos que f es una *transvección de eje* L si su conjunto de puntos fijos es un hiperplano afín L de A y $\vec{f}$ no tiene más vectores propios que los vectores de la dirección de L.

Ejercicio 3.40. Sea f un isomorfismo afín de un espacio afín (A, V, φ) en sí mismo que tiene un hiperplano afín L de A como conjunto de puntos fijos. Demuestra que f es una transvección de eje L o una dilatación con base L.

Observación 3.41. Los ejemplos de aplicaciones afines de un espacio en sí mismo que hemos visto hasta ahora (traslaciones, homotecias, proyecciones, simetrías, dilataciones y transvecciones) son muy interesantes desde el punto de vista geométrico pero no son representativos, en el sentido de que son ejemplos de aplicaciones afines *especiales* (en contraposición a aplicaciones afines *generales*). Salvo las homotecias (que incluyen a las simetrías centrales) y las proyecciones sobre un punto (que no son sino las aplicaciones constantes), el conjunto de puntos fijos en los demás ejemplos mencionados es vacío o tiene dimensión positiva. Sin embargo, una aplicación afín general tiene un único punto fijo (dicho de forma intuitiva, esto quiere decir que la gran "mayoría" de las aplicaciones afines tienen un único punto fijo o que si elegimos "al azar" una aplicación afín, es muy, muy "probable" que esta tenga un único punto fijo). Aunque no disponemos de los conocimientos necesarios para definir de manera rigurosa lo que quiere decir general ni para demostrar la afirmación anterior, esta se basa en el análisis de los polinomios característicos de las aplicaciones lineales asociadas a las aplicaciones afines. Un polinomio general no tiene a 1 como raíz. Esto se traduce en que una aplicación lineal general no tiene vectores fijos no nulos. Como veremos un poco más adelante (en el ejercicio 4.16, (1)) si la aplicación lineal asociada $\vec{f}$ de una aplicación afín f tiene al vector $\vec{0}$ como único vector fijo, entonces f tiene un único punto fijo. Esto tiene como consecuencia que una aplicación afín general tenga un y solo un punto fijo.

No debemos creer tampoco que las aplicaciones constantes y las homotecias, al tener un único punto fijo, son aplicaciones afines generales. Las primeras son obviamente aplicaciones muy particulares. En cuanto a las homotecias, estas también son especiales porque sus aplicaciones lineales asociadas, que son las homotecias vectoriales, lo son.

Tampoco cabe pensar que las traslaciones son generales entre las aplicaciones afines sin puntos fijos, ya que la aplicación lineal asociada a una traslación es muy especial: es la aplicación identidad.

Si quieres hacerte una idea de la variedad de aplicaciones afines existentes, por ejemplo en un plano afín, puedes consultar la sección X.9 de "Álgebra Lineal y Geometría", de M. Castellet e I. Llerena, donde puedes encontrar su clasificación (ten cuidado con la nomenclatura usada allí que es diferente a la de estas notas; así, lo que allí se llaman *homologías generales* son para nosotros dilataciones y lo que allí se llaman *homologías especiales* son para nosotros transvecciones).

Aplicaciones afines y razón simple

Definimos la razón simple de tres puntos alineados:

Definición 3.42. Sea A un espacio afín sobre $\mathbf{k}$. Dados tres puntos alineados p_1, p_2 y p_3 de A tales que $p_1 \neq p_2$, definimos su razón simple $(p_1\, p_2\, p_3)$ como el elemento $\lambda \in \mathbf{k}$ tal que $\overrightarrow{p_1p_3} = \lambda \overrightarrow{p_1p_2}$.

Observación 3.43. Sean p_1, p_2 y p_3 tres puntos alineados tales que $p_1 \neq p_2$.

(1) $(p_1\, p_2\, p_3) = 0$ si y solo si $p_3 = p_1$ y $(p_1\, p_2\, p_3) = 1$ si y solo si $p_3 = p_2$.
(2) Si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, la razón simple nos dice la posición del punto p_3 respecto de p_1 y p_2:
   (a) $(p_1\, p_2\, p_3) < 0$ si y solo si p_3 está fuera del segmento $\overline{p_1p_2}$ y "más cerca" de p_1 que de p_2.
   (b) $(p_1p_2p_3) = 0$ si y solo si $p_3 = p_1$.
   (c) $0 < (p_1\, p_2\, p_3) < 1$ si y solo si p_3 está en el interior del segmento $\overline{p_1p_2}$.
   (d) $(p_1p_2p_3) = 1$ si y solo si $p_3 = p_2$.
   (e) $(p_1\, p_2\, p_3) > 1$ si y solo si p_3 está fuera del segmento $\overline{p_1p_2}$ y "más cerca" de p_2 que de p_1.

Las aplicaciones afines conservan la razón simple como veremos en la siguiente proposición. De hecho, aunque no veremos la demostración, las aplicaciones afines se caracterizan, cuando la característica de $\mathbf{k}$ no es 2, por llevar puntos alineados a puntos alineados y conservar la razón simple (veáse, por ejemplo, la proposición X.3.7 de "Álgebra Lineal y Geometría", de M. Castellet e I. Llerena o el teorema 1.41 de "Geometría", de S. Xambó). Si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, algo más fuerte (y más sorprendente) es cierto: una biyección entre dos espacios afines de dimensión mayor que 1 que transforma rectas en rectas es una aplicación afín (es decir, en el caso real no hace falta comprobar que se conserva la razón simple, aunque así ocurra a posteriori). Este resultado recibe a veces el nombre de *teorema fundamental de la geometría afín* (véase por ejemplo el teorema 1.42 y el corolario 1.43 de "Geometría", de S. Xambó).

Proposición 3.44. *Sea $f : A \longrightarrow A'$ una aplicación afín y sean p_1, p_2, p_3 tres puntos alineados de A tales que $p_1 \neq p_2$. Entonces, cuando $(f(p_1)\, f(p_2)\, f(p_3))$ tenga sentido, $(p_1\, p_2\, p_3) = (f(p_1)\, f(p_2)\, f(p_3))$ (recuerda que, según la proposición 3.5 (4c), f lleva puntos alineados a puntos alineados, por lo que $(f(p_1)\, f(p_2)\, f(p_3))$ tiene sentido salvo cuando $f(p_1) = f(p_2)$).*

Demostración. Sea $(p_1\, p_2\, p_3) = \lambda$. Entonces $\overrightarrow{p_1p_3} = \lambda\overrightarrow{p_1p_2}$. Por otra parte $\overrightarrow{f(p_1)f(p_3)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1p_3}) = \lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1p_2})$, por ser $\overrightarrow{f}$ una aplicación lineal. Como $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{p_1p_2}) = \overrightarrow{f(p_1)f(p_2)}$, se tiene el resultado. □

Como aplicación de la proposición 3.44 demostramos la siguiente formulación del teorema de Tales:

Proposición 3.45. *Sea A un plano afín sobre $\mathbf{k}$. Sean r_1, r_2 y r_3 tres rectas paralelas distintas de A y sean l y l' dos rectas no paralelas a r_1, r_2 y r_3. Sea p_i el punto de intersección de r_i y l y sea p'_i el punto de intersección de r_i y l'. Entonces $(p_1\, p_2\, p_3) = (p'_1\, p'_2\, p'_3)$.*

Demostración. El resultado se sigue de aplicar la proposición 3.44 a la proyección sobre l' paralelamente a la dirección de r_1. □

4. Sistemas de referencia cartesianos y coordenadas

Aunque hemos estado hablando de espacios afines con toda generalidad, lo cierto es que, hasta ahora, en la mayoría de ejemplos y ejercicios solo hemos trabajado con el espacio afín estándar y con sus subespacios afines. Podemos justificar que estos ejemplos de espacios afines son los ejemplos más importantes y que no estamos perdiendo generalidad al referirnos casi exclusivamente a ellos por el hecho de que cualquier espacio afín sobre $\mathbf{k}$ de dimensión n es isomorfo al espacio afín estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, como se sigue de la observación 3.16. Sin embargo, para problemas concretos necesitamos dar isomorfismos explícitos entre un espacio afín y $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$. ¿Cómo lo haremos? Inspirándonos en la cuestión análoga para espacios vectoriales. En ese caso, dado un espacio vectorial V de dimensión n sobre $\mathbf{k}$, podemos dar isomorfismos explícitos entre V y el espacio vectorial estándar $\mathbf{k}^n$ gracias a la existencia de bases en V. En efecto, una vez fijada una base B de V, podemos asignar a cada vector $v \in V$, de forma única, una n–upla de $\mathbf{k}^n$: las coordenadas de v con respecto a B. Esa asignación es un isomorfismo (no canónico) entre V y $\mathbf{k}^n$. Vía ese isomorfismo, podemos tratar los vectores de V "como si fueran" n–uplas del espacio vectorial $\mathbf{k}^n$. En este tema vamos a realizar el proceso análogo para espacios afines. Nuestro objetivo será, dado un espacio afín A de dimensión n, encontrar una manera de asignar a cada punto $p \in A$ una n–upla de coordenadas, de manera que esa asignación sea un isomorfismo afín entre A y el espacio afín estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$. Recordemos que en la observación 1.3 ya vimos que si fijábamos un punto o en A, A se "transformaba" en un espacio vectorial. Como en un espacio vectorial ya sabemos cómo asignar coordenadas a cada vector, a saber, mediante la elección de una base, lo que haremos en el espacio afín (A, V, φ) es fijar un punto de A (un *origen*) y una base de V. Esto motiva la definición que daremos a continuación.

Referencias cartesianas, coordenadas y cambios de coordenadas

Definición 4.1. Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n sobre $\mathbf{k}$. Un *sistema de referencia cartesiano* de (A, V, φ) o, simplemente, una *referencia cartesiana* es un conjunto $\mathscr{R} = \{o; B\}$ donde o es un punto de A y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Dado $p \in A$, sus *coordenadas cartesianas* respecto de $\mathscr{R}$ son las coordenadas del vector $\overrightarrow{op}$ respecto de B.

Proposición 4.2. *Sea (A, V, φ) un espacio afín sobre $\mathbf{k}$, de dimensión n y sea $\mathscr{R}$ una referencia cartesiana de A. La aplicación*

$$\psi_{\mathscr{R}} : A \longrightarrow \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}},$$

que envía cada punto $p \in A$ a las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}$ es un isomorfismo afín.

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 4.3. *(referencia canónica)* La *referencia cartesiana canónica* del espacio afín estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ es $\mathscr{R}_c = \{(0, \ldots, 0); B_c\}$, donde B_c es la base canónica del espacio vectorial estándar $\mathbf{k}^n$. Las coordenadas del punto $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ con respecto a la referencia cartesiana canónica son $(x_1, \ldots, x_n)$.

Ejemplo 4.4.
(1) $\mathscr{R} = \{(1, 0); (1, 1), (1, -1)\}$ es una referencia cartesiana de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. El punto $(2, 3)$ tiene coordenadas $(2, -1)$ respecto de $\mathscr{R}$.
(2) $\mathscr{R}' = \{(1, 1, 1); (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ es una referencia cartesiana de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$. El punto $(0, 0, 0)$ tiene coordenadas $(0, 0, -1)$ respecto de $\mathscr{R}'$.

(3) $\mathscr{R} = \{(1,0,0);(1,-1,0),(1,0,-1)\}$ es una referencia cartesiana del plano afín L de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ de ecuación $x+y+z=1$. Las coordenadas del punto $p=(1/3,1/3,1/3)\in L$ respecto de $\mathscr{R}$ son $(-1/3,-1/3)$ (quizá en un primer momento te sorprenda que asignemos a p, que es un punto de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$, solamente dos coordenadas, pero observa que estamos considerando a p como punto L, que es un espacio afín de dimensión 2).

Una vez introducidos los sistemas de referencia cartesianos y las coordenadas cartesianas surge la cuestión (que también surgía con las bases y las coordenadas en un espacio vectorial) de, cuando tenemos dos sistemas de referencia distintos $\mathscr{R} = \{o;B\}$ y $\mathscr{R}' = \{o';B'\}$, cómo hallar las coordenadas de p respecto a $\mathscr{R}'$ a partir de las coordenadas de p respecto a $\mathscr{R}$.

Proposición 4.5. *(Cambio de coordenadas cartesianas) Sea (A,V,φ) un espacio afín de dimensión n y sean $\mathscr{R} = \{o;B\}$ y $\mathscr{R}' = \{o';B'\}$ dos referencias cartesianas de A. Sea $p\in A$, sean $(x_1,\dots,x_n)$ las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}$, sean $(x'_1,\dots,x'_n)$ las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}'$, sean $(c_1,\dots,c_n)$ las coordenadas de o respecto de $\mathscr{R}'$, sea $X=(x_1,\dots,x_n)^t$, sea $X'=(x'_1,\dots,x'_n)^t$, sea $C=(c_1,\dots,c_n)^t$ y sea $M=M_{B,B'}$ la matriz de cambio de base de B a B'. Entonces se tiene*

$$M\cdot X + C = X'. \tag{4.5.1}$$

A las ecuaciones que resultan de (4.5.1) *las llamamos* ecuaciones de cambio de coordenadas *de $\mathscr{R}$ a $\mathscr{R}'$.*

Demostración. Como $(x_1,\dots,x_n)$ son las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}$, el vector $\overrightarrow{op}$ tiene coordenadas $(x_1,\dots,x_n)$ respecto de la base B. Análogamente, como $(x'_1,\dots,x'_n)$ son las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}'$, el vector $\overrightarrow{o'p}$ tiene coordenadas $(x'_1,\dots,x'_n)$ respecto de la base B'. Asimismo, el vector $\overrightarrow{o'o}$ tiene coordenadas $(c_1,\dots,c_n)$ respecto de la base B'. Por otra parte $\overrightarrow{o'p} = \overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{op}$, por lo que las coordenadas de $\overrightarrow{o'p}$ en B' son la suma de las coordenadas de $\overrightarrow{o'o}$ en B' y las coordenadas de $\overrightarrow{op}$ en B' (recuerda que la asignación de coordenadas con respecto a una base es un isomorfismo, en particular una aplicación lineal). Finalmente las coordenadas de $\overrightarrow{op}$ en B' se obtienen de las coordenadas de $\overrightarrow{op}$ en B usando la matriz de cambio de base M. □

Observación 4.6. La ecuación (4.5.1) se puede escribir de forma más compacta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & M \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X' \end{pmatrix} \tag{4.6.1}$$

(en (4.6.1), 0 representa la matriz nula de tamaño $1\times n$ $(0,\dots,0)$ y 1, la matriz 1×1 cuyo único elemento es 1). A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & M \end{pmatrix}$ la llamamos *matriz de cambio* del sistema de referencia $\mathscr{R}$ al sistema de referencia $\mathscr{R}'$ y la denotamos por $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$. La matriz $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$ es una matriz $(n+1)\times(n+1)$.

Observación 4.7. Sea (A,V,φ) un espacio afín y sean $\mathscr{R} = \{o;B\}$ y $\mathscr{R}' = \{o';B'\}$ dos referencias cartesianas de A. Si desarrollamos el determinante de $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$ por la primera fila vemos que este es igual al determinante de $M_{B,B'}$, que es no nulo ya que $M_{B,B'}$ es una matriz invertible. Por tanto $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$ es una matriz invertible. Aunque se puede ver también directamente, posponemos hasta el corolario 4.18, (4) ver que la inversa de $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$ es la matriz $M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}}$.

Aplicaciones afines y sistemas de referencia

Al igual que pasa en álgebra lineal con las aplicaciones lineales, es posible "resumir" toda la información sobre una aplicación afín en un conjunto finito de datos, que podemos expresar mediante una matriz. Esto se basa en el siguiente resultado:

Proposición 4.8. *Sean (A, V, φ) y (A', V', φ') dos espacios afines, sea $\mathscr{R} = \{o; v_1, \dots, v_n\}$ una referencia cartesiana de (A, V, φ), sea $\hat{o}$ un punto cualquiera de A' y sean $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ n vectores cualesquiera de V'. Existe una única aplicación afín f tal que $f(o) = \hat{o}$ y cuya aplicación lineal asociada cumple $\vec{f}(v_1) = v'_1, \dots, \vec{f}(v_n) = v'_n$.*

Demostración. La El resultado se sigue del teorema análogo para espacios vectoriales y de la proposición 3.5 (3). En efecto, existe una única aplicación lineal $\vec{f}$ entre V y V' que cumple $\vec{f}(v_1) = v'_1, \dots, \vec{f}(v_n) = v'_n$ (véase por ejemplo la proposición V.2.1 de "Álgebra lineal y geometría", de M. Castellet e I. Llerena) y por la proposición 3.5 (3) existe una única aplicación afín f tal que $f(o) = \hat{o}$ y cuya aplicación lineal asociada es $\vec{f}$. □

La proposición 4.8 tiene su análogo para conjuntos de puntos afínmente independientes:

Corolario 4.9. *Sean (A, V, φ) y (A', V', φ') dos espacios afines, sea $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ un conjunto de puntos de A afínmente independientes y sea $\{p'_0, p'_1, \dots, p'_n\}$ un conjunto de puntos cualesquiera de A'. Existe una única aplicación afín f que cumple $f(p_0) = p'_0, f(p_1) = p'_1, \dots, f(p_n) = p'_n$.*

Demostración. Definimos f como la (única) aplicación afín f de la proposición 4.8 cuando hacemos $o = p_0$, $\hat{o} = p'_0$, $v_1 = \overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, v_n = \overrightarrow{p_0 p_n}$ y $v'_1 = \overrightarrow{p'_0 p'_1}, \dots, v'_n = \overrightarrow{p'_0 p'_n}$. □

Observación 4.10. El corolario 4.9 nos da idea de lo "rígidas" y especiales que son las aplicaciones afines. En efecto, una aplicación afín f de un espacio afín A de dimensión n a un espacio afín A' viene determinada por la imagen de $n + 1$ puntos afínmente independientes $p_0, p_1, \dots, p_n$ de A, es decir, para cualquier otro punto $p \in A$, $f(p)$ viene determinada por $f(p_0), f(p_1), \dots, f(p_n)$. Así pues, si alguien nos da una aplicación arbitraria g de A a A' tal que $g(p_0) = f(p_0), g(p_1) = f(p_1), \dots, g(p_n) = f(p_n)$, lo más probable es que $g(p) \neq f(p)$, con lo cual g no será una aplicación afín (compara con el ejemplo 3.6 (1)).

Podemos caracterizar los isomorfismos afines por la forma en que actúan sobre los sistemas de referencia cartesianos y sobre los conjuntos de puntos afínmente independientes. Vemos esto en la siguiente proposición, cuya demostración, que no daremos, es una consecuencia sencilla del resultado análogo para isomorfismos entre espacios vectoriales y de la proposición 3.13 (3).

Proposición 4.11. *Sean (A, V, φ) y (A', V', φ) dos espacios afines de dimensión n y sea f una aplicación afín de A a A'. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es un isomorfismo afín;*
2. *existe una referencia cartesiana $\{o; B\}$ de A que f transforma en una referencia cartesiana de A' (es decir, la aplicación lineal asociada de f transforma B en una base de V');*
3. *f transforma cualquier referencia cartesiana de A en una referencia cartesiana de A';*

(4) *existe un conjunto de* $n+1$ *puntos afínmente independientes de* A *que* f *transforma en un conjunto de* $n+1$ *puntos afínmente independientes de* A'*;*
(5) f *transforma cualquier conjunto de* $n+1$ *puntos afínmente independientes de* A *en un conjunto de* $n+1$ *puntos afínmente independientes de* A'*.*

De la proposición 4.8 se deduce que, para determinar una aplicación afín f, basta con conocer la imagen del origen o de un sistema de referencia cartesiano $\mathscr{R} = \{o; B\}$ y la imagen, por la aplicación lineal asociada a f, de los vectores de B. Esto nos va a permitir expresar f en forma matricial:

Proposición 4.12. *Sea* (A, V, φ) *un espacio afín de dimensión* n *y sea* (A', V', φ') *un espacio afín de dimensión* m*. Sea* $\mathscr{R} = \{o; B\}$ *una referencia cartesiana de* A *y sea* $\mathscr{R}' = \{o'; B'\}$ *una referencia cartesiana de* A'*. Sea* $f : A \longrightarrow A'$ *una aplicación afín y sea* $\vec{f}$ *su aplicación lineal asociada. Sea* $M = M_{B,B'}\vec{f}$ *la matriz de* $\vec{f}$ *respecto de las bases* B *y* B'*. Sea* p *un punto de* A*. Si las coordenadas de* p *respecto de* $\mathscr{R}$ *son* $(x_1, \ldots, x_n)$ *y las coordenadas de* $f(p)$ *respecto de* A' *son* $(y_1, \ldots, y_m)$*, se tiene*

$$M \cdot X + D = Y, \tag{4.12.1}$$

donde $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$*,* $Y = (y_1, \ldots, y_m)^t$ *y* D *es la traspuesta de la matriz fila formada por las coordenadas de* $f(o)$ *respecto de* $\mathscr{R}'$*. A las ecuaciones que se obtienen de* (4.12.1) *las llamamos* ecuaciones de f *respecto de* $\mathscr{R}$ *y* $\mathscr{R}'$*.*

Demostración. La demostración es similar a la demostración de la proposición 4.5. Basta darse cuenta de que

$$o'\overrightarrow{f(p)} = o'\overrightarrow{f(o)} + f(o)\overrightarrow{f(p)} = o'\overrightarrow{f(o)} + \vec{f}(\vec{op}),$$

de que las coordenadas de $o'\overrightarrow{f(p)}$ en B' son las coordenadas de $f(p)$ en $\mathscr{R}'$, de que las coordenadas de $o'\overrightarrow{f(o)}$ en B' son las coordenadas de $f(o)$ en $\mathscr{R}'$, de que las coordenadas de $\vec{op}$ en B son las coordenadas de p en $\mathscr{R}$ y de que las coordenadas de $\vec{f}(\vec{op})$ en B' se obtienen multiplicando las coordenadas de $\vec{op}$ en B por la matriz M. □

Observación 4.13. La ecuación (4.12.1) se puede escribir de manera más compacta, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix}, \tag{4.13.1}$$

donde 0 es la matriz nula $1 \times n$ y 1 es la matriz 1×1 cuyo único elemento es 1. A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & M \end{pmatrix}$ la llamamos $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)$, la *matriz de la aplicación afín* f respecto de los sistemas de referencia $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$. La matriz $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)$ es una matriz $(m+1) \times (n+1)$.
Si f es una aplicación afín de un espacio afín A en sí mismo es posible expresar la matriz de f con respecto a dos referencias cartesianas distintas de A o con respecto a una sola referencia cartesiana $\mathscr{R}$ de A. En este último caso escribimos

$$M_{\mathscr{R}}(f) := M_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f)$$

y llamaremos a $M_{\mathscr{R}}(f)$ la matriz de f respecto de $\mathscr{R}$.

Ejemplo 4.14. Sea f la aplicación afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ que cumple
(i) $f((0,0)) = (1,3)$,
(ii) $f((1,0)) = (2,1)$, y

(iii) $f((0,1)) = (1,-1)$.

La matriz de f respecto de la referencia canónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Observación 4.15. Dadas dos referencias cartesianas $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ del espacio afín (A, V, φ), la matriz $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$ de cambio de referencia de $\mathscr{R}$ a $\mathscr{R}'$ definida en 4.6 no es sino $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(id_A)$.

Poder expresar una aplicación afín en forma matricial usando referencias cartesianas nos permite abordar muchas cuestiones reduciéndolas a argumentos de álgebra lineal. Por ejemplo, el cálculo de los puntos fijos de una aplicación afín de un espacio afín en sí mismo se traduce en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Como consecuencia vemos en el siguiente ejercicio una caracterización de las aplicaciones afines con un único punto fijo en términos de su aplicación lineal asociada.

Ejercicio 4.16. Sea f es una aplicación afín de un espacio afín (A, V, φ) de dimensión n en sí mismo y sea $\vec{f}$ su aplicación lineal asociada.

(1) Demuestra que si $\ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) = \vec{0}$ (es decir, si $\vec{f}$ no tiene más vector fijo que el vector nulo), entonces f tiene un único punto fijo (indicación: traduce la igualdad $\ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) = \vec{0}$ en un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, expresa el conjunto de puntos fijos de f como el conjunto de soluciones de otro sistema de ecuaciones lineales relacionado con el anterior y usa el teorema de Rouché–Frobenius).

(2) Concluye que, en particular, si $\vec{f}$ es una homotecia vectorial de razón $\lambda (\neq 0, 1)$, entonces f es una homotecia de razón λ (esto completa la demostración de la proposición 3.20 (2)).

(3) Expresa la condición que han de cumplir los coeficientes de un polinomio mónico de grado n para que 1 sea raíz suya. Deduce que la "gran mayoría" de los polinomios mónicos de grado n no tienen a 1 como raíz (dicho de forma precisa, un polinomio mónico *general* de grado n no tiene a 1 como raíz). Eso implica (recuerda la observación 3.41) que la aplicación afín *general* de A en A tiene un único punto fijo.

(4) Observa que si $\ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_V) \neq \vec{0}$, entonces f puede no tener puntos fijos (de hecho, es lo más "probable"; es decir, si consideramos el conjunto de todas las aplicaciones afines que tienen como aplicación lineal asociada una misma aplicación ψ que cumple $\ker(\psi - \mathrm{Id}_V) \neq \vec{0}$, la "gran mayoría" de esas aplicaciones afines no tendrían puntos fijos... ¿eres capaz de explicar por qué?).

Proposición 4.17. *Sean (A_1, V_1, φ_1), (A_2, V_2, φ_2) y (A_3, V_3, φ_3) tres espacios afines. Sea $\mathscr{R}_1$ una referencia cartesiana de A_1, sea $\mathscr{R}_2$ una referencia cartesiana de A_2 y sea $\mathscr{R}_3$ una referencia cartesiana de A_3. Sean $h : A_1 \longrightarrow A_2$ y $g : A_2 \longrightarrow A_3$ dos aplicaciones afines y sea $f = g \circ h$. Entonces*

$$M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_3}(f) = M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_3}(g) \cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}(h).$$

Demostración. Dado un punto p de A_1 sea X la matriz traspuesta de la matriz fila formada por sus coordenadas respecto a $\mathscr{R}_1$ y sea Z la matriz traspuesta de la matriz formada por las

coordenadas de $f(p)$ respecto de $\mathscr{R}_3$. Observa que la matriz $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_3}(f)$ está caracterizada por ser la única matriz que cumple, para todo p de A_1,

$$M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_3}(f)\cdot\begin{pmatrix}1\\X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\Z\end{pmatrix}$$

(¡piénsalo!). Así pues, basta comprobar usando la observación 4.13 que para todo $p\in A_1$ se cumple

$$\begin{pmatrix}1\\Z\end{pmatrix}=M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_3}(g)\cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}(h)\cdot\begin{pmatrix}1\\X\end{pmatrix}.$$

□

Como consecuencia de la proposición 4.17 obtenemos las fórmulas siguientes:

Corolario 4.18. (1) *Sean (A,V,φ) y (A',V',φ') dos espacios afines, sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos referencias cartesianas de A y sean $\mathscr{R}'_1$ y $\mathscr{R}'_2$ dos referencias cartesianas de A'. Sea $f:A\longrightarrow A'$ una aplicación afín. Entonces*

$$M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}'_2}(f)=M_{\mathscr{R}'_1,\mathscr{R}'_2}\cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}'_1}(f)\cdot M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}.$$

(2) *Sean (A,V,φ) y (A',V',φ') dos espacios afines de la misma dimensión, sea $\mathscr{R}$ una referencia cartesiana de A y sea $\mathscr{R}'$ una referencia cartesiana de A'. Sea $f:A\longrightarrow A'$ un isomorfismo afín. Entonces $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)$ es invertible y*

$$M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}}(f^{-1})=(M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f))^{-1}.$$

(3) *Sea (A,V,φ) un espacio afín y sean $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ y $\mathscr{R}_3$ tres referencias cartesianas de A. Entonces*

$$M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_3}=M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_3}\cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}.$$

(4) *Sea (A,V,φ) un espacio afín y sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos referencias cartesianas de A. Entonces $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}$ es invertible y*

$$M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}=(M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2})^{-1}.$$

Demostración. Para ver (1) aplicamos la proposición 4.17 a $f=id_{A'}\circ f\circ id_A$. Para ver (2) aplicamos la proposición 4.17 a $id_A=f^{-1}\circ f$. Para ver (3) aplicamos la proposición 4.17 a $id_A=id_A\circ id_A$. Para ver (4) aplicamos (3) a las referencias $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_1$ y a las referencias $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$. □

Observación 4.19. Una matriz cuadrada invertible $\mathscr{M}$ de orden $(n+1)$ tal que su primer elemento es 1 y el resto de los elementos de la primera fila son 0 se puede interpretar bien como la matriz de cambio de coordenadas entre dos referencias cartesianas de un espacio afín de dimensión n, bien como la matriz de un isomorfismo afín entre espacios afines de dimensión n. Recíprocamente, tanto la matriz de cambio de coordenadas entre dos referencias cartesianas de un espacio afín de dimensión n como la matriz de un isomorfismo afín entre espacios afines de dimensión n es una matriz cuadrada invertible $\mathscr{M}$ de orden $(n+1)$ tal que su primer elemento es 1 y el resto de los elementos de la primera fila son 0. También son ciertas las afirmaciones análogas referentes a las ecuaciones de cambio de coordenadas de dos referencias cartesianas y a las ecuaciones de un isomorfismo afín.

En efecto, dada una matriz cuadrada $\mathscr{M}$ de orden $(n+1)$, con su primer elemento 1 y el resto de los elementos de la primera fila 0 y dada una referencia cartesiana $\mathscr{R}=\{o;B\}$ de un espacio afín (A,V,φ) de dimensión n, existe una (única) referencia cartesiana $\mathscr{R}'$ tal que $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}=\mathscr{M}$. Para definir $\mathscr{R}'=\{o';v'_1,\ldots,v'_n\}$ consideramos $\mathscr{M}^{-1}$, que es también una matriz cuadrada $\mathscr{M}$ de orden $(n+1)$, con su primer elemento 1 y el resto de los elementos de la primera fila 0 (¡piénsalo!). Tomamos entonces como o' el punto de A que

tiene por coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ los últimos n elementos de la primera columna de $\mathscr{M}^{-1}$ y como v_i', el vector de V que tiene por coordenadas respecto de B los últimos n elementos de la columna $(i+1)$–ésima de $\mathscr{M}^{-1}$.

Por otra parte, dados dos espacios afines (A_1, V_1, φ_1) y (A_2, V_2, φ_2) de dimensión n, dada una referencia cartesiana $\mathscr{R}_1 = \{o; v_1, \ldots, v_n\}$ de (A_1, V_1, φ_1) y dada una referencia cartesiana $\mathscr{R}_2 = \{o'; B_2\}$ de (A_2, V_2, φ_2), existe un único isomorfismo afín de f tal que $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}(f) = \mathscr{M}$. En efecto, para construir f primero fijamos como imagen de o por f aquel punto de A_2 que tenga como coordenadas respecto de $\mathscr{R}_2$ los últimos n elementos de la primera columna de $\mathscr{M}$. Luego fijamos como imagen del vector v_i por la aplicación lineal asociada a f aquel vector de V_2 cuyas coordenadas respecto de B_2 sean los últimos n elementos de la columna $(i+1)$–ésima de $\mathscr{M}$. Finalmente definimos f usando la proposición 4.8.

Por otro lado, el hecho de que tanto la matriz de cambio de coordenadas entre dos referencias cartesianas de un espacio afín de dimensión n como la matriz de un isomorfismo afín entre espacios afines de dimensión n sean matrices cuadradas invertibles de orden $(n+1)$ con su primer elemento 1 y el resto de los elementos de la primera fila 0 se sigue de las observaciones 4.6, 4.7 y 4.13 y del corolario 4.18.

Acabamos esta sección usando coordenadas para revisar los distintos ejemplos de aplicaciones afines vistos en la sección 3.

Ejemplo 4.20. La matriz de la aplicación afín f del ejemplo 3.4 respecto de las bases canónicas de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^4_{\mathbf{k}}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo anterior hemos dado la matriz de una aplicación afín respecto de las referencias canónicas. Sin embargo en muchas situaciones será útil elegir sistemas referencia adecuados que nos permitan expresar una aplicación afín de forma que la podamos entender mejor. En los resultados siguientes vemos que las proyecciones, simetrías, traslaciones, homotecias y dilataciones se pueden caracterizar por tener una matriz de aspecto muy sencillo con respecto a una referencia cartesiana adecuada.

Proposición 4.21. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n. Una aplicación afín de A en A es una proyección sobre un subespacio afín de A de dimensión l si y solo si existe una referencia $\mathscr{R}$ de A tal que la matriz de f con respecto a $\mathscr{R}$ es una matriz con todos sus elementos nulos excepto los $l+1$ primeros de la diagonal, que son iguales a 1.*

Demostración. Si f es una proyección sobre un subespacio afín de A de dimensión l, elegimos $\mathscr{R} = \{o; v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}, \ldots, v_n\}$ de forma que o sea un punto de la base de f, que $\{v_1, \ldots, v_l\}$ sea una base de la dirección de la base de f y que $\{v_{l+1}, \ldots, v_n\}$ sea una base de la dirección de f (con esta elección $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V; ¡piénsalo!). En ese caso $M_{\mathscr{R}}(f)$ es una matriz como la descrita en el enunciado.

Recíprocamente, si f es una aplicación afín cuya matriz respecto de cierta referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{o; v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}, \ldots, v_n\}$ de (A, V, φ) es como la descrita en el enunciado, entonces f es una proyección sobre el subespacio afín $o + L(v_1, \ldots, v_l)$, que tiene dimensión l, con dirección $L(v_{l+1}, \ldots, v_n)$. □

Proposición 4.22. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n. Una aplicación afín f de A en A es una simetría respecto de un subespacio afín de A de dimensión l si y solo si existe una referencia $\mathscr{R}$ de A tal que la matriz de f con respecto a $\mathscr{R}$ es una matriz diagonal tal que los $l+1$ primeros elementos de la diagonal son iguales a 1 y los $n-l$ últimos elementos de la diagonal son iguales a -1.*

Demostración. Ejercicio (indicación: razona como en la demostración de la proposición anterior). □

Proposición 4.23. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n y sea f una aplicación afín de A en A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *f es una homotecia de razón λ;*

(ii) *existe un punto o de A tal que para cualquier base B de V la matriz de f con respecto de la referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{o; B\}$ es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

(iii) *existe una referencia cartesiana $\mathscr{R}$ de A tal que la matriz de f con respecto de $\mathscr{R}$ es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Demostración. Ejercicio (indicación: toma como o el centro de la homotecia). □

Proposición 4.24. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n y sea f una aplicación afín de A en A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *f es una traslación (de vector no nulo);*

(ii) *existe una referencia cartesiana $\mathscr{R}$ de A tal que la matriz de f respecto de $\mathscr{R}$ es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Ejercicio (indicación: recuerda que una traslación está caracterizada por el hecho de que su aplicación lineal asociada es la identidad y elige el vector de la traslación como primer vector de la base de $\mathscr{R}$). □

Proposición 4.25. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n y sea f una aplicación afín de A en A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *f es una dilatación de razón λ y base un subespacio afín de A de dimensión l;*

(2) *existe una referencia cartesiana respecto de la cual la matriz de f es una matriz diagonal tal que los $l+1$ primeros elementos de la diagonal son iguales a 1 y los $n-l$ últimos elementos de la diagonal son iguales a λ.*

Demostración. Ejercicio (indicación: razona como para demostrar la proposición 4.22 y usa la descripción, pedida en el ejercicio 3.31 (1), de la aplicación lineal asociada a una dilatación). □

Ejercicio 4.26. Sea f un isomorfismo afín de un espacio afín (A, V, φ) en sí mismo que tiene un hiperplano afín L de A como conjunto de puntos fijos. Recuerda que, según el ejercicio 3.40, f es una transvección o una dilatación.

(1) Si f es una transvección demuestra que existe una referencia cartesiana de A respecto de la cual la matriz de f es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Si f es una dilatación de razón λ, demuestra que existe una referencia cartesiana de A respecto de la cual la matriz de f es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Concluye que existe un vector v de V no nulo tal que, para todo $p \in A \setminus L$, $p\vec{f}(p)$ es múltiplo de v.
(4) Si f es una transvección, demuestra que v pertenece a la dirección de L y que si l es una recta afín de A con vector director v, entonces l es invariante por f y $f|_l$ es una traslación de l.
(5) Si f es una dilatación de razón λ, demuestra que v no pertenece a la dirección de L sino a la dirección de f y que si l es una recta afín de A con vector director v, entonces l es invariante por f y $f|_l$ es una homotecia de l de centro $l \cap L$ y razón λ.

Proposición 4.27. *Sea (A, V, φ) un espacio afín de dimensión n y sea f una aplicación afín de A en A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *f es la identidad;*
(2) *para toda referencia cartesiana $\mathscr{R}$ de A la matriz de f respecto de $\mathscr{R}$ es la matriz identidad.*
(3) *existe alguna referencia cartesiana $\mathscr{R}$ de A tal que la matriz de f respecto de $\mathscr{R}$ es la matriz identidad.*

Demostración. Trivial. □

5. Espacios afines euclídeos

Hasta ahora solo hemos hablado de rectas, planos, subespacios afines, de sus dimensiones, de sus posiciones relativas... Sin embargo, cuando uno piensa en geometría, se le vienen también a la cabeza formas, distancias (longitudes), ángulos o conceptos como el de perpendicularidad. Para incluir estas nociones en nuestro estudio introducimos un nuevo objeto, *el espacio afín euclídeo*, que es un concepto con el que en un caso, particular pero significativo, habéis trabajado ya. En efecto, en $\mathbf{R}^n$, que ya sabemos que podemos verlo como el espacio afín estándar de dimensión n sobre $\mathbf{R}$, conocemos cómo medir la distancia entre dos puntos y también cómo medir el ángulo entre dos rectas coplanarias: usando el *producto escalar estándar*. Esto lo podemos generalizar en la siguiente definición:

Definición 5.1. *Un espacio afín euclídeo* es una cuaterna $(A, V, \varphi, <,>)$, donde (A, V, φ) es un espacio afín real y $(V, <,>)$ es un espacio vectorial euclídeo (es decir, $<,>$ es un producto escalar o, dicho de otra manera, una forma bilineal simétrica definida positiva de V). La dimensión de $(A, V, \varphi, <,>)$ es la dimensión de (A, V, φ) como espacio afín sobre $\mathbf{R}$ (o lo que es lo mismo, la dimensión de V como espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$).

Usaremos las propiedades (conocidas de álgebra lineal) de un producto escalar y de la norma asociada a un producto escalar (recordemos que en un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$ la norma de un vector $v \in V$ es $||v|| = \sqrt{< v, v >}$).

Ejemplo 5.2. El ejemplo más importante de espacio afín euclídeo de dimensión n (veremos enseguida que todo espacio afín euclídeo de dimensión n es *isométrico*, aunque no de forma canónica, a él) es $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n, \varphi, <,>)$, donde $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n, \varphi)$ es el espacio afín estándar y $(\mathbf{R}^n, <,>)$ es el espacio vectorial euclídeo estándar (es decir, $<,>$ es el producto escalar estándar en $\mathbf{R}^n$). Llamaremos a $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n, \varphi, <,>)$ el *espacio afín euclídeo estándar* de dimensión n.

En el espacio afín euclídeo estándar de dimensión n el coseno del ángulo de dos vectores de $\mathbf{R}^n$ y la distancia entre dos puntos de $\mathbf{R}^n$ se define de la manera usual. Estas definiciones se generalizan sin problemas a un espacio afín euclídeo arbitrario. Comenzamos recordando la generalización de la noción de ángulo.

Definición 5.3. *(ángulo no orientado entre dos vectores de un espacio vectorial euclídeo)* Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo y sean v_1 y v_2 dos vectores no nulos de V. Definimos el *ángulo no orientado entre* v_1 y v_2 como el arco coseno entre 0 y π de

$$\frac{< v_1, v_2 >}{||v_1|| \cdot ||v_2||}$$

(recuerda que, por la desigualdad de Cauchy–Schwarz, $| < v_1, v_2 > | \leq ||v_1|| \cdot ||v_2||$).

De la misma forma que el producto escalar de un espacio vectorial euclídeo V nos ha permitido generalizar la noción de ángulo de dos vectores de $\mathbf{R}^n$, también nos permitirá generalizar la noción de *perpendicularidad*, tanto de vectores de V como de subespacios afines de un espacio afín euclídeo.

Definición 5.4. Sea $(A, V, \varphi, <,>)$ un espacio afín euclídeo de dimensión n, sean v_1 y v_2 dos vectores de V y sean L_1 y L_2 dos subespacios afines de A con dirección W_1 y W_2 respectivamente.

(1) Decimos que v_1 y v_2 son *perpendiculares* u *ortogonales* si $< v_1, v_2 >= 0$ (es decir, si el angulo no orientado entre v_1 y v_2 es $\pi/2$ o si v_1 o v_2 es nulo).
(2) Decimos que L_1 y L_2 son *perpendiculares* u *ortogonales* si ocurre una de estas dos cosas:

(2.1) cualquier vector de W_1 es ortogonal a cualquier vector de W_2 (es decir, el *complemento ortogonal* $W_2^\perp$ de W_2 cumple $W_1 \subseteq W_2^\perp$; equivalentemente, $W_2 \subseteq W_1^\perp$).
(2.2) $W_1^\perp \subseteq W_2$ (equivalentemente $W_2^\perp \subseteq W_1$), si $\dim L_1 + \dim L_2 \geq n$.

Observación 5.5. La condición $W_1 \subseteq W_2^\perp$ implica que $\dim L_1 + \dim L_2 \leq n$. Esa es la razón de dar otra definición de ortogonalidad para cuando $\dim L_1 + \dim L_2 > n$. Observa que las condiciones (2.1) y (2.2) son equivalentes cuando $\dim L_1 + \dim L_2 = n$.

Igual que el dotar a un espacio vectorial real V de un producto escalar nos permite elegir, para cada subespacio vectorial W, un subespacio complementario de W distinguido, a saber, su *complemento ortogonal* $W^\perp$, dado un subespacio afín L, de dirección W y dimensión m, de un espacio afín euclídeo $(A, V, \varphi, <, >)$ de dimensión n y un punto $p \in A$, existe un subespacio afín por p de dimensión $n - m$ distinguido, a saber, $p + W^\perp$. De la misma manera, como en un espacio vectorial euclídeo existe una dirección distinguida para proyectar sobre un subespacio W (la dirección dada por $W^\perp$), esto permite que en un espacio afín euclídeo exista también una proyección distinguida sobre un subespacio afín L, a saber, la dada por la dirección ortogonal a L. Lo vemos en la siguiente proposición:

Proposición 5.6. *Sea $(A, V, \varphi, <, >)$ un espacio afín euclídeo de dimensión n. Sea L un subespacio afín de A de dimensión m y dirección W.*

(1) *Para cada $p \in A$, existe un único subespacio afín L' de A por p, ortogonal a L y con dimensión $n - m$. Este subespacio es $L' = p + W^\perp$.*
(2) *La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \pi: & A & \longrightarrow & A \\ & p & \mapsto & \pi(p), \end{array}$$

donde $\pi(p)$ es el único punto del conjunto $L \cap L'$, es una proyección (como se definió en la definición 3.26). De hecho, π es la proyección sobre L con dirección $W^\perp$ y su aplicación lineal asociada es la proyección vectorial ortogonal *sobre W (es decir, la proyección vectorial sobre W con dirección $W^\perp$).*

Demostración. Demostramos primero (1). Si L' es ortogonal a L y tiene dimensión $n-m$, la dirección W' de L' cumple $W' \subseteq W^\perp$. Como $\dim W^\perp = n - m$, $W' = W^\perp$ y L' es necesariamente $p + W^\perp$. Por otra parte (2) se sigue de forma inmediata del lema 3.24, de la proposición 3.25 y de la definición 3.26. □

Definición 5.7. A la proyección π de la proposición anterior la llamamos *proyección ortogonal* sobre L.

Observación 5.8. Seguramente al oir hablar de proyección lo primero que te viene a la cabeza es la proyección ortogonal que acabamos de definir y no el concepto más general de proyección que, en un contexto puramente afín, aparece en la definición 3.26. En un espacio afín euclídeo podemos elegir hacer cualquiera de las dos cosas: podemos elegir proyectar sobre un subespacio L paralelamente a su dirección ortogonal (y en ese caso tendremos una proyección ortogonal como hemos definido en la definición 5.7) o podemos elegir proyectar sobre L paralelamente a una dirección complementaria a L que no sea ortogonal (y en ese caso tendremos una proyección que no es ortogonal pero que sí es una proyección según la definición 3.26). Para entenderlo más intuitivamente hacemos el símil siguiente. Imaginemos que estamos en la calle en un día soleado y nos fijamos en la sombra que proyectamos sobre el suelo (que sería nuestro subespacio L sobre el cual se proyecta). Como la sombra la producen los rayos del sol, que está muy lejos, al incidir

sobre nosotros, convendremos en que dichos rayos son paralelos. Si estamos en el Ecuador al mediodía, esta proyección dada por los rayos del sol será una proyección ortogonal. En caso contrario los rayos del sol no nos dan una proyección ortogonal, pero ciertamente lo que hacen lo podemos describir como una proyección, y en efecto, sería una proyección según la definición 3.26. Volveremos a usar este símil cuando comparemos la geometría afín y la geometría proyectiva.

Damos ahora la definición de distancia en un espacio afín euclídeo arbitrario generalizando la noción de distancia que conocemos en $\mathbf{R}^n$.

Definición 5.9. *(distancia entre dos puntos de un espacio afín euclídeo)* Sea $(A, V, \varphi, <,>)$ un espacio afín euclídeo y sean $p, q \in A$. La distancia entre p y q, que abreviaremos como $\mathrm{d}(p,q)$, es la norma de $\vec{pq}$, es decir, $\mathrm{d}(p,q) = ||\vec{pq}|| = \sqrt{<\vec{pq}, \vec{pq}>}$.

Observación 5.10. La distancia entre dos puntos de un espacio afín euclídeo es un número real no negativo, siendo nula si y solo si los puntos son iguales.

Proposición 5.11. *(desigualdad triangular) Sean p_1, p_2 y p_3 tres puntos de un espacio afín euclídeo. Entonces:*

(1) *$d(p_1, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$;*
(2) *$d(p_1, p_3) = d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$ si y solo si p_1, p_2 y p_3 están alineados y la razón simple de p_1, p_2, p_3 cumple $(p_1 p_2 p_3) \geq 1$.*

Demostración. Ejercicio (indicación: se sigue de la desigualdad de Cauchy–Schwarz y de la desigualdad triangular para la norma). □

Proposición 5.12. *(distancia mínima desde un punto a un subespacio afín). Sea $(A, V, \varphi, <,>)$ un espacio afín euclídeo, sea $p \in A$, sea L un subespacio afín de A, sea π la proyección ortogonal sobre L y sea $p' = \pi(p)$. Para todo $q \in L$, $d(p, p') \leq d(p, q)$ y la igualdad se da solo si $p' = q$. En particular, $d(p, p') = \mín\{ d(p, q) | q \in L \}$.*

Demostración. Para todo $q \in L$, $\vec{pq} = \vec{pp'} + \vec{p'q}$. El vector $\vec{pp'}$ está en la dirección de la proyección π mientras que el vector $\vec{p'q}$ está en la dirección de L. Como π es una proyección ortogonal, $\vec{pp'}$ y $\vec{p'q}$ son ortogonales. En ese caso el cuadrado de $\mathrm{d}(p,q)$ es

$$<\vec{pq}, \vec{pq}> = <\vec{pp'}, \vec{pp'}> + 2 <\vec{pp'}, \vec{p'q}> + <\vec{p'q}, \vec{p'q}> = <\vec{pp'}, \vec{pp'}> + <\vec{p'q}, \vec{p'q}>,$$

por lo que $\mathrm{d}(p,p')^2$ es menor o igual que $\mathrm{d}(p,q)^2$. Por otra parte, $\mathrm{d}(p,p')^2$ es igual a $\mathrm{d}(p,q)^2$ si y solo si $<\vec{p'q}, \vec{p'q}> = 0$ y eso equivale a $\vec{p'q} = \vec{0}$, es decir, a $p' = q$. □

Sistemas de referencia cartesianos rectangulares

Al igual que hicimos para los espacios afines, queremos encontrar un modo de trabajar en un espacio afín euclídeo arbitrario como si se tratara del espacio afín euclídeo estándar. Ya vimos que, dado un espacio afín real A de dimensión n, si fijamos una referencia cartesiana $\mathscr{R}$, podemos asignar a cada punto de A una n–upla en $\mathbf{R}^n$ (sus coordenadas respecto de $\mathscr{R}$) y esto nos permite trabajar en el espacio afín estándar $\mathbf{R}^n$ (que nos resulta más familiar) en vez de trabajar en A. Con el siguiente ejemplo vemos que, en el caso de que estemos trabajando en un espacio afín euclídeo, elegir una referencia cartesiana cualquiera no es general suficiente:

Ejemplo 5.13. En el plano afín euclídeo estándar $\mathbf{R}^2$ consideramos los vectores $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (0, 1)$ y los puntos $p = (2, 2)$ y $q = (3, 3)$. El ángulo entre v_1 y v_2 es $\pi/2$. La distancia entre p y q es $\sqrt{2}$. Consideremos ahora la referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{(2, 2); B\}$, con $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ base de $\mathbf{R}^2$. Las coordenadas de v_1 y v_2 en B son respectivamente $(1, 0)$ y $(-1, 1)$ y las coordenadas de p y q en $\mathscr{R}$ son respectivamente $(0, 0)$ y $(0, 1)$. Si tratamos ahora las coordenadas de v_1 y v_2 como si fueran vectores del plano vectorial euclídeo estándar y calculáramos el ángulo que forman este sería $\pi/4$, que no es el ángulo que forman v_1 y v_2. De igual manera, si tratamos las coordenadas de p y q como si fueran puntos del plano afín euclídeo estándar, la distancia entre dichas coordenadas sería 1, que tampoco es la distancia entre p y q. En resumen, al dar coordenadas en la referencia $\mathscr{R}$ se nos "estropean" los ángulos y las distancias.

Entonces, dado un espacio afín euclídeo $(A, V, \varphi, <, >)$ (de dimensión n), ¿qué tipo de referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{o; B\}$ deberemos usar para que no se nos estropeen los ángulos y las distancias, como nos pasaba en el ejemplo anterior? Para que la referencia que tomemos sea "buena", esta debe cumplir dos cosas:

(i) que calcular el ángulo de dos vectores de V sea lo mismo que calcular el ángulo de sus coordenadas respecto a B, consideradas como vectores del espacio vectorial euclídeo estándar (es decir, usando para ello el producto escalar estándar de $\mathbf{R}^n$);

(ii) que calcular la distancia entre dos puntos de A sea lo mismo que calcular la distancia de sus coordenadas respecto de $\mathscr{R}$, consideradas como puntos del espacio afín euclídeo estándar (es decir, usando para ello la distancia estándar de $\mathbf{R}^n$).

Como el ángulo y la distancia dependen del producto escalar, bastará con que la base B sea *ortonormal* (es decir, tal que sus vectores sean ortogonales dos a dos y tengan norma 1). Esto justifica esta definición:

Definición 5.14. *(sistema de referencia cartesiano rectangular)* Sea $(A, V, \varphi, <, >)$ un espacio afín euclídeo y sea $\mathscr{R} = \{o; B\}$ un sistema de referencia cartesiano de (A, V, φ). Decimos que $\mathscr{R}$ es *rectangular* si B es una base ortonormal de $(V, <, >)$.

Una vez que definamos el concepto de *isometría* entre espacios afines euclídeos, podremos afirmar que la aplicación que asigna a cada punto de un espacio afín euclídeo A de dimensión n sus coordenadas en una determinada referencia cartesiana rectangular de A es una isometría entre A y el espacio afín euclídeo estándar $\mathbf{R}^n$.

Orientación

En los párrafos anteriores hemos hablado del ángulo entre dos vectores de un espacio vectorial euclídeo. Sin embargo, la noción de ángulo que hemos definido no contempla en qué "sentido de giro" medimos el ángulo. Para abordar esta cuestión con precisión y para describir y clasificar las isometrías de un espacio afín euclídeo en sí mismo (aplicaciones afines que conservarán ángulos y distancias), necesitaremos "orientar" dichos espacios, o más bien, sus espacios vectoriales asociados. Sin embargo, observa que la siguiente definición de *orientación* tiene sentido para un espacio vectorial real sin más (sin necesidad del añadido de una estructura euclídea). Por ello podríamos haber hablado de orientación antes, a saber, en el momento en que hablamos de espacios afines, eso sí, restringiéndonos al cuerpo $\mathbf{R}$ (ve también la observación 5.20).

Definición 5.15. *(Orientación)* Una *orientación* en un espacio vectorial real es una (de las dos) clases de equivalencia de bases, respecto de la siguiente relación de equivalencia: B' es equivalente a B si la matriz de cambio de base de B a B' tiene determinante positivo.

Un espacio vectorial real *orientado* es un espacio vectorial real en el que hemos elegido una de las dos orientaciones posibles. Un espacio afín real *orientado* es un espacio afín real cuyo espacio vectorial asociado está orientado. A las bases de la clase que da la orientación de un espacio vectorial real orientado las llamamos bases *positivas*.

Ejercicio 5.16. Comprueba que, en efecto, la relación descrita en la definición anterior es una relación de equivalencia y que el conjunto cociente tiene exactamente dos clases de equivalencia.

Ejemplo 5.17. En el plano vectorial estándar las dos orientaciones corresponden a girar en contra de las agujas del reloj (esta se considera la orientación *positiva*) y a girar a favor de las agujas del reloj (esta se considera la orientación *negativa*). En el espacio vectorial estándar de dimensión n se toma por convenio que la orientación *positiva* es la dada por la clase de la base canónica.

Vemos ahora cómo definir el angulo orientado entre dos vectores v_1 y v_2 de un plano vectorial euclídeo orientado.

Definición 5.18. *(angulo orientado)* Sea $(V, <, >)$ un plano vectorial euclídeo orientado y sean v_1 y v_2 dos vectores no nulos de V. Recordemos que el ángulo no orientado formado por v_1 y v_2 es el arco coseno, en $[0, \pi]$, de

$$\alpha = \frac{< v_1, v_2 >}{||v_1||||v_2||}.$$

(1) Si v_1 y v_2 son linealmente dependientes, entonces α es 1 o -1, por lo que el ángulo no orientado entre ellos es 0 o π. En este caso, definimos el *ángulo orientado* entre v_1 y v_2 como su ángulo no orientado.
(2) Si los vectores v_1 y v_2 son linealmente independientes definimos su *ángulo orientado* como
   (i) su ángulo no orientado si la base (¡ordenada!) $\{v_1, v_2\}$ define la orientación positiva de V;
   (ii) el opuesto de su ángulo no orientado si la base (¡ordenada!) $\{v_1, v_2\}$ define la orientación negativa.

Observación 5.19. Observa que el ángulo orientado que acabamos de definir es un valor del intervalo $(-\pi, \pi]$. Alternativamente, se puede definir ángulo orientado de forma que este sea un valor en el intervalo $[0, 2\pi)$. En realidad se puede definir el ángulo orientado de forma que tome valores en cualquier intervalo de longitud 2π de la recta real, con uno de sus extremos abierto y el otro cerrado.

Observación 5.20. ¡Aclaración! Aunque hayamos hablado de orientación en este tema, recalcamos que se puede orientar cualquier espacio vectorial real y cualquier espacio afín real, es decir, para hablar de orientación no hace falta tener ninguna estructura euclídea. Por tanto, dado un espacio vectorial V real orientado, tiene sentido hablar de automorfismos de V que *conservan la orientación*, que son aquellos automorfismos de V que tienen determinante positivo (o equivalentemente, transforman bases positivas en bases positivas como veremos en la proposición siguiente), o de automorfismos de V que *invierten la orientación*, que son aquellos automorfismos de V que tienen determinante negativo (o equivalentemente, transforman bases positivas en bases negativas). Igualmente, dado un espacio afín real orientado (A, V, φ), tiene sentido hablar de isomorfismos afines de A en A *directos*, que son aquellos isomorfismos afines cuyo automorfismo asociado conserva la orientación, y de isomorfismos afines de A en A *inversos*, que son aquellos isomorfismos

afines cuyo automorfismo asociado invierte la orientación. Sin embargo, para otros conceptos como el de ángulo orientado, obviamente sí necesitamos una estructura euclídea, pues primero precisamos definir ángulo no orientado, y para eso usamos el producto escalar.

Proposición 5.21. *Sea V un espacio vectorial real orientado y sea ϕ un automorfismo de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *ϕ tiene determinante positivo;*
(2) *ϕ transforma* alguna *base positiva de V en otra base positiva;*
(3) *ϕ transforma* cualquier *base positiva de V en otra base positiva.*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 5.22. *Sea V un espacio vectorial real orientado y sea ϕ un automorfismo de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *ϕ tiene determinante negativo;*
(2) *ϕ transforma* alguna *base positiva de V en una base negativa;*
(3) *ϕ transforma* cualquier *base positiva de V en una base negativa.*

Demostración. El enunciado de esta proposición es equivalente al enunciado de la anterior. □

Observación 5.23. Quizá te hayas preguntado por qué, si empezamos estos apuntes enunciando los resultados para un cuerpo $\mathbf{k}$ lo más general posible (aunque en el fondo y desde un punto de vista geométrico lo que nos importara es que $\mathbf{k}$ fuera $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$), en este tema hemos pasado de pronto a trabajar solo sobre $\mathbf{R}$. Una primera respuesta "fácil" sería decir que estamos trabajando con productos escalares y estos se definen en espacios vectoriales reales. Sin embargo existe una noción análoga de producto escalar para un espacio vectorial complejo V, el *producto hermítico* (véase la sección XI.1 de "Álgebra lineal y geometría", de M. Castellet e I. Llerena). Un producto hermítico es en particular una forma definida positiva, por lo que nos sirve para medir vectores de V, es decir, para definir su norma, que será un número real no negativo como lo es la norma de los vectores de un espacio euclídeo. Sin embargo, si queremos usar el producto hermítico para definir el ángulo entre dos vectores v y w de V, observamos que en general $< v, w >$ es un número complejo. El análogo de la desigualdad de Cauchy–Schwartz nos dice el módulo de $\frac{<v,w>}{||v||\cdot||w||}$ es menor o igual que 1, por lo que tendría sentido hablar de un número cuyo coseno sea $\frac{<v,w>}{||v||\cdot||w||}$, lo que pasa es que ahora este número sería en general complejo. Dicho de otra forma, estaríamos definiendo como ángulo entre v y w un número complejo en general no real, lo que no tiene demasiado sentido geométrico.

Otra razón por la que ahora estamos trabajando sobre $\mathbf{R}$ es la orientación. Recuerda que para hablar de orientación hemos necesitado ver si el determinante de una matriz invertible es positivo o negativo. Eso lo podemos hacer en $\mathbf{R}$, que es un *cuerpo ordenado* y en el que podemos decidir si un elemento no nulo es mayor o menor que 0, pero no lo podemos hacer en $\mathbf{C}$.

6. Isometrías

Al igual que en álgebra lineal se estudian las aplicaciones lineales, que son aquellas aplicaciones que conservan la estructura de espacio vectorial, y en geometría afín se estudian las aplicaciones afines, que son aquellas aplicaciones que conservan la estructura afín, en la geometría afín euclídea queremos estudiar aquellas aplicaciones que preserven la estructura afín euclídea, es decir, que conserven por una parte las propiedades afines y, por otra, los ángulos y las distancias. Para lo primero ya sabemos que las aplicaciones que debemos considerar son las aplicaciones afines. Para lo segundo, como ángulos y distancias se definen a partir del producto escalar, es claro que la condición necesaria y suficiente que precisaremos es que la aplicación lineal asociada a la aplicación afín sea una aplicación *ortogonal* (recuerda que una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales euclídeos se dice ortogonal si respeta el producto escalar). Esto motiva la siguiente definición:

Definición 6.1. Sean $(A_1, V_1, \varphi_1, <, >_1)$ y $(A_2, V_2, \varphi_2, <, >_2)$ dos espacios afines euclídeos. Decimos que una aplicación afín $f : A_1 \longrightarrow A_2$ es una isometría si la aplicación lineal asociada $\vec{f}$ de f es una aplicación ortogonal entre $(V_1, <, >_1)$ y $(V_2, <, >_2)$, es decir, para todo $v_1, w_1 \in V_1$ se tiene que $< \vec{f}(v_1), \vec{f}(w_1) >_2 = < v_1, w_1 >_1$.

Proposición 6.2. *La aplicación que asigna a cada punto de un espacio afín euclídeo A de dimensión n sus coordenadas en una determinada referencia cartesiana rectangular $\mathscr{R}$ de A es una isometría entre A y el espacio afín euclídeo estándar $\mathbf{R}^n$.*

Demostración. Ejercicio. □

Análogamente a las aplicaciones afines en el caso afín (véase la proposición 4.11), las isometrías se caracterizan por cómo actúan sobre los sistemas de referencia cartesianos rectangulares:

Proposición 6.3. *Sean $(A, V, \varphi, <, >)$ y $(A', V', \varphi', <, >')$ dos espacios afines euclídeos de dimensión n y sea f la aplicación afín de A a A'. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *La aplicación f es una isometría.*
(b) *La aplicación f transforma* cualquier *referencia cartesiana rectangular $\mathscr{R} = \{o; u_1, \ldots, u_n\}$ de A en una referencia cartesiana rectangular $\mathscr{R}' = \{f(o); \vec{f}(u_1), \ldots, \vec{f}(u_n)\}$ de A'.*
(c) *La aplicación f transforma* una *referencia cartesiana rectangular $\mathscr{R} = \{o; u_1, \ldots, u_n\}$ de A en una referencia cartesiana rectangular $\mathscr{R}' = \{f(o); \vec{f}(u_1), \ldots, \vec{f}(u_n)\}$ de A'.*

Demostración. La proposición se sigue del resultado análogo de álgebra lineal que caracteriza a las aplicaciones ortogonales como aquellas aplicaciones lineales que transforman bases ortonormales en bases ortonormales. □

Proposición 6.4. *Sean $(A_1, V_1, \varphi_1, <, >_1)$ y $(A_2, V_2, \varphi_2, <, >_2)$ dos espacios afines euclídeos y sea $f : A_1 \longrightarrow A_2$ una isometría entre ambos espacios. Entonces f es inyectiva y, en particular, $dim A_1 \leq dim\ A_2$. Además, si $dim A_1 = dim\ A_2$, f es un isomorfismo afín.*

Demostración. Es un sencillo resultado de álgebra lineal el hecho de que una aplicación ortogonal es inyectiva. Por otra parte, sabemos que f es inyectiva si y solo si lo es su aplicación lineal asociada $\vec{f}$. Entonces $\dim A_1 = \dim V_1 = \dim \operatorname{im} \vec{f}$ (por ser $\vec{f}$ inyectiva),

y dim im$\vec{f} \leq \dim V_2 = \dim A_2$. Por último, si $\dim A_1 = \dim A_2$ como f es inyectiva, f es biyectiva por la proposicion 3.13, (4). □

Proposición 6.5. (1) *La composición de isometrías es una isometría.*
(2) *La inversa de una isometría sobreyectiva es una isometría.*

Demostración. La afirmación (1) se sigue de la proposición 3.7 y de que la composición de aplicaciones ortogonales es una aplicación ortogonal. La afirmación (2) se sigue de las proposiciones 3.13, (2), 3.17, (1) y 6.4 y de que la inversa de una aplicación ortogonal sobreyectiva es ortogonal. □

Al igual que las aplicaciones afines podían caracterizarse como las aplicaciones que preservaban ciertas nociones puramente afines (son las aplicaciones que llevan puntos alineados a puntos alineados y conservan la razón simple), las isometrías también se pueden caracterizar como como aquellas aplicaciones entre espacios afines euclídeos que conservan la distancia, que es una noción puramente métrica o euclídea. Esto es hasta cierto punto sorprendente y da idea de que la condición de conservar distancias es una condición muy fuerte: piensa que con solo imponer a una aplicación f que conserve las distancias nos aseguramos por una parte que f sea aplicación afín y, por otra parte, que $\vec{f}$ sea una aplicación ortogonal, es decir que f no solo conserve las distancias sino también los ángulos (no orientados). Vemos todo esto en la siguiente proposición:

Proposición 6.6. *Sean $(A, V, \varphi, <,>)$ y $(A', V', \varphi', <,>')$ dos espacios afines euclídeos y sea $f : A \longrightarrow A'$ una aplicación. La aplicación f es una isometría (y en particular, una aplicación afín) si y solo si f conserva las distancias (es decir, para todo $p, q \in A$, $d'(f(p), f(q)) = d(p, q)$, donde d y d' son las distancias definidas en A y A' respectivamente a partir de $<,>$ y $<,>'$).*

Demostración. Si f es una isometría,

$$\mathrm{d}'(f(p), f(q)) = ||f(p)\overrightarrow{f(q)}||' = ||\vec{f}(\vec{pq})||' = \sqrt{< \vec{f}(\vec{pq}), \vec{f}(\vec{pq}) >} =$$

$$\sqrt{< \vec{pq}, \vec{pq} >} = ||\vec{pq}|| = \mathrm{d}(p, q).$$

Supongamos ahora que f es una aplicación que conserva las distancias. Fijamos un punto o de A. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f' : & V & \longrightarrow & V' \\ & v & \mapsto & f(o)\overrightarrow{f(o+v)}. \end{array}$$

Para todo $v \in V$,

$$||f'(v)||' = ||f(o)\overrightarrow{f(o+v)}||' = \mathrm{d}'(f(o), f(o+v)) = \mathrm{d}(o, o+v) = ||o\vec{+}v)|| = ||v||,$$

es decir, f' *conserva la norma*. Recuerda que dados $u, w \in V$,

$$< u, w >= \frac{1}{4}(||u+w||^2 - ||u-w||^2),$$

por lo que tenemos que si f' conserva la norma, también conserva el producto escalar. Por otra parte, toda aplicación que conserve el producto escalar es lineal (véase por ejemplo la proposición XII.1.1 de "Álgebra lineal y geometría", de M. Castellet e I. Llerena), así que f' lo es y de la proposición 3.5, (1) se sigue que f es una aplicación afín y y su aplicación

lineal asociada es $\vec{f} = f'$. Por último, como $\vec{f}$ es una aplicación lineal que conserva el producto escalar, es decir, es una aplicación ortogonal, f es una isometría. □

Teniendo en cuenta la proposición 6.4 que nos dice que las isometrías son inyectivas, es lógico centrarnos en las isometrías entre espacios de la misma dimensión. Dentro de las isometrías entre espacios de la misma dimensión, nos centraremos en las isometrías de un espacio afín euclídeo en sí mismo (que, en particular, son isomorfismos afines de dicho espacio en sí mismo).

En la observación 5.20 vimos que, en un espacio afín real orientado, podíamos hablar de isomorfismos afines directos o inversos según sus automorfimos asociados conservaran o invirtieran la orientación. En la siguiente definición repetimos estos conceptos en el caso especial de las isometrías de un espacio afín euclídeo orientado:

Definición 6.7. Sea $(A, V, \varphi, <, >)$ un espacio afín euclídeo *orientado*.

(1) Una isometría f de A cuya aplicación (ortogonal) lineal asociada $\vec{f}$ *conserva la orientación* (es decir, tal que $\det \vec{f} = 1$) se dice que es una isometría *directa*.
(2) Una isometría f de A que no es directa se dice que es una isometría *inversa* (por tanto, una isometría inversa es una isometría cuya aplicación (ortogonal) lineal asociada $\vec{f}$ *invierte la orientación*, es decir, tal que $\det \vec{f} = -1$).

Observación 6.8. El hecho que se afirma en la definición anterior, a saber, que una aplicación ortogonal conserva la orientación si y solo si su determinante es 1 y la invierte si y solo si su determinante es -1 se sigue de las proposiciones 5.21 y 5.22 y de que el determinante de una aplicación ortogonal es 1 o -1.

Proposición 6.9. *Sea $(A, V, \varphi, <, >)$ un espacio afín euclídeo.*

(1) *Las isometrías de A forman un grupo, $Iso(A)$, con respecto a la composición. De hecho, forman un subgrupo del grupo $Af(A)$ de isomorfismos afines de A en A.*
(2) *La composición de dos isometrías directas de A es de nuevo una isometría directa de A.*
(3) *La composición de dos isometrías inversas de A es una isometría directa de A.*
(4) *La composición de una isometría directa y de una isometría inversa de A es una isometría inversa de A.*
(5) *La inversa de una isometría directa de A es de nuevo una isometría directa de A.*
(6) *La inversa de una isometría inversa de A es de nuevo una isometría inversa de A.*
(7) *Las isometrías directas de A forman un subgrupo, $Iso^+(A)$, del grupo $IsoA$. En realidad, los isomorfismos afines directos de A en A también forman un grupo, $Af^+(A)$, con respecto a la composición e $Iso^+(A)$ es un subgrupo de $Af^+(A)$; de hecho, $Iso^+(A) = Iso(A) \cap Af^+(A)$.*

Demostración. La afirmación (1) se sigue de la proposición 6.5. Las afirmaciones (2), (3) y (4) se siguen de que el determinante de una composición de aplicaciones lineales es el producto de los determinantes. Las afirmaciones (5) y (6) se siguen de que el determinante del inverso de un isomorfismo de espacios vectoriales es el inverso del determinante del isomorfismo. La afirmación (7) se sigue de (2) y (5). □

Observación 6.10. Si (A, V, φ) es un espacio afín real, las afirmaciones análogas a (2), (3), (4), (5) y (6) son también ciertas para isomorfismos afines de A en A.

Vemos a continuación unos cuantos ejemplos de isometrías de un espacio afín euclídeo $(A, V, \varphi, <, >)$:

Ejemplo 6.11. *(identidad)* Obviamente la identidad es una isometría directa; el conjunto de puntos fijos de la identidad es todo A y su aplicación lineal asociada es id_V.

Ejemplo 6.12. *(traslaciones)* Es claro que una traslación de vector no nulo es una isometría directa, ya que la aplicación lineal asociada a una traslación es la identidad. Una traslación de vector no nulo no tiene puntos fijos.

Proposición 6.13. *(simetrías euclídeas) Sea L un subespacio afín de A con dirección W y sea U el complemento* ortogonal *de W. La simetría (afín) con base L y dirección U es una isometría y la llamamos* simetría euclídea *con base L o respecto de L. Una simetría euclídea es directa si la codimensión de L en A es par y es inversa si la codimensión de L en A es impar. Recordemos asimismo que el conjunto de puntos fijos de una simetría es su base L y que su aplicación lineal asociada es una simetría vectorial, en este caso ortogonal, con base la dirección de L.*

Demostración. Como la aplicación lineal asociada a una simetría euclídea es una simetría (vectorial) ortogonal, una simetría euclídea es una isometría. Una simetría vectorial ortogonal se puede representar, en una base adecuada (que en este caso puede tomarse ortonormal) como una matriz diagonal de manera que cada entrada de la diagonal sea 1 o -1. Además, la diagonal tiene tantas entradas que son -1 como la dimensión de U, que es la codimensión de L. En realidad, según la observación 5.20, una simetría afín de un espacio a fín real (no necesariamente euclídea) cumple lo mismo: es directa si la codimensión de L es par y es inversa si la codimensión de L es impar. □

Observación 6.14. Una simetría central es siempre una simetría euclídea.

Observación 6.15. Vimos en la observación 3.11 que una aplicación afín f podía entenderse como la composición de una "aplicación lineal" (que identificábamos con la aplicación lineal asociada a f) seguida de una traslación. Si trasladamos el contenido de la observación 3.11 al estudio de las isometrías de un espacio afín euclídeo, podemos decir que una isometría es la composición de una isometría que deja un punto fijo o (que, usando la identificación dada por φ_o entre el espacio afín y su espacio vectorial asociado, podemos "entender" en este caso como una aplicación lineal ortogonal) seguida de una traslación.

Isometrías de un plano afín euclídeo

Vemos unos cuantos ejemplos de isometrías de un *plano* afín euclídeo orientado $(A, V, \varphi, <, >)$. Además de la identidad y las traslaciones, que aparecen en los ejemplos 6.11 y 6.12, tenemos estos otros:

Ejemplo 6.16. *(giros en el plano)* Sea p un punto de A. Diremos que f es un *giro* de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$ alrededor de p o con centro p si p es un punto fijo de f y la aplicación lineal asociada a f es un giro vectorial de ángulo θ. Un giro es una isometría directa y se sigue del ejercicio 4.16, (1) que su centro es su único punto fijo.

Proposición 6.17. *Una isometría de A es un giro si y solo si su aplicación lineal asociada es un giro vectorial de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$.*

Demostración. De nuevo, se sigue del ejercicio 4.16, (1). □

Ejemplo 6.18. *(simetrías axiales euclídeas)* Las simetrías euclídeas respecto a una recta de A son isometrías (inversas) de A (véase la proposición 6.13).

Ejemplo 6.19. *(simetrías axiales deslizantes euclídeas)* Dada una simetría euclídea σ respecto a una recta l de A y una traslación t_v de vector v no nulo y paralelo a l, $t_v \circ \sigma$ es una isometría (inversa) de A, que llamamos *simetría axial deslizante euclídea* con eje l y vector de traslación v.

Observación 6.20. Este ejemplo se puede generalizar de la manera obvia a un espacio afín euclídeo de dimensión arbitraria, considerando la composición de una simetría euclídea σ (véase la proposición 6.13) seguida de una traslación t_v de vector no nulo v paralelo a la base de la simetría. Incluso podríamos haber dado un ejemplo análogo (y más general) cuando presentamos ejemplos de isomorfismos afines: tal ejemplo sería la composición de una simetría afín (no necesariamente euclídea) seguida de una traslación de vector no nulo paralelo a la base de la simetría (véase por ejemplo el ejercicio I.15 de "Geometry" de M. Audin).

Ejercicio 6.21. Sean σ y t_v como en la observación 6.20.

(1) Demuestra que $t_v \circ \sigma$ no tiene puntos fijos.
(2) Demuestra que la descomposición $f = t_v \circ \sigma$ es única respecto de f.
(3) Demuestra que la descomposición del apartado anterior conmuta, es decir, $t_v \circ \sigma = \sigma \circ t_v$.

De la clasificación de las aplicaciones ortogonales de un plano vectorial euclídeo se deduce el siguiente teorema:

Teorema 6.22. *(Clasificación de las isometrías del plano). Una isometría de un plano afín euclídeo orientado $(A, V, \varphi, <,>)$ es de uno (y solo uno) de los cinco tipos siguientes, cada uno con las propiedades que se indican en este cuadro:*

Tipo de isometría	¿Directa o inversa?	Conjunto de puntos fijos	Aplicación lineal asociada
Identidad	directa	A	Id_V
Traslación (de vector no nulo)	directa	$\emptyset$	Id_V
Giro (de áng. $\theta \in (0, 2\pi)$)	directa	un punto$^{(1)}$	giro vectorial (de áng. $\theta \in (0, 2\pi)$)
Simetría axial euclídea	inversa	una recta$^{(2)}$	simetría axial vectorial ortogonal
Simetría axial deslizante euclídea	inversa	$\emptyset$	simetría axial vectorial ortogonal

((1) el centro del giro; (2) el eje de la simetría).

Cada uno de los tipos de isometría anteriores está caracterizado por el tipo de su aplicación ortogonal asociada y por su conjunto de puntos fijos.

Demostración. No damos aquí la demostración detallada del teorema sino que la dejamos como un ejercicio (avanzado) que el alumno puede resolver siguiendo los pasos que se proponen a continuación (también puede encontrarse una demostración en la sección XIII.6 de "Álgebra Lineal y Geometría" de M. Castellet e I. Llerena):

Paso 1: Sea f una isometría de A. Si $\det \vec{f} = 1$, usa la clasificación de las aplicaciones ortogonales del plano vectorial euclídeo $(V, <,>)$ que conservan la orientación, que dice

que, en cualquier base ortonormal B de V, la matriz de $\vec{f}$ es

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

para algún $\theta \in [0, 2\pi)$ (en ese caso, $\vec{f}$ es un giro vectorial de ángulo θ).

Paso 2: Si en el paso 1 se tiene $\theta = 0$, entonces $\vec{f} = \mathrm{id}_V$. En ese caso, por la proposición 3.10 sabemos que f es una traslación de vector $v \in V$. Si $v = 0$, entonces f es la identidad y si $v \neq 0$, entonces f es una traslación de vector no nulo.

Paso 3: Si en el paso 1, $\theta \neq 0$, recuerda que $\vec{f}$ es un giro vectorial de ángulo θ no nulo. En este caso, según la observación 6.17, f es un giro de ángulo θ no nulo, con un único punto fijo, que es su centro.

Paso 4: Si $\det \vec{f} = -1$, usa la clasificación de las aplicaciones ortogonales del plano vectorial euclídeo $(V, <, >)$ que invierten la orientación, que dice que, en una base ortonormal adecuada $B = \{u_1, u_2\}$ de V, la matriz de $\vec{f}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En este caso $\vec{f}$ es una simetría vectorial ortogonal respecto de la recta $L(u_1)$.

Paso 5: Si en el paso 4 la isometría f tiene algún punto fijo $p \in A$, concluye a partir de la demostración de la proposición 3.33 que $\mathrm{Fij}(f) = p + L(u_1)$. En este caso f es una simetría (axial) euclídea respecto de la recta $p + L(u_1)$.

Paso 6: Si en el paso 4 la isometría f no tiene ningún punto fijo, elige un punto $p \in A$, sea $p' = f(p)$, sea $v = \overrightarrow{pp'}$ y sean t_v y t_{-v} respectivamente las traslaciones de vector v y $-v$. Entonces p es un punto fijo de la isometría $g = t_{-v} \circ f$, que además tiene a $\vec{f}$ por aplicación lineal asociada. Por el paso 5, g es una simetría (axial) euclídea respecto de la recta $p + L(u_1)$ y $f = t_v \circ g$.

Paso 7: Demuestra que si v fuera ortogonal a u_1, entonces $t_v \circ g$ sería de nuevo una simetría (axial) euclídea respecto a una recta paralela a $p + L(u_1)$. Como estamos en el caso en que f no tiene puntos fijos, se sigue que v no es ortogonal a u_1 y que existe $v' \in L(u_1)$ tal que $f = t_{v'} \circ g'$ (de hecho, v' es la proyección ortogonal de v sobre $L(u_1)$), donde g' es una simetría (axial) euclídea respecto a una recta paralela a $p + L(u_1)$. Tal composición $t_{v'} \circ g'$ es lo que hemos llamado una simetría axial euclídea deslizante.

Paso 8: Las propiedades que se enuncian para cada uno de los tipos las vimos en los ejemplos 6.11, 6.12, 6.16, en la proposición 6.13 y en el ejercicio 6.21, (1).

Paso 9: Por último, es obvio que una isometría f no puede ser a la vez de dos tipos distintos de la lista, puesto que el conjunto de puntos fijos y la aplicación ortogonal asociada a una isometría de un tipo determainado tienen propiedades diferentes a las del conjunto de puntos fijos y la aplicación ortogonal asociada a una isometría de otro de los tipos. □

El teorema 6.22 nos da una *clasificación* de las isometrías del plano. Es posible dar una clasificación más "fina": podemos decir que dos isometrías σ_1 y σ_2 están en la misma clase si existe una isometría σ tal que $\sigma_2 = \sigma^{-1} \circ \sigma_1 \circ \sigma$. En ese caso:

- obviamente, la identidad constituye ella sola una clase;
- existen tantas clases de traslaciones como números reales positivos (que se corresponden con las posibles normas de vectores no nulos);
- existen tantas clases de giros como números reales en $(0, \pi]$ (que corresponden a los ángulos *no orientados* de los giros);
- existe una única clase de simetrías axiales;
- existen tantas clases de simetrías deslizantes como números reales positivos (que se corresponden a las posibles normas de vectores no nulos de la traslación asociada a la simetría deslizante).

Aún es posible dar una clasificación un poco más fina de las isometrías del plano: podemos decir que dos isometrías σ_1 y σ_2 están en la misma clase si existe una isometría *directa* σ tal que $\sigma_2 = \sigma^{-1} \circ \sigma_1 \circ \sigma$. En ese caso lo único que cambia con respecto a la lista anterior es que habrá tantas clases de giros como números reales en $(0, 2\pi)$ (que corresponden a los ángulos *orientados* de los giros).

Ejercicio 6.23. Sea A un plano afín euclídeo. Estudia qué tipo de isometría de A es la composición, en el orden en que se nombran y en el orden inverso, de dos isometrías de A de los siguientes tipos:

(1) giro y traslación;
(2) giro y simetría axial (indicación: distingue dos casos según el eje de la simetría pase o no por el centro del giro);
(3) simetría axial y traslación (indicación: distingue los casos en que el vector de la traslación es paralelo al eje de la simetría, perpendicular al eje de la simetría, y el caso general);
(4) dos giros;
(5) dos simetrías axiales (indicación: distingue si los ejes son secantes, paralelos distintos, o el mismo).

Isometrías de un espacio afín euclídeo tridimensional

Vemos a continuación ejemplos de isometrías de un espacio afín euclídeo orientado tridimensional $(A, V, \varphi, <, >)$. Además de la identidad y las traslaciones de vector no nulo, tenemos estos otros ejemplos (para entenderlos mejor debes recordar la clasificación de las aplicaciones ortogonales de un espacio euclídeo tridimensional):

Ejemplo 6.24. *(giros en el espacio)* Sea l una recta afín de A. Diremos que f es un *giro* de ángulo $\theta \in (0, \pi]$ alrededor de l o con eje l si los puntos de l son puntos fijos de f y la aplicación lineal asociada a f es un giro (vectorial) de ángulo θ alrededor de la (recta vectorial que es la) dirección de l. Un giro es una isometría directa y de la demostración de la proposición 3.33 se deduce que sus únicos puntos fijos son los de l.

Observación 6.25. De la demostración de la proposición 3.33 se sigue también que una isometría f es un giro si y solo si su aplicación lineal asociada es un giro vectorial y f tiene algún punto fijo.

Ejemplo 6.26. *(movimiento helicoidal)* Sea l una recta afín de A, sea $\theta \in (0, \pi]$ y sea v un vector no nulo paralelo a l. Diremos que f es un movimiento helicoidal de eje l, ángulo

$\theta \in (0, \pi]$ y vector de traslación v, si f es la composición de un giro g de ángulo θ alrededor de l seguido de una traslación t_v de vector v. Un movimiento helicoidal es una isometría directa (pues su aplicación lineal asociada es un giro vectorial).

Ejercicio 6.27. Demuestra que una isometría f de A es un movimiento helicoidal si y solo si su aplicación lineal asociada es un giro vectorial y f no tiene ningún punto fijo.

Ejercicio 6.28. Sea f un movimiento helicoidal.

(1) Demuestra que f no tiene puntos fijos.
(2) Demuestra que la descomposición $f = t_v \circ g$ con giro g y traslación t_v como los que aparecen en el ejemplo 6.26 es única respecto de f.
(3) Demuestra para la descomposición del apartado anterior conmuta, es decir, que $t_v \circ g = g \circ t_v$.

Ejemplo 6.29. *(simetrías especulares euclídeas)* Las simetrías euclídeas respecto a un plano de A son isometrías (inversas) de A (véase la proposición 6.13).

Ejemplo 6.30. *(simetrías especulares deslizantes euclídeas)* Las simetrías euclídeas respecto a un plano Π de A seguidas de una traslación de vector no nulo y paralelo a Π son isometrías (inversas) de A sin puntos fijos (recuerda la observación 6.20).

Ejemplo 6.31. *(simetrías especulares euclídeas compuestas con un giro de eje pependicular)* La composición f de una simetría euclídea σ respecto a un plano Π de A seguida de un giro g alrededor de una recta l perpendicular a Π es una isometría (inversa) de A.

Ejercicio 6.32. Sean f, g, σ, l y Π como en el ejemplo 6.31.

(1) Demuestra que g tiene un único punto fijo, que es la intersección de l y Π.
(2) Demuestra que, excepto en el caso en que f sea una simetría central, la descomposición $f = g \circ \sigma$ es única con respecto a f.
(3) Demuestra que la descomposición del apartado anterior conmuta, es decir, $g \circ \sigma = \sigma \circ g$.

Al igual que en el caso de las simetrías del plano, los ejemplos que hemos visto nos dan todos los tipos de isometrías del espacio:

Teorema 6.33. *(Clasificación de las isometrías del espacio) Una isometría de un espacio afín euclídeo orientado tridimensional $(A, V, \varphi, <, >)$ es de uno (y solo uno) de los siete tipos siguientes, cada uno con las propiedades que se indican en estos cuadros:*

Isometrías directas

Tipo de isometría	Conjunto de puntos fijos	Aplicación lineal asociada
Identidad	A	Id_V
Traslación (de vector no nulo)	$\emptyset$	Id_V
Giro (de áng. $\theta \in (0, \pi]$) alrededor de una recta$^{(1)}$	una recta$^{(1)}$	giro vectorial (de áng. $\theta \in (0, \pi]$) alrededor de una recta$^{(2)}$
Movimiento helicoidal	$\emptyset$	giro vectorial alrededor de una recta

((1) el eje del giro; (2) la dirección del eje del giro).

Isometrías inversas

Tipo de isometría	Conjunto de puntos fijos	Aplicación lineal asociada
Simetría especular euclídea	un plano(3)	simetría especular vectorial ortogonal
Simetría especular deslizante euclídea	$\emptyset$	simetría especular vectorial ortogonal
Compos. de una simetría especular eucl. y un giro de eje perp. al plano de la simetría	un punto(4)	compos. de una simetría vect. especular ortog. y un giro vect. de eje ortog. al plano de la simetría

((3) el plano de la simetría; (4) la intersección del plano de la simetría con el eje del giro).
Además, cada uno de los tipos anteriores está caracterizado por las propiedades de la aplicación ortogonal asociada y del conjunto de puntos fijos.

Demostración. La demostración se puede hacer usando la clasificación de las aplicaciones ortogonales de un espacio afín euclídeo tridimensional e imitando los pasos de la demostración del teorema 6.22. También puedes encontrar una demostración completa en la sección XIII.7 de "Álgebra Lineal y Geometría", de M. Castellet e I. Llerena. □

Semejanzas

En un espacio afín euclídeo $(A, V, \varphi, <, >)$, si relajamos un poco los requisitos que le pedimos a los isomorfismos afines (para ser isometrías) y solo exigimos que conserven las formas pero no los tamaños, obtenemos una clase más general de isomorfismos afines (que engloba a las isometrías): las *semejanzas*. Las semejanzas son aquellos isomorfismos afines cuya aplicación lineal asociada es una semejanza vectorial. Una semejanza vectorial es un isomorfismo de V en V que no conserva necesariamente el producto escalar sino que lo multiplica por una constante positiva, i.e., ϕ es una semejanza si existe un número real $\lambda \neq 0$ tal que para todo $v_1, v_2 \in V$, $< \phi(v_1), \phi(v_2) >= \lambda^2 < v_1, v_2 >$. Por eso, si $\lambda^2 \neq 1$, la semejanza vectorial correspondiente conserva los ángulos no orientados pero no conserva las distancias, sino que las multiplica por $|\lambda|$ (recuerda las definiciones 5.3 y 5.9). No es difícil demostrar que una semejanza vectorial es la composición de una aplicación ortogonal y una homotecia vectorial de razón λ (donde permitimos que $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$).

Una semejanza (afín) puede verse como la composición de una semejanza que deja fijo un punto o (que podemos interpretar como una semejanza vectorial, por la identificación entre A y V vía φ_o) seguida de una traslación. Como una semejanza vectorial es la composición de una aplicación ortogonal seguida de una homotecia vectorial, tenemos que una semejanza (afín) es la composición de una isometría seguida de una homotecia. Las semejanzas volverán a aparecer en el estudio de la geometría proyectiva.

TEMA 2: **GEOMETRÍA PROYECTIVA**

7. Espacios y subespacios proyectivos

El origen de la geometría proyectiva lo podemos atisbar en el descubrimiento de la perspectiva en el Renacimiento. Hasta entonces no se sabía cómo realizar representaciones planas realistas de escenas tridimensionales. Con el descubrimiento de la perspectiva en la pintura se logra representar en el plano escenas tridimensionales de forma realista. Los objetos y las distancias más lejanas se representan más pequeñas. Así, rectas que sabemos son paralelas, si se alejan hacia el horizonte, las representamos como coincidentes (por ejemplo, las vías de un tren: a medida que se alejan hacia el horizonte, las traviesas parecen cada vez más pequeñas y los dos rieles confluyen en un mismo punto). Si quieres saber más sobre el origen y la historia de la geometría proyectiva, puedes ver la exposición que encontrarás en `http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html`.

La ciudad ideal "de Berlín", anónima, aprox. 1477 (Gemaldegalerie, Berlín).

Sin embargo hasta ahora nosotros habíamos hecho geometría plana en el plano afín (o en el plano afín euclídeo si consideramos ángulos y distancias, es decir, formas y medidas). Introduciremos el plano proyectivo a partir del plano afín, como *compleción* del mismo. Tomemos el plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y fijémonos en las rectas del plano. Si tomamos un par de rectas distintas pueden ocurrir dos cosas: que se corten o que no (en este segundo caso, son rectas paralelas). Intentemos imitar en el plano afín lo que nos dice la perspectiva. Consideramos como modelo del plano un papel sobre nuestra mesa, que imaginamos se prolonga en todas direcciones. Dibujemos ahora dos rectas paralelas en el papel. Imaginemos cómo se alejan las rectas al salir del papel y de la mesa; desde el lugar desde el que miramos nos parecería que las rectas, en la lejanía, se juntan en un punto del "horizonte", en el "infinito". Para expresar esto matemáticamente lo que tenemos que hacer es añadir al plano afín más puntos, los puntos del infinito y "decretar" que dos rectas paralelas se cortan en uno de esos nuevos puntos. Al añadir al plano afín esos puntos del infinito obtendremos el plano proyectivo.

Otra ejemplo de en qué sentido queremos cambiar (y quizá mejorar) las cosas con respecto a la geometría afín es el caso de una hipérbola (por ejemplo, la de ecuación $xy = 1$) y sus asíntotas: da la impresión de que si pudiéramos prolongar el dibujo "hasta el infinito" la

rama de la hipérbola y la asíntota se encontrarían. Pues bien, una vez que "completemos" la hipérbola y sus asíntotas con sus "puntos del infinito" respectivos, eso es precisamente lo que ocurrirá. Así pues, la pregunta es: ¿cómo añadimos todos esos puntos del infinito al plano afín de forma que la construcción tenga sentido y que las cosas funcionen como queremos en los dos ejemplos anteriores?

Definición de plano proyectivo

Definición 7.1. *(primera definición plano proyectivo estándar)* El plano proyectivo estándar $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ es el conjunto de todas las rectas de $\mathbf{k}^3$ que pasan por el origen $(0,0,0)$ o lo que es lo mismo, considerando $\mathbf{k}^3$ como un espacio vectorial, el plano proyectivo es el conjunto de todas las rectas vectoriales de $\mathbf{k}^3$.

¿Por qué esto es un plano? Para ello podemos pensar en cómo funciona una cámara oscura, que quizá hayas fabricado alguna vez haciendo un pequeño agujero en un lado de una caja y sustituyendo el lado opuesto por un papel traslúcido. Las imágenes se proyectan en el papel traslúcido, que es una parte de un plano. Los "rayos" de luz entran por el agujero, que podemos pensar como el $(0,0,0)$ de $\mathbf{R}^3$. Los puntos del espacio (que una vez fijado el origen podemos identificar como vectores de $\mathbf{R}^3$) que están en el mismo rayo dan lugar a un único punto en la representación plana que hacemos del espacio tridimensional en el papel traslúcido; así, cada rayo se identifica con un punto del "plano". De acuerdo a este mismo principio funciona nuestro ojo, en el que nuestra pupila jugaría el papel del agujero de la cámara oscura y nuestra retina jugaría el papel de la pantalla de papel traslúcido. Piensa que si cerramos un ojo y miramos solo con el otro perdemos la sensación de profundidad, es decir, nuestro cerebro se queda con una representación plana del espacio. De hecho, la geometría proyectiva nos puede explicar por qué viendo con los dos ojos se puede reconstruir, a partir de dos representaciones planas, una imagen tridimensional.

Imitemos la construcción de la cámara oscura en nuestro modelo matemático. En $\mathbf{k}^3$, con coordenadas x, y, z consideramos el subconjunto de puntos que satisfacen la ecuación $z = 1$. Este subconjunto es un subespacio afín de dimensión 2, o sea, un plano afín Π dentro de $\mathbf{k}^3$. Cada recta vectorial, cada "rayo" corta en un único punto al plano Π. En realidad, eso no es del todo cierto; lo que sí es cierto es que si unimos un punto del plano Π y el origen determinamos una única recta vectorial, por lo que podemos interpretar el plano afín como un subconjunto del plano proyectivo. ¿Qué puntos se han añadido (recordemos que, con esta definición, los elementos, los puntos del plano proyectivo, son rectas vectoriales)? Los que corresponden a rectas que no cortan al plano Π; es decir, las rectas vectoriales paralelas al plano Π; es decir, las rectas vectoriales contenidas en la dirección de Π; es decir, las rectas vectoriales contenidas en el plano vectorial de ecuación $z = 0$.

Vemos lo que le ocurre en este modelo a un par de rectas distintas. En primer lugar vemos que una recta l del plano afín Π se corresponde con un plano vectorial (el formado por todos los rayos que pasan por $(0,0,0)$ y por cada uno de los puntos de l, a los que añadimos la recta vectorial dirección de l). Dos rectas l_1 y l_2 secantes en Π corresponden a dos planos vectoriales que se cortan en la recta vectorial que corresponde al punto de corte de l_1 y l_2. Dos rectas paralelas l_1 y l_2 corresponden a dos planos vectoriales que se cortan en la recta vectorial que es la dirección común de l_1 y l_2, por tanto podemos decir que l_1 y l_2 (o más bien, sus *completados*) se cortan en uno de los puntos que hemos añadido a Π para obtener el plano proyectivo. Como las rectas paralelas se supone que se cortan cuando nos alejamos mucho, en el "horizonte", en el "infinito", llamamos a los puntos que añadimos al plano afín los *puntos del infinito*. Veremos luego que estos puntos también forman una recta, lo cual es lógico, porque si a cada recta de Π le hacíamos corresponder un plano vectorial

y así obteníamos todos los planos vectoriales de $\mathbf{k}^3$ menos uno, a ese plano vectorial que falta, que no es otro que el plano de ecuación $z = 0$, le haremos corresponder la recta de los puntos del infinito.

Como las rectas vectoriales solo se cortan en el $(0, 0, 0)$, si consideramos $\mathbf{k}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, entonces las rectas vectoriales de $\mathbf{k}^3$ sin el $(0, 0, 0)$ nos proporcionan una partición de $\mathbf{k}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Por eso también podemos definir el plano proyectivo estándar sobre $\mathbf{k}$ como el cociente de $\mathbf{k}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ por la relación de equivalencia asociada a esa partición:

Definición 7.2. *(segunda definición de plano proyectivo estándar)* En $\mathbf{k}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ consideramos la relación de equivalencia $\sim$, definida así: $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $(x_2, y_2, z_2) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$. Definimos el plano proyectivo estándar $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ sobre el cuerpo $\mathbf{k}$ como el conjunto cociente de $\mathbf{k}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ por la relación $\sim$.

Lo que estamos haciendo simplemente es decir que dos vectores no nulos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) de $\mathbf{k}^3$ son equivalentes si y solo si están en el mismo "rayo", es decir, en la misma recta vectorial. Para cada clase de equivalencia tomamos como representante (para visualizar el conjunto cociente como un plano) el punto del rayo que está en el plano Π. Si el rayo no corta al plano Π, pensamos esa clase de equivalencia como un punto del infinito.

La primera "mejora" que ofrece la geometría proyectiva sobre la geometría afín es el hecho de que dos rectas distintas del plano proyectivo siempre se cortan en un (y solo un) punto. Aunque no hayamos dado aún la definición formal de recta del plano proyectivo, por el momento aceptaremos que las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ son

- los "completados" $\bar{l}$ de las rectas l del plano afín Π, que obtenemos añadiendo a cada l un *punto del infinito* (a saber, la clase en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de un vector director de l); y
- la *recta del infinito* (formada por todos los puntos del infinito).

Ya vimos antes que dos rectas $\bar{l}_1$ y $\bar{l}_2$ que provienen de rectas afines secantes distintas l_1 y l_2 de Π se cortan en un punto de Π y, como l_1 y l_2 no son paralelas, sus direcciones son distintas, y también lo son sus puntos del infinito respectivos. Por ello $\bar{l}_1$ y $\bar{l}_2$ se cortan en un único punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, que es el punto de intersección de l_1 y l_2 en Π. También hemos visto que dos rectas $\bar{l}_1$ y $\bar{l}_2$ que provienen de rectas paralelas distintas l_1 y l_2 de Π, se cortan en su punto del infinito (y en ningún otro punto más, ya que l_1 y l_2 no se cortan en Π al ser paralelas). Por último una recta $\bar{l}$ comparte con la recta del infinito un único punto, el punto del infinito de $\bar{l}$. Estos argumentos demuestran el siguiente teorema:

Teorema 7.3. *Dos rectas distintas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ se cortan en un punto y solo uno.*

El teorema anterior tiene un enunciado "mejor", en el sentido de que es más simple y más "elegante" que el teorema afín análogo. El teorema afín sería: dos rectas distintas del plano afín se cortan en un punto (y solo uno) si no son paralelas y no se cortan si son paralelas. Como ves, tenemos que distinguir casos en el enunciado o, visto de otra forma, en el plano afín no todos los pares de rectas se comportan igual. La demostración que hemos hecho del teorema anterior sí distingue casos porque es una demostración que usa argumentos afines, es decir, no ha sido una demostración puramente proyectiva. Un poco más adelante, cuando definamos de forma precisa lo que es una recta proyectiva, haremos una demostración proyectiva, más elegante, de este resultado.

Otra "mejora" o simplificación que ofrece la geometría proyectiva con respecto a la geometría afín y euclídea es que estudiar las cónicas es más simple. En lo que queda de curso veremos que, desde un punto de vista proyectivo una elipse, una parábola o una hipérbola de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ corresponden a una misma cónica (dicho de otra forma, ser elipse, parábola o

hipérbola son conceptos afines, no proyectivos). Igual que, de forma natural, a una recta de Π le hemos añadido un punto en el infinito, a las cónicas no degeneradas de Π (elipses, hipérbolas o parábolas) les añadiremos también sus puntos en el infinito, dando lugar a cónicas proyectivas que serán indistinguibles desde un punto de vista proyectivo (haciendo esto conseguiremos también que las ramas de una hipérbola se corten con sus asíntotas). Aún así, seremos capaces de usar la geometría proyectiva para decidir si una determinada cónica afín no degenerada es una elipse, una hipérbola o una parábola.

Definición de espacio proyectivo estándar

Una vez vista la definición de plano proyectivo estándar, es sencillo generalizarla a cualquier dimensión:

Definición 7.4. En $\mathbf{k}^{n+1} \setminus \{0\}$ consideramos la relación de equivalencia $\sim$, definida así: $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \lambda(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. El espacio proyectivo estándar $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ es el conjunto cociente $\mathbf{k}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$. Denotaremos a la clase de equivalencia del vector $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ como $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$.

Igual que en el caso del plano, las clases de equivalencia de $\sim$ son las rectas vectoriales de $\mathbf{k}^{n+1}$ a las que se les ha quitado el origen. Por ello podemos identificar $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ con el conjunto de rectas vectoriales de $\mathbf{k}^{n+1}$.

Como en el caso plano, hay una forma sencilla de sumergir el espacio afín estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ de dimensión n sobre $\mathbf{k}$ dentro de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$: Dentro de (el espacio vectorial) $\mathbf{k}^{n+1}$, con coordenadas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, identificamos $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ con el hiperplano afín de ecuación $x_0 = 1$, mediante la biyección

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1, x_1, \ldots, x_n).$$

De esta forma identificamos el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ con el punto $(1 : x_1 : \cdots : x_n)$ de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, por lo que "sumergimos" $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ mediante la aplicación inyectiva

$$\begin{array}{rccc} & \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}} & \longrightarrow & \mathbf{P}^n_{\mathbf{k}} \\ i: & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (1 : x_1 : \cdots : x_n). \end{array} \tag{7.4.1}$$

Así $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ queda identificado con el subconjunto $\{(1 : x_1 : \cdots : x_n) \,|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{k}\}$ de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$. Según esta identificación, los puntos que hemos añadido a $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ para obtener $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ son los puntos del subconjunto

$$H_\infty = \{(0 : x_1 : \cdots : x_n) \,|\, (0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}\} \tag{7.4.2}$$

de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ (¿ves por qué? ¿qué pasa, por ejemplo, con un punto de la forma $(2 : x_1 : \cdots : x_n)$?). Los puntos de la forma $(0 : x_1 : \cdots : x_n)$ serán los *puntos del infinito* de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, aunque para ser precisos deberíamos decir que son los puntos del infinito de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ respecto a esta inmersión de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ (iremos viendo esto en más detalle y nos daremos cuenta de que, en realidad, un espacio proyectivo *no* tiene puntos del infinito; el que "tiene" puntos del infinito es el espacio afín).

Llegados aquí es claro cómo hacer una construcción más general, más intrínseca:

Definición 7.5. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n+1$ sobre un cuerpo $\mathbf{k}$. Definimos el *proyectivizado* $\mathbf{P}(V)$ de V como el conjunto cociente de $V \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia $\sim$, definida así: $v \sim w$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $w = \lambda v$. Los puntos de $\mathbf{P}(V)$ los denotaremos como $[v]$. Diremos que $\mathbf{P}(V)$ es un *espacio proyectivo de dimensión* n.

Ejemplo 7.6. (1) Si $V = \mathbf{k}^{n+1}$, entonces $\mathbf{P}(V)$ es el espacio proyectivo estándar de dimensión n sobre $\mathbf{k}$, que habíamos denotado antes como $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$.
(2) En particular, el plano proyectivo estándar sobre $\mathbf{k}$ es $\mathbf{P}(\mathbf{k}^3)$ y la *recta proyectiva estándar* sobre $\mathbf{k}$ es $\mathbf{P}(\mathbf{k}^2)$.
(3) Si V es un espacio vectorial de dimensión 1, entonces $\mathbf{P}(V)$ está formado por un solo punto.

Dado un espacio afín A (no necesariamente $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$; recuerda la definición 1.1 de espacio afín "abstracto") de dimensión n, es posible sumergirlo en un espacio proyectivo de dimensión n, de forma parecida a como sumergimos $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ (véase la página 149 de "Geometry", de M. Audin o las páginas 35–36 de "Lecciones de Geometría Proyectiva", de J.M. Rodríguez Sanjurjo y J.M. Ruiz (sin embargo, estas inmersiones no son *canónicas*, en el sentido de que no son intrínsecas, al depender de una serie de elecciones)). En cualquier caso no nos preocuparemos de este tema ya que para familiarizarnos con la geometría proyectiva y para explorar su relación con la geometría afín nos basta usar la inmersión (no canónica), que hemos presentado en (7.4.1), del espacio afín estándar dentro del espacio proyectivo estándar, u otras similares (véase la observación 9.14). En cambio, sí es interesante usar el concepto de proyectivización de un espacio vectorial arbitrario porque, aunque trabajemos en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, vamos a estudiar sus subespacios proyectivos que, como veremos a continuación, son los proyectivizados de subespacios vectoriales de $\mathbf{k}^{n+1}$.

Subespacios proyectivos

Definición 7.7. Dado un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n, se llama *subespacio proyectivo o subespacio lineal* de $\mathbf{P}(V)$ de dimensión r a un subconjunto de la forma $\mathbf{P}(W)$, donde W es un subespacio vectorial de V dimensión $r+1$. A los subespacios proyectivos de dimensión 1 se les llama rectas proyectivas de $\mathbf{P}(V)$, a los de dimensión 2 se les llama planos proyectivos de $\mathbf{P}(V)$ y a los de dimensión $n-1$ se les llama hiperplanos proyectivos de $\mathbf{P}(V)$.

Observación 7.8. Por la definición anterior,

(1) los subespacios proyectivos de dimensión 0 son los puntos de $\mathbf{P}(V)$;
(2) el conjunto vacío *es* un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)$, ya que es el proyectivizado del subespacio vectorial nulo, y tiene dimensión -1.
(3) El conjunto H_∞ definido en (7.4.2) es un hiperplano proyectivo de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$. Lo llamaremos *hiperplano del infinito* (de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, sumergido en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ mediante la inmersión (7.4.1)). En el caso $n = 2$, H_∞ es una recta proyectiva, la *recta del infinito* (de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, sumergido en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ mediante la inmersión (7.4.1))

Proposición 7.9. *Sean Λ y Λ' dos subespacios proyectivos de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ tales que $\Lambda \subseteq \Lambda'$. Entonces*

(1) *$dim\Lambda \leq dim\Lambda'$.*
(2) *$dim\Lambda = dim\Lambda'$ si y solo si $\Lambda = \Lambda'$.*

Demostración. Se sigue del enunciado correspondiente para subespacios vectoriales. □

Observación 7.10. Dados subespacios $\mathbf{P}(W_1), \ldots, \mathbf{P}(W_s)$ de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$, se pueden hacer las siguientes operaciones:

(1) La intersección de todos ellos, que coincide con los puntos $[v]$ tales que v está en cada W_i. Por tanto, se tiene que $\mathbf{P}(W_1) \cap \cdots \cap \mathbf{P}(W_s) = \mathbf{P}(W_1 \cap \cdots \cap W_s)$, que es un subespacio proyectivo (recuerda que el vacío también es un subespacio proyectivo).

En general, la intersección de una colección arbitraria, no necesariamente finita, de subespacios proyectivos es otro subespacio proyectivo, ya que la intersección arbitaria de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

(2) El mínimo subespacio proyectivo $\mathbf{P}(W)$ que los contiene (la definición de subespacio proyectivo mínimo o más pequeño es análoga a la dada para subespacios afines en la proposición 2.10). En este caso es claro que W ha de ser el mínimo subespacio vectorial que contiene a $W_1, \ldots, W_s$, es decir, $W = W_1 + \cdots + W_s$.

Definición–proposición 7.11. Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo.

(1) Se llama subespacio generado por los subespacios $\mathbf{P}(W_1), \ldots, \mathbf{P}(W_s)$ de $\mathbf{P}(V)$ y lo denotaremos por $< \mathbf{P}(W_1), \ldots, \mathbf{P}(W_s) >$, al mínimo subespacio proyectivo que los contiene. Como hemos visto en la observación anterior, $< \mathbf{P}(W_1), \ldots, \mathbf{P}(W_s) >= \mathbf{P}(W_1 + \cdots + W_s)$.

(2) Dado un subconjunto S de $\mathbf{P}(V)$, se llama subespacio generado por S y lo denotamos por $< S >$ al mínimo subespacio proyectivo que contiene a S. El subespacio $< S >$ es la intersección de todos los subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(V)$ que contienen a S.

Definición 7.12. *(puntos proyectivamente independientes)* Decimos que $k+1$ puntos $p_0, p_1, \ldots, p_k$ de $\mathbf{P}(V)$ son puntos proyectivamente independientes si el subespacio proyectivo $< p_0, p_1, \ldots, p_k >$ que generan tiene dimensión k.

Proposición 7.13. *Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n.*

(1) *Los puntos $p_0 = [v_0], p_1 = [v_1], \ldots, p_k = [v_k]$ de $\mathbf{P}(V)$ son proyectivamente independientes si y solo si los vectores $v_0, v_1, \ldots, v_k$ de V son linealmente independientes.*

(2) *Dado un número natural k, existen k puntos proyectivamente independientes en $\mathbf{P}(V)$ si y solo si $1 \leq k \leq n+1$.*

Demostración. Ejercicio. □

Como consecuencia de la fórmula de Grassmann para subespacios vectoriales, tenemos la fórmula de Grassmann para subespacios proyectivos:

Proposición 7.14. *(fórmula de Grassmann) Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo y sean $\mathbf{P}(W_1)$ y $\mathbf{P}(W_2)$ dos subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(V)$. Entonces*

$$\dim < \mathbf{P}(W_1), \mathbf{P}(W_2) >= \dim \mathbf{P}(W_1) + \dim \mathbf{P}(W_2) - \dim \left(\mathbf{P}(W_1) \cap \mathbf{P}(W_2)\right).$$

Demostración. Recordemos la fórmula de Grassmann vectorial

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

y que $< \mathbf{P}(W_1), \mathbf{P}(W_2) >= \mathbf{P}(W_1 + W_2)$. Entonces

$$\dim < \mathbf{P}(W_1), \mathbf{P}(W_2) >= \dim \mathbf{P}(W_1 + W_2) = \dim(W_1 + W_2) - 1 = (\dim W_1 - 1) + (\dim W_2 - 1) - (\dim(W_1 \cap W_2) - 1) = \dim \mathbf{P}(W_1) + \dim \mathbf{P}(W_2) - \dim(\mathbf{P}(W_1) \cap \mathbf{P}(W_2)).$$

□

Observación 7.15. La fórmula de Grassmann es otro ejemplo de que los resultados proyectivos son más sencillos y elegantes de enunciar que los resultados afines. En efecto, la versión afín de la fórmula de Grassmann dice lo siguiente:

Sea (A, V, φ) un espacio afín y sean $L_1 = p_1 + W_1$ y $L_2 = p_2 + W_2$ subespacios afines de A (donde $p_1, p_2 \in A$ y W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V). Entonces

(1) *si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, $\dim < L_1, L_2 >= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$, y*

(2) *si* $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, $\dim < L_1, L_2 >= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + 1$.

Como se ve, en el enunciado afín debemos distinguir casos. Puedes consultar la demostración de la versión afín de la fórmula de Grassmann en la proposición IX.4.4 de "Álgebra Lineal y Geometría", de M. Castellet e I. Llerena o en la proposición 1.20 de "Geometría", de S. Xambó. También puedes deducir, como ejercicio, la versión afín de la fórmula de Grassmann a partir de la versión proyectiva, considerando los completados proyectivos de L_1 y L_2 (véase página siguiente).

Corolario 7.16. *Sean* Λ *y* Λ' *dos subespacios proyectivos de dimensiones respectivas* r *y* r' *en un espacio proyectivo de dimensión* n*. Entonces, si* $r + r' \geq n$*, la intersección de* Λ *y* Λ' *tiene dimensión al menos* $r + r' - n$ *(que es mayor o igual que* 0*), por lo que no es vacía. En particular dos rectas de un plano proyectivo siempre se cortan.*

Demostración. Por la fórmula de Grassmann, $\dim(\Lambda \cap \Lambda') = r + r' - \dim < \Lambda, \Lambda' >$. Como la dimensión de $< \Lambda, \Lambda' >$ es menor o igual que n, el resultado se sigue inmediatamente. □

Ecuaciones paramétricas e implícitas

Para hacer cálculos (encontrar la intersección, hallar el subespacio generado...) con subespacios proyectivos de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, podemos dar *ecuaciones implícitas* y *parametrizaciones* de los mismos. En cuanto a las ecuaciones implícitas observamos primero que dar las ecuaciones implícitas de un subespacio W de $\mathbf{k}^{n+1}$ es expresar W como el conjunto de soluciones de un sistema *homogéneo* de ecuaciones lineales. Recordemos que un polinomio F en las variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se dice homogéneo si cada término $cx_0^{k_0}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ ($c \in \mathbf{k}^*$) de F tiene el mismo grado total $k_0 + k_1 + \cdots + k_n$. Por ejemplo $X^2Y - 2XY^2 + 3Y^3$ es homogéneo pero $X^2Y - 2XY^2 + 3Y$ no lo es. No tiene sentido evaluar un polinomio homogéneo (lineal o de grado mayor) en un punto p de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ puesto que en principio va a tomar valores diferentes en cada representante de p. Sin embargo, si el polinomio homogéneo se anula en un representante v de p, *se anula en todos* los representantes de p (porque estos son múltiplos no nulos de v). Por ello, sí tiene sentido hablar de los *ceros* o *soluciones* en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de un polinomio *homogéneo* en $n+1$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Por la misma razón tiene sentido hablar de las soluciones en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales en $n+1$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (los polinomios que aparecen en un sistema homogéneo de ecuaciones lineales son polinomios homogéneos de grado 1). En definitiva, podemos decir que las ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial W de $\mathbf{k}^{n+1}$ son las *ecuaciones implícitas* de $\mathbf{P}(W)$, ya que el conjunto de las soluciones en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de esas ecuaciones implícitas es justamente $\mathbf{P}(W)$. En efecto, si v es un representante de un punto p, v es una solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo si y solo si cualquier otro representante w de p lo es. Por otra parte, es claro que el conjunto de soluciones en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de cualquier sistema de ecuaciones lineales homogéneo en $n+1$ variables es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$.

Por otra parte y argumentando de manera parecida, unas ecuaciones *paramétricas* de W nos proporcionan una *parametrización* de $\mathbf{P}(W)$. Si $\mathbf{P}(W)$ tiene dimensión r, una parametrización de $\mathbf{P}(W)$ se puede ver como una aplicación biyectiva de $\mathbf{P}^r_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}(W)$ con ciertas características, como veremos más adelante (será lo que llamaremos una *aplicación proyectiva* biyectiva o una *proyectividad* de $\mathbf{P}^r_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}(W)$).

Compleción de subespacios afines

Queremos ahora generalizar la construcción, que hicimos en la introducción de este tema, por la cual completábamos una recta afín l de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ para obtener una recta proyectiva $\bar{l}$ en el plano proyectivo $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Dijimos entonces que obteníamos $\bar{l}$ sumergiendo l en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ mediante la inmersión i de (7.4.1) y añadiendo a $i(l)$ el *punto del infinito* de l. Si la dirección de l era $L(v)$ ("viendo" l como una recta del plano afín de ecuación $x_0 = 1$ en $\mathbf{k}^3$), este punto del infinito no era sino $[v]$. Vamos a imitar esto para un subespacio afín arbitrario de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$:

Definición–proposición 7.17. Sea L un subespacio afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, sea W la dirección de L, sea W' la imagen de W en $\mathbf{k}^{n+1}$ por la inmersión

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}^n & \longrightarrow & \mathbf{k}^{n+1} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (0, x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

y sea i la inmersión de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ definida en (7.4.1). El subconjunto $\overline{L} = i(L) \cup \mathbf{P}(W')$ es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$. Además, si

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{7.17.1}$$

son unas ecuaciones implícitas de L, entonces

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.17.2}$$

son unas ecuaciones implícitas de $\overline{L}$. A $\overline{L}$ le llamamos el *completado proyectivo* de L. Al proceso de pasar de (7.17.1) a (7.17.2) lo llamamos *homogeneizar*.

Demostración. Observamos que las soluciones $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ con $x_0 \neq 0$ del sistema (7.17.2) son el conjunto $i(L)$. Por otra parte, como W es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.17.3}$$

las soluciones $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ con $x_0 = 0$ del sistema (7.17.2) son el conjunto $\mathbf{P}(W')$. Por tanto $\overline{L}$ es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y (7.17.2) son unas ecuaciones implícitas suyas. □

Observación 7.18. El hecho de que $\overline{L} = i(L) \cup \mathbf{P}(W')$ podemos interpretarlo como que, para pasar de L a su completado proyectivo, lo que hacemos es añadir los puntos de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ que corresponden a las direcciones de todas las rectas de L.

Ejercicio 7.19. Demuestra que las dimensiones de L y de $\overline{L}$ son iguales.

Ejercicio 7.20. Sea L un subespacio afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y sea $\widetilde{W}$ el subespacio vectorial de $\mathbf{k}^{n+1}$ generado por L. Demuestra que

(1) $\overline{L} = \mathbf{P}(\widetilde{W})$;
(2) $\overline{L}$ es el subespacio proyectivo generado por $i(L)$.

8. Aplicaciones proyectivas. Sistemas de referencia

Aplicaciones proyectivas.

Al igual que hemos hecho en otros casos (espacios afines, espacios afines euclídeos), queremos estudiar ahora las aplicaciones que respeten la estructura que estamos estudiando en este momento, los espacios proyectivos. Como dos espacios proyectivos $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ se construyen a partir de espacios vectoriales V y V' mediante la relación de equivalencia $\sim$ dada en la definición 7.5, podríamos construir las aplicaciones de $\mathbf{P}(V)$ a $\mathbf{P}(V')$ partiendo de aplicaciones adecuadas de V a V'. Necesitaríamos por una parte que estas aplicaciones dieran lugar a aplicaciones *bien definidas* en $\mathbf{P}(V)$. En segundo lugar querríamos que nuestras aplicaciones de $\mathbf{P}(V)$ a $\mathbf{P}(V')$ conservaran "propiedades proyectivas", por ejemplo, que convirtieran subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(V)$ en subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(V')$ o que transformaran puntos alineados de $\mathbf{P}(V)$ en puntos alineados en $\mathbf{P}(V')$. Lo más natural es mirar a las aplicaciones lineales de V a V', que parece que nos permiten dar aplicaciones bien definidas entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$:

Observación 8.1. Sea $\phi : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y V'. Dado $p \in \mathbf{P}(V)$, sean v_1, v_2 vectores no nulos de V tales que $p = [v_1] = [v_2]$. Si $\phi(v_1) \neq \vec{0}_V$ (o lo que es lo mismo, si $\phi(v_2) \neq \vec{0}_V$ (¿por qué?)), $[\phi(v_1)] = [\phi(v_2)] \in \mathbf{P}(V')$.

Demostración. Sabemos que $[v_1] = [v_2]$ equivale a que $v_1 \sim v_2$, y esto quiere decir que existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $v_2 = \lambda v_1$. Como $\phi(v_1)$ y $\phi(v_2)$ son distintos de $\vec{0}_V$, tiene sentido hablar tanto de $[\phi(v_1)]$ como de $[\phi(v_2)]$, que son puntos de $\mathbf{P}(V')$. Como ϕ es una aplicación lineal, tenemos $\phi(v_2) = \lambda\phi(v_1)$, por lo que $\phi(v_1) \sim \phi(v_2)$, es decir, $[\phi(v_1)] = [\phi(v_2)] \in \mathbf{P}(V')$. $\square$

La observación 8.1 sugiere definir, a partir de una aplicación lineal $\phi : V \longrightarrow V'$, una aplicación entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(V) & \longrightarrow & \mathbf{P}(V') \\ [v] & \mapsto & [\phi(v)] \end{array} .$$

Implícito en la observación 8.1 está que *no* podemos esperar que ϕ induzca una aplicación entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$, *bien definida en todos los puntos de* $\mathbf{P}(V)$, puesto que bien pueden existir vectores no nulos $v \in V$, que dan por tanto lugar a puntos $[v]$ de $\mathbf{P}(V)$, tales que $\phi(v) = 0$ (esto pasa si $\ker\phi$ es no trivial, es decir, si ϕ no es inyectiva), con lo cual $[\phi(v)]$ no tendría sentido. Podríamos entonces elegir estudiar solo aquellas aplicaciones entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ inducidas por aplicaciones lineales inyectivas. Sin embargo, no será esto lo que hagamos, ya que en ese caso dejaríamos de estudiar aplicaciones, que aunque no estén definidas en todo $\mathbf{P}(V)$, son interesantes desde un punto de vista geométrico. Lo que haremos será aceptar que ϕ no induce en general una aplicación bien definida en todo $\mathbf{P}(V)$ pero sí en $\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{P}(\ker\phi)$:

Definición 8.2. *(aplicación proyectiva)* Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre $\mathbf{k}$, sean $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ sus proyectivizados, sea ϕ una aplicación lineal no nula de V a V'. La aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{P}(\ker\phi) & \longrightarrow & \mathbf{P}(V') \\ & [v] & \mapsto & [\phi(v)] \end{array}$$

es una aplicación bien definida y diremos que es la *aplicación proyectiva* de $\mathbf{P}(V)$ a $\mathbf{P}(V')$ inducida por ϕ. También la denotaremos como

$$f: \ \mathbf{P}(V) \ \dashrightarrow \ \mathbf{P}(V').$$

Llamaremos a $\mathbf{P}(\ker\phi)$ el *centro* de f.

Observación 8.3. En la definición anterior, como ϕ no es nula, el centro de una aplicación proyectiva es un subespacio proyectivo *propio* de $\mathbf{P}(V)$.

Tal como queríamos, una aplicación proyectiva transforma subespacios proyectivos en subespacios proyectivos y puntos alineados en puntos alineados:

Proposición 8.4. *Sean V y V' dos espacios vectoriales, sea ϕ una aplicación lineal no nula entre V y V' y sea f la aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ inducida por ϕ.*

1. *La imagen de f es $\mathbf{P}(\mathrm{im}\phi)$, que es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V')$.*
2. *Si W es un subespacio vectorial de V, $f(\mathbf{P}(W)) = \mathbf{P}(\phi(W))$.*
3. *La aplicación f transforma puntos alineados no contenidos en el centro de f en puntos alineados.*
4. *La imagen inversa de un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V')$ por f es $\Lambda \setminus \mathbf{P}(\ker\phi)$, donde $\Lambda = \mathbf{P}(\phi^{-1}W')$, que es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)$ (que contiene al centro de f, $\mathbf{P}(\ker\phi)$).*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 8.5. *Sean $\mathbf{P}(V)$, $\mathbf{P}(V')$ y $\mathbf{P}(V'')$ tres espacios proyectivos, sea f una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ y sea g una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V')$ y $\mathbf{P}(V'')$ tal que la imagen de f no está contenida en el centro de g, que llamaremos Λ'. Asimismo, llamaremos Λ al centro de f. Entonces $g \circ f$ es una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V'')$ y su centro es $f^{-1}(\Lambda') \cup \Lambda$. Además, si f viene inducida por una aplicación lineal $\phi : V \longrightarrow V'$ y g viene inducida por una aplicación lineal $\psi : V' \longrightarrow V''$, $g \circ f$ viene inducida por $\psi \circ \phi$.*

Demostración. Ejercicio. □

Corolario 8.6. *Sea f una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ de centro Λ, y sea $L = \mathbf{P}(W)$ un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)$ no contenido en Λ. La restricción de f a L*

$$f|_L : L \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$$

es una aplicación proyectiva de centro $\Lambda \cap L$.

Demostración. La inclusión

$$i : L \longrightarrow \mathbf{P}(V)$$

es una aplicación proyectiva inducida por la inclusión de W en V. La restricción $f|_L$ es igual a la composición $f \circ i$. Como la imagen de i es L y L no está contenido en Λ, el resultado se sigue de la proposición 8.5. Observa además que si f está inducida por una aplicación lineal ϕ, $f|_L$ está inducida por $\phi|_W$. □

Acabamos de ver que una aplicación lineal da lugar a una (única) aplicación proyectiva. Ahora bien, si nos dan una aplicación proyectiva, ¿viene esta inducida por una única aplicación lineal? La respuesta es no, lo cual no es muy sorprendente, tratándose como se trata de la relación entre un concepto proyectivo y otro vectorial (recuerda por ejemplo que un punto del espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ no corresponde a un único vector de V):

Proposición 8.7. *Sean V, V' dos espacios vectoriales y sean ϕ_1 y ϕ_2 dos aplicaciones lineales entre V y V'. En ese caso, ϕ_1 y ϕ_2 inducen la misma aplicación proyectiva f entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $\phi_2 = \lambda\phi_1$*

Demostración. Si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $\phi_1 = \lambda\phi_2$ es claro que ϕ_1 y ϕ_2 inducen la misma aplicación proyectiva. En efecto, $\ker\phi_1 = \ker\phi_2$, por lo que las aplicaciones proyectivas inducidas por ϕ_1 y ϕ_2 tendrían el mismo centro $\Lambda = \mathbf{P}(\ker\phi_1) = \mathbf{P}(\ker\phi_2)$. Por otra parte, dado $[v] \in \mathbf{P}(V) \setminus \Lambda$, $[\phi_2(v)] = [\lambda\phi_1(v)] = [\phi_1(v)]$.

Supongamos ahora que ϕ_1 y ϕ_2 inducen la misma aplicación proyectiva f. Entonces el conjunto donde está definida f es por una parte $\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{P}(\ker\phi_1)$ y por otra parte $\mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{P}(\ker\phi_2)$, por lo que $\mathbf{P}(\ker\phi_1) = \mathbf{P}(\ker\phi_2)$ y $\ker\phi_1 = \ker\phi_2$. Consideramos una base $\{v_1, \ldots, v_l\}$ de $\ker\phi_1 = \ker\phi_2$ que completamos hasta una base $\{v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}, \ldots v_n\}$ de V. Tenemos entonces que $\phi_2(v_1) = \overrightarrow{0}_{V'} = \phi_1(v_1), \ldots, \phi_2(v_l) = \overrightarrow{0}_{V'} = \phi_1(v_l)$ y, como para todo $i = l+1, \ldots, n$ se tiene $[\phi_1(v_i)] = [\phi_2(v_i)]$, existen $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{k}^*$ tales que $\phi_2(v_{l+1}) = \lambda_{l+1}\phi_1(v_{l+1}), \ldots, \phi_2(v_n) = \lambda_n\phi_1(v_n)$. Sea ahora $w = v_{l+1} + \cdots + v_n$. Como $[\phi_1(w)] = [\phi_2(w)]$, existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $\phi_2(w) = \lambda\phi_1(w)$, por lo que

$$\lambda\phi_1(v_{l+1}) + \cdots + \lambda\phi_1(v_n) = \lambda\phi_1(v_{l+1} + \cdots + v_n) =$$
$$\lambda\phi_1(w) = \phi_2(w) = \phi_2(v_{l+1} + \cdots + v_n) = \lambda_{l+1}\phi_1(v_{l+1}) + \cdots + \lambda_n\phi_1(v_n).$$

Como $v_{l+1}, \ldots, v_n$ son los vectores que hemos añadido a la base del núcleo de ϕ_1 para obtener una base de V, $\phi_1(v_{l+1}), \ldots, \phi_1(v_n)$ son vectores linealmente independientes de V' y se tiene que $\lambda = \lambda_i$ para todo $i = l+1, \ldots, n$. Sea ahora v un vector cualquiera de V. En ese caso existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{k}$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, por lo que

$$\phi_2(v) = \alpha_1\phi_2(v_1) + \cdots + \alpha_l\phi_2(v_l) + \alpha_{l+1}\phi_2(v_{l+1}) + \cdots + \alpha_n\phi_2(v_n) = \alpha_{l+1}\lambda\phi_1(v_{l+1}) + \cdots$$
$$+\alpha_n\lambda\phi_1(v_n) = \lambda(\alpha_1\phi_1(v_1) + \cdots + \alpha_l\phi_1(v_l) + \alpha_{l+1}\phi_1(v_{l+1}) + \cdots + \alpha_n\phi_1(v_n)) = \lambda\phi_1(v),$$

es decir, $\phi_2 = \lambda\phi_1$. □

Si recuerdas la estructura de $\mathbf{k}$–espacio vectorial del conjunto de aplicaciones lineales $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, V')$ entre V y V', puedes reinterpretar la proposición 8.7 de forma más conceptual:

Corolario 8.8. *El conjunto de aplicaciones proyectivas de* $\mathbf{P}(V)$ *a* $\mathbf{P}(V')$ *tiene estructura de espacio proyectivo, ya que se le puede identificar con* $\mathbf{P}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, V'))$.

Acabamos esta subsección dando un ejemplo muy importante de aplicaciones proyectivas, las *proyecciones*. Estas aplicaciones justificarían por sí solas nuestra decisión de estudiar aplicaciones proyectivas a las que hemos permitido no estar definidas en todo el espacio proyectivo.

Definición 8.9. *(proyección).* Sean $L_1 = \mathbf{P}(W_1)$ y $L_2 = \mathbf{P}(W_2)$ dos subespacios proyectivos no vacíos de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ sobre $\mathbf{k}$ con las siguientes propiedades:

(a) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$
(b) $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim \mathbf{P}(V) - 1$.

Definimos la *proyección* π *desde* L_1, o *con centro* L_1, sobre L_2 a la aplicación proyectiva inducida por la proyección vectorial de V sobre W_2 con dirección W_1 (los subespacios W_1 y W_2 son complementarios como se ve en el ejercicio siguiente, por eso podemos hablar de proyección vectorial sobre W_2 con dirección W_1). Observa que, de hecho, L_1 es el centro de la aplicación proyectiva π, por lo que π no está definida en todo $\mathbf{P}(V)$).

Ejercicio 8.10. (1) Demuestra que la condición $V = W_1 \oplus W_2$ es equivalente a las condiciones (a) y (b) de la definición de proyección . Demuestra que la condición $V = W_1 \oplus W_2$ es también equivalente a $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $< L_1, L_2 >= \mathbf{P}(V)$ (indicación: usa la fórmula de Grassmann).

(2) Sean L_1 y L_2 subespacios proyectivos que cumplen (1) y (2) de la definición 8.9 y sea $p \in \mathbf{P}(V) \setminus L_1$. Demuestra que la intersección $< L_1, p > \cap L_2$ es no vacía y que consiste en un solo punto p' (indicación: usa la fórmula de Grassmann proyectiva). Demuestra que $\pi(p) = p'$.

Observación 8.11. La definición 8.9 de π es muy algebraica. El ejercicio 8.10, (2) nos da una definición mucho más geométrica de π.

Ejemplo 8.12. En $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ consideramos $L_1 = \{(0:0:0:1)\}$ y L_2 el plano proyectivo de ecuación implícita $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$. La proyección π desde L_1 (o, simplemente, desde el punto $(0:0:0:1)$) sobre L_2 es la aplicación proyectiva

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} & \dashrightarrow & \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} \\ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) & \mapsto & (x_0 : x_1 : x_2 : -x_0 - x_1 - x_2) \end{array}.$$

Proyectividades.

Las aplicaciones proyectivas definidas en todo el espacio proyectivo, es decir, las que tienen centro vacío, vienen con una propiedad añadida:

Proposición 8.13. *Sea $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$ una aplicación proyectiva. Entonces f está definida en todo $\mathbf{P}(V)$ (es decir, tiene centro vacío) si y solo si f es inyectiva.*

Demostración. Sea ϕ una aplicación lineal no nula de V en V' y sea f la aplicación proyectiva inducida por ϕ. Entonces f tiene centro vacío si y solo si $\ker\phi = 0$ y esto es equivalente a que ϕ sea inyectiva.

Veamos ahora que f es inyectiva si y solo si ϕ es inyectiva. Sean $[v_1]$ y $[v_2]$ dos puntos de $\mathbf{P}(V)$. Entonces $f([v_1]) = f([v_2])$ si y solo si $[\phi(v_1)] = [\phi(v_2)]$, es decir, si y solo si $\phi(v_2) = \lambda\phi(v_1)$ para algún $\lambda \in \mathbf{k}^*$, o lo que es lo mismo, si y solo si $\phi(v_2) = \phi(\lambda v_1)$. Por tanto, si ϕ es inyectiva, $v_2 = \lambda v_1$, con lo que $[v_1] = [v_2]$ y f es inyectiva.

Supongamos ahora que ϕ no es inyectiva. Sea w un vector no nulo del núcleo de ϕ, sea v_1 un vector de $V \setminus \ker\phi$ (tal vector v existe porque ϕ no es nula) y sea $v_2 = v_1 + w$. Entonces $[v_1] \neq [v_2]$ pues en caso contrario existiría $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $v_1 + w = \lambda v_1$ o, lo que es lo mismo $w = (\lambda - 1)v_1$, pero como v_1 no está en el núcleo de ϕ y w sí, $\lambda = 1$. En ese caso $v_1 + w = v_1$ por lo que $w = 0$, contradiciendo nuestra elección de w. Por otra parte, como $\phi(w) = 0$, $f([v_1]) = [\phi(v_1)] = [\phi(v_2)] = f([v_2])$, por lo que f no es inyectiva. □

Ya hemos visto que una aplicación proyectiva es inyectiva si y solo si está definida en todo el espacio de partida. Si además de ser inyectiva es biyectiva, diremos que tal aplicación proyectiva es una *proyectividad* o una *homografía*. Las siguientes dos proposiciones caracterizan a las proyectividades entre las aplicaciones proyectivas y nos dicen que sus inversas también son proyectividades. Dejamos las demostraciones como ejercicio.

Proposición 8.14. *Sea $\phi : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales y sea $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$ la aplicación proyectiva inducida por ϕ. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *La aplicación proyectiva f es una proyectividad.*
(b) *La aplicación proyectiva f es sobreyectiva y su centro es vacío.*
(c) *El centro de f es vacío y la dimensión de $\mathbf{P}(V)$ es igual que la dimensión de $\mathbf{P}(V')$.*
(d) *La aplicación lineal ϕ es un isomorfismo entre espacios vectoriales.*

Proposición 8.15. *Sea $f : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ una proyectividad entre espacios proyectivos inducida por un isomorfismo ϕ entre los espacios vectoriales V y V'. La aplicación inversa $f^{-1} : \mathbf{P}(V') \longrightarrow \mathbf{P}(V)$ de f es también una proyectividad y está inducida por el isomorfismo ϕ^{-1}.*

Definición 8.16. Decimos que dos espacios proyectivos son *isomorfos* si existe una proyectividad entre ellos.

Observación 8.17. Es claro (se deduce del resultado análogo para espacios vectoriales y de la proposición 8.14) que dos espacios proyectivos son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión.

Vemos a continuación algunos ejemplos de de proyectividades:

Ejemplo 8.18. La aplicación proyectiva

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} & \dashrightarrow & \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} \\ & (x_0:x_1:x_2:x_3) & \mapsto & (x_0+x_1+x_3 : x_1-x_3 : x_0+x_2 : x_0+x_1) \end{array}$$

es una proyectividad. Para verlo, basta tomar una aplicación lineal ϕ de $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^4$ tal que f sea la aplicación proyectiva inducida por ϕ, por ejemplo,

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ & (x_0,x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (x_0+x_1+x_3, x_1-x_3, x_0+x_2, x_0+x_1), \end{array}$$

y comprobar que ϕ es un isomorfimo.

Ejemplo 8.19. En un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ consideramos un punto p y dos hiperplanos proyectivos H_1 y H_2 que no contienen a p. Sea π la proyección desde p sobre H_2. Entonces la restricción de π a H_1

$$\pi|_{H_1} : H_1 \longrightarrow H_2$$

es una proyectividad entre H_1 y H_2. En efecto, el corolario 8.6 implica que $\pi|_{H_1}$ es una aplicación proyectiva que tiene centro vacío, ya que $p \notin H_1$. Entonces la proposición 8.14 (c) implica que $\pi|_{H_1}$ es una proyectividad.

Puntos fijos de una aplicación proyectiva.

Investigamos ahora los puntos fijos de una aplicación proyectiva de un espacio proyectivo en sí mismo. Es claro que las proyecciones tienen puntos fijos (los puntos del subespacio proyectivo sobre el que se proyecta). En general, dada una aplicación proyectiva f, inducida por una aplicación lineal asociada ϕ, de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ en sí mismo, ¿cómo encontramos sus puntos fijos? Ingenuamente pensaríamos que $[v]$ es un punto fijo de f si y solo si v es un vector fijo de ϕ. Sin embargo, como un punto $[v]$ de $\mathbf{P}(V)$ no está representado por un único vector no nulo $v \in V$ sino que cualquier vector no nulo v' múltiplo de v cumple $[v'] = [v]$, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 8.20. *Sea $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V)$ una aplicación proyectiva inducida por una aplicación lineal $\phi : V \longrightarrow V$.*

1. *Un punto $[v]$ de $\mathbf{P}(V)$ es un punto fijo de f si y solo si v es un vector propio de ϕ de valor propio no nulo.*
2. *Un punto $[v]$ de $\mathbf{P}(V)$ pertenece al centro de f si y solo si v es un vector propio de ϕ de valor propio 0.*

Demostración. Que $[v]$ sea un punto fijo de f es equivalente a que $[\phi(v)] = f([v]) = [v]$ y esto equivale a que exista un $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $\phi(v) = \lambda v$. Esto demuestra (1). Por otra parte, que $[v]$ esté en el centro de f equivale a que $v \in \ker\phi$, es decir, a que $\phi(v) = 0 \cdot v$. □

Así pues, para hallar los puntos fijos de una aplicación proyectiva de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ en sí mismo, inducida por una aplicación lineal ϕ, debemos calcular los valores propios y los vectores propios de ϕ.

Ejemplo 8.21. Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ y sean λ y λ' dos escalares distintos no nulos de $\mathbf{k}$. Sean ϕ_1 y ϕ_2 aplicaciones lineales de V en V cuyas matrices canónicas de Jordan son respectivamente

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda' \end{pmatrix}.$$

Sean f_1 y f_2 las aplicaciones proyectivas de $\mathbf{P}(V)$ en $\mathbf{P}(V)$ (en este caso $\mathbf{P}(V)$ es un plano proyectivo sobre $\mathbf{k}$) inducidas respectivamente por ϕ_1 y ϕ_2. Entonces f_1 y f_2 son proyectividades. El conjunto de puntos fijos de f_1 es una recta proyectiva. El conjunto de puntos fijos de f_2 es una recta proyectiva y un punto fuera de esa recta.

Ejercicio 8.22. Halla todas las configuraciones posibles para el conjunto de puntos fijos de una proyectividad f de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ cuando $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ y cuando $\mathbf{k} = \mathbf{C}$ (indicación: considera todas las matrices canónicas de Jordan que puede tener un automorfismo de $\mathbf{k}^3$).

Sistemas de referencias proyectivos y coordenadas homogéneas.

Al hablar de puntos de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y al hacer cálculos (intersecciones, subespacios proyectivos generados) con subespacios proyectivos de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ usamos, sin mencionarlo de forma muy explícita, coordenadas (*homogéneas*, es decir, determinadas de forma única salvo producto por un escalar no nulo). Esas coordenadas aparecían "inducidas" por las coordenadas (canónicas) de $\mathbf{k}^{n+1}$. Nos interesa ahora ver esas coordenadas homogéneas de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de una forma no ad–hoc sino mucho más conceptual e "intrínsecamente proyectiva". Esto nos permitirá dos cosas. Por una parte nos permitirá usar coordenadas no solo en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ sino en un espacio proyectivo arbitrario $\mathbf{P}(V)$. Así, al igual que hemos hecho para espacios vectoriales y espacios afines, donde el ser capaces de dar coordenadas nos permite dar isomorfismos concretos de un espacio vectorial o afín arbitrario al espacio vectorial o al espacio afín estándar, veremos que el dar coordenadas en un espacio proyectivo arbitrario nos permite dar proyectividades concretas entre dicho espacio proyectivo y el espacio proyectivo estándar. Por otra parte podremos considerar varios sistemas de coordenadas en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ mismo, elegiendo el que más convenga para resolver un problema concreto. Dado un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n, queremos definir algún tipo de sistema de referencia que nos permita asignar $n+1$ coordenadas a cada punto de $\mathbf{P}(V)$. Como las coordenadas ad–hoc con las que hemos trabajado en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ vienen de las coordenadas de $\mathbf{k}^{n+1}$ respecto de la base canónica, parece lógico fijar una base B de V para dar coordenadas (homogéneas) en $\mathbf{P}(V)$. Es claro que estas coordenadas homogéneas estarán determinadas salvo multiplicación por un escalar no nulo. Por otra parte, querríamos describir el sistema de referencia que vamos a usar en términos puramente proyectivos. La primera tentación es, si $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, considerar el conjunto $\{[v_0], [v_1], \ldots, [v_n]\}$. El problema es que si nos dan un conjunto $\{[v_0], [v_1], \ldots, [v_n]\}$ no somos capaces de recuperar la base B, es decir, existen muchas bases $B' = \{v'_0, v'_1, \ldots, v'_n\}$ tales que $\{[v'_0], [v'_1], \ldots, [v'_n]\} = \{[v_0], [v_1], \ldots, [v_n]\}$. Si los vectores de B' se obtuvieran a partir de los de B multiplicando por la misma constante no nula no habría problema, ya que las coordenadas de un mismo vector de V en una y otra base serían proporcionales, que es una cuestión con la que ya contábamos y que de todas formas no íbamos a poder evitar si trabajamos en un espacio proyectivo. El problema es que, aunque los vectores de B' son múltiplos de los de B, no tienen por qué obtenerse de los B multiplicando por la misma constante. Lo vemos mejor en un ejemplo sencillo en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.

Ejemplo 8.23. Consideramos los puntos $p_0 = (1:0:0), p_1 = (0:1:0)$ y $p_2 = (0:0:1)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y el punto $p = (1:1:1)$. ¿Cómo podríamos asignar a p unas coordenadas respecto del conjunto $\{p_0, p_1, p_2\}$? Podríamos tomar un representante de p en $\mathbf{k}^3$, por ejemplo, el vector $v = (1,1,1)$ e, ingenuamente, escribir las coordenadas de v en una base formada por representantes de p_0, p_1 y p_2, por ejemplo, la base canónica $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. En ese caso, las coordenadas de v son $(1,1,1)$ y las coordenadas de p serían $(1:1:1)$. Pero de igual forma, podríamos haber elegido otra base distinta pero también formada por representantes de p_0, p_1 y p_2, por ejemplo, la base $B' = \{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$. En este caso, las coordenadas de v respecto de B' son $(1,1/2,1/3)$ y las coordenadas de p serían $(1:1/2:1/3)$ o, si se quiere, $(3:2:1)$. En cualquier caso, no somos capaces de asignar a p unas coordenadas únicas.

Entonces, en un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n, si tenemos una base $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de V y el conjunto de puntos proyectivamente independientes al que B da lugar, necesitamos algún dato más para poder recuperar B a partir de dichos puntos, aunque no recuperemos B del todo de forma única sino de forma única salvo producto por un escalar $\lambda \neq 0$. Dada una base $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de V, lo que haremos será considerar no $n+1$ puntos, sino $n+2$ puntos, que serán $p_0 = [v_0], p_1 = [v_1], \ldots, p_n = [v_n], p_{n+1} = [v_0 + v_1 + \cdots + v_n]$. Puedes comprobar como ejercicio (consulta el ejercicio 8.26) que estos puntos $p_0, p_1, \cdots, p_{n+1}$ tienen la propiedad de que cualquier subconjunto formado $n+1$ puntos de entre ellos es un conjunto de puntos proyectivamente independientes (o lo que es lo mismo, no están contenidos en un hiperplano de $\mathbf{P}(V)$; ¿ves por qué?). Esta es la propiedad que usaremos en la siguiente proposición:

Proposición 8.24. *Consideramos $n+2$ puntos $p_0, \ldots, p_{n+1}$ de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n, tales que no haya ningún hiperplano de $\mathbf{P}(V)$ que contenga a $n+1$ de ellos. Entonces existe una base $\{v_0, \ldots v_n\}$ de V tal que*

$$p_0 = [v_0], \ldots, p_n = [v_n] \text{ y } p_{n+1} = [v_0 + ... + v_n]. \tag{8.24.1}$$

Además, cualquier otra conjunto de $n+1$ vectores de V que verifique (8.24.1) *es una base de V de la forma $\{\lambda v_0, \ldots, \lambda v_n\}$, para algún $\lambda \in \mathbf{k}^*$.*

Demostración. Sean $w_0, \ldots, w_{n+1} \in V$ tales que $p_0 = [w_0], \ldots, p_{n+1} = [w_{n+1}]$. Como $p_0, \ldots, p_n$ no están en ningún hiperplano de $\mathbf{P}(V)$, $w_0, \ldots, w_n$ no están en ningún hiperplano de V, es decir, son vectores linealmente independientes, por lo que, al ser $n+1$, forman una base de V. Tendremos entonces una relación $w_{n+1} = \lambda_0 w_0 + \cdots + \lambda_n w_n$, donde además $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ son todos no nulos (si fuera $\lambda_i = 0$, entonces los vectores $w_0, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_{n+1}$ serían linealmente dependientes, con lo que estarían contenidos en un hiperplano, luego los puntos $p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_{n+1}$ estarían en un hiperplano, en contra de nuestra hipótesis). Basta tomar entonces $v_0 = \lambda_0 w_0, \ldots, v_n = \lambda_n w_n$.

Supongamos ahora que tenemos $v'_0, \ldots, v'_n \in V$ tales que $p_0 = [v'_0], \ldots, p_n = [v'_n]$ y $p_{n+1} = [v'_0 + \cdots + v'_n]$. Entonces extistirán $\mu_0, \ldots, \mu_{n+1}$ no nulos tales que

$$\begin{array}{ccc} v'_0 & = & \mu_0 v_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v'_n & = & \mu_n v_n \\ v'_0 + \cdots + v'_n & = & \mu_{n+1}(v_0 + \cdots + v_n). \end{array}$$

Sumando las $n+1$ primeras igualdades y sustituyendo en la última, obtenemos

$$\mu_0 v_0 + \cdots + \mu_n v_n = \mu_{n+1} v_0 + \cdots + \mu_{n+1} v_n$$

Como $v_0, \dots, v_n$ forman una base (en particular son linealmente independientes) se tiene $\mu_0 = \cdots = \mu_n = \mu_{n+1}$, que es lo que queríamos demostrar (llamamos λ a $\mu_0 = \cdots = \mu_n = \mu_{n+1}$). □

Definición 8.25. *(referencia proyectiva)* Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n.

(1) Decimos que $n+2$ puntos de $\mathbf{P}(V)$ están en *posición general* si no existe ningún hiperplano de $\mathbf{P}(V)$ que contenga a $n+1$ de ellos.
(2) Decimos que un conjunto $\mathscr{R} = \{p_0, p_1, \dots, p_n; p_{n+1}\}$ es un *sistema de referencia proyectivo* o, simplemente, una *referencia proyectiva* de $\mathbf{P}(V)$ si $p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$ están en posición general. A p_{n+1} lo llamamos *punto unidad* de $\mathscr{R}$.
(3) Dada una referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{p_0, p_1, \dots, p_n; p_{n+1}\}$ de $\mathbf{P}(V)$ decimos que $B = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ es una *base asociada* a $\mathscr{R}$ si $p_0 = [v_0], p_1 = [v_1], \dots, p_n = [v_n]$ y $p_{n+1} = [v_0 + \cdots + v_n + v_{n+1}]$.
(4) Dado un punto $p = [v]$ de $\mathbf{P}(V)$, decimos que $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ son las *coordenadas homogéneas* de p con respecto a una referencia proyectiva $\mathbf{R}$ de $\mathbf{P}(V)$ si $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas de v respecto a una base B asociada a $\mathscr{R}$.

Ejercicio 8.26. Sea $B = \{v_0, \dots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial V de dimensión $n+1$. Demuestra que los puntos $p_0 = [v_0], \dots, p_n = [v_n], p_{n+1} = [v_0 + \cdots + v_n]$ de $\mathbf{P}(V)$ están en posición general. Concluye que $\mathscr{R} = \{p_0, \dots, p_n; p_{n+1}\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ y que B es una base asociada a $\mathscr{R}$.

Observación 8.27. Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n, sea $\mathscr{R}$ una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ y sea p un punto de $\mathbf{P}(V)$.

(1) Sean $v, v' \in V$ tales que $p = [v] = [v']$ y sea B una base asociada a $\mathscr{R}$. Entonces las coordenadas $(x_0, \dots, x_n)$ de v y las coordenadas $(x'_0, \dots, x'_n)$ de v' respecto de B cumplen $(x'_0, \dots, x'_n) = \alpha(x_0, \dots, x_n)$, para algún $\alpha \in \mathbf{k}^*$. Por tanto $(x_0 : \cdots : x_n) = (x'_0 : \cdots : x'_n)$
(2) Sean B y B' dos bases asociadas de $\mathscr{R}$ y sea $p = [v]$. Si $(x_0, \dots, x_n)$ son las coordenadas de v respecto de B y $(y_0, \dots, y_n)$ son las coordenadas de v respecto de B', entonces existe $\beta \in \mathbf{k}^*$ tal que $(y_0, \dots, y_n) = \beta(x_0, \dots, x_n)$. Por tanto, $(x_0 : \cdots : x_n) = (y_0 : \cdots : y_n)$.

Así pues, dada una referencia cartesiana $\mathscr{R}$ de $\mathbf{P}(V)$ y un punto p de $\mathbf{P}(V)$, las coordenadas homogéneas de p respecto $\mathscr{R}$ que aparecen en el apartado (d) de la definición 8.25 están bien definidas.

Damos a continuación algunos ejemplos de referencias proyectivas:

Ejemplo 8.28. *(referencia proyectiva canónica)* La referencia proyectiva canónica de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ es $\mathscr{R}_c = \{(1 : 0 : \cdots : 0), (0 : 1 : 0 : \cdots : 0), \dots, (0 : \cdots : 0 : 1); (1 : 1 : \cdots : 1)\}$. La base canónica de $\mathbf{k}^{n+1}$ es una base asociada a $\mathscr{R}_c$. Las coordenadas homogéneas del punto $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ respecto de $\mathscr{R}$ son $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$.

Ejemplo 8.29. El conjunto $\mathscr{R} = \{(1 : 0), (1 : 1); (1 : -1)\}$ es una referencia de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ y la base $\{(2, 0), (-1, -1)\}$ de $\mathbf{k}^2$ es una base asociada a $\mathscr{R}$.

Observación 8.30. (1) Si cambiamos el punto unidad de una referencia $\mathscr{R}$, la base asociada de la nueva referencia no es en general proporcional a la base asociada de $\mathscr{R}$. Por ejemplo, una base asociada de la referencia $\mathscr{R} = \{(1 : 0 : \cdots : 0), (0 : 1 : 0 : \cdots : 0), \dots, (0 : \cdots : 0 : 1); (1 : 1 : \cdots : -1)\}$ de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ es $\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (0, \dots, 0, -1)\}$ y las coordenadas homogéneas del punto $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ respecto de $\mathscr{R}$ son $(x_0 : \cdots : x_{n-1} : -x_n)$.

(2) Si permutamos los puntos de una referencia proyectiva $\mathscr{R}$, entonces una base asociada a la referencia proyectiva resultante no es en general proporcional a la base asociada de $\mathscr{R}$. Por ejemplo, una base asociada a la referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{(1:1:\cdots:1),(1:0:\cdots:0),\ldots,(0:\cdots:1:0);(0:\cdots:0:1)\}$ es $\{(1,1,\cdots,1),(-1,0,\cdots,0),\ldots,(0,\cdots,0,-1,0)\}$ y las coordenadas homogéneas del punto $(x_0:x_1:\cdots:x_n)$ respecto de $\mathscr{R}$ son $(x_n:-x_0+x_n:\cdots:-x_{n-1}+x_n)$.

Ejemplo 8.31. Sea l la recta proyectiva de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación implícita $x_0 - x_1 + x_2 = 0$ y sea W el subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$ de ecuación implícita $x_0 - x_1 + x_2 = 0$ (por tanto, $l = \mathbf{P}(W)$). En ese caso $\mathscr{R} = \{(1:1:0),(1:0:-1);(0:1:1)\}$ es una referencia proyectiva de l. La base $B = \{(1,1,0),(-1,0,1)\}$ de W es una base asociada a $\mathscr{R}$ y un punto cualquiera $(a-b:a:b)$ de l ($(a,b) \neq (0,0)$) tiene coordenadas homogéneas $(a:b)$ respecto de $\mathscr{R}$.

Como en el caso de un sistema de referencia cartesiano, que nos permite dar un isomorfismo afín entre un espacio afín cualquiera de dimensión n y el espacio afín estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ (véase la proposición 4.2), o en el caso de un sistema de referencia cartesiano rectangular, que nos permite dar una isometría entre un espacio afín euclídeo cualquiera de dimensión n y el espacio afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ (véase la proposición 6.2), un sistema de referencia proyectivo nos permite (aunque, como en los dos casos que acabamos de mencionar, de forma no canónica) dar una proyectividad entre un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ cualquiera de dimensión n y el espacio proyectivo estándar $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ (esto justifica que la mayoría de nuestros ejemplos y ejercicios sean en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$). Lo enunciamos en la siguiente proposición, cuya demostración dejamos como ejercicio:

Proposición 8.32. *Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ y sea $\mathscr{R}$ una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$. Entonces la aplicación $\psi_{\mathscr{R}} : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ que asocia a cada punto p de $\mathbf{P}(V)$ sus coordenadas $(x_0 : \cdots : x_n)$ con respecto a $\mathscr{R}$ es una proyectividad.*

Igual que los isomorfismos afines, que se caracterizan por cómo actúan sobre las referencias cartesianas (véase la proposición 4.11), y las isometrías, que se caracterizan por cómo actúan sobre las referencias cartesianas rectangulares, las proyectividades se caracterizan por cómo actúan sobre las referencias proyectivas:

Proposición 8.33. *Sean $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ dos espacios vectoriales de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ y sea f la aplicación proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ a $\mathbf{P}(V')$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *La aplicación f es una proyectividad.*
(b) *La aplicación f transforma* cualquier *referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{p_0,\ldots,p_n;p_{n+1}\}$ de $\mathbf{P}(V)$ en una referencia proyectiva $\mathscr{R}' = \{f(p_0),\ldots,f(p_n);f(p_{n+1})\}$ de $\mathbf{P}(V')$.*
(c) *La aplicación f transforma* una *referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{p_0,\ldots,p_n;p_{n+1}\}$ de $\mathbf{P}(V)$ en una referencia proyectiva $\mathscr{R}' = \{f(p_0),\ldots,f(p_n);f(p_{n+1})\}$ de $\mathbf{P}(V')$.*

Demostración. Sea ϕ una aplicación lineal de V a V' tal que f es la aplicación proyectiva inducida por ϕ. Vemos (a) implica (b), (b) implica (c) y (c) implica (a).

(a) implica (b): Como f es una proyectividad, ϕ es un isomorfismo por la proposición 8.14. Sea $B = \{v_0,\ldots,v_n\}$ una base asociada a $\mathscr{R}$. Entonces $\phi(B) = \{\phi(v_0),\ldots,\phi(v_n)\}$ es una

base de V' y, por linealidad, $\phi(v_0 + \cdots + v_n) = \phi(v_0) + \cdots + \phi(v_n)$. Como

$$\begin{array}{ccccc} f(p_0) & = & f([v_0]) & = & [\phi(v_0)] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f(p_n) & = & f([v_n]) & = & [\phi(v_n)] \\ f(p_{n+1}) & = & f([v_0 + \cdots + v_n]) & = & [\phi(v_0) + \cdots + \phi(v_n)], \end{array} \tag{8.33.1}$$

el ejercicio 8.26 implica que $\mathscr{R}'$ es una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V')$, siendo $\phi(B)$ una base asociada de $\mathscr{R}'$.

(b) implica (c): trivial.

(c) implica (a): Dada una referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{p_0, \ldots, p_n; p_{n+1}\}$ de $\mathbf{P}(V)$ y una base asociada suya $B = \{v_0, \ldots, v_n\}$, supongamos que $\{f(p_0), \ldots, f(p_n); f(p_{n+1})\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V')$. En ese caso la proposición 8.24 y (8.33.1) implican que $\phi(B)$ es una base de V'. Por tanto ϕ es un isomorfismo entre V y V' y, por la proposición 8.14, f es una proyectividad. □

Igual que en el caso lineal o en el caso afín, las proyectividades son muy rígidas ya que, como veremos a continuación, una proyectividad viene determinada por la imagen de una referencia proyectiva:

Teorema 8.34. *Sean $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ dos espacios proyectivos de dimensión n y sean $\mathscr{R} = \{p_0, \ldots, p_n; p_{n+1}\}$ y $\mathscr{R}' = \{p'_0, \ldots, p'_n; p'_{n+1}\}$ referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$ y de $\mathbf{P}(V')$ respectivamente. Existe una unica proyectividad $f : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ tal que $f(p_i) = p'_i$ para todo $i = 0, \ldots, n+1$.*

Demostración. Existencia: Sean B y B' bases asociadas a $\mathscr{R}$ y a $\mathscr{R}'$ respectivamente y sea ϕ la única aplicación lineal de V a V' tal que $\phi(B) = B'$. Como ϕ transforma una base de V en una base de V', ϕ es un isomorfismo. Consideramos entonces la aplicación proyectiva f inducida por ϕ, que será una proyectividad por la proposición 8.14.

Unicidad: Sean f_1 y f_2 dos proyectividades entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ tales que $f_1(p_i) = p'_i$ y $f_2(p_i) = p'_i$, para todo $i = 0, \ldots, n+1$, y supongamos que f_1 y f_2 vienen inducidas por las aplicaciones lineales ϕ_1 y ϕ_2 de V a V', que son de hecho isomorfimos por la proposición 8.14. Sea B una base asociada a $\mathscr{R}$. De la demostración de la proposición 8.33 se deduce que $\phi_1(B)$ y $\phi_2(B)$ son bases asociadas a $\mathscr{R}'$, por lo que, por la proposición 8.24, los vectores de $\phi_2(B)$ se obtienen de los de $\phi_1(B)$ multiplicando estos últimos por un escalar no nulo λ. De esto se deduce que $\phi_2 = \lambda\phi_1$. Entonces la proposición 8.7 implica que ϕ_1 y ϕ_2 inducen la misma aplicación proyectiva, por lo que $f_1 = f_2$. □

Matriz de una aplicación proyectiva

Como las aplicaciones proyectivas vienen inducidas por aplicaciones lineales y estas pueden expresarse en forma de matriz, es lógico pensar que también las aplicaciones proyectivas se podrán expresar por medio de una matriz.

Definición 8.35. *(matriz de una aplicación proyectiva).* Sean $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ dos espacios proyectivos de dimensiones n y m respectivamente, sea $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$ una aplicación proyectiva entre ellos, inducida por una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$. Sean $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$ y de $\mathbf{P}(V')$ y sean B y B' bases asociadas a $\mathscr{R}$ y a $\mathscr{R}'$ respectivamente. Entonces decimos que la matriz $M_{B,B'}(\phi)$ de ϕ respecto de B y B' es una matriz de f respecto de $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$.

Observación 8.36. Aunque fijemos $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$, no existe una única matriz de f respecto a $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$. Por una parte f no está inducida por una única aplicación lineal y, por otra

parte, tampoco existe una única base asociada a $\mathscr{R}$ ni una única base asociada a $\mathscr{R}'$. Lo que sí podemos asegurar es que la matriz de f respecto de $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ es única salvo producto por una constante no nula (¡piensa por qué!).

Aun siendo conscientes de esta ambigüedad (a la que ya deberíamos estar acostumbrados cuando relacionamos conceptos proyectivos y conceptos vectoriales), llamaremos con frecuencia a la matriz $M_{B,B'}(\phi)$ "la" matriz de f respecto de $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ y la denotaremos por $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)$. Si f es una aplicación proyectiva de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ en sí mismo y $\mathscr{R}$ es una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$, generalmente escribiremos $M_{\mathscr{R}}(f)$ en vez de $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f)$.

La matriz $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)$ es de tamaño $(m+1)\times(n+1)$ y cumple lo siguiente: Sea $p \in \mathbf{P}(V) \setminus \mathbf{P}(\mathrm{Ker}(\phi))$ y sean $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ las coordenadas de p respecto de $\mathscr{R}$. Si

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

entonces $(x'_0 : x'_1 : \cdots : x'_m)$ son las coordenadas de $f(p)$ respecto de $\mathscr{R}'$.

Proposición 8.37. *Sea $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$ una aplicación proyectiva entre dos espacios proyectivos $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ de la misma dimensión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La aplicación f es una proyectividad.*
2. *La matriz de f respecto a un par de referencias proyectivas es invertible.*
3. *La matriz de f respecto a cualquier par de referencias proyectivas es invertible.*

Demostración. Ejercicio. □

Definición 8.38. *(matriz de cambio de referencia proyectiva).* Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n y sean $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ dos referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$. La matriz de cambio de referencia proyectiva $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}$ entre $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ es la matriz (de tamaño $(n+1)\times(n+1)$) $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}\mathrm{id}$, o lo que es lo mismo, la matriz de cambio de base de B a B', donde B es una base asociada a $\mathscr{R}$ y B' es una base asociada a $\mathscr{R}'$. Como en el caso de la matriz de una aplicación proyectiva, en realidad no existe una única matriz de cambio de referencia proyectiva entre $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$; dicha matriz es única solo salvo producto por un escalar no nulo.

En el siguiente resultado vemos la fórmula que cumple la matriz de una composición de aplicaciones proyectivas (observa que la fórmula es la misma que la que cumple una composición de aplicaciones lineales o de aplicaciones afines (véase la proposición 4.17)):

Proposición 8.39. *Sean $\mathbf{P}(V)$, $\mathbf{P}(V')$ y $\mathbf{P}(V'')$ tres espacios proyectivos y sean $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}'$ y $\mathscr{R}''$ referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$, $\mathbf{P}(V')$ y $\mathbf{P}(V'')$ respectivamente. Sea f una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ y sea g una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V')$ y $\mathbf{P}(V'')$ tal que la imagen de f no está contenida en el centro de g. Entonces el producto de matrices*

$$M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}''}(g)\cdot M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)$$

es una matriz $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}''}(g\circ f)$ de la aplicación $g\circ f$ respecto de las referencias proyectivas $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}''$.

Demostración. Sean B, B' y B'' bases de V, V' y V'' respectivamente, asociadas a $\mathscr{R}, \mathscr{R}'$ y $\mathscr{R}''$. Si f y g vienen inducidas por las aplicaciones lineales ϕ y ψ respectivamente, la proposición 8.5 nos dice que $g \circ f$ viene inducida por $\psi \circ \phi$, por lo que $M_{B,B''}(\psi \circ \phi)$ es una matriz de $g \circ f$ respecto de las referencias $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}''$. Asimismo $M_{B,B'}(\phi)$ es una matriz de f respecto de las referencias $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ y $M_{B',B''}(\psi)$ es una matriz de g respecto de las referencias $\mathscr{R}'$ y $\mathscr{R}''$. Como

$$M_{B,B''}(\psi \circ \phi) = M_{B',B''}(\psi) \cdot M_{B,B'}(\phi),$$

tenemos el resultado. □

Corolario 8.40. *Sean $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ dos espacios proyectivos.*

(1) *Supongamos que $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ tienen la misma dimensión y sean $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ respectivamente. Sea $f : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ una proyectividad. Entonces la matriz $M_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f)^{-1}$ es una matriz de f^{-1} respecto de las referencias $\mathscr{R}'$ y $\mathscr{R}$.*

(2) *Sea $f : \mathbf{P}(V) \dashrightarrow \mathbf{P}(V')$ una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$, sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$ y sean $\mathscr{R}'_1$ y $\mathscr{R}'_2$ dos referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V')$. Entonces el producto de matrices*

$$M_{\mathscr{R}'_1,\mathscr{R}'_2} \cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}'_1}(f) \cdot M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}$$

es una matriz $M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}'_2}(f)$ de la aplicación f respecto de $\mathscr{R}_2$ y $\mathscr{R}'_2$.

(3) *Sean $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ y $\mathscr{R}_3$ tres referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$. Entonces el producto de matrices*

$$M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_3} \cdot M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}$$

es una matriz $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_3}$ de cambio de la referencia $\mathscr{R}_1$ a la referencia $\mathscr{R}_3$.

(4) *Sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V)$. Entonces $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}$ es una matriz invertible y $M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2} = M^{-1}_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}$.*

Demostración. El resultado se obtiene de la proposición 8.39 razonando de manera análoga a la demostración del corolario 4.18. □

Terminamos esta subsección viendo algunos ejemplos de matrices de aplicaciones proyectivas y de cambio de referencia.

Ejemplo 8.41. La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de la proyectividad f del ejemplo 8.18 respecto de la referencia proyectiva canónica de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$. Asimismo, para todo $\lambda \in \mathbf{R}^*$, cada matriz

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es también una matriz de la proyectividad f del ejemplo 8.18 respecto de la referencia proyectiva canónica de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$.

Ejercicio 8.42. Sean $L_1 = \mathbf{P}(W_1)$ y $L_2 = \mathbf{P}(W_2)$ dos subespacios proyectivos, el segundo de ellos de dimensión l_2, de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ sobre un cuerpo $\mathbf{k}$, que cumplen las condiciones (1) y (2) de la definición 8.9. Sea π la proyección desde L_1 sobre L_2. Demuestra que existe una referencia proyectiva $\mathscr{R}$ de $\mathbf{P}(V)$ tal que las matrices de f respecto de $\mathscr{R}$ tienen todos los elementos nulos, excepto los $l_2 + 1$ primeros elementos de la diagonal, que son iguales a un mismo escalar no nulo de $\mathbf{k}$ (indicación: considera una base B de V formada por una base de W_2 y una base de W_1 y una referencia $\mathscr{R}$ de $\mathbf{P}(V)$ que tenga a B como base asociada).

Ejemplo 8.43. Sea π la proyección del ejemplo 8.12. Para cada número real λ no nulo, la matriz

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de π respecto de la referencia canónica $\mathscr{R}_c$ de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$. Para cada número real λ no nulo, la matriz

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de π respecto de la referencia $\mathscr{R} = \{(1:-1:0:0), (1:0:-1:0), (1:0:0:-1), (0:0:0:1); (1:-1:1:0)\}$ de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ (la referencia $\mathscr{R}$ tiene a $B = \{(1,-1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,-1), (0,0,0,1)\}$ como una base asociada).

Ejemplo 8.44. Sea $\mathscr{R}$ la referencia proyectiva de la observación 8.30, (2). Para cada $\lambda \in \mathbf{k}^*$, la matriz

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de cambio de $\mathscr{R}$ a la referencia canónica.

Compleción de una aplicación afín.

Recordemos que una forma de entender el espacio proyectivo $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ es como el completado del espacio afín $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, añadiendo a $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ sus puntos del infinito para obtener $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$. Esto nos da una forma (no única) de sumergir $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, mediante

$$i_n : \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$$

(véase (7.4.1)). Igual que, dado un subespacio afín L de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, lo hemos completado en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ obteniendo un subespacio proyectivo $\overline{L}$ (al que hemos llamado completado proyectivo de L), veremos ahora que también se puede completar una aplicación afín f entre $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ a una aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$. Nuestro objetivo es encontrar una aplicación proyectiva $\overline{f}$ entre $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$ que "extienda" a f, es decir, que haga el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}} & \xrightarrow{f} & \mathbf{A}^m_{\mathbf{k}} \\ \downarrow{\scriptstyle i_n} & & \downarrow{\scriptstyle i_m} \\ \mathbf{P}^n_{\mathbf{k}} & \overset{\overline{f}}{\dashrightarrow} & \mathbf{P}^m_{\mathbf{k}} \end{array} \tag{8.44.1}$$

conmutativo, o sea, que cumpla $\overline{f} \circ i_n = i_m \circ f$. Dicho de otra forma, queremos que la restricción $\overline{f}$ a los puntos "afines" de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ (los que vienen de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$) coincida con f.

Proposición 8.45. *Sea f una aplicación afín entre $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ y sea*

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & M \end{pmatrix}$$

la matriz de f respecto de las referencias canónicas de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ (véase (4.13.1)*; en particular, M es la matriz de $\vec{f}$ respecto de las bases canónicas de $\mathbf{k}^n$ y $\mathbf{k}^m$). Sea $\overline{f}$ la aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$ que tiene a la matriz N como una matriz asociada respecto de las referencias proyectivas canónicas de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$. Entonces $\overline{f}$ es la única aplicación proyectiva entre $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$ que hace conmutativo el diagrama* (8.44.1)*.*

Demostración. Vemos que $\overline{f}$ hace conmutativo el diagrama (8.44.1). Para eso basta ver que dado $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$ implica $\overline{f}(1 : x_1 : \cdots : x_n) = (1 : y_1 : \cdots : y_m)$. Esto se sigue trivialmente de las observaciones 4.13 y 8.36.

Veamos ahora que $\overline{f}$ es la única aplicación proyectiva que hace conmutativo el diagrama (8.44.1). Sea $\overline{g}$ otra aplicación proyectiva que haga conmutativo el diagrama (8.44.1) y supongamos que $\overline{f}$ y $\overline{g}$ vienen inducidas respectivamente por aplicaciones lineales ϕ y ψ entre $\mathbf{k}^{n+1}$ y $\mathbf{k}^{m+1}$. Supongamos primero que f es constante y que su imagen es un punto p. En ese caso es fácil ver que tanto la imagen de $\overline{f}$ como la imagen de $\overline{g}$ es $i_m(p)$ y que tanto el centro de $\overline{f}$ como el centro de $\overline{g}$ es el hiperplano del infinito, por lo que $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son la misma aplicación proyectiva.

Supongamos ahora que f no es constante. Vamos a ver que $\psi = \lambda\phi$ para algún $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Primero veremos que esto es cierto para la restricción de ϕ y ψ al conjunto de los vectores de $\mathbf{k}^{n+1}$ que son representantes de puntos de $i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})$. Sea $v \in \mathbf{k}^{n+1}$ tal que $[v] = i_n(p) \in i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})$. Como $\overline{f}(i_n(p)) = i_m(f(p)) = \overline{g}(i_n(p))$, existe $\lambda_v \in \mathbf{k}^*$ tal que $\psi(v) = \lambda_v\phi(v)$. Queremos comprobar que λ_v es el mismo para todo v. Si w es múltiplo de v, $\lambda_w = \lambda_v$ por linealidad.

Sean ahora $p, q \in \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, $p \neq q$ tales que $f(p) \neq f(q)$ y sea r un punto de la recta $< p, q >$, distinto de p y q. Sean $v, w \in \mathbf{k}^{n+1}$ tales que $i_n(p) = [v]$, $i_n(q) = [w]$ e $i_n(r) = [v + w]$ (es decir, $\{v, w\}$ es una base asociada a la referencia proyectiva $\{i_n(p), i_n(q); i_n(r)\}$ de la recta proyectiva que se obtiene al completar la recta afín $< p, q >$). Veamos que $\lambda_v = \lambda_w$. Tenemos

$$\lambda_{v+w}\phi(v) + \lambda_{v+w}\phi(w) = \lambda_{v+w}\phi(v + w) = \psi(v + w) = \psi(v) + \psi(w) = \lambda_v\phi(v) + \lambda_w\phi(w).$$

Como $f(p) \neq f(q)$, $\psi(v)$ y $\psi(w)$ son linealmente independientes por lo que $\lambda_v = \lambda_{v+w} = \lambda_w$. Además, por linealidad, si v', w' son tales que $p = [v']$ y $q = [w']$, entonces $\lambda_{v'} = \lambda_{w'}$.

Sean ahora $p, q \in \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, $p \neq q$ con $f(p) = f(q)$ y sea $r \in \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ tal que $f(p) \neq f(r)$ (tal r existe porque f no es constante). Sean $v, w, u \in \mathbf{k}^{n+1}$ tales que $i_n(p) = [v], i_n(q) = [w], i_n(r) = [u]$. Entonces, por el párrafo anterior, $\lambda_v = \lambda_u$ y $\lambda_w = \lambda_u$, por lo que $\lambda_v = \lambda_w$.

Por tanto, hemos visto que para cualquier pareja de vectores v, w de $\mathbf{k}^{n+1}$, representantes de puntos de $i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})$, existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $\psi(v) = \lambda\phi(v)$ y $\psi(w) = \lambda\phi(w)$. Como entre los representantes de puntos de $i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})$ podemos elegir una base de $\mathbf{k}^{n+1}$, por ejemplo $v_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $v_1 = (1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, v_{n-1} = (1, 0, \ldots, 1, 0)$, $v_n = (1, 0, \ldots, 0, 1)$ y ψ y $\lambda\phi$ toman los mismos valores en $\{v_0, \ldots, v_n\}$, ψ y $\lambda\phi$ son iguales como aplicaciones lineales entre $\mathbf{k}^{n+1}$ y $\mathbf{k}^{m+1}$, por lo que $\overline{f} = \overline{g}$. □

Definición 8.46. Llamamos a $\overline{f}$ el *completado proyectivo* de f.

La forma de obtener $\overline{f}$ a partir de la matriz de f es más bien algebraica, por lo que nos gustaría entender el significado geométrico de la extensión de f a $\overline{f}$:

Proposición 8.47. *Sea $f : \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ una aplicación afín y sea $\overline{f} : \mathbf{P}^n_{\mathbf{k}} \dashrightarrow \mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$ su completado proyectivo. Sea $v = (x_1, \ldots, x_n)$ un vector de $\mathbf{k}^n$ y sea $p = (0 : x_1 : \cdots : x_n)$.*

1. *Si v no pertenece al núcleo de $\vec{f}$, entonces $\overline{f}(p) = [\tilde{w}]$, donde $\vec{f}(v) = w = (y_1, \ldots, y_m)$ y $\tilde{w} = (0, y_1, \ldots, y_m)$.*
2. *Si v pertenece al núcleo de $\vec{f}$, entonces p está en el centro de $\overline{f}$.*

Demostración. La proposición se sigue de (4.12.1) y de la proposición 8.45. □

¿Cuál es el significado geométrico de la proposición 8.47? Para conocer la imagen de $\overline{f}$ en cada punto de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ tenemos que tratar con dos tipos de puntos: aquellos que provienen de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ (es decir, los de $i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})$) y aquellos que pertenecen al hiperplano del infinito H_∞. En cuanto a los primeros, ya sabemos por la proposición 8.45 que (identificando $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ con $i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})$ mediante i_n) $\overline{f}$ coincide con f en $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ (por eso $\overline{f}$ es una "extensión" de f). Lo que nos dice la proposición 8.47 es que el valor de $\overline{f}$ en los puntos del hiperplano del infinito viene dictado por $\vec{f}$. En efecto, si $(0 : x_1 : \cdots : x_n)$ es un punto del infinito y $\vec{f}((x_1, \ldots, x_n)) = (y_1, \ldots, y_m)$, entonces $\overline{f}((0 : x_1 : \cdots : x_n)) = (0 : y_1 : \cdots : y_m)$. Es decir, geométricamente, la restricción de $\overline{f}$ al hiperplano del infinito describe la forma en que $\vec{f}$ transforma las direcciones de $\mathbf{k}^{n+1}$.

Corolario 8.48. Sea H^n_∞ el hiperplano del infinito de (la inmersión i_n de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en) $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y sea H^m_∞ el hiperplano del infinito de (la inmersión i_m de $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ en) $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$. Sea f una aplicación afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ y sea $\overline{f}$ el completado proyectivo de f. Entonces

1. Una aplicación proyectiva $\overline{g}$ es el completado proyectivo de una aplicación afín si y solo si
   (i) el centro de $\overline{g}$ está contenido en H^n_∞;
   (ii) $\overline{g}(i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})) \subset i_m(\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}})$; y
   (iii) $\overline{g}(H^n_\infty) \subset H^m_\infty$.
2. Si f es una aplicación afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, $\overline{f}$ es una proyectividad si y solo si f es un isomorfismo afín.

Demostración. Veamos que si $\overline{g}$ es el completado proyectivo de una aplicación afín, entonces se cumplen (i), (ii) y (iii). La propiedad (i) se sigue de que $\overline{g}$ está definida en $i_n(\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}})$. Por otra parte (ii) se sigue de la proposición 8.45 y (iii) de la proposición 8.47.

Demostramos ahora la otra implicación de (1). Sea $\overline{g}$ una aplicación proyectiva que cumple (i), (ii) y (iii). En ese caso la imagen de $(1 : 0 : \cdots : 0)$ por $\overline{g}$ está bien definida y pertenece a $i_m(\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}})$ por lo que el primer coeficiente de la primera fila de una matriz N de $\overline{g}$ respecto de las referencias canónicas de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$ es no nulo. Por otra parte, la imagen por $\overline{g}$ de cada uno de los puntos $(0 : 1 : 0 : \cdots : 0), \ldots, (0 : 0 : \cdots : 0 : 1)$ o bien no está definida (porque alguno de esos puntos puede estar en el centro de $\overline{g}$), o bien pertenece a H^m_∞. En cualquiera de los casos eso implica que el resto de los coeficientes de la primera fila de N han de ser nulos. De aquí se deduce que, multiplicando N por una constante no nula si es necesario, $\overline{g}$ tiene una matriz con respecto de las referencias canónicas de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$ como la matriz de la observación 4.13. Entonces la proposición 8.45 implica que $\overline{g}$ es el completado proyectivo de una aplicación afín.

Por último (2) es consecuencia del corolario 4.18 y de las proposiciones 8.37 y 8.45. □

Observación 8.49. Aunque hemos escrito la matriz de f respecto de las referencias cartesianas canónicas y la de $\overline{f}$ respecto de las referencias proyectivas canónicas, podemos llevar a cabo los mismos argumentos para un par de referencias cartesianas cualesquiera $\mathscr{R} = \{o; v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathscr{R}' = \{o'; v'_1, \ldots, v'_m\}$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ respectivamente y para sus referencias proyectivas "asociadas", $\overline{\mathscr{R}}$ y $\overline{\mathscr{R}'}$, donde $\overline{\mathscr{R}}$ es la referencia proyectiva que tiene a la base $\{\tilde{o}; \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$ como base asociada y $\overline{\mathscr{R}'}$ es la referencia proyectiva que tiene a la base $\{\tilde{o'}; \tilde{v}'_1, \ldots, \tilde{v}'_n\}$ como base asociada (si $o = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces definimos $\tilde{o}$ como $(1, x_1, \ldots, x_n)$; si $v_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, entonces definimos $\tilde{v}_i$ como $(0, x_{i1}, \ldots, x_{in})$; $\tilde{o'}$ y $\tilde{v}'_j$ se definen a partir de o' y v'_j de manera análoga).

A continuación vemos varios ejemplos de completados de aplicaciones afines:

Ejemplo 8.50. *(traslaciones)* Sea t_v una traslación de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ de vector $v \neq \vec{0}$. El completado $\overline{t}_v$ de t_v es una proyectividad cuyo conjunto de puntos fijos es el hiperplano del infinito de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$. Como la matriz de t_v respecto de una referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{p; v, v_2, \ldots, v_n\}$ es

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.50.1}$$

existen referencias proyectivas de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, por ejemplo $\overline{\mathscr{R}}$, respecto de las cuales $\overline{t}_v$ tiene a N como matriz asociada.

Ejemplo 8.51. *(homotecias)* Sea h una homotecia de centro o y razón $\lambda \neq 0, 1$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$. El completado $\overline{h}$ de h es una proyectividad cuyo conjunto de puntos fijos es la unión del hiperplano del infinito de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y el punto $i(o)$. Como la matriz de h respecto de una referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{o; B\}$ (donde B es una base cualquiera de $\mathbf{k}^n$) es

$$N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

existen referencias proyectivas de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, por ejemplo $\overline{\mathscr{R}}$, respecto de las cuales $\overline{h}$ tiene a N' como matriz asociada.

Hemos visto que tanto el completado proyectivo de una traslación como el completado proyectivo de una homotecia tienen un hiperplano de puntos fijos (la compleción de la traslación no tiene más puntos fijos y la compleción de la homotecia tiene un punto fijo más). Esto nos motiva a dar la siguiente definición:

Definición 8.52. Sea g una proyectividad de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n en sí mismo, distinta de la identidad. Decimos que g es una *homología* si g tiene un hiperplano de puntos fijos.

Proposición 8.53. *Sea g una* homología *de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$. Entonces el conjunto de puntos fijos de g es*

(1) *un hiperplano de $\mathbf{P}(V)$; o*
(2) *la unión de un hiperplano de $\mathbf{P}(V)$ y otro punto fuera de ese hiperplano.*

En el primer caso, existe una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ *respecto de la cual la matriz de* g *es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.53.1}$$

En el segundo caso, existe una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ *respecto de la cual la matriz de* g *es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{8.53.2}$$

para algún $\lambda \in \mathbf{k}$*,* $\lambda \neq 0, 1$*.*

Demostración. Sea ψ un automorfismo de V tal que g viene inducido por él. Según la proposición 8.20, existe un hiperplano vectorial W de V formado por vectores propios de ψ, por lo que ψ tiene un valor propio λ no nulo (porque ψ es un isomorfismo) de multiplicidad algebraica como mínimo n. Distinguimos dos casos: que la multiplicidad algebraica de λ sea $n+1$ o que sea n.

En el primer caso la multiplicidad geométrica de λ ha de ser n porque de otra forma ψ sería $\lambda \cdot \mathrm{id}_V$ y g sería la identidad. Por tanto la forma canónica de Jordan de $\lambda^{-1} \cdot \psi$ es (8.53.1). Por tanto, existe una base $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de V respecto de la cual la matriz de $\lambda^{-1} \cdot \psi$ es (8.53.1) y $W = L(v_1, \ldots, v_n)$ es el conjunto de todos los vectores propios de ψ. De ello se sigue que si $\mathscr{R}$ es una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ que tiene a B como base asociada, la matriz de g respecto de $\mathscr{R}$ es (8.53.1) y $\mathbf{P}(W)$ es el conjunto de puntos fijos de g.

En el segundo caso el polinomio característico de ψ es $c(t-\lambda)^n(t-\lambda')$, donde $c, \lambda \in \mathbf{k}^*$, $\lambda' \neq \lambda$. En ese caso la forma canónica de Jordan de $\psi' = \lambda'^{-1} \cdot \psi$ es, después de renombrar λ/λ' como λ, la matriz (8.53.2). Por tanto, existe una base $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de V respecto de la cual la matriz de ψ' es (8.53.2) y el conjunto de vectores propios de ψ es $L(v_0) \cup W$ (y $W = L(v_1, \ldots, v_n)$). De ello se sigue que si $\mathscr{R}$ es una referencia proyectiva de $\mathbf{P}(V)$ que tiene a B como base asociada, la matriz de g respecto de $\mathscr{R}$ es (8.53.2) y el conjunto de puntos fijos de g es $\mathbf{P}(W) \cup [v_0]$. □

Continuamos ahora la definición 8.52.

Definición 8.54. Sea g una homología de $\mathbf{P}(V)$.

(1) Si g es como en (1) de la proposición 8.53 decimos que g es una *homología especial*. Si H es el hiperplano de puntos fijos de g decimos que H es el *eje* de g. Si v_1 es el segundo vector de la base B que aparece en la demostración de la proposición 8.53, decimos que $[v_1]$ es el *centro* de g. A las homologías especiales también se las denomina *elaciones*.
(2) Si g es como en (2) de la proposición 8.53 decimos que g es una *homología general*. Si el conjunto de puntos fijos de g es $H \cup \{p_0\}$, donde H es un hiperplano y p_0 es

un punto fuera de H, decimos que H es el *eje* de g y que p_0 es el *centro* de g. Si λ es el escalar que aparece en (8.53.2), decimos que λ es la *razón* de g.

Observación 8.55. ¡Cuidado! El centro de una homología tal como se ha definido en la definición 8.54 no tiene nada que ver con el centro de una aplicación proyectiva, tal como se definió en la definición 8.2. De hecho, una homología es una proyectividad, por lo que, vista como aplicación proyectiva, tiene centro vacío.

Observación 8.56. La forma en que hemos descrito las homologías en la demostración de la proposición 8.53 es bastante algebraica, pero existe una descripción más geométrica y sintética que puedes encontrar en el teorema 8.13 de los "Apuntes de Geometría Proyectiva" de E. Arrondo (aunque tendrás que esperar a la siguiente sección para poder entenderla pues usa el concepto de *razón doble*). Esta descripción incluye una caracterización geométrica tanto del centro de una homología especial (la definición que hemos dado nosotros de centro de una homología especial no solo es algebraica sino que parece bastante ad–hoc) como de la razón de una homología general.

Hemos visto en los ejemplos 8.50 y 8.51 que el completado proyectivo de una traslación es una homología especial mientras que el completado proyectivo de una homotecia es una homología general. Sin embargo, tal como veremos en el ejercicio 8.57, las traslaciones y las homotecias no son los únicos isomorfismos afines de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ cuyo completado proyectivo es una homología; también tienen esta propiedad las transvecciones y las dilataciones con base un hiperplano (para la definición de dilatación y de transvección consulta el ejercicio 3.31 y la definición 3.39).

Ejercicio 8.57. Sea f un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en sí mismo y sea $\overline{f}$ su completado proyectivo.

(1) Demuestra que $\overline{f}$ es una homología especial si y solo si f es una traslación o una transvección.
(2) Demuestra que si f es una traslación de vector v entonces el eje de $\overline{f}$ es el hiperplano del infinito y el centro de $\overline{f}$ es $[\tilde{v}]$ (donde, si $v = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces $\tilde{v} = (0, x_1, \ldots, x_n)$).
(3) Demuestra que si f es una transvección de eje L y v es el vector del apartado (3) del ejercicio 4.26 entonces el eje de $\overline{f}$ es $\overline{L}$ y el centro de $\overline{f}$ es $[\tilde{v}]$ ($\tilde{v}$ se define como en el apartado (2)).
(4) Demuestra que $\overline{f}$ es una homología general si y solo si f es una homotecia o una dilatación con base un hiperplano.
(5) Demuestra que si f es una homotecia de centro o y razón λ entonces el eje de $\overline{f}$ es el hiperplano del infinito, el centro de $\overline{f}$ es $i(o)$ y la razón de $\overline{f}$ es λ.
(6) Demuestra que si f es una dilatación de base un hiperplano afín L, dirección $L(v)$ y razón μ entonces el eje de $\overline{f}$ es $\overline{L}$, el centro de $\overline{f}$ es $[\tilde{v}]$ (donde $\tilde{v}$ se define como en el apartado (2)) y la razón de $\overline{f}$ es μ^{-1}.

Observación 8.58. La proposicion 8.53 nos dice entre otras cosas que si elegimos para cada homología especial g una referencia proyectiva adecuada, la matriz de g respecto a esa referencia será la que aparece en (8.53.1). Esto quiere decir que dos homologías especiales son *indistinguibles* desde el punto de vista proyectivo. Sin embargo el completado proyectivo de una traslación y de una transvección (que son isomorfismos afines cualitativamente muy distintos, ya que el primero no tiene puntos fijos y el segundo tiene un hiperplano de puntos fijos) es en ambos casos una homología especial. ¿Cómo es esto posible? La razón es la siguiente. Si f_1 es una traslación, existe una referencia cartesiana

$\mathscr{R}_1$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ respecto de la cual la matriz de f_1 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.58.1}$$

Por otro lado, si f_2 es una transvección, existe una referencia cartesiana $\mathscr{R}_2$ de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ respecto de la cual la matriz de f_2 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.58.2}$$

Entonces la matriz de $\overline{f_1}$ respecto de la referencia proyectiva $\overline{\mathscr{R}_1}$ de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ es (8.58.1) y la matriz de $\overline{f_2}$ respecto de la referencia proyectiva $\overline{\mathscr{R}_2}$ de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ es (8.58.2). Es posible pasar de (8.58.1) a (8.58.2) mediante un cambio de coordenadas homogéneas, por ejemplo, mediante el cambio entre las referencias proyectivas $\overline{\mathscr{R}_1}$ y $\overline{\mathscr{R}_2}$. Sin embargo, después de dicho cambio, el hiperplano del infinito, que tenía ecuación $x_0 = 0$, ya no tiene ecuación $x'_0 = 0$. Eso quiere decir que ese cambio de coordenadas homogéneas no es el *completado proyectivo* de ningún cambio de coordenadas cartesianas. En efecto, no existe ningún cambio de referencias cartesianas que transforme la matriz (8.58.1) en la matriz (8.58.2). Sabemos sin embargo por el ejercicio 8.57 que si el completado proyectivo $\overline{f}$ de un isomorfismo afín f es una homología especial, f es necesariamente una traslación o una transvección y que la forma de saber si es una cosa o la otra es el comportamiento de $\overline{f}$ en el hiperplano del infinito: si el hiperplano del infinito es el eje de $\overline{f}$ (es decir, si todos los puntos del plano del infinito son puntos fijos de $\overline{f}$), entonces f es una traslación y si el hiperplano del infinito no es el eje de $\overline{f}$ (es decir, si no todos los puntos del plano del infinito son puntos fijos de $\overline{f}$), entonces f es una transvección. Así pues, completar el espacio afín afín nos hace ver que, aunque desde el punto de vista afín una traslación y una trasvección son isomorfismos afines distintos, si miramos "más allá", vemos que no lo son. Una trasvección tiene un hiperplano de puntos fijos. Una traslación también "tiene" un hiperplano de puntos fijos: el hiperplano del infinito.

De la proposicion 8.53 se deduce también que dos homologías generales de la misma razón son indistinguibles desde el punto de vista proyectivo. Sin embargo el completado proyectivo de una homotecia de razón λ y de una dilatación con base un hiperplano y razón λ^{-1} (que son isomorfismos afines cualitativamente muy distintos, ya que el primero tiene solo un punto fijo y el segundo tiene un hiperplano de puntos fijos) es en ambos casos una homología general de razón λ. Los motivos de esta aparente paradoja son los mismos que explicamos antes en el caso de traslaciones, transvecciones y homologías especiales. Igual que entonces, una dilatación con base un hiperplano tiene un hiperplano de puntos fijos pero "tiene" un punto fijo más en el infinito. Una homotecia tiene un punto fijo "afín" y "tiene" además un hiperplano de puntos fijos: el hiperplano del infinito.

Ejercicio 8.59. Describe el conjunto de puntos fijos y, eligiendo una referencia adecuada, da la matriz más sencilla posible para el completado proyectivo de una dilatación de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ de base no necesariamente un hiperplano.

Terminamos esta subsección viendo cómo son los completados proyectivos de proyecciones y simetrías:

Ejemplo 8.60. *(proyecciones)* Sea π la proyección en $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, sobre un subespacio afín L paralelamente a un subespacio vectorial U de $\mathbf{k}^n$ (recuerda que U y la dirección de L han de ser subespacios vectoriales complementarios). El completado $\overline{\pi}$ de π es la proyección sobre $\overline{L}$ con centro $\mathbf{P}(\widetilde{U})$, donde $\widetilde{U} = \vec{i}_n(U)$ e

$$\begin{array}{rccc} \vec{i}_n: & \mathbf{k}^n & \longrightarrow & \mathbf{k}^{n+1} \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & (0,x_1,\ldots,x_n). \end{array}$$

En particular, los puntos fijos de $\overline{\pi}$ son los puntos de $\overline{L}$. Puedes comprobar todo esto de manera geométrica o escribiendo la matriz de $\overline{\pi}$ respecto de una referencia proyectiva adecuada, tal y como hemos hecho en los ejemplos 8.50 y 8.51.

Observación 8.61. Entendamos el ejemplo 8.60 de una forma más intuitiva. En $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ consideramos una proyección π sobre un plano L, paralelamemte a una recta afín l. Podemos pensar que L es el suelo y las rectas paralelas a l, cuya dirección seguimos al proyectar, son los rayos del sol, que en este modelo afín está infinitamente lejos (por eso sus rayos son paralelos). Es decir, en este caso el sol estaría "fuera" de nuestro modelo. Cuando completamos $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ para obtener $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$, el sol, que estaba fuera del modelo afín, se convierte en un punto de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$ (es uno de los puntos del infinito que hemos añadido), o sea, que ahora el sol está dentro de nuestro modelo proyectivo. De hecho el sol sería el punto del infinito p de la recta l y es el punto desde el cual proyectamos (es el centro de la proyección $\overline{\pi}$). Es decir, que ahora los rayos sí salen desde un punto de nuestro espacio, el punto p de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$.

Ejemplo 8.62. *(simetrías)* Sea σ la simetría en $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$, respecto de un subespacio afín L de dimensión l, paralelamente a un subespacio vectorial U de $\mathbf{k}^n$ de dimensión u (recuerda que U y la dirección de L han de ser subespacios vectoriales complementarios, por lo que $l + u = n$). El conjunto de puntos fijos del completado $\overline{\sigma}$ de σ es $\overline{L} \cup \mathbf{P}(\widetilde{U})$, donde $\widetilde{U} = \vec{i}_n(U)$ e $\vec{i}_n$ se define como en el ejemplo 8.60. Puedes comprobar todo esto de forma geométrica o desmostrando que, respecto de una referencia proyectiva adecuada, la matriz de $\overline{\sigma}$ es una matriz diagonal de orden $n+1$ con $l+1$ unos y u menos unos en la diagonal. La proyectividad $\overline{\sigma}$ es una proyectividad *involutiva*, es decir, cumple $\overline{\sigma}^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}}$. Para las propiedades de las proyectividades involutivas y para una descripción y caracterización geométrica de las mismas, puedes consultar el teorema 8.12 de los "Apuntes de Geometría Proyectiva" de E. Arrondo (aunque para entender el enunciado y leer la demostración de dicho teorema deberás esperar a la siguiente subsección ya que la razón doble juega un papel protagonista en el teorema).

La razón doble.

Igual que en el caso afín el concepto de razón simple nos servía para caracterizar las aplicaciones afines (ya que estas son las aplicaciones que llevan puntos alineados a puntos alineados y conservan la razón simple de las ternas de puntos alineados), en geometría proyectiva existe el concepto de *razón doble* de una *cuaterna* de puntos alineados y las proyectividades se van a caracterizar por llevar puntos alineados a puntos alineados y por conservar la razón doble.

Definición 8.63. *(Razón doble)* Sea (a, b, c, d) una *cuaterna ordenada* de puntos alineados de un espacio proyectivo sobre un cuerpo $\mathbf{k}$, tales que a, b y c son puntos distintos, y sea l la recta que los contiene. Sea f la proyectividad de l a $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ que lleva a a $(0:1)$, b a $(1:0)$ y c a $(1:1)$. Entonces, si $f(d) = (\rho_0 : \rho_1)$, llamamos *razón doble* de a, b, c, d y la denotamos por $[a, b, c, d]$ a $\rho = \rho_1/\rho_0$.

Observación 8.64. La razón doble $[a, b, c, d]$ de cuatro puntos alineados distintos a, b, c, d es un número de $\mathbf{k} \setminus \{0, 1\}$. En efecto, como $d \neq a, b, c$ y f es una biyección, $(\rho_0 : \rho_1) \neq (1:0), (0:1), (1:1)$ por lo que el cociente ρ_1/ρ_0 es un número bien definido de $\mathbf{k}$ y no puede ser ni 0 ni 1. Por otra parte, si $\rho \in \mathbf{k} \setminus \{0, 1\}$, $(\rho : 1) \neq (1:0), (0:1), (1:1)$ y si definimos $d := f^{-1}(1 : \rho)$, es claro que $[a, b, c, d] = \rho$. Por tanto, todo $\rho \in \mathbf{k} \setminus \{0, 1\}$ se realiza como la razón doble de cuatro puntos alineados distintos.

Observación 8.65. Observa que, como a, b, c son puntos distintos, $\mathscr{R} = \{b, a; c\}$ es una referencia proyectiva de l. Entonces, $(\rho_0 : \rho_1)$ son las coordenadas del punto d respecto de $\mathscr{R}$.

Observación 8.66. Podemos definir la razón doble de una cuaterna ordenada (a, b, c, d) de puntos alineados en el caso en que a, b, c sean distintos y d sea igual a a, b o c con el siguiente convenio:

$$[a, b, c, a] = \infty,$$
$$[a, b, c, b] = 0,$$
$$[a, b, c, c] = 1$$

(observa que este convenio es coherente con la definición dada de razón doble de cuatro puntos distintos).

Observación 8.67. La definición 8.63 que hemos dado de razón doble no es unánime. Para algunos la razón doble es ρ_0/ρ_1, es decir, la inversa de la que hemos definidos nosotros. Como ejercicio, comprueba que la definición 8.63 de razón doble coincide con las definiciones de razón doble que puedes encontrar en el capítulo 3 de "Apuntes de geometría proyectiva", de E. Arrondo, en el capítulo V.6 de "Geometry", de M. Audin, o en la definición V.1.1 de "Lecciones de Geometría Proyectiva", de J.M. Rodríguez y J. M. Ruiz (¡pero ten cuidado con la notación de estos textos, que puede ser diferente a la nuestra!). Comprueba que, por el contrario, lo que nosotros hemos definido como razón doble es la inversa de la definida en la definición 3.2.1 de "Nociones de Geometría Proyectiva", de E. Outerelo y J.M. Sánchez.

La propiedad más importante de la razón doble es que es conservada por las proyectividades:

Proposición 8.68. *Sean $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$ dos espacios proyectivos y sea $g : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ una proyectividad. Entonces g*

1. *lleva puntos alineados distintos a puntos alineados distintos y*
2. *conserva la razón doble de cuaternas ordenadas de puntos alineados.*

Demostración. Sabemos que las aplicaciones proyectivas llevan puntos alineados a puntos alineados. Por otra parte, como f es una proyectividad, f es inyectiva y lleva puntos distintos a puntos distintos. Sean ahora a, b, c, d cuatro puntos alineados distintos de $\mathbf{P}(V)$ y sea l la recta de $\mathbf{P}(V)$ que los contiene. Como f es una proyectividad, $l' = f(l)$ es una recta de $\mathbf{P}(V')$. Consideramos la referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{b, a; c\}$ de l. Como $f(a), f(b), f(c)$ son puntos distintos de l', forman una referencia proyectiva $\mathscr{R}' = \{f(b), f(a); f(c)\}$ de l'. Sean ahora $(\rho_0 : \rho_1)$ las coordenadas de d respecto de $\mathscr{R}$. Si

$B = \{v_0, v_1\}$ es una base asociada de $\mathscr{R}$ y $\phi : V \longrightarrow V'$ es un isomorfismo que induce f, $B' = \{\phi(v_0), \phi(v_1)\}$ es una base asociada a $\mathscr{R}'$. Entonces $d = [\rho_0 v_0 + \rho_1 v_1]$ y $f(d) = [\phi(\rho_0 v_0 + \rho_1 v_1)] = [\rho_0 \phi(v_0) + \rho_1 \phi(v_1)]$, por lo que las coordenadas de $f(d)$ respecto de $\mathscr{R}'$ son también $(\rho_0 : \rho_1)$. El resultado se sigue de la observación 8.65. □

Al igual que la razón simple sirve para caracterizar las aplicaciones afines, la razón doble sirve para caracterizar las proyectividades. Así, el recíproco de la proposición 8.68 es cierto y tenemos el siguiente teorema cuya demostración no daremos (puedes encontrarla por ejemplo en el Teorema 7.9, "Apuntes de geometría proyectiva", de E. Arrondo):

Teorema 8.69. *Sea $f : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ una aplicación biyectiva entre dos espacio proyectivos $\mathbf{P}(V)$ y $\mathbf{P}(V')$. Entonces f es una proyectividad si y solo si f lleva puntos alineados a puntos alineados y conserva la razón doble de cuaternas ordenadas de puntos alineados.*

Como en el caso afín, un resultado más fuerte (y sorprendente) es cierto (puedes encontrar una demostración del mismo en "Apuntes de Geometría Proyectiva", de E. Arrondo, teoremas 7.13 y 7.14):

Teorema 8.70. *Sea $f : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ una aplicación entre dos espacios proyectivos* reales *de dimensión mayor que* 1*. Entonces f es una proyectividad si y solo si f transforma biyectivamente rectas en rectas.*

A las aplicaciones entre espacios proyectivos de dimensión mayor que 1 que transforman biyectivamente rectas en rectas las llamaremos *colineaciones*. El teorema 8.70 dice entonces que, para espacios proyectivos reales, los conceptos de proyectividad y colineación son equivalentes. Cuando el cuerpo $\mathbf{k}$ es arbitrario lo que se tiene es que una aplicación entre espacios proyectivos de dimensión mayor que 1 es una colineación si y solo si es una *semiproyectividad*. Una semiproyectividad es una aplicación entre espacios proyectivos inducida por un *semi-isomorfismo* de espacios vectoriales. Un semi-isomorfismo de espacios vectoriales es una aplicación biyectiva *semilineal*. Una aplicación semilineal ϕ entre dos espacios vectoriales V y V' sobre $\mathbf{k}$ es una aplicación que respeta la suma pero que no respeta el producto por escalares sino módulo un automorfismo de $\mathbf{k}$. De forma precisa, ϕ es semilineal si para cualesquiera $v_1, v_2 \in V$, $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$ y existe un automorfismo ϑ de $\mathbf{k}$ tal que, para todo $\lambda \in \mathbf{k}$ y para todo $v \in V$, $\phi(\lambda v) = \vartheta(\lambda) v$. Como $\mathbf{R}$ no tiene más automorfismos que la identidad (consulta "Apuntes de Geometría Proyectiva", de E. Arrondo, teorema 7.14 o "Geometría", de S. Xambó, corolario 1.43), una semiproyectividad entre espacios proyectivos reales de dimensión mayor que 1 es una proyectividad, de ahí la equivalencia enunciada en el teorema 8.70.

Vemos a continuación cómo calcular la razón doble en la práctica:

Proposición 8.71. *Sean a, b, c, d cuatro puntos distintos de una recta proyectiva l y sea $\mathscr{R}$ una referencia proyectiva de l. Si las coordenadas de a, b, c, d respecto de $\mathscr{R}$ son respectivamente $(a_0 : a_1), (b_0 : b_1), (c_0 : c_1), (d_0 : d_1)$, entonces*

$$[a, b, c, d] = \frac{\det \begin{pmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}}.$$

Demostración. Ejercicio. □

La fórmula de la proposición 8.71 nos permite ver fácilmente cómo cambia la razón doble si permutamos los puntos a, b, c, d de una cuaterna ordenada. Por ejemplo, es claro que

$[a,b,c,d] = [b,a,d,c]$ o que $[b,a,c,d]$ es la inversa de $[a,b,c,d]$ (esto también se puede comprobar a partir de la definición). Como ejercicio, puedes demostrar que si $[a,b,c,d] = \rho$, los valores de la razón doble de las permutaciones de a,b,c,d son $\rho, \frac{1}{\rho}, 1-\rho, \frac{1}{1-\rho}, \frac{\rho}{\rho-1}, \frac{\rho-1}{\rho}$.

Vemos ahora el porqué del nombre "razón doble". Como las proyectividades conservan la razón doble y toda recta proyectiva es isomorfa $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$, hacemos nuestro argumento para la razón doble de cuatro puntos de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$. Recordemos que $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}} = \mathbf{P}(\mathbf{k}^2)$. Si imitamos, para $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$, la construcción del plano proyectivo estándar como compleción del plano afín estándar (que sumergíamos en $\mathbf{k}^3$ como el plano de ecuación $x_0 = 1$), es claro que podemos ver $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ como la unión $\{(x_0 : x_1) : x_0 \neq 0\} \cup \{(0:1)\}$. Así pues, identificamos el conjunto $\{(x_0 : x_1) : x_0 \neq 0\}$ de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ como la recta afín $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$, identificando el punto de coordenadas proyectivas $(1:\xi)$ con el punto de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ de coordenada afín ξ. Consideramos entonces $a,b,c,d \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$, puntos distintos de $(0:1)$. Dichos puntos serán de la forma $a = (1:\alpha), b = (1:\beta), c = (1:\gamma), d = (1:\delta)$ y corresponden a los puntos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$. Por la proposición 8.71,

$$[a,b,c,d] = \frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

y esto se puede reescribir como el siguiente cociente de razones simples de puntos de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$:

$$[a,b,c,d] = \frac{(\beta\,\gamma\,\delta)}{(\alpha\,\gamma\,\delta)}.$$

Es decir, $[a,b,c,d]$ es una razón de razones simples, o sea, una razón doble.

Si en argumento anterior consideramos $a = (0:1), b = (1:\beta), c = (1:\gamma), d = (1:\delta)$ (es decir, a sería el punto del infinito de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$), obtenemos que $[a,b,c,d] = (\beta\,\gamma\,\delta)$. Recordemos que β es el punto medio del segmento $\overline{\gamma\delta}$ si y solo si $(\beta\,\gamma\,\delta) = -1$. Por tanto, dados cuatro puntos a,b,c,d en una recta proyectiva l, $[a,b,c,d] = -1$ si a es el punto del infinito y b es el "punto medio" de $\overline{cd}$ (escribimos punto medio entre comillas porque, en geometría proyectiva no tiene sentido hablar de punto medio de un segmento; sí lo tiene cuando fijamos un punto del infinito en l y esto nos permite considerar un segmento de una recta proyectiva como un segmento de una recta afín). Si $[a,b,c,d] = -1$ decimos que (a,b,c,d) es una *cuaterna armónica*.

Hasta ahora hemos visto que, de forma natural, la geometría afín y la geometría proyectiva están relacionadas (compleción de subespacios y aplicaciones afines). Sin embargo, no parece tan claro qué relación puede haber entre los conceptos métricos o euclídeos y los conceptos proyectivos. Pues bien, la razón doble nos permite hacer esta conexión. Primero interpretamos los ángulos en el plano euclídeo en términos de la razón doble de puntos del infinito y después vemos que las semejanzas del plano afín euclídeo se caracterizan por ser aquellos isomorfismos afines cuyos completados proyectivos dejan invariantes los *puntos cíclicos* (definidos en el ejercicio 3 de la lista de ejercicios de Geometría Proyectiva).

Proposición 8.72. *Sea $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ el plano afín euclídeo estándar con la orientación usual. Sean $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ dos vectores de $\mathbf{R}^2$, sean $p_1 = (0 : v_1 : v_2)$ y $p_2 = (0 : w_1 : w_2)$ los puntos del infinito correspondientes a $L(v)$ y $L(w)$ respectivamente y sean $I = (0:1:i)$ y $J = (0:1:-i)$ los puntos cíclicos. Entonces, $[I,J,v,w] = cos2\theta + isen2\theta$, donde θ es el ángulo que va de w a v en el sentido antihorario (es decir, el ángulo orientado entre w y v). En particular, dos rectas afines l_1 y l_2 de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ son perpendiculares si y solo si sus puntos del infinito respectivos p_1 y p_2 cumplen $[I,J,p_1,p_2] = -1$ o, lo que es lo mismo, (I,J,p_1,p_2) son una cuaterna armónica.*

Demostración. Este resultado es la proposición 5.9 de "Apuntes de geometría proyectiva", de E. Arrondo; puedes encontrar una demostración allí. □

Proposición 8.73. *Una isomorfismo afín f del plano afín euclídeo esándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en sí mismo es una semejanza si y solo si el completado proyectivo $\overline{f}$ de f, extendido a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ de la forma natural, deja invariante el conjunto de puntos cíclicos $\{I, J\}$ (es decir, si $\overline{f}\{I, J\} = \{I, J\}$). Además f es directa si y solo si I y J son puntos fijos de $\overline{f}$ e inversa si y solo si $\overline{f}$ intercambia I y J. Por último, una proyectividad g de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ que deje invariante la recta del infinito (de la inmersión i de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$) cuya extensión natural a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ deje invariante el conjunto de puntos fijos $\{I, J\}$ es el completado proyectivo de una isometría de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.*

Demostración. Este resultado es la proposición 5.8 de los "Apuntes de Geometría Proyectiva", de E. Arrondo (ten cuidado con una pequeña discrepancia en la nomenclatura: lo que allí se llama cambio de coordenadas en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ y cambio de coordenadas isométrico es lo que en nuestro enunciado llamamos, respectivamente, proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ e isometría). Puedes encontrar una demostración del resultado en dichos apuntes. □

El significado de la proposición 8.73 es el que exponemos a continuación. Hemos visto y continuaremos viendo (en la próxima sección cuando veamos resultados geométricos clásicos pero, sobre todo, cuando estudiemos cónicas en el tema 3) que podemos hacer geometría afín con herramientas proyectivas, siguiendo este razonamiento tipo:

(1) tomamos un problema afín;
(2) lo "proyectivizamos" (añadiendo los puntos del infinito);
(3) resolvemos el problema proyectivo resultante;
(4) obtenemos de la solución del problema proyectivo la información necesaria para resolver el problema afín original (volvemos al espacio afín quitando los puntos del infinito).

Siguiendo el mismo esquema intentaremos hacer geometría afín euclídea usando herramientas proyectivas. Sin embargo, la proposición 8.73 nos dice que usando herramientas proyectivas podemos hacer geometría afín euclídea solo a medias. En efecto, más que geometría afín euclídea (que es la geometría que conserva las distancias, es decir, las formas y los tamaños), la geometría que propiamente se puede hacer usando razonamientos proyectivos es la geometría *conforme* (es decir, la geometría que conserva las formas, pero no necesariamente los tamaños).

9. Rectas en el plano proyectivo

En este tema vamos a explorar algunos aspectos de la geometría de las rectas de un plano proyectivo. Como ya hemos visto, si tenemos un plano proyectivo arbitrario sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ y fijamos una referencia proyectiva, podemos establecer una biyección, que es de hecho una proyectividad, entre dicho plano proyectivo y el plano proyectivo estándar $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Esto justifica que en este tema trabajemos por simplicidad con rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ principalmente, ya que sabemos que así no perdemos generalidad y capturamos toda la geometría del problema que queremos abordar.

Parametrización de una recta proyectiva

Ejemplo 9.1. Consideramos la recta l de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación $x_0-x_1+x_2=0$ y consideramos la referencia proyectiva $\mathscr{R}=\{(1:1:0),(0:1:1);(1:2:1)\}$ de l (comprueba que en efecto $\mathscr{R}$ es una referencia proyectiva de l). ¿Qué quiere decir que un punto $p=(x_0:x_1:x_2)$ de l tiene coordenadas (homogéneas) $(t_0:t_1)$ con respecto a $\mathscr{R}$? Es decir, ¿qué punto (de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$) es p? El punto p es el punto $(t_0:t_0+t_1:t_1)$ (¡compruébalo!). Recordemos que este proceso de asignar a cada valor $(t_0:t_1)\in\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ el punto de l que tiene a $(t_0:t_1)$ como sus coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ nos proporciona una *proyectividad* de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ a l (la inversa de la proyectividad $\psi_{\mathscr{R}}$ definida en la proposición 8.32), que es concretamente

$$\begin{array}{rccc}\psi^{-1}_{\mathscr{R}}: & \mathbf{P}^1_{\mathbf{k}} & \longrightarrow & l\\ & (t_0:t_1) & \mapsto & (t_0:t_0+t_1:t_1).\end{array}$$

Además, este proceso nos proporciona también unas *ecuaciones paramétricas* de l, ya que estamos diciendo cómo tienen que ser los puntos $(x_0:x_1:x_2)$ de l en función de los valores $(t_0:t_1)$ de los parámetros:

$$\begin{array}{rcl} x_0 &=& t_0\\ x_1 &=& t_0+t_1\\ x_2 &=& t_1\,.\end{array}\tag{9.1.1}$$

Observamos que (9.1.1) son también las ecuaciones de $\psi^{-1}_{\mathscr{R}}$, pensada, en vez de como proyectividad de $\mathbf{P}^1$ a l, como aplicación proyectiva de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, respecto de las referencias canónicas de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.

Ejercicio 9.2. Si consideramos la referencia $\mathscr{R}'=\{(1:1:0),(0:1:1);(1:-1:-2)\}$ de la recta l del ejemplo anterior, ¿cuál es la proyectividad que obtenemos al asignar a cada valor $(t_0:t_1)$ de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ el punto p de l de coordenadas $(t_0:t_1)$ respecto de $\mathscr{R}'$? ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas correspondientes?

Recordemos que unas *ecuaciones paramétricas* o una *parametrización* de una recta $l=\mathbf{P}(W)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ (W es un plano vectorial de $\mathbf{k}^3$) son unas ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x_0 &=& a_0t_0+b_0t_1\\ x_1 &=& a_1t_0+b_1t_1\\ x_2 &=& a_2t_0+b_2t_1\,,\end{array}\tag{9.2.1}$$

donde $B=\{(a_0,a_1,a_2),(b_0,b_1,b_2)\}$ son un sistema de generadores (y por tanto, una base) de W. Observamos que la referencia proyectiva $\mathscr{R}=\{(a_0:a_1:a_2),(b_0:b_1:b_2);(a_0+b_0:a_1+b_1:a_2+b_2)\}$ de l tiene a B como base asociada. Por tanto, la proyectividad que asigna a cada $(t_0:t_1)$ el punto $p\in l$ (vista l como subespacio proyectivo de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$) de coordenadas $(t_0:t_1)$ respecto de $\mathscr{R}$, tiene a (9.2.1) como ecuaciones respecto a las referencias canónicas de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. En vista de esto y del ejemplo 9.1 podemos dar una nueva definición de parametrización de una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$:

Definición 9.3. Sea $l = \mathbf{P}(W)$ una recta proyectiva de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Una *parametrización* de l es una proyectividad f de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ a l. La proyectividad f viene determinada por la imagen de tres puntos distintos de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$, por ejemplo, por la imagen de $(1:0), (0:1), (1:1)$ (la referencia canónica de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$). También podemos dar f de manera explícita como

$$(t_0 : t_1) \mapsto (a_0t_0 + b_0t_1 : a_1t_0 + b_1t_1 : a_2t_0 + b_2t_1), \tag{9.3.1}$$

donde (a_0, a_1, a_2) y (b_0, b_1, b_2) son vectores linealmente independientes de W.

Observación 9.4. Por lo que hemos visto, una parametrización f de una recta proyectiva l de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ nos da una forma de "recorrer" l, ya que para cada valor del *parámetro homogéneo* $(t_0 : t_1) \in \mathbf{P}^1_k$ obtenemos un único punto $f(t_0 : t_1)$ de l. Por ello, según movemos el parámetro homogéneo de $\mathbf{P}^1_k$, vamos recorriendo toda la recta l, pasando por todos sus puntos una sola vez. Observamos también que para tener determinada de forma única una parametrización f de l necesitamos especificar las imágenes que toma f para $(1:0), (0:1)$ y $(1:1)$ o, en general, para tres valores distintos del parámetro homogéneo $(t_0 : t_1)$ (esto es así porque una proyectividad de $\mathbf{P}^1_k$ a l viene determinada por la imagen de los puntos de una referencia proyectiva de $\mathbf{P}^1_k$ y una referencia de $\mathbf{P}^1_k$ consiste en tres puntos distintos de $\mathbf{P}^1_k$). Si, por el contrario, solo especificamos los valores $p_0 = (a_0 : a_1 : a_2)$ y $p_1 = (b_0 : b_1 : b_2)$ que una parametrización de l ha de tomar en dos valores distintos del parámetro homogéneo, por ejemplo, en $(1:0)$ y $(0:1)$, habrá varias (si $\mathbf{k}$ es infinito, infinitas) parametrizaciones f tales que $f(1:0) = (a_0 : a_1 : a_2)$ y $f(0:1) = (b_0 : b_1 : b_2)$. Esto es porque $\{(1:0), (0:1)\}$ *no* son una referencia de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$, por lo que especificar las imágenes que una proyectividad ha de tener en dichos puntos no determina la proyectividad de forma única. Dicho de otro modo, hay muchas maneras distintas de parametrizar l de forma que pasemos por el punto p_0 para el valor $(1:0)$ del paramétro y por el punto p_1 para el valor $(0:1)$ del parámetro. Simplemente, hay que escoger imágenes distintas para $(1:1)$ (el punto unidad de la referencia proyectiva canónica de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$); cada una de estas elecciones dará lugar a una proyectividad de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ a l distinta. Dicho de otra forma, las distintas elecciones de imagen para $(1:1)$ darán lugar a distintas maneras de recorrer l que solo tendrán en común entre ellas esto: todas pasan por p_0 para el valor $(1:0)$ del parámetro y por p_1 para el valor $(0:1)$ del parámetro. Otra forma de entender por qué ocurre esto es fijarnos en las posibles parametrizaciones de W (recuerda que W es el plano vectorial de $\mathbf{k}^3$ para el que $l = \mathbf{P}(W)$). Para que una parametrización de l tome el valor p_0 en $(1:0)$ y el valor p_1 en $(0:1)$ basta considerar una parametrización de W que lleve el valor $(1, 0)$ de los parámetros a un múltiplo no nulo *cualquiera* del vector $v_0 = (a_0, a_1, a_2)$ y el valor $(0, 1)$ de los parámetros a un múltiplo no nulo *cualquiera* del vector $v_1 = (b_0, b_1, b_2)$. Según los múltiplos de v_0 y v_1 que elijamos, la imagen de $(1, 1)$ por la parametrización de W resultante generará distintos "rayos" vectoriales en W.

Observación 9.5. La definición 9.3 se puede extender de manera obvia a una recta proyectiva de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ o incluso a una recta proyectiva de un espacio proyectivo arbitrario $\mathbf{P}(V)$. La definición también se extiende a subespacios Λ de dimensión m de $\mathbf{P}(V)$: una parametrización de Λ sería una proyectividad de $\mathbf{P}^m_{\mathbf{k}}$ a Λ.

Proyectividades y perspectividades de rectas

Ahora vamos a estudiar proyectividades entre dos rectas l_1 y l_2 de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, *no necesariamente distintas*. Para determinar una proyectividad de l_1 en l_2 basta conocer las imágenes de tres puntos (ordenados) distintos de l_1. Estas imágenes han de ser necesariamente tres puntos distintos de l_2, ya que una proyectividad es una aplicación biyectiva. Vemos un ejemplo de proyectividad entre dos rectas l_1 y l_2 de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ en el ejercicio siguiente:

Ejercicio 9.6. Sean l_1 y l_2 las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuaciones $x_0+x_1+x_2=0$ y $x_1-x_2=0$. Sea f la proyectividad de l_1 a l_2 que cumple

$$\begin{array}{rcl} f((1:0:-1) & = & (1:0:0) \\ f((0:1:-1) & = & (1:1:1) \\ f((1:-2:1)) & = & (0:1:1)\,. \end{array}$$

(1) Calcula $f((2:1:-3))$.
(2) En general, dado un punto $(t_0:t_1:-t_0-t_1)$ de l_1, calcula $f((t_0:t_1:-t_0-t_1))$.

Si hemos sido capaces de resolver el ejercicio anterior, es claro que sabemos cómo describir, usando coordenadas, una proyectividad f entre dos rectas del plano. Sin embargo nos gustaría también ser capaces de describir f de manera geométrica. Para hacer esto comenzamos por estudiar un ejemplo muy importante de proyectividades entre dos rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, las *perspectividades*:

Definición 9.7. Sean l_1 y l_2 dos rectas proyectivas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, no necesariamente distintas, y sea o un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ no contenido ni en l_1 ni en l_2. Una *perspectividad* de centro o entre l_1 y l_2, o de l_1 sobre l_2, es la aplicación proyectiva de l_1 a l_2 que se obtiene al restringir a l_1 la proyección π sobre l_2 con centro o.

Observación 9.8. Una perspectividad entre dos rectas distintas l_1 y l_2 de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ viene determinada por su centro. Si f es una perspectividad de una recta l sobre sí misma, $f=\mathrm{id}_l$.

Ejercicio 9.9. Sean l_1 y l_2 las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuaciones $x_0-x_1+x_2=0$ y $x_1-x_2=0$ y sea f la perspectividad que de l_1 sobre l_2 de centro $(0:1:0)$. Halla la parametrización de l_2 que resulta de componer la parametrización de l_1 del ejemplo 9.1 con f.

Proposición 9.10. *La perspectividad f de una recta l_1 sobre una recta l_2 con centro o es una proyectividad entre l_1 y l_2. La proyectividad inversa de f es de nuevo una perspectividad, de l_2 sobre l_1 y centro o.*

Demostración. La proposición es un caso particular del ejemplo 8.19. □

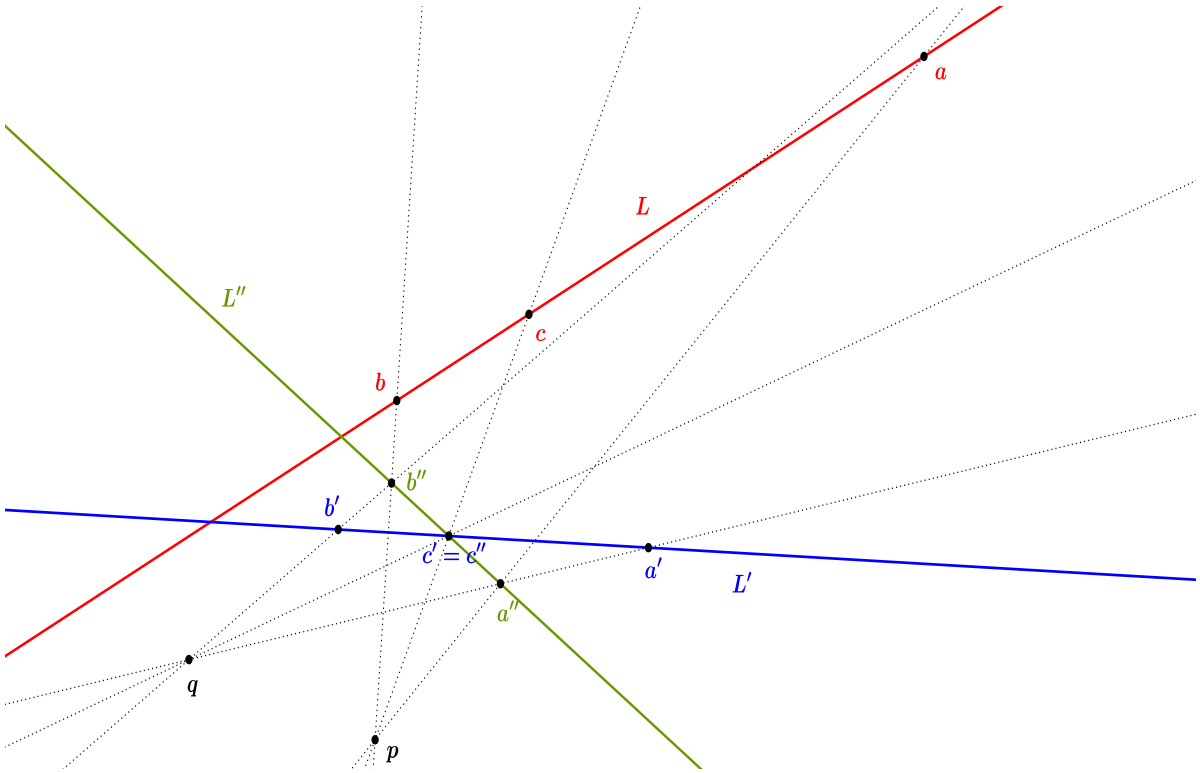
Teorema 9.11. *(caracterización geométrica de las perspectividades) Sean l y l' dos rectas distintas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea $f: l \longrightarrow l'$ una proyectividad entre ellas. Sea p el (único) punto de intersección de l y l'. Entonces, f es una perspectividad si y solo si $f(p)=p$.*

Demostración. Es claro que si f es una perspectividad de l a l', entonces $f(p)=p$. Supongamos ahora que f es una proyectividad de l a l' tal que $f(p)=p$. Sean a y b otros dos puntos de l distintos de p y denotemos $a'=f(a)$ y $b'=f(b)$. Consideramos el punto o de intersección de las rectas $<a,a'>$ y $<b,b'>$ (observa que $a\neq a'$ y $b\neq b'$). Entonces, si g es la perspectividad de l sobre l' de centro o, es claro que $g(a)=a'$, $g(b)=b'$ y $g(p)=p$. Como f y g son dos proyectividades de l a l' que valen lo mismo en la referencia proyectiva $\mathscr{R}=\{a,b;p\}$ de l, se tiene por el teorema 8.34 que $f=g$. □

Podemos ahora describir las proyectividades entre dos rectas del plano como composición de perspectividades:

Teorema 9.12. *Toda proyectividad entre dos rectas L y L' de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, no necesariamente distintas, se puede expresar como composición de perspectividades.*

Demostración. Vemos en primer lugar que podemos suponer que L y L' son distintas. En efecto, si fueran iguales, tomando una recta $\hat{L}$ distinta de L y una perspectividad cualquiera g de L sobre $\hat{L}$ se tendría, supuesto demostrado el teorema para rectas distintas, que $f\circ g^{-1}$ es una composición de perspectividades, con lo que f también lo sería. Suponemos pues



que L y L' son dos rectas distintas (a partir de aquí, para entender mejor la demostración conviene que vayas dibujando las rectas y puntos que se van introduciendo, con lo que obtendrás un dibujo análogo al que aparece arriba). Elegimos tres puntos distintos a, b, c de L de tal manera que si $a' = f(a), b' = f(b)$ y $c' = f(c)$ entonces ni c ni c' son el punto de intersección de L y L'. Sea p un punto de la recta $< c, c' >$ distinto de c y c'. Tomamos una recta L'' que pase por c' pero que no pase ni por c ni por a'. Sean a'' y b'' los respectivos puntos de intersección de L'' con las rectas $< p, a >$ y $< p, b >$ y renombremos c' como c''. Finalmente, sea q el punto de intersección de las rectas $< a', a'' >$ y $< b', b'' >$. Si f_1 es la perspectividad de L sobre L'' de centro p y f_2 es la perspectividad de L'' sobre L' de centro q se tiene

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{f_1} & L'' & \xrightarrow{f_2} & L' \\ a & \mapsto & a'' & \mapsto & a' \\ b & \mapsto & b'' & \mapsto & b' \\ c & \mapsto & c'' & \mapsto & c' \,, \end{array}$$

por lo que $(f_2 \circ f_1)(a) = a' = f(a)$, $(f_2 \circ f_1)(b) = b' = f(b)$ y $(f_2 \circ f_1)(c) = c' = f(c)$. Como $\{a, b; c\}$ es una referencia proyectiva de L, se sigue del teorema 8.34 que $f = f_2 \circ f_1$. □

La elección del infinito

Al comienzo de la sección 7 construimos el plano proyectivo $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ como compleción del plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, incluyendo este último en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ mediante la aplicación inyectiva (7.4.1), que en dimensión 2 queda

$$\begin{array}{rccc} & \mathbf{A}^2_{\mathbf{k}} & \longrightarrow & \mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \\ i: & (x, y) & \mapsto & (1 : x : y). \end{array} \tag{9.12.1}$$

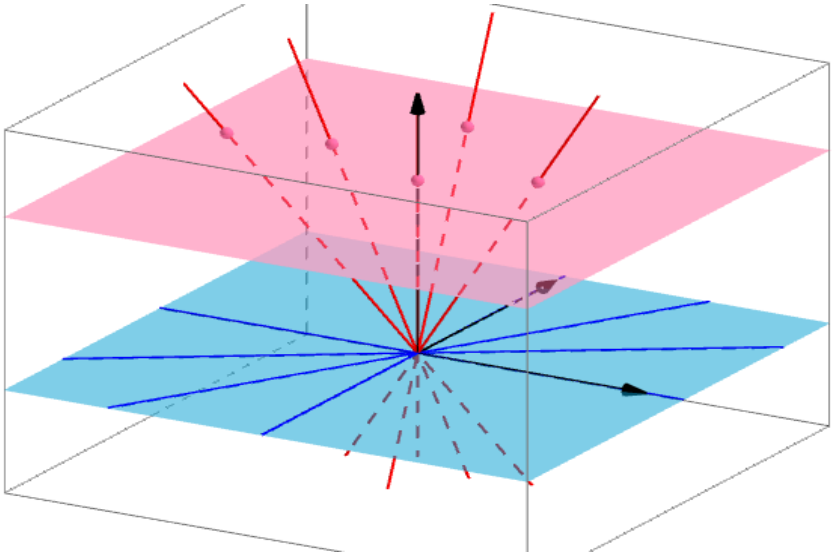
Para obtener i, primero incluimos $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ dentro de $\mathbf{k}^3$ mediante

$$\begin{array}{rccc} & \mathbf{A}^2_{\mathbf{k}} & \longrightarrow & \mathbf{k}^3 \\ j: & (x,y) & \mapsto & (1,x,y). \end{array}$$

De esta forma estamos identificando $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ con el plano afín Π de $\mathbf{k}^3$ de ecuación $x_0 = 1$. Luego componemos j con la proyección desde $\mathbf{k}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$

$$\begin{array}{rccc} & \mathbf{k}^3 \setminus \{(0,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \\ \pi: & (x_0,x_1,x_2) & \mapsto & (x_0 : x_1 : x_2). \end{array}$$

Podemos así identificar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ con el subconjunto $i(\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}})$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Los puntos que añadimos a $i(\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}})$ hasta completar $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ son las clases en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ del plano vectorial W de $\mathbf{k}^3$ de ecuación $x_0 = 0$, que es la dirección de Π. Dichas clases son los puntos la recta $\mathbf{P}(W)$ de ecuación $x_0 = 0$, que llamamos por ese motivo *recta del infinito* para la inclusión i. Ilustramos esta construcción en la figura siguiente, donde Π aparece en rosa, W aparece en azul claro y dibujamos, en rojo, unas cuantas rectas vectoriales correspondientes a puntos de $i(\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}})$ y, en azul, unas cuantas rectas vectoriales correspondientes a puntos de la recta del infinito $\mathbf{P}(W)$.



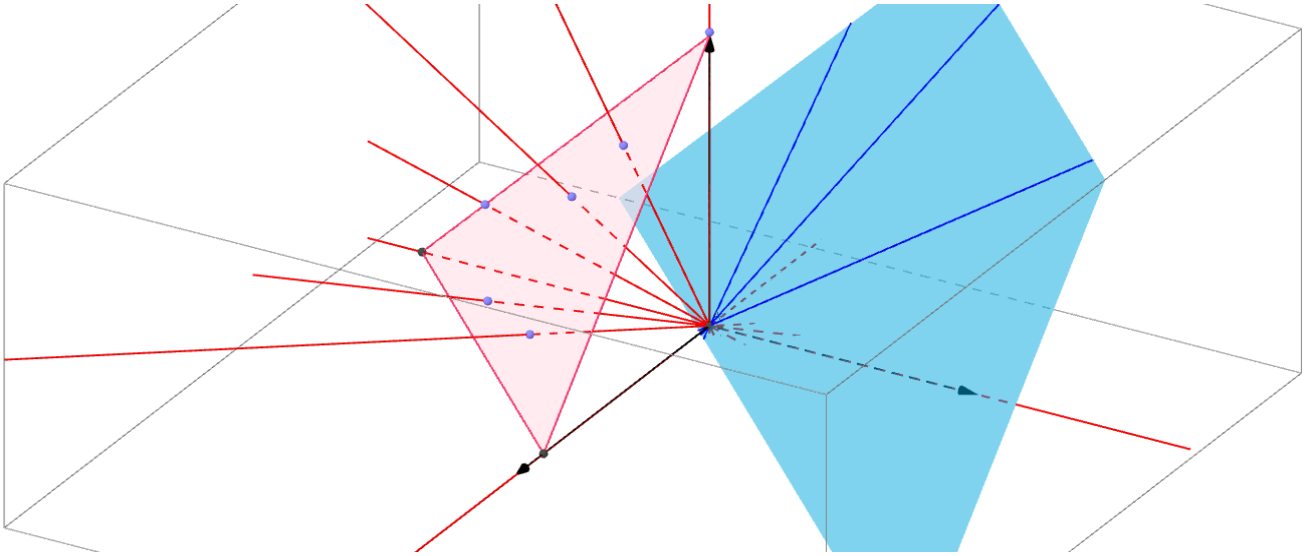
Sin embargo i no es la única forma de incluir $\mathbf{A}^2_\mathbf{k}$ dentro de $\mathbf{P}^2_\mathbf{k}$. Por ejemplo, en vez de enviar el punto (x, y) de $\mathbf{A}^2_\mathbf{k}$ al punto $(1 : x : y)$ de $\mathbf{P}^2_\mathbf{k}$, lo podríamos haber enviado al punto $(x : y : 1)$ (observa que, en ese caso, los puntos "nuevos" de $\mathbf{P}^2_\mathbf{k}$ con respecto a los (que vienen) de $\mathbf{A}^2_\mathbf{k}$ serían los de la recta proyectiva de ecuación $x_2 = 0$, no los de la recta proyectiva de ecuación $x_0 = 0$). En general, podemos elegir cualquier plano afín Π' (que no pase por $(0, 0, 0)$, para que después tenga sentido componer con π) de $\mathbf{k}^3$ y, en vez de j, podemos considerar un isomorfismo afín j' entre $\mathbf{A}^2_\mathbf{k}$ y Π'. Definimos entonces como i' la composición $i' = \pi \circ j'$. Podemos así identificar $\mathbf{A}^2_\mathbf{k}$ como el subconjunto $i'(\mathbf{A}^2_\mathbf{k})$ de $\mathbf{P}^2_\mathbf{k}$ y los puntos que añadimos para completar $i'(\mathbf{A}^2_\mathbf{k})$ hasta $\mathbf{P}^2_\mathbf{k}$ son en este caso las clases de los vectores de la dirección W' de Π'. Estos puntos forman la recta $\mathbf{P}(W')$, que será la recta del infinito para la inclusión i'. Vemos un ejemplo concreto de i'. Elegimos como Π' el plano de $\mathbf{k}^3$ de ecuación $x_0 - x_1 + x_2 = 1$ y como j', por ejemplo,

$$\begin{array}{rccc} & \mathbf{A}^2_\mathbf{k} & \longrightarrow & \mathbf{k}^3 \\ j' : & (x, y) & \mapsto & (x - y + 1, x, y). \end{array}$$

Con estas elecciones i' será

$$\begin{array}{rccc} & \mathbf{A}^2_\mathbf{k} & \longrightarrow & \mathbf{P}^2_\mathbf{k} \\ i' : & (x, y) & \mapsto & (x - y + 1 : x : y) \end{array}$$

y la dirección W' de Π' será el plano vectorial de $\mathbf{k}^3$ de ecuación $x_0 - x_1 + x_2 = 0$. Por tanto, la recta del infinito para i' será en este caso $\mathbf{P}(W')$, es decir, la recta de $\mathbf{P}^2_\mathbf{k}$ de ecuación $x_0 - x_1 + x_2 = 0$. Ilustramos esta construcción en la siguiente figura, donde Π' aparece en rosa (dibujamos solo un triángulo de Π'), W' aparece en azul claro y dibujamos, en rojo, unas cuantas rectas vectoriales correspondientes a puntos de $i'(\mathbf{A}^2_\mathbf{k})$ y, en azul, unas cuantas rectas vectoriales correspondientes a puntos de la recta del infinito $\mathbf{P}(W')$.



Hemos visto pues que no hay una única forma de sumergir $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y que la recta del infinito depende de la inmersión elegida. Por otra parte, es claro que, dada una recta l' cualquiera de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, existe una inmersión de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ como las que acabamos de describir para la que l' es su recta del infinito. Dicho de otra forma, dada cualquier recta l' de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, podemos identificar $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus l'$ con $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, mediante la aplicación inversa de una inmersión i' como las descritas más arriba. A esto le llamaremos *elegir la recta del infinito.*

Otra forma de entender las distintas maneras de sumergir $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y de elegir la recta del infinito es la siguiente. Dadas dos rectas proyectivas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ existen proyectividades de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que trasforman una en la otra:

Lema 9.13. *Sean l y l' dos rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Existen proyectividades de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que transforman l en l'.*

Demostración. Una proyectividad f que cumpla $f(l) = l'$ se puede construir como sigue. Elegimos dos puntos distintos p_0, p_1 de l y los completamos a una referencia proyectiva $\mathscr{R} = \{p_0, p_1, p_2; p_3\}$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ (para ello basta con escoger un punto p_2 no contenido en l; entonces p_0, p_1 y p_2 son proyectivamente independientes, por lo que si v_0, v_1 y v_2 son vectores de $\mathbf{k}^3$ tales que $p_0 = [v_0], p_1 = [v_1]$ y $p_2 = [v_2]$, v_0, v_1 y v_2 forman una base de $\mathbf{k}^3$ y, si definimos $p_3 = [v_0 + v_1 + v_2]$, p_0, p_1, p_2 y p_3 forman una referencia de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$). Análogamente escogemos dos puntos distintos p'_0 y p'_1 de l' y elegimos otros dos puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de manera que $\mathscr{R} = \{p'_0, p'_1, p'_2; p'_3\}$ sea una referencia proyectiva de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Consideramos la proyectividad f que transforma $\mathscr{R}$ en $\mathscr{R}'$. Entonces $f(l) = f(< p_0, p_1 >) = < f(p_0), f(p_1) > = < p'_0, p'_1 >= l'$. Observa que con esta construcción podemos obtener muchas proyectividades que transforman l en l', ya que, para fijar $\mathscr{R}'$, podemos elegir como p'_0 y p'_1 dos puntos distintos de l' cualesquiera; como p'_2 podemos elegir un punto cualquiera fuera de l' y como p'_3 podemos elegir cualquier punto que no esté contenido en la unión de $< p'_0, p'_1 >$, $< p'_0, p'_2 >$ y $< p'_1, p'_2 >$. Cada elección distinta de los puntos p'_0, p'_1, p'_2 y p'_3 define una proyectividad diferente que transforma l en l'. □

El lema 9.13 nos dice que dos rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ son indistinguibles desde un punto de vista proyectivo. Otra forma de ver esto es que una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ puede adoptar cualquier ecuación siempre que la escribamos con respecto a una referencia proyectiva adecuada.

En particular, se sigue de todo esto que la recta de ecuación $x_0 = 0$ (que denotamos a partir de ahora como l) no tiene nada de especial y así, cualquier recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ tiene "derecho" a ser elegida como recta del infinito. Como hemos identificado $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ con $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus l$ mediante la biyección i de (9.12.1), tenemos la siguiente observación:

Observación 9.14. Sea l la recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación $x_0 = 0$ y sea l' otra recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Podemos identificar (no de manera única) $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ con $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus l'$ de la siguiente forma. Sea i la aplicación de (9.12.1) y sea f una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ tal que $f(l) = l'$ (recuerda el lema 9.13) Entonces $i' = f \circ i$ es una aplicación inyectiva y su imagen es $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus l'$.

En realidad, esta manera de elegir la recta del infinito tal como se describe en la observación 9.14 es equivalente a la manera de elegir la recta del infinito que vimos antes en la página 79. Dicho de forma más precisa:

Proposición 9.15. *Sea i la aplicación de* (9.12.1) *y sea π la proyección canónica de $\mathbf{k}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.*

(1) *Si Π' es un plano afín de $\mathbf{k}^3$ que no contiene a $(0,0,0)$, j' es una aplicación afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ tal que $j'(\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}) = \Pi'$ e $i' = \pi \circ j'$, entonces existe una proyectividad f de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ tal que $i' = f \circ i$.*

(2) *Si f es una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ e $i' = f \circ i$, entonces existe un plano afín Π' de $\mathbf{k}^3$ que no contiene a $(0,0,0)$ y una aplicación afín j' de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ que cumple $j'(\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}) = \Pi'$, tales que $i' = \pi \circ j'$.*

Demostración. Para demostrar (1), definimos $v'_0 = (j' \circ j^{-1})(1,0,0)$ (observa que v'_0 es un punto de Π'; para que la inversa de j tenga sentido entendemos j como una aplicación de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ a Π). Definimos también $v'_1 = (\vec{j'} \circ \vec{j}^{-1})(0,1,0)$ y $v'_2 = (\vec{j'} \circ \vec{j}^{-1})(0,0,1)$ (observa que v'_1 y v'_2 son dos vectores linealmente independientes de la dirección de Π'). Por tanto v'_0, v'_1 y v'_2 forman una base de $\mathbf{k}^3$. Definimos Φ como el automorfismo de $\mathbf{k}^3$ que envía los vectores de la base canónica de $\mathbf{k}^3$ a v'_0, v'_1 y v'_2. Entonces la proyectividad f que buscamos es la proyectividad inducida por Φ.

Dejamos la demostración de (2) como ejercicio. □

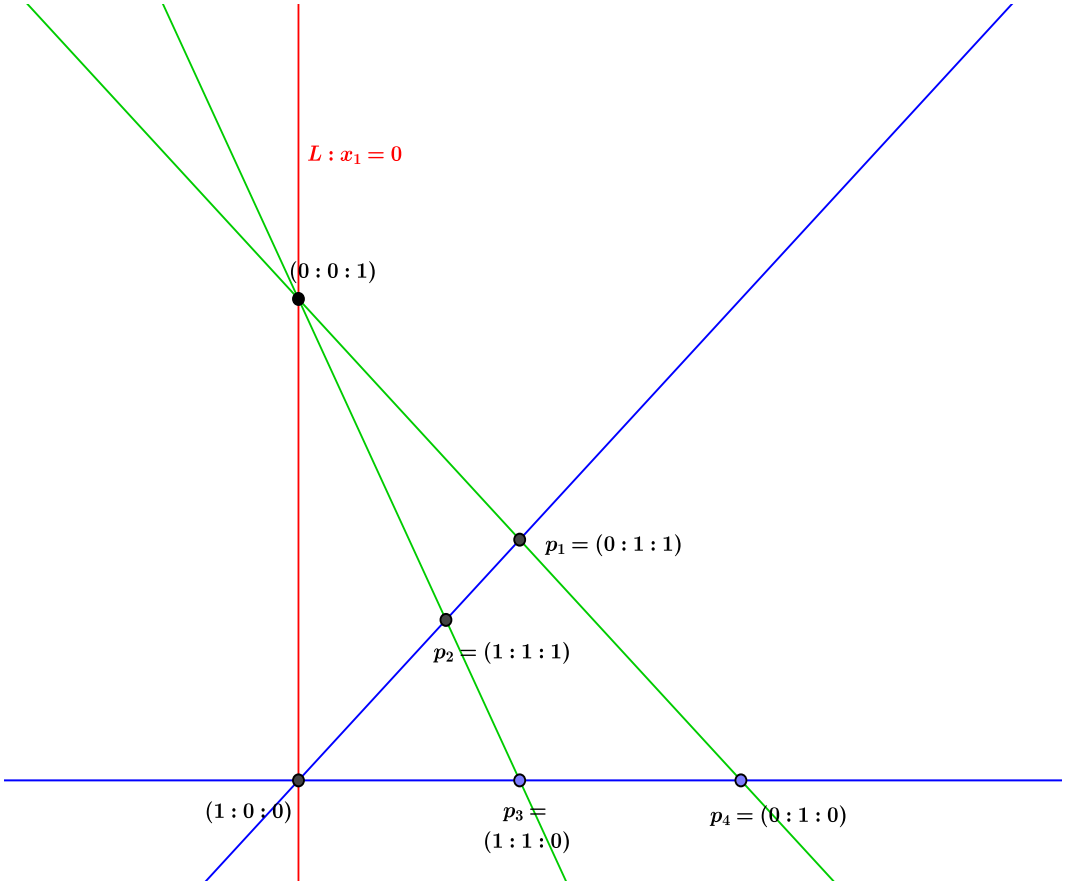
El lema 9.13 se puede generalizar de la manera obvia a $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ (dados dos hiperplanos H y H' de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, existe una proyectividad (no única) de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ que transforma H en H'). De igual manera podemos generalizar la observación 9.14, por lo que también en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ podemos *elegir el hiperplano del infinito*. Esto consistiría en fijar un hiperplano H de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ e identificar el complementario de H con el espacio afín $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$. Este proceso también lo podemos realizar generalizando la construcción que hicimos en la página 79.

A continuación vemos varios contextos que ilustran el proceso de elegir la recta del infinito y nos muestran la utilidad del mismo (en el tema 3 veremos una situación más en que elegir la recta del infinito será muy importante: cuando relacionemos las cónicas proyectivas con las cónicas afines).

Paralelismo.

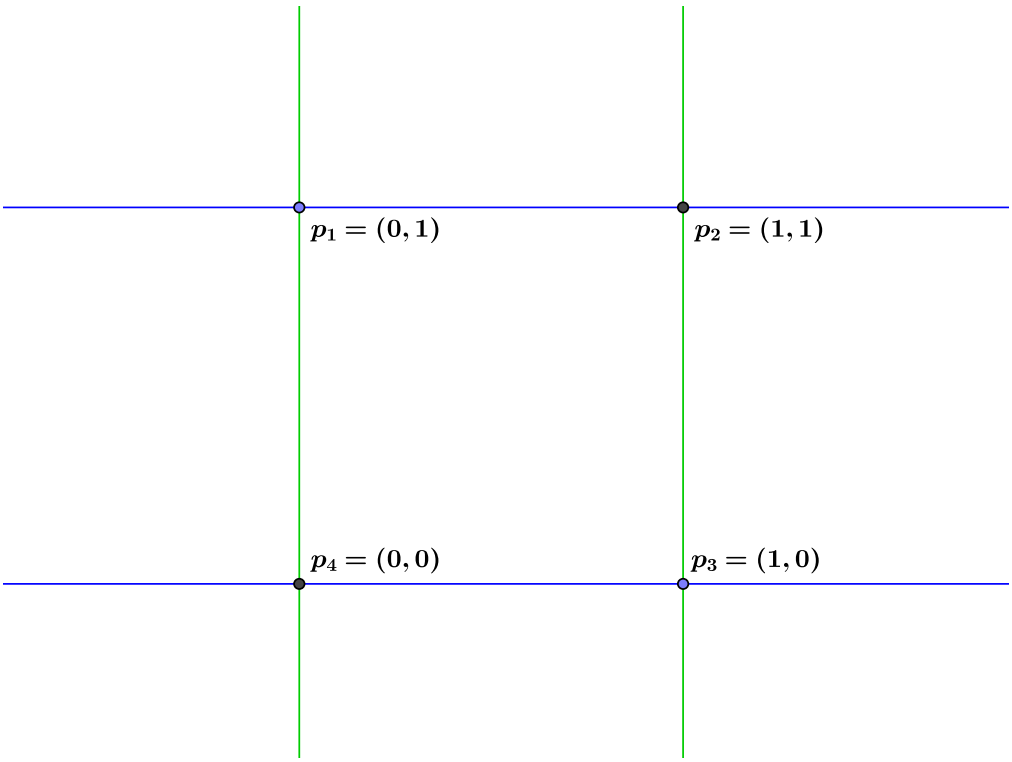
Ya vimos en la sección 7 que, al completar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ usando la aplicación i de (9.12.1), dos rectas paralelas l_1 y l_2 de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ se caracterizan por tener el mismo punto del infinito. Esta propiedad se conserva si, en lugar de utilizar la inmersión i de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, usamos una inmersión i' como las de la página 79. Para ver esto último, definimos el completado proyectivo de una recta l de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ respecto de la compleción de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ dada por i' como la recta proyectiva $i'(l) \cup \pi(\vec{j'}(l))$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, siendo $\pi(\vec{j'}(l))$ el punto del infinito de l para esta compleción. En ese caso, si l_1 y l_2 son dos rectas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, como j' es una aplicación afín inyectiva, l_1 y l_2 son paralelas si y solo si $j'(l_1)$ y $j'(l_2)$ son paralelas. Esto se traduce en que l_1 y l_2 son paralelas si y solo si tienen el mismo punto del infinito para la compleción de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ dada por i'. Entonces, si en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ hemos elegido una recta proyectiva L como recta del infinito e identificamos $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus L$ con $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, y l_1 y l_2 son dos rectas proyectivas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, tenemos que $l_1 \setminus L$ y $l_2 \setminus L$ son rectas paralelas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}} = \mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus L$ si y solo si $l_1 \cap L = l_2 \cap L$. Lo ilustramos en los siguientes dos ejemplos:

Ejemplo 9.16. En $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ consideramos cuatro puntos p_1, p_2, p_3, p_4 en posición general. ¿Qué recta L de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ debemos elegir como recta del infinito para que los puntos p_1, p_2, p_3, p_4 sean en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus L$ vértices consecutivos de un paralelogramo? La recta L buscada es la recta que pasa por los puntos $< p_1, p_2 > \cap < p_3, p_4 >$ y $< p_1, p_4 > \cap < p_2, p_3 >$. Por ejemplo, en las figuras siguientes se ilustra el caso en que $p_1 = (0:1:1)$, $p_2 = (1:1:1)$, $p_3 = (1:1:0)$ y $p_4 = (0:1:0)$: los puntos p_1, p_2, p_3, p_4 forman un paralelogramo en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \setminus L$ si y solo si L es la recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación $x_1 = 0$. Ten en cuenta que para el segundo dibujo



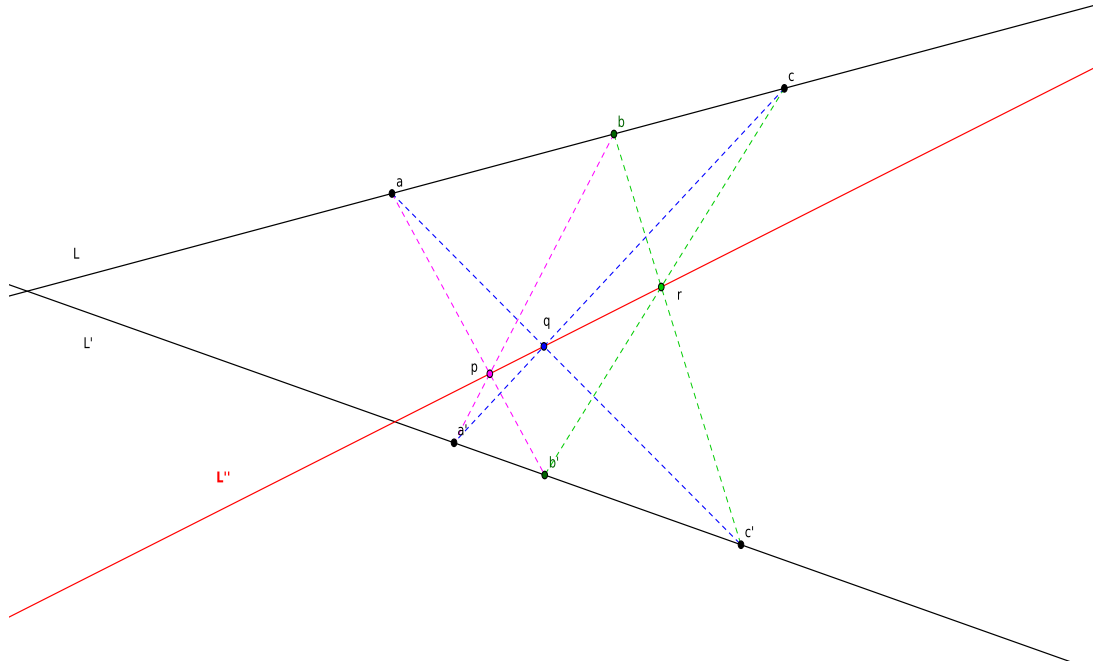
identificamos $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \smallsetminus L$ con $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ mediante

$$\begin{array}{rccc} i'^{-1}: & \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \smallsetminus L & \longrightarrow & \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} \\ & (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}). \end{array}$$



El siguiente ejemplo es la demostración de un resultado clásico sobre configuraciones de rectas: el teorema de Pappus. Probaremos la versión proyectiva del teorema de Pappus (también hay una versión afín, la cual, como ya hemos observado en otras ocasiones, tiene un enunciado más complicado, con más casos: compara la versión afín del teorema de Pappus que aparece en el teorema I.3.4 y en el ejercicio I.39 de "Geometry", de M. Audin con la versión proyectiva enunciada en el teorema 9.17). La demostración que veremos a continuación usa la idea de la elección de la recta del infinito para reducir la demostración del teorema 9.17 a argumentos afines (en realidad, demostraremos las versiones afines del teorema de Pappus a las que hemos hecho referencia y, usando el "truco" de elegir adecuadamente la recta del infinito, probaremos, a partir de las versiones afines, la versión proyectiva).

Teorema 9.17. *(Pappus) En* $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ *sean* a, b, c *tres puntos distintos alineados y sea* $L =< a, b, c >$*; sean* a', b', c' *otros tres puntos alineados, contenidos en la recta* L' *distinta de* l*. Si* p *es el punto de intersección de* $< a, b' >$ *y* $< a', b >$*,* q *es el punto de intersección de* $< a, c' >$ *y* $< a', c >$ *y* r *es el punto de intersección de* $< b, c' >$ *y* $< b', c >$*, entonces los puntos* p, q *y* r *están alineados.*



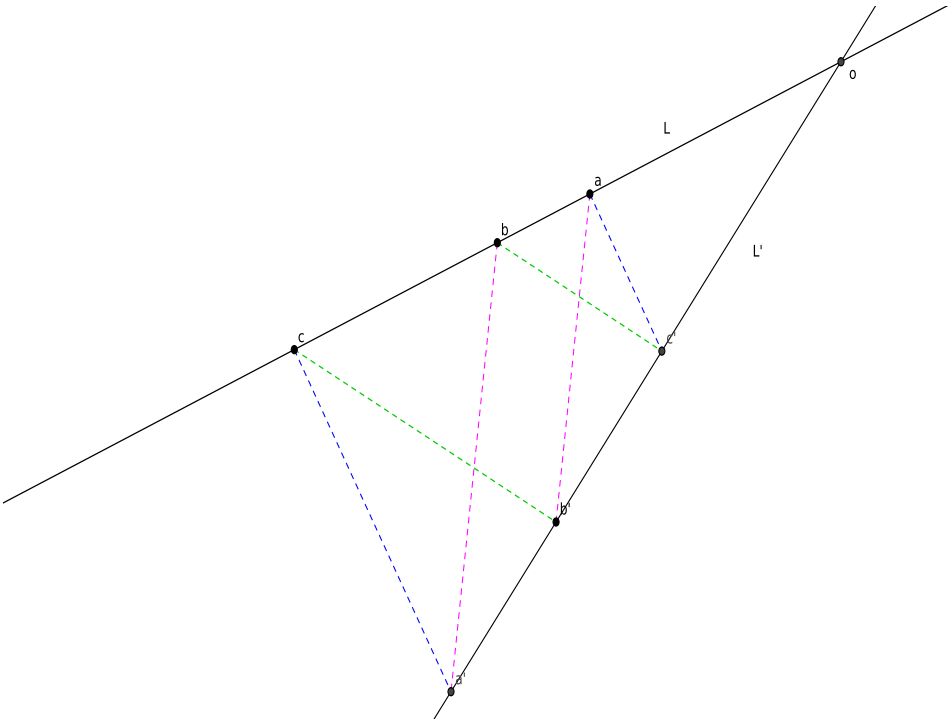
Demostración. Sea $L'' =< p, r >$. Para demostrar el teorema basta ver que $q \in L''$. Tomamos L'' como recta del infinito, es decir, identificamos $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus L''$ con $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ según la construcción de la página 79 o la observación 9.14. A partir de ahora haremos un pequeño abuso de notación y, dada una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ con intersección no vacía con $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus L''$, daremos el mismo nombre a la recta proyectiva y a la recta afín que resulta al intersecarla con $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus L''$. En ese caso las rectas $< a, b' >$ y $< a', b >$ se convierten en rectas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ paralelas (¡puesto que sus completados proyectivos tienen el mismo punto en el infinito!). De igual forma las rectas $< b, c' >$ y $< b', c >$ se convierten en rectas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ paralelas. Por tanto habremos demostrado que $q \in L''$, si demostramos la siguiente versión afín (especial) del teorema de Pappus:

En $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, sean a, b, c tres puntos distintos alineados y sea $L =< a, b, c >$; sean a', b', c' otros tres puntos alineados, contenidos en la recta L' distinta de L. Si $< a, b' >$ y $< a', b >$ son paralelas y $< b, c' >$ y $< b', c >$ son paralelas, entonces $< a, c' >$ y $< a', c >$ son paralelas.

Como las rectas L y L' en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ pueden ser paralelas o concurrentes (dependerá de si el punto de intersección de L y L' (de forma más precisa, el punto de intersección de sus completados proyectivos) en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ esté en L'' o no; en la figura incluida en el enunciado del teorema, no lo está, que es la situación más probable), para demostrar la versión afín del teorema de Pappus del párrafo anterior será necesario distinguir esos dos casos:

Caso 1: Las rectas L y L' son concurrentes en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (el punto de intersección de L y L' en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ no está en L''). Sea o el punto de intersección de L y L', sea h_1 la homotecia de centro o que lleva a a b y sea h_2 la homotecia de centro o que lleva b a c. Como L y L' pasan por o, ambas rectas son invariantes tanto por h_1 como por h_2. Como una homotecia transforma una recta en una recta paralela, h_1 transforma $< a, b' >$ en $< b, a' >$ (por lo que $h_1(b') = a'$) y h_2 transforma $< b, c' >$ en $< c, b' >$ (por lo que $h_2(c') = b'$). Por otra parte es fácil ver que dos homotecias con el mismo centro conmutan centro sentido o en bien la y su

composición es o bien una homotecia con el mismo centro o bien la identidad (¡piénsalo!). Por ello $h = h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$, $h(a) = (h_2 \circ h_1)(a) = c$ y $h(c') = (h_1 \circ h_2)(c') = a'$, de donde se deduce que las rectas $< a, c' >$ y $< c, a' >$ son paralelas, como queríamos demostrar.



Caso 2: Las rectas L y L' son paralelas. El razonamiento es el mismo que el del caso 1 cambiando en el argumento homotecias por traslaciones (el que una traslación transforme una recta dada en una recta paralela a ella y el que la composición de traslaciones sea conmutativa son hechos inmediatos). □

Aunque hayamos demostrado el teorema de Pappus eligiendo hábilmente la recta del infinito para así poder usar argumentos afines, es posible dar otra demostración utilizando argumentos puramente proyectivos:

Ejercicio 9.18. Da una demostración del teorema de Pappus, siguiendo los siguientes pasos:

> Paso 1: Llama m al punto de intersección de las rectas $< b, c' >$ y $< a', c >$ y n al punto de intersección de las rectas $< a, c' >$ y $< a', b >$.
> Paso 2: Considera la composición f de la perspectividad de $< b, c' >$ a l' con centro c seguida de la perspectividad de l' a $< a', b >$ de centro a.
> Paso 3: Halla $f(b), f(m), f(c')$ y $f(p)$.
> Paso 4: Considera la perspectividad g de $< b, c' >$ a $< a', b >$ de centro q.
> Paso 5: Halla $g(b), g(m)$ y $g(c')$, deduce qué punto es $g(p)$ y concluye la tesis del teorema.

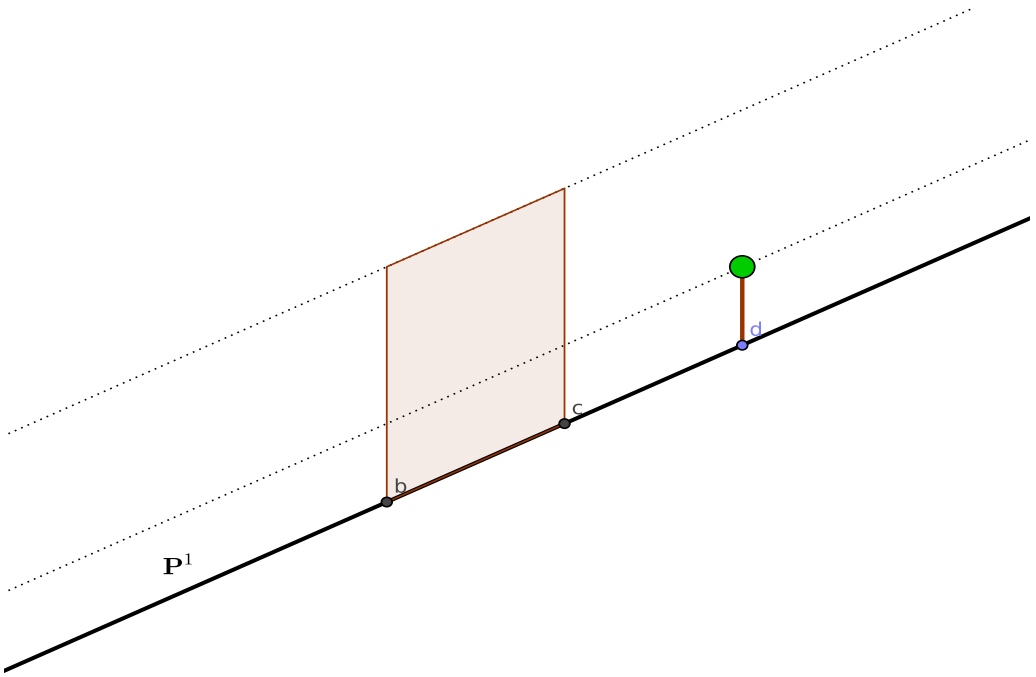
Proyectividades e isomorfismos afines.

Vimos en la sección 8, páginas 62–69, cómo completar aplicaciones afines y, en particular, cómo completar isomorfismos afines de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$. Estudiamos ahora el proceso inverso. Dada una proyectividad f de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, elegiremos un hiperplano H como hiperplano del infinito y estudiaremos la restricción de f a $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}} \setminus H$, que identificaremos con $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$. ¡Cuidado, para que dicha restricción esté bien definida en todo $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ no nos valdrá elegir un hiperplano H cualquiera (consulta el corolario 8.48)! Si H fue elegido correctamente, entonces la restricción de f a $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}} \setminus H$ será un isomorfismo afín que tendrá distintas propiedades según vayamos variando nuestra elección de H. Vemos todo esto en un ejemplo concreto:

Ejemplo 9.19. Sea f una homología general de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de razón -1, eje L y centro o (que no está contenido en L; para la definición de homología, consulta las definiciones 8.52 y 8.54). Cuando veamos el concepto de dualidad, dispondremos de una manera sistemática de hallar los subespacios invariantes por una proyectividad. En este caso, es fácil encontrar las rectas invariantes de f con un razonamiento geométrico directo, que presentamos a continuación. El eje L es una recta de puntos fijos, por lo que, obviamente, es una recta invariante. Como una recta generada por dos puntos fijos de f es una recta invariante por f y el centro o es un punto fijo de f, para todo $p \in L$, la recta $< o, p >$ es una recta invariante por f. Por otra parte, no existen más rectas invariantes. En efecto, supongamos que L' sea una recta invariante por f, distinta de las ya mencionadas. Como $L' \neq L$, L y L' se cortan en un único punto, que sabemos que es fijo y llamaremos p'. Como L' y $< o, p' >$ son distintas, L' no contiene a o. Consideramos $p'' \in L, p'' \neq p'$. Como $L' \neq < o, p'' >$, L' corta a $< o, p'' >$ es un único punto, q'', que no es ni o ni p''. Como L' y $< o, p'' >$ son rectas invariantes, q'' es un punto fijo, pero q'' es distinto de o y no está en L. Esto contradice el hecho de que los únicos puntos fijos de f son o y los puntos de L.

Una vez que tenemos identificadas todas las rectas invariantes por f, usamos el corolario 8.48 para concluir que, si elegimos como recta del infinito una de esas rectas invariantes, la restricción de f al complementario de dicha recta del infinito será un isomorfismo afín (por contra, si elegimos como recta del infinito una recta no invariante por f, la restricción de f al complementario no estará definida en todos los puntos). Estudiamos el comportamiento de la restricción de f según cuál sea la recta elegida para recta del infinito. Si elegimos el eje L de f como recta del infinito, la restricción de f a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus L$ es una homotecia de razón -1 y centro o. Para comprobarlo, no tienes más que escribir la matriz $M = M_{\overline{\mathscr{R}}} f$ de f en una referencia proyectiva adecuada, concretamente, una referencia $\overline{\mathscr{R}}$ cuyo primer punto sea o y sus dos siguientes puntos sean puntos distintos de L. Después debes comprobar que es posible elegir una inclusión i' de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ (como las de la página 79 o la observación 9.14) de manera que, si $\mathscr{R}$ es una referencia cartesiana de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ tal que su completado proyectivo respecto de i' es $\overline{\mathscr{R}}$, la matriz de la restricción de f a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus L$ respecto de $\mathscr{R}$ es M. Geométricamente comprobamos que al "quitarle" L a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, la restricción de f a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus L$ se queda con un único punto fijo (el punto o), que será el centro de la homotecia. Por otra parte, como los puntos del infinito son puntos fijos de f, la aplicación lineal asociada a la restricción de f transforma todo vector v en un vector proporcional a v, siempre con el mismo factor de proporcionalidad (-1), tal como hace una homotecia.

Si elegimos como recta del infinito una recta $L_p = < o, p >$, donde $p \in L$, usando un razonamiento análogo se comprueba que la restricción de f a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \setminus L_p$ es una simetría axial de eje $L \setminus L_p$ y en la dirección correspondiente a un vector w, tal que $\pi(j'(w)) = o$. Observa que este ejemplo es la construcción recíproca del ejercicio 8.57, (4), (5) y (6),



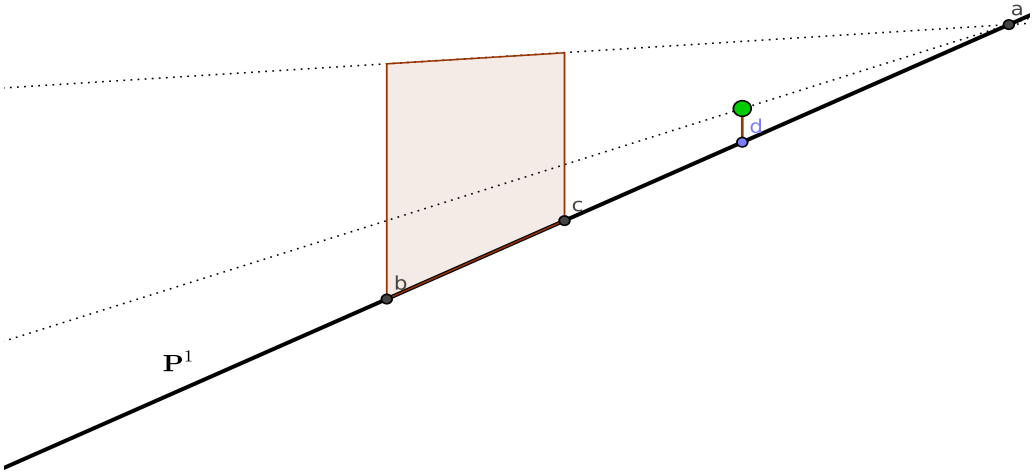
para el caso particular en que $n = 2$ y la razón de las homotecias y las dilataciones es -1. Allí se veía que la compleción tanto de una homotecia como de una dilatación con eje un hiperplano era una homología general. Aquí acabamos de ver que si partimos de una homología general f , según elijamos la recta del infinito, al restringir f al complementario de la recta del infinito elegida obtenemos una homotecia o dilataciones (las simetrıás axiales son dilataciones respecto de una recta y con razón -1).

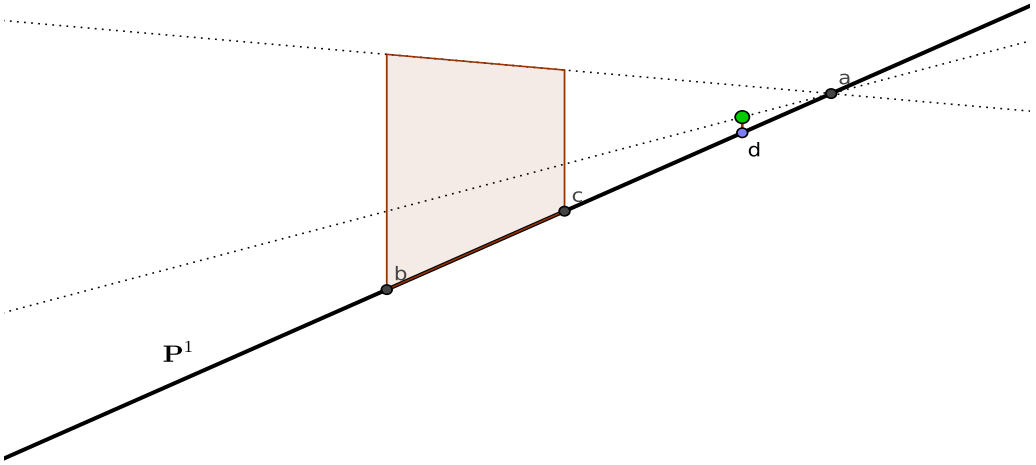
Elección del punto del infinito y razón doble.

Finalizamos esta subsección con una tercera ilustración de la elección del infinito. En este caso veremos qué consecuencias tiene elegir un punto del infinito de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ u otro. Recordemos que la construcción de la página 79 y la de la observación 9.14 se pueden realizar para el espacio proyectivo estándar de cualquier dimensión, en particular, se puede realizar para $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$. Entonces, si en $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ elegimos un punto a como punto del infinito, podemos identificar $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}} \setminus \{a\}$ como la recta afín estándar $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$. Vamos a estudiar la razón doble de una cuaterna ordenada de puntos en $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ y la razón simple de una terna ordenada de puntos en $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$. En la página 72 vimos cómo se relacionaban ambos conceptos. En particular, vimos que si consideramos los puntos $a = (0 : 1), b = (1 : \beta), c = (1 : \gamma)$ y $d = (1 : \delta)$ la razón doble $[a, b, c, d]$ era igual a la razón simple $(\beta\, \gamma\, \delta)$. Observa que, en este caso, a es el punto del infinito para la inmersión

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathbf{A}^1_{\mathbf{k}} & \longrightarrow & \mathbf{P}^1_{\mathbf{k}} \\ & x & \mapsto & (1 : x)\,, \end{array}$$

por lo que si identificamos $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}} \setminus \{a\}$ con $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ mediante i^{-1}, los puntos b, c y d se corresponden con β, γ y δ y la razón doble de a, b, c, d es la razón simple de los puntos β, γ y δ, correspondientes a b, c, d en $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$.


a
d
c
b
$\mathbf{P}^1$


a
d
c
b
$\mathbf{P}^1$

Supongamos ahora que a no es necesariamente igual a $(0:1)$ sino que lo movemos en $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ pero seguimos considerándolo como el punto del infinito. Para ello, identificamos $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ con $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ componiendo una proyectividad g de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$, que trasforme a en $(0:1)$, con i^{-1}. Por ejemplo, elegimos como g a la proyectividad que lleva a a $(0:1)$ y deja b y c fijos. En ese caso, los puntos correspondientes a b, c en $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ (la correspondencia viene dada por $i^{-1} \circ g$) son β, γ respectivamente, mientras que el punto correspondiente a d, que llamaremos ahora δ', se va moviendo en $\mathbf{A}^1_{\mathbf{k}}$ a medida que movemos a en $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$. La posición de δ', relativa a β y γ, viene expresada justamente por la razón simple $(\beta\,\gamma\,\delta')$ y es, por la proposición 8.68, igual a la razón doble $[(0:1), b, c, g(d)] = [g(a), g(b), g(c), g(d)] = [a, b, c, d]$. Interpretamos geométricamente la igualdad

$$(\beta\,\gamma\,\delta') = [a, b, c, d]$$

cuando $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ y para $b = (1:0), c = (1:1), d = (1:2)$; sea $a = (1:\alpha)$. En ese caso la proposición 8.65 nos da

$$[a, b, c, d] = \frac{2\alpha - 2}{\alpha - 2}.$$

Si α tiende a infinito, entonces $[a, b, c, d]$ tiende a 2 y, de hecho, si $a = (0:1)$, $[a, b, c, d] = 2$. Eso quiere decir que, cuando a está "infinitamente lejos" de b, c, d, el segmento $\overline{\beta\delta'}$ es el doble del segmento $\overline{\beta\gamma}$, es decir, γ es el punto medio de $\overline{\beta\delta'}$ o, en otras palabras, γ equidista de β y δ'. Ahora partimos de a infinitamente lejos (es decir, $a = (0:1)$) y vamos "acercando" a a d. Si a es $(1:10)$ (a aún está bastante lejos de d), $[a, b, c, d] = 2,25$. Así pues ahora el segmento $\overline{\beta\delta'}$ es algo más del doble del segmento $\overline{\beta\gamma}$, es decir, δ' se ha alejado algo de γ, porque d está más cerca del infinito. Si $a = (1:4)$, el infinito se ha acercado bastante a d. En ese caso $[a, b, c, d] = 3$, es decir, δ' se ha alejado mucho más de γ, ya que ahora el segmento $\overline{\beta\delta'}$ es el triple del segmento $\overline{\beta\gamma}$. Si $a = (1:3)$, el infinito se ha acercado aún más a d. En ese caso $[a, b, c, d] = 4$, es decir, δ' se alejado aún más de γ, ya que ahora el segmento $\overline{\beta\delta'}$ es el cuádruple del segmento $\overline{\beta\gamma}$. De hecho, cuando a tiende a d (es decir, cuando α tiende a 2), el efecto que se produce es que δ' se aleja cada vez más de γ, porque δ' se va al infinito. Esto lo vemos en que $[a, b, c, d]$ tiende a infinito, es decir, la longitud del segmento $\overline{\beta\delta'}$ es cada vez más grande con respecto a la longitud del segmento $\overline{\beta\gamma}$, que es una cantidad finita. Dejamos como ejercicio la interpretación geométrica de la razón doble $[a, b, c, d]$ cuando a sobrepasa a d y sigue moviéndose hacia la "izquierda" (es decir, cuando $\alpha < 2$).

Todo esto tiene una interpretación intuitiva en términos de perspectiva, ya que, si dibujamos los puntos b, c y d (alineados) en un papel, el punto a (alineado con b, c y d) que elegimos como punto del infinito determina cuál será el "punto de fuga" de nuestro dibujo. Cuando $a = (0:1)$ (a está "infinitamente lejos" de b, c, d), el punto del infinito ni siquiera está en nuestro dibujo (está verdaderamente en el infinito) por lo que las distancias las pintamos tal como son, es decir, no dibujamos con perspectiva. En cambio, cuando a es un punto $(1:\alpha)$, ubicamos a (el infinito, el punto de fuga), en nuestro dibujo y según lo pongamos más cerca o más lejos así irá cambiando la perspectiva, siendo más extrema a medida que a se acerca a d. Los puntos b, c, d los seguimos pintando en el mismo lugar del papel con lo cual la distancia entre ellos, medida sobre el papel, es siempre la misma, pero según dibujemos el punto de fuga más lejos o más cerca, la longitud que nuestro cerebro asigna al segmento $\overline{bd}$ con respecto al segmento $\overline{bc}$ disminuirá o aumentará (es decir, la ilusión óptica es que el punto d se acerca o se aleja de los puntos b y c y de nosotros). Vemos todo esto ilustrado en los tres dibujos anteriores. En el primero, el punto del infinito a no está en el dibujo (está, como decíamos, en el infinito). En el segundo y en el tercero, el punto del infinito a sí está en el dibujo. El cuadrilátero representa una casa, limitada

por los puntos b y c y en el punto d hay un árbol. ¿En cuál de los tres dibujos se percibe que la distancia del árbol a la casa, con respecto al tamaño de esta última, es mayor?

El espacio dual

Una recta l de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ viene dada por una ecuación de la forma $u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2=0$, donde u_0,u_1,u_2 son elementos de $\mathbf{k}$ no todos nulos. Dos ecuaciones como $u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2=0$ y $u'_0x_0+u'_1x_1+u'_2x_2=0$ definen la misma recta si y solo si existe $\lambda\in\mathbf{k}^*$ tal que $(u'_0,u'_1,u'_2)=\lambda(u_0,u_1,u_2)$. Esta observación sugiere que al conjunto de todas las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ se le pueda dotar de estructura de plano proyectivo. Lo hacemos de forma intrínseca:

Proposición 9.20. *El conjunto de rectas de* $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ *está en correspondencia biyectiva con* $\mathbf{P}(\mathbf{k}^{3^*})$*, donde* $\mathbf{k}^{3^*}$ *es el* espacio dual *de* $\mathbf{k}^3$*, es decir, el espacio vectorial formado por todas las* formas lineales homogéneas *(es decir, aplicaciones lineales a* $\mathbf{k}$*) de* $\mathbf{k}^3$*.*

Demostración. Una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es la proyectivización de un plano vectorial de $\mathbf{k}^3$. Por otra parte, un plano vectorial de $\mathbf{k}^3$ es el núcleo de una forma lineal homogénea no nula de $\mathbf{k}^3$. Ahora bien, dos formas lineales homogéneas ω_1 y ω_2 tienen el mismo núcleo si y solo si existe $\lambda\in\mathbf{k}^*$ tal que $\omega_2=\lambda\omega_1$. Por tanto, por una parte, existe una biyección entre el conjunto de rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y el conjunto de planos vectoriales de $\mathbf{k}^3$ y, por otra parte, existe una biyección entre el conjunto de planos vectoriales de $\mathbf{k}^3$ y la proyectivización del espacio dual $\mathbf{k}^{3^*}$ de $\mathbf{k}^3$. □

Es claro que la proposición anterior puede generalizarse a $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$, o incluso a cualquier espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$, sin más que cambiar la palabra recta por la palabra hiperplano:

Proposición 9.21. *Sea* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbf{k}$ *de dimensión* $n+1$*. El conjunto de hiperplanos de* $\mathbf{P}(V)$ *está en correspondencia biyectiva con* $\mathbf{P}(V^*)$*, donde* V^* *es el* espacio dual *de* V*. Por otro lado* $\mathbf{P}(V^*)$ *es un espacio proyectivo de dimensión* n *que es por tanto isomorfo (aunque no de forma canónica) a* $\mathbf{P}(V)$*.*

Definición 9.22. Dado un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$, llamaremos a $\mathbf{P}(V^*)$ su *espacio proyectivo dual* y lo denotaremos por $\mathbf{P}(V)^*$. Teniendo en cuenta la proposición 9.21 interpretaremos los elementos (es decir, los *puntos*) de $\mathbf{P}(V)^*$ como hiperplanos proyectivos de $\mathbf{P}(V)$.

Ejemplo 9.23. En $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$ cada punto l corresponde a una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación $u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2=0$, por lo que a dicho punto le podemos asignar de forma natural las *coordenadas* $(u_0:u_1:u_2)$. En efecto, puedes comprobar que $(u_0:u_1:u_2)$ son las coordenadas de l respecto del sistema de referencia proyectivo de $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$, $\mathscr{R}^*=\{l_0,l_1,l_2;l_3\}$ donde l_0 es la recta de ecuación $x_0=0$, l_1 es la recta de ecuación $x_1=0$, l_2 es la recta de ecuación $x_2=0$ y l_3 es la recta de ecuación $x_0+x_1+x_2=0$. Para comprobar que $\mathscr{R}^*$ es un sistema de referencia proyectivo de $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$, puedes demostrar que $\mathscr{R}^*$ tiene como base asociada a la base dual de la base canónica de $\mathbf{k}^3$. Recuerda que si $B=\{v_0,v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, la base dual B^* de B es la base de V^* formada por $v_0^*,v_1^*,\ldots,v_n^*$, donde v_i^* es la única aplicación lineal de V a $\mathbf{k}$ que cumple $v_i^*(v_j)=0$ si $i\neq j$ y $v_i^*(v_i)=1$. Si $V=\mathbf{k}^3$ y $B=\{e_0,e_1,e_2\}$ es la base canónica, es sencillo comprobar

que las formas lineales v_0^*, v_1^*, v_2^* son las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} v_0^*: & \mathbf{k}^3 & \longrightarrow & \mathbf{k} \\ & (x_0, x_1, x_2) & \mapsto & x_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} v_1^*: & \mathbf{k}^3 & \longrightarrow & \mathbf{k} \\ & (x_0, x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} v_2^*: & \mathbf{k}^3 & \longrightarrow & \mathbf{k} \\ & (x_0, x_1, x_2) & \mapsto & x_2\,. \end{array}$$

De igual forma, en $\mathbf{P}^{n*}_{\mathbf{k}}$ cada punto H corresponde a un hiperplano de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ de ecuación $u_0x_0 + u_1x_1 + \cdots + u_nx_n = 0$, por lo que a dicho punto le podemos asignar de forma natural las coordenadas $(u_0 : u_1 : \cdots : u_n)$, que son las coordenadas de H respecto del sistema de referencia proyectivo $\mathscr{R}^* = \{H_0, H_1, \ldots, H_n; H_{n+1}\}$ de $\mathbf{P}^{n*}_{\mathbf{k}}$, donde, para todo $i = 0, \ldots, n$, H_i es el hiperplano de ecuación $x_i = 0$ y H_{n+1} es el hiperplano de ecuación $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0$ (igual que en $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$, $\mathscr{R}^*$ es un sistema de referencia proyectivo de $\mathbf{P}^{n*}_{\mathbf{k}}$ y tiene como base asociada a la base dual de la base canónica de $\mathbf{k}^{n+1}$).

Siguiendo con el caso de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ observamos cierta "simetría" entre puntos y rectas. Por una parte, dos puntos distintos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ determinan una única recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Por otra parte, dos rectas distintas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ se cortan en un único punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Con el concepto de plano dual podemos expresar esta simetría, que llamaremos *dualidad*, de otra forma: dos puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ determinan una única recta, es decir, un punto de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$; dos puntos del *plano proyectivo* dual $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$ (que corresponden a dos rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$) determinan una única recta de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$ y esa recta la vamos a poder identificar como un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ (que va a corresponder al punto de intersección de las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$). Lo vemos más claramente en la siguiente proposición:

Proposición 9.24. *(Dualidad en el plano proyectivo). Existe una correspondencia biyectiva entre los puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y las rectas de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$. Existe una correspondencia biyectiva entre las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y los puntos de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$. Estas correspondencias invierten las relaciones de pertenencia.*

Demostración. La segunda afirmación se sigue de forma directa de la definición de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$. Para la primera afirmación, consideremos un punto $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y todas las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pasan por p. Una recta de ecuación $u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2 = 0$ pasa por p si y solo si $a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2 = 0$. Por otra parte, recordemos que el conjunto de rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es el plano dual $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$. En ese caso, un punto l de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$ corresponde a una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pasa por p si y solo si *las coordenadas* $(u_0 : u_1 : u_2)$ *de* l *cumplen* $a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2 = 0$, es decir, si y solo si l *pertenece a la recta de* $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$ *de ecuación* $a_0U_0 + a_1U_1 + a_2U_2 = 0$. Por tanto el punto p da lugar a una recta de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$, la de ecuación $a_0U_0 + a_1U_1 + a_2U_2 = 0$. Recíprocamente, una recta L de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$ tiene, en coordenadas, ecuación $a'_0U_0+a'_1U_1+a'_2U_2 = 0$ para alguna terna $(a'_0, a'_1, a'_2) \neq (0, 0, 0)$. Por lo visto anteriormente, los puntos de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$ que pertenecen a L corresponden a rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$ cuyos coeficientes cumplen $a'_0u_0 + a'_1u_1 + a'_2u_2 = 0$; es decir, los puntos de L corresponden a las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pasan por el punto $(a'_0 : a'_1 : a'_2)$. Así pues, una recta de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$ da lugar a un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y es claro que los procesos que hemos descrito para obtener una recta $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$ a partir de un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y para obtener un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ a partir de una recta de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$ son inversos uno del otro. Finalmente, si p es un punto $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y l es una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ tal que $p \in l$, por las correspondencias biyectivas que acabamos de describir entre puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y rectas de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$ y entre rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y puntos de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$, el punto p de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ corresponde a una

recta en $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$ que contiene al punto de $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$ correspondiente a l. Igualmente, si L es una recta de $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$ y q es un punto de $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$ tal que $q \in L$, q corresponderá a una de las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pasa por el punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ correspondiente a L. □

Definición 9.25. Dado un punto p de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, al conjunto de rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pasan por p lo llamamos el *haz de rectas* por el punto p o con *base* el punto p.

Observación 9.26. Un haz de rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ se corresponde por dualidad a una recta de $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$.

He preferido describir la dualidad de una forma concreta en la demostración de la proposición 9.24, pero esta puede obtenerse de manera más "elegante" y conceptual del hecho de que, *si V es un espacio vectorial de dimensión finita* (todos los espacios vectoriales con los que estamos trabajando en este curso lo son), existe un isomorfismo *canónico* (es decir, que se puede construir sin elegir bases) entre V y su *espacio bidual* $(V^*)^*$ (que denotamos como V^{**}). Por otra parte, la dualidad que hemos visto entre puntos y rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ se puede generalizar a $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y más aún, a un espacio proyectivo arbitrario $\mathbf{P}(V)$ pero, ¡cuidado!, esta dualidad no será en general entre puntos y rectas, sino entre *puntos e hiperplanos*:

Ejercicio 9.27. Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo arbitrario.

(1) Enuncia y demuestra un resultado de dualidad para $\mathbf{P}(V)$ análogo a la proposición 9.24, describiendo explícitamente esta dualidad como se hace en la demostración de la proposición 9.24 (indicación: para hacer esto último deberás fijar una base B de V y usar la base dual B^* de B y sus referencias proyectivas asociadas).
(2) Comprueba que la dualidad que has descrito en el apartado (1) se puede expresar como una *proyectividad* entre $\mathbf{P}(V)$ y $(\mathbf{P}(V)^*)^*$.
(3) Para el/la alumno/a que conozca el isomorfismo canónico entre V y V^{**} mencionado en el párrafo anterior: Comprueba que la proyectividad del apartado (2) está inducida por el isomorfismo canónico entre V y V^{**}.

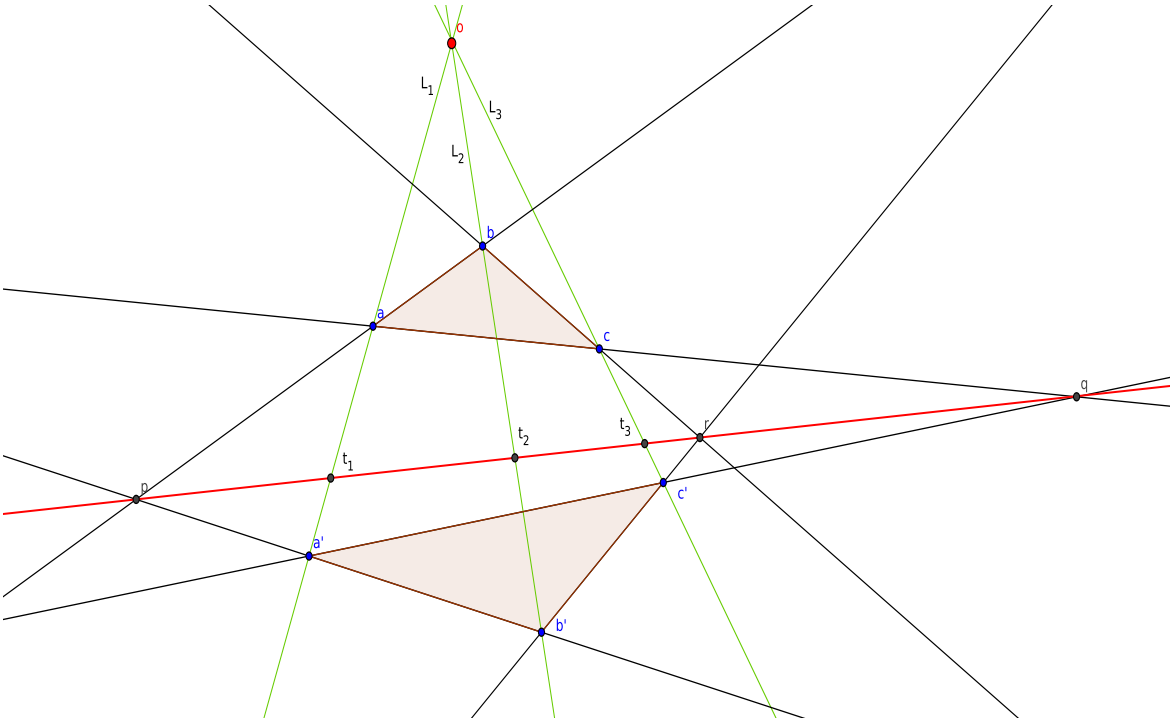
La dualidad se puede generalizar aún más en un espacio proyectivo de dimensión n, obteniéndose biyecciones entre subespacios proyectivos de dimensión r y subespacios proyectivos de dimensión $n - r - 1$:

Ejercicio 9.28. Sea Λ un subespacio proyectivo de dimensión m de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n.

(1) Demuestra que el conjunto $\Omega(\Lambda) = \{H \in \mathbf{P}(V)^* | \Lambda \subset H\}$ es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)^*$ de dimensión $n - m - 1$.
(2) Observa que $\Omega(\emptyset) = \mathbf{P}(V)^*$ y $\Omega(\mathbf{P}(V)) = \emptyset$.
(3) Observa que, en $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$, a un punto p le corresponde $\Omega(p)$ en $\mathbf{P}^{3^*}_{\mathbf{k}}$, que es un plano de $\mathbf{P}^{3^*}_{\mathbf{k}}$ (cada punto de ese plano de $\mathbf{P}^{3^*}_{\mathbf{k}}$ corresponde a un plano que pasa por p) y a un plano Π de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$ le corresponde $\Omega(\Pi)$, que es un punto de $\mathbf{P}^{3^*}_{\mathbf{k}}$.
(4) Observa que, en $\mathbf{P}^3_{\mathbf{k}}$, los planos que contienen a una recta l forman un *haz de planos* (el haz de planos con *base* l) y a este haz de planos le corresponde la recta $\Omega(l)$ de $\mathbf{P}^{3^*}_{\mathbf{k}}$ (cada punto de esa recta corresponde a un plano del haz).

Indicación: si tienes dificultades para resolver este ejercicio, puedes consultar el teorema 6.11 de "Apuntes de Geometría Proyectiva", de E. Arrondo.

Usamos ahora el principio de dualidad para demostrar otro teorema clásico sobre configuraciones de rectas en el plano, el teorema de Desargues:



Teorema 9.29. *(Desargues) Sean abc y $a'b'c'$ tres triángulos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ tales que sus vértices a, b, c y a', b', c' cumplen $a \neq a'$, $b \neq b'$ y $c \neq c'$ y las rectas que contienen lados correspondientes son distintas, es decir, $< a, b > \neq < a', b' >$, $< a, c > \neq < a', c' >$ y $< b, c > \neq < b', c' >$. Sea p el punto de intersección de $< a, b >$ y $< a', b' >$, sea q el punto de intersección de $< a, c >$ y $< a', c' >$ y sea r el punto de intersección de $< b, c >$ y $< b', c' >$. Entonces, para que los puntos p, q y r estén alineados es condición necesaria y suficiente que las rectas $< a, a' >$, $< b, b' >$ y $< c, c' >$ sean coincidentes.*

Demostración. (Condición suficiente): Tienes un poco más adelante un dibujo que ilustra el enunciado y la demostración de la condición suficiente del teorema, pero es aconsejable que, a medida que vayas leyendo el argumento, vayas dibujando las rectas y puntos que aparecen. Escribimos $l_1 =< a, a' >$, $l_2 =< b, b' >$ $l_3 =< c, c' >$. Por hipótesis las rectas l_1, l_2 y l_3 se cortan en un punto, que llamaremos o. Denotamos también $t_1 = < p, r > \cap\, l_1$, $t_2 = < p, r > \cap\, l_2$ y $t_3 = < p, r > \cap\, l_3$ y definimos f_p como la perspectividad de l_1 sobre l_2 de centro p y f_r como la perspectividad de l_2 sobre l_3 de centro r. Tenemos entonces

$$\begin{array}{ccccc} l_1 & \xrightarrow{f_p} & l_2 & \xrightarrow{f_r} & l_3 \\ o & \mapsto & o & \mapsto & o \\ a & \mapsto & b & \mapsto & c \\ a' & \mapsto & b' & \mapsto & c' \\ t_1 & \mapsto & t_2 & \mapsto & t_3 \end{array}$$

Observamos que la composición $f_r \circ f_p$ es una proyectividad de l_1 a l_3 que deja fijo el punto o, que es el punto de intersección de l_1 y l_3, por lo que, por el teorema 9.11, $f_r \circ f_p$ es una perspectividad de l_1 sobre l_3 y su centro es necesariamente el punto de intersección de $< a, c >$ y $< a', c' >$, o sea, q. Como $(f_r \circ f_p)(t_1) = t_3$, se tiene que t_1, t_3 y q están

alineados, es decir, q está en la recta $< t_1, t_3 >$, que es la recta $< p, r >$, por lo que p, q y r están alineados, como queríamos demostrar.

Condición necesaria: Para demostrar la condición necesaria vamos a usar dualidad: una vez que "traduzcamos" todas las rectas y todos los puntos del enunciado del teorema 9.29 en puntos y rectas de $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{k}}$ respectivamente, así como las relaciones entre esas rectas y puntos en relaciones entre puntos y rectas en el dual (por ejemplo, puntos que en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ estén alineados darán lugar a rectas concurrentes en $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{k}}$; rectas concurrentes en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ darán lugar a puntos alineados en $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{k}}$, etc.), será claro que la condición necesaria del teorema de Desargues en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ se convierte en la condición suficiente del teorema de Desargues en $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{k}}$ (es decir, una implicación es la "dual" de la otra). Como $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{k}}$ es isomorfo a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y ya hemos demostrado la condición suficiente del teorema de Desargues en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, obtenemos el resultado (para más detalles puedes consultar las págs. 154–155 de "Geometry", de M. Audin). □

Hemos dado una demostración sintética del teorema de Desargues. En el siguiente ejercicio se propone una demostración usando coordenadas:

Ejercicio 9.30. Demuestra la condición suficiente del teorema de Desargues siguiendo estos pasos:

> Paso 1: Considera la referencia $\mathscr{R}$ formada por los puntos a, b y c y por el punto o donde se cortan las rectas $< a, a' >$, $< b, b' >$ y $< c, c' >$ como punto unidad.
> Paso 2: Calcula las coordenadas de los puntos p, q y r respecto de $\mathscr{R}$.
> Paso 3: Deduce que p, q y r están alineados.

Al igual que el teorema de Pappus, el teorema de Desargues también tiene versiones afines. Podemos obtener estas a partir de la versión proyectiva, realizando una elección adecuada de la recta del infinito:

Ejercicio 9.31. Usando el teorema de Desargues en el plano proyectivo, demuestra la siguiente versión afín:
Se consideran dos triángulos en el plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ *de vértices* a, b, c *y* a', b', c'*, tales que los lados* $\overline{ab}$ *y* $\overline{ac}$ *son paralelos, respectivamente, a los lados* $\overline{a'b'}$ *y* $\overline{a'c'}$*. El lado* $\overline{bc}$ *es paralelo a* $\overline{b'c'}$ *si y solo si las rectas* $< a, a' >$, $< b, b' >$ *y* $< c, c' >$ *son concurrentes.*

Concluimos esta subsección mostrando cómo utilizar la dualidad para hallar los subespacios invariantes de una proyectividad. Primero definimos la aplicación dual de una aplicación proyectiva:

Definición 9.32. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales sobre $\mathbf{k}$ y sean $\mathbf{P}(V_1)$ y $\mathbf{P}(V_2)$ los espacios proyectivos correspondientes. Sea ϕ una aplicación lineal de V_1 a V_2 y sea f la aplicación proyectiva de $\mathbf{P}(V_1)$ a $\mathbf{P}(V_2)$ inducida por ϕ. Recordemos que la *aplicación lineal dual* de ϕ es

$$\begin{array}{rccc} \phi^* : & V_2^* & \longrightarrow & V_1^* \\ & \omega & \mapsto & \omega \circ \phi. \end{array}$$

Llamamos *aplicación proyectiva dual* de f y la denotamos por f^* a la aplicación proyectiva de $\mathbf{P}(V_2)^*$ a $\mathbf{P}(V_1^*)$ inducida por ϕ^*.

Observación 9.33. Sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V_1)$ y $\mathbf{P}(V_2)$ y sean B_1 y B_2 bases de V_1 y de V_2 asociadas a $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ respectivamente. Sean B_1^* y B_2^* las bases duales de B_1 y de B_2 y sean $\mathscr{R}_1^*$ y $\mathscr{R}_2^*$ referencias proyectivas de $\mathbf{P}(V_1)^*$ y $\mathbf{P}(V_2)^*$ cuyas

bases asociadas sean B_1^* y B_2^* respectivamente (decimos que $\mathscr{R}_1^*$ es la *referencia dual* de $\mathscr{R}_1$ y que $\mathscr{R}_2^*$ es la *referencia dual* de $\mathscr{R}_2$). Recuerda que

$$M_{B_2^*,B_1^*}\phi^* = (M_{B_1,B_2}\phi)^t.$$

Por tanto, una matriz $(M_{\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2}f)^t$ es una matriz asociada a f^* respecto a $\mathscr{R}_2^*$ y $\mathscr{R}_1^*$.

Ejercicio 9.34. (1) Sea H un hiperplano proyectivo de $\mathbf{P}(V_2)$ que no contiene a la imagen de f. Demuestra que $f^{-1}(H)$ es un hiperplano proyectivo de $\mathbf{P}(V_1)$ y que f^* envía H a $f^{-1}(H)$.

(2) Demuestra que $\Omega(\mathrm{im}f)$ es el centro de f^*.

A continuación usamos el concepto de aplicación dual para calcular de manera sistemática los hiperplanos invariantes por una proyectividad:

Corolario 9.35. *Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo sobre $\mathbf{k}$ y sea f una proyectividad de $\mathbf{P}(V)$ en sí mismo. Un hiperplano H de $\mathbf{P}(V)$ es invariante por f si y solamente si $H \in \mathbf{P}(V)^*$ es un punto fijo de f^*. Por tanto, si f viene inducida por un automorfismo ϕ de V, el problema de hallar los hiperplanos invariantes por f se reduce a hallar los autovalores y autovectores (¡estos últimos son elementos de V^*, es decir, son formas lineales!) de ϕ^*.*

Demostración. Sea H un hiperplano invariante por f. Esto quiere decir que $f(H) = H$, lo que es equivalente a $H = f^{-1}(H)$. El ejercicio 9.34 (1) nos dice que en ese caso H corresponde a un punto de $\mathbf{P}(V)^*$ que es fijo por f^*. □

Ejercicio 9.36. Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo sobre $\mathbf{k}$ y sea f una proyectividad de $\mathbf{P}(V)$ en sí mismo.

(1) Demuestra que el conjunto de puntos fijos de f se puede escribir, de forma única, como una unión disjunta finita

$$\mathrm{Fij}(f) = \Lambda_1 \amalg \cdots \amalg \Lambda_s$$

de subespacios proyectivos no vacíos Λ_i de $\mathbf{P}(V)$.

(2) Demuestra que el conjunto de los puntos de $\mathbf{P}(V)^*$ correspondientes a los hiperplanos invariantes por f se puede escribir, de forma única, como una unión disjunta finita

$$\Omega_1 \amalg \cdots \amalg \Omega_s,$$

donde cada Ω_i es un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)^*$ isomorfo a Λ_i.

(3) Concluye que, en particular, existe una biyección entre el conjunto de puntos fijos de f y el conjunto de hiperplanos invariantes por f.

Indicación: observa que si M es una matriz cuadrada de orden $n+1$, el polinomio característico de M es el mismo que el polinomio característico de M^t. Observa también que, para todo $\lambda \in \mathbf{k}$, el rango de las matrices $M - \lambda I_{n+1}$ y $M^t - \lambda I_{n+1}$ coincide.

Finalmente usaremos el corolario 9.35 para dar un método sistemático para hallar *todos* los subespacios invariantes por una proyectividad:

Ejercicio 9.37. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo *algebraicamente cerrado* (es decir, todo polinomio de grado positivo en una variable con coeficientes en $\mathbf{k}$ tiene al menos una raíz; esto ocurre, por ejemplo, si $\mathbf{k} = \mathbf{C}$). Sea $\mathbf{P}(V)$ un espacio proyectivo sobre $\mathbf{k}$, sea f una proyectividad de $\mathbf{P}(V)$ en sí mismo y sea Λ un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(V)$ invariante por f.

(1) Demuestra que existe un punto fijo de f contenido en Λ.

(2) Demuestra que existe un hiperplano invariante por f que contiene a Λ.

Indicación: (2) es el enunciado dual de (1), por lo que puedes obtener (2) aplicando (1) a f^*.

Observación 9.38. Dada una proyectividad f de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n sobre $\mathbf{k}$ en sí mismo, ya vimos, en la proposición 8.20, cómo hallar sus puntos fijos. El corolario 9.35 y el ejercicio 9.37 nos proporcionan además un método sistemático para hallar todos los subespacios invariantes de una proyectividad cuando el cuerpo $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado (por ejemplo, $\mathbf{k} = \mathbf{C}$).

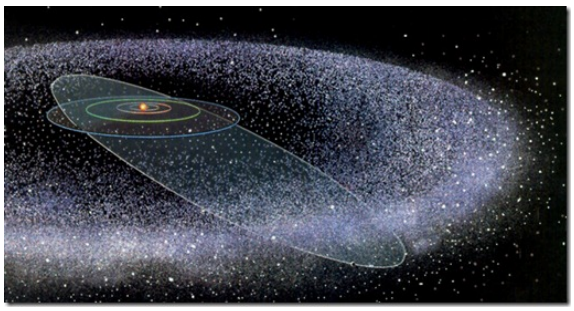
En efecto, en este caso, comenzamos hallando todos los hiperplanos invariantes por f. Para cada hiperplano invariante H por f, consideramos $f_{|_H}$. Por el corolario 8.6 y la proposición 8.14, (3) sabemos que $f_{|_H}$ es una proyectividad de H en H. Hallamos entonces todos los hiperplanos invariantes Λ por $f_{|_H}$, que no serán sino los subespacios de $\mathbf{P}(V)$ de codimensión 2, contenidos en H e invariantes por f. Por ello, como este proceso lo realizamos para todos los hiperplanos H invariantes por f y, según el ejercicio 9.37, (2), todo subespacio Λ de codimensión 2, invariante por f, está contenido en algún hiperplano H invariante por f, encontramos así todos los subespacios de codimensión 2 invariantes por f. Repitiendo este argumento para todo subespacio invariante Λ de codimensión 2 (es decir, hallando, para cada Λ, los hiperplanos invariantes de la proyectividad $f_{|_\Lambda}$ de Λ en sí mismo), obtenemos todos los subespacios de codimensión 3 invariantes por f. Continuamos el argumento hasta encontrar todos los subespacios invariantes de codimensión $n-1$, es decir, hasta encontrar todas las rectas invariantes (aunque podríamos, no hace falta encontrar de esta manera los puntos invariantes por f, ya que estos son los puntos fijos y los podemos hallar directamente usando la proposición 8.20).

Observación 9.39. Si el cuerpo $\mathbf{k}$ no es algebraicamente cerrado (por ejemplo, si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$), también se puede usar el ejercicio 9.37 para hallar todos los subespacios invariantes por una proyectividad f de un espacio proyectivo $\mathbf{P}(V)$ de dimensión n en sí mismo. En este caso, lo que haremos es *extender el cuerpo de escalares* de $\mathbf{k}$ a $\overline{\mathbf{k}}$, donde $\overline{\mathbf{k}}$ es la *clausura algebraica* de $\mathbf{k}$ (si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, entonces $\mathbf{k} = \mathbf{C}$ y a hacer esto lo denominamos *complexificar* el problema). Vemos cómo se lleva a cabo esto en el caso concreto en que f es una proyectividad de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$. En este caso f está representada por una matriz M respecto de la referencia canónica de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$. La matriz M es una matriz $(n+1) \times (n+1)$ cuyos elementos son números reales, que son también números complejos, pues $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Por ello, M define una proyectividad $f_{\mathbf{C}}$ de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ en $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ (¡la matriz M sigue siendo invertible sobre $\mathbf{C}$!). Aplicamos ahora a $f_{\mathbf{C}}$ el método descrito en la observación 9.38. De esta forma encontraremos todos los subespacios invariantes por $f_{\mathbf{C}}$. Estos subespacios invariantes son subespacios proyectivos de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$. Aquellos de entre esos subespacios que sean además subespacios proyectivos de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$ serán los subespacios invariantes por f que buscamos.

Si fijamos una referencia proyectiva, es relativamente sencillo generalizar la construcción anterior al caso general en que $\mathbf{P}(V)$ sea un espacio proyectivo real. No nos detenemos en el caso en que $\mathbf{k}$ es un cuerpo arbitrario, ya que para esto necesitamos definir la clausura algebraica $\overline{\mathbf{k}}$ de un cuerpo $\mathbf{k}$ (brevemente, $\overline{\mathbf{k}}$ es el cuerpo "más pequeño" de entre aquellos cuerpos F que contienen a $\mathbf{k}$ y satisfacen la propiedad de que todo polinomio no constante en una variable y con coeficientes en $\mathbf{k}$ tiene alguna raíz en F) y esto se escapa del ámbito de este curso. De todas formas, si conociéramos $\overline{\mathbf{k}}$, el proceso sería el mismo que hemos visto, ya que, al igual que $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$, los cuerpos $\mathbf{k}$ y $\overline{\mathbf{k}}$ cumplen $\mathbf{k} \subset \overline{\mathbf{k}}$.

TEMA 3: **CÓNICAS.**

Hasta ahora hemos estudiado los subconjuntos más sencillos, desde un punto de vista geométrico, definidos por ecuaciones polinómicas, de un espacio afín o de un espacio proyectivo: las *variedades lineales* (puntos, rectas, planos, etc.). A estos conjuntos les hemos llamado subespacios afines en el caso afín y subespacios proyectivos en el caso proyectivo. Estos subconjuntos son los más simples porque vienen definidos como el conjunto de ceros de una serie de polinomios lineales (homogéneos en el caso proyectivo), es decir, vienen definidos por polinomios de grado 1. A su vez, dentro de estas variedades lineales, las más sencillas son aquellas definidas por una única ecuación lineal, que son las que hemos llamado hiperplanos (afines o proyectivos). Parece lógico pensar que los subconjuntos siguientes en cuanto a nivel de complejidad sean aquellos que se obtienen como conjunto de ceros de un polinomio (homogéneo en el caso proyectivo) *cuadrático* o de grado 2. Estos subconjuntos son las llamadas *hipersuperficies cuádricas*. Para abordarlas se pueden usar las herramientas afines, euclídeas y proyectivas que hemos ido desarrollando hasta ahora, de forma que el estudio de las cuádricas desde una perspectiva proyectiva nos dé información sobre las cuádricas afines y viceversa. De entre las hipersuperficies cuádricas estudiaremos las más sencillas, las del plano (afín y proyectivo). Estas serán las *curvas* del plano definidas por una ecuación de grado 2. A estas curvas se les llama *cónicas*. Las cónicas son un tipo de curvas planas cuyo estudio se remonta a los antiguos griegos. Su nombre se debe a que pueden obtenerse como secciones de un cono en el espacio afín cuando lo cortamos con diferentes planos afines. Las cónicas están presentes en disciplinas como la astronomía y, en general, en la mecánica clásica, y tienen aplicaciones en óptica (espejos, lentes), en ingeniería (radares, antenas) o en arquitectura (para diseñar superficies con propiedades interesantes desde un punto de vista estético, acústico...).



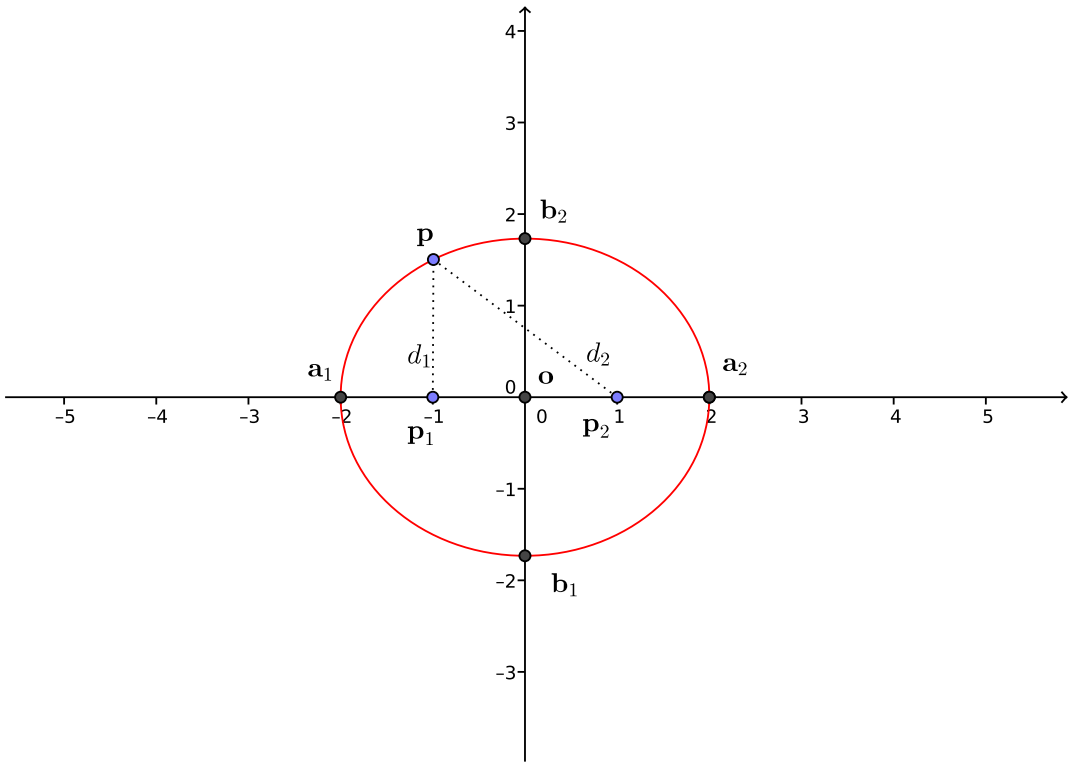
Las órbitas de los planetas del Sistema Solar son elipses,
una clase de cónicas (primera ley de Kepler).

10. Cónicas en el plano afín

Las cónicas como lugares geométricos en el plano afín euclídeo

Quizá hayáis visto ya cómo una cónica se puede definir a partir de sus propiedades métricas. Nuestro primer objetivo es justificar por medio de ejemplos que, tal y como anunciábamos en la introducción de este tema, estas cónicas definidas por propiedades métricas o como secciones cónicas son curvas que se pueden describir por medio de una ecuación de segundo

FIGURA 1. Elipse C_1



grado. Tomemos el ejemplo de una *elipse real*. Una elipse real es el *lugar geométrico* de aquellos puntos del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tales que la suma de sus distancias a dos puntos dados, iguales o distintos, llamados *focos* de la elipse, es constante y mayor que la distancia entre los focos. Esta definición métrica proporciona un método sencillo de dibujar una elipse en una hoja de papel, usando dos chinchetas (que se clavan en los focos de la elipse), una cuerda (que se ata en las chinchetas) y un lápiz (con cuya punta tensamos la cuerda), que deslizamos sobre el papel. A este método se le conoce como *método del jardinero*, porque, usando estacas en vez de chinchetas y lápiz, también sirve para dibujar elipses en un jardín, por ejemplo.

Si los dos focos son puntos distintos, la recta que los une se denomina *eje principal o mayor* de la elipse y el punto medio del segmento que determinan los focos, *centro* de la elipse. En este caso, la recta que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje mayor de la misma se denomina *eje secundario o menor* de la elipse. Los puntos de intersección de los ejes con la elipse se denominan *vértices* de la elipse. Los segmentos que unen el centro de la elipse con cada uno de sus cuatro vértices se llaman *semiejes* (*mayores o menores* según el eje en el que estén). Estudiamos a continuación una elipse real concreta:

Ejemplo 10.1. En el plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con su estructura euclídea estándar consideramos los puntos $p_1 = (-1, 0)$ y $p_2 = (1, 0)$. Sea C_1 el conjunto de puntos p de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tales que la suma de sus distancias $d_1 = \mathrm{d}(p, p_1)$, $d_2 = \mathrm{d}(p, p_2)$ a p_1 y a p_2 es $d_1 + d_2 = 4$. Por lo dicho anteriormente la curva C_1 es una elipse real, los puntos p_1 y p_2 son los focos de C_1,

los ejes mayor y menor de C_1 son las rectas de ecuaciones $y = 0$ y $x = 0$, el centro de C_1 es el punto $o = (0, 0)$, los vértices de C_1 son los puntos $a_1 = (-2, 0), a_2 = (2, 0), b_1 = (0, -\sqrt{3}), b_2 = (0, \sqrt{3})$ y los semiejes de C_1 miden 2 y $\sqrt{3}$.

Veamos ahora cómo se escribe en coordenadas la condición $\mathrm{d}(p, p_1) + \mathrm{d}(p, p_2) = 4$. Un punto $p = (x, y)$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ pertenece a C_1 si y solo si

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4.$$

Como ambos lados de la ecuación aneterior son no negativos, esta es equivalente a

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 - 16 = -2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

y esta a

$$x^2 + y^2 - 7 = -\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

La última ecuación es equivalente a

$$(x^2 + y^2 - 7)^2 = ((x+1)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2) \tag{10.1.1}$$

ya que no existen puntos (x, y) de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que satisfagan

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 - 16 = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2},$$

pues esto es equivalente a $\mathrm{d}(p, p_1) - \mathrm{d}(p, p_2) = \pm 4$, que contradice la igualdad triangular. Desarrollando y simplificando (10.1.1) obtenemos que C_1 es el conjunto de puntos $p = (x, y)$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tales que

$$3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$$

o, equivalentemente, tales que

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \tag{10.1.2}$$

El ejemplo 10.1 nos muestra que podemos expresar C_1 como el conjunto de *ceros* de un polinomio de grado 2 en x e y (el polinomio $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1$ o el polinomio $3x^2 + 4y^2 - 12$) o, lo que es lo mismo, como el conjunto de soluciones de una ecuación de grado 2 en x, y (la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$ o la ecuación $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$). Esto nos da otro enfoque para acercarnos a las cónicas: describirlas analíticamente, es decir, por medio de ecuaciones. A continuación generalizamos el ejemplo 10.1 considerando elipses reales que tienen como centro el punto $(0, 0)$ y como eje mayor la recta de ecuación $y = 0$:

Ejercicio 10.2. En el plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con su estructura euclídea estándar consideramos la elipse real E que tiene por vértices los puntos $(-a, 0), (a, 0), (0, -b)$ y $(0, b)$, donde a y b son números reales que cumplen $a > b > 0$. Demuestra que

(a) los focos de E son los puntos $p_1 = (-c, 0)$ y $p_2 = (c, 0)$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$;
(b) el eje mayor de E es la recta de ecuación $y = 0$, el eje menor de E es la recta de ecuación $x = 0$, el centro de E es el punto $(0, 0)$ y los semiejes mayor y menor de E miden a y b respectivamente;
(c) los puntos p de E son aquellos puntos de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que cumplen $\mathrm{d}(p, p_1) + \mathrm{d}(p, p_2) = 2a$;
(d) un punto $p = (x, y)$ pertenece a E si y solo si

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.2.1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Ejercicio 10.3. En el plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con su estructura euclídea estándar consideramos la circunferencia S de centro $o = (\alpha, \beta)$ y radio r (siendo r un número real positivo). Demuestra que

(a) S es una elipse real en la que los focos son iguales a o (indicación: observa que un punto p de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ pertenece a S si y solo si cumple $\mathrm{d}(p, o) + \mathrm{d}(p, o) = 2r$);
(b) un punto $p = (x, y)$ pertenece a S si y solo si

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \tag{10.3.1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0$$

(si $o = (0, 0)$, ¿puedes obtener a partir de (10.3.1) una ecuación como (10.2.1)? ¿cómo?).

Vemos ahora otro ejemplo de elipse en el que, al contrario del ejemplo 10.1 y del ejercicio 10.2, el centro no es el $(0, 0)$ y el eje mayor no es la recta de ecuación $y = 0$ (esto tendrá como consecuencia que, aun siendo de segundo grado, la ecuación (10.4.1) que obtendremos para esta elipse será más complicada que (10.2.1):

Ejemplo 10.4. En $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con su estructura euclídea estándar consideramos los puntos $p'_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$ y $p'_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$ y el conjunto C'_1 de puntos p tales que la suma de sus distancias a p'_1 y a p'_2 es $\mathrm{d}(p, p'_1) + \mathrm{d}(p, p'_2) = 4$. Intuitivamente parece claro que C'_1 debe ser una curva muy similar a C_1, ya que en la definición de C'_1 solo hemos cambiado, con respecto a la definición de C_1, los puntos p_1 y p_2 por los puntos p'_1 y p'_2, pero la distancia entre ellos se sigue conservando, es decir, $\mathrm{d}(p_1, p_2) = \mathrm{d}(p'_1, p'_2) = 2$. En efecto, C'_1 es una elipse real cuyos focos son p'_1 y p'_2, cuyos ejes mayor y menor son las rectas L'_1 y L'_2 de ecuaciones $x - y = 0$ y $x + y - 2 = 0$, cuyo centro es el punto $o' = (1, 1)$ y cuyos semiejes miden 2 y $\sqrt{3}$ (más adelante veremos que C'_1 es el resultado de aplicarle a C_1 la isometría que resulta de componer la traslación de vector $(1, 1)$ con un giro de centro $(1, 1)$ y ángulo $\pi/4$). Puedes comprobar, argumentando como en el ejemplo 10.1, que si $p = (x, y)$, la condición $\mathrm{d}(p, p'_1) + \mathrm{d}(p, p'_2) = 4$ es equivalente a

$$7x^2 + 7y^2 - 2xy - 12x - 12y - 12 = 0, \tag{10.4.1}$$

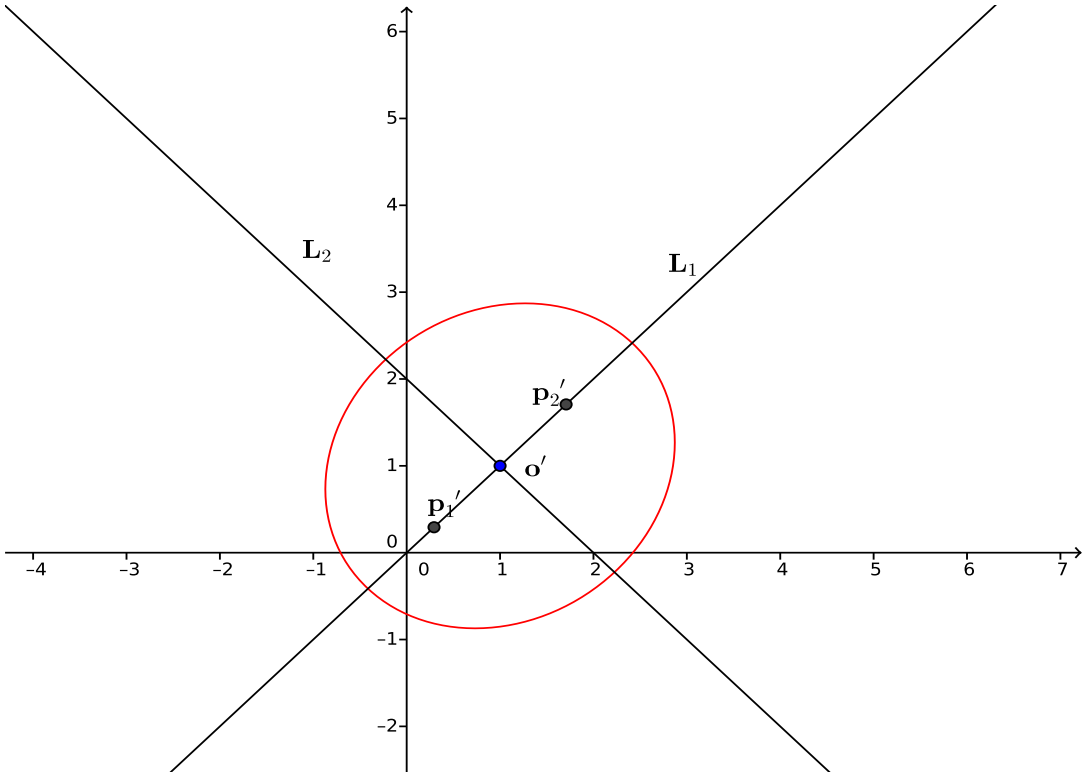
por lo que la elipse real C'_1 es también el conjunto de ceros de un polinomio, en este caso, el polinomio $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 12x - 12y - 12$. Este polinomio no es tan sencillo como el que nos servía para determinar los puntos de la elipse C_1 del ejemplo 10.1, pero vuelve a ser un polinomio de segundo grado.

Vemos más ejemplos de cónicas definidas como lugares geométricos:

Definición 10.5. Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos dados distintos, llamados *focos* de la hipérbola, tiene valor absoluto constante y menor que la distancia entre los focos. La recta que une a los focos se denomina *eje principal* de la hipérbola y el punto medio del segmento que determinan los focos se denomina *centro* de la hipérbola. La recta que pasa por el centro de la hipérbola y es perpendicular a su eje principal se denomina *eje secundario* de la hipérbola. Los puntos de intersección del eje principal y la hipérbola se denominan *vértices* de la hipérbola.

Estudiamos a continuación una hipérbola concreta:

FIGURA 2. Elipse C_1'



Ejemplo 10.6. Sea C_2 el conjunto de puntos p tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a $(-\sqrt{2},0)$ y $(\sqrt{2},0)$ es igual a 2 (según la definición $(-\sqrt{2},0)$ y $(\sqrt{2},0)$ son los focos de C_2, el punto $(0,0)$ es el centro de C_2 y las rectas de ecuaciones $y=0$ y $x=0$ son los ejes principal y secundario de C_2). Argumentando como en el ejemplo 10.1, vemos que C_2 es la curva de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ formada por los puntos (x,y) que satisfacen la ecuación

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{10.6.1}$$

Así pues vemos que de nuevo podemos describir la cónica C_2 como el conjunto de ceros de un polinomio de grado 2, concretamente, el polinomio x^2-y^2-1. Como el eje principal de C_2 es la recta de ecuación $y=0$ de la ecuación de C_2 se deduce que los vértices de C_2 son los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$.

A continuación generalizamos el ejemplo 10.6 (la correspondiente a la hipérbola C_2), considerando hipérbolas que tienen como centro el punto $(0,0)$ y como eje mayor la recta de ecuación $y=0$:

Ejercicio 10.7. En el plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con su estructura euclídea estándar consideramos la hipérbola H que tiene por vértices los puntos $(-a,0),(a,0)$ y por focos los puntos $p_1=(-c,0)$ y $p_2=(c,0)$, donde a y c son números reales que cumplen $c>a>0$. Demuestra que

(a) el eje principal de H es la recta de ecuación $y=0$, el eje secundario de H es la recta de ecuación $x=0$ y el centro de H es el punto $(0,0)$;

(b) los puntos p de H son aquellos puntos de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que cumplen $|\mathrm{d}(p,p_1) - \mathrm{d}(p,p_2)| = 2a$;
(c) un punto $p = (x,y)$ pertenece a H si y solo si

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.7.1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

donde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Al igual que pasaba en el ejemplo 10.4, si consideramos una hipérbola cuyo centro no sea el $(0,0)$ y cuyo eje principal no sea la recta de ecuación $y = 0$, la ecuación que obtendremos será más complicada que (10.7.1) (como puedes ver en el ejemplo 10.19), pero seguirá siendo una ecuación de segundo grado.

Observación 10.8. Hay dos diferencias que saltan a la vista cuando comparamos una elipse real y una hipérbola. La primera es que los puntos de una elipse real forman un conjunto que está acotado mientras que los puntos de una hipérbola forman un conjunto que no lo está. Otra diferencia es que mientras que una elipse real que no sea una circunferencia tiene cuatro vértices, una hipérbola tiene solo dos. Esta diferencia se debe a que estamos trabajando con el cuerpo de los números reales. Si, aunque las ecuaciones que usemos sigan teniendo coeficientes reales, nos permitimos considerar no solo sus soluciones reales sino también sus soluciones *imaginarias* (es decir, extendemos el cuerpo con el que estamos trabajando y pasamos de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{C}$), observaremos que la intersección entre una hipérbola y su eje secundario está formada por dos puntos que tienen imaginaria al menos una de sus dos coordenadas. Así pues, podríamos decir que una hipérbola tiene cuatro vértices al igual que una elipse real pero que, al contrario que esta, estos cuatro vértices son un par de vértices reales y un par de vértices *imaginarios*.

La primera diferencia a la que hemos hecho referencia en esta observación también está motivada por trabajar sobre $\mathbf{R}$ pero la estudiaremos con más precisión cuando introduzcamos el concepto de equivalencia afín de cónicas (consulta la definición 10.21, el teorema 10.34 y la observación 10.35) y la entenderemos mejor desde un punto de vista geométrico cuando veamos qué es el completado proyectivo de una cónica.

Seguimos ahora con otros ejemplos de cónicas, las *parábolas*:

Definición 10.9. Una parábola es el *lugar geométrico* de aquellos puntos del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que equidistan de un punto, llamado *foco* de la parábola, y una recta (que no contenga al foco), llamada *directriz* de la parábola. La recta perpendicular a la directriz por el foco de la parábola se denomina *eje* de la parábola y la intersección del eje con la parábola se llama *vértice*.

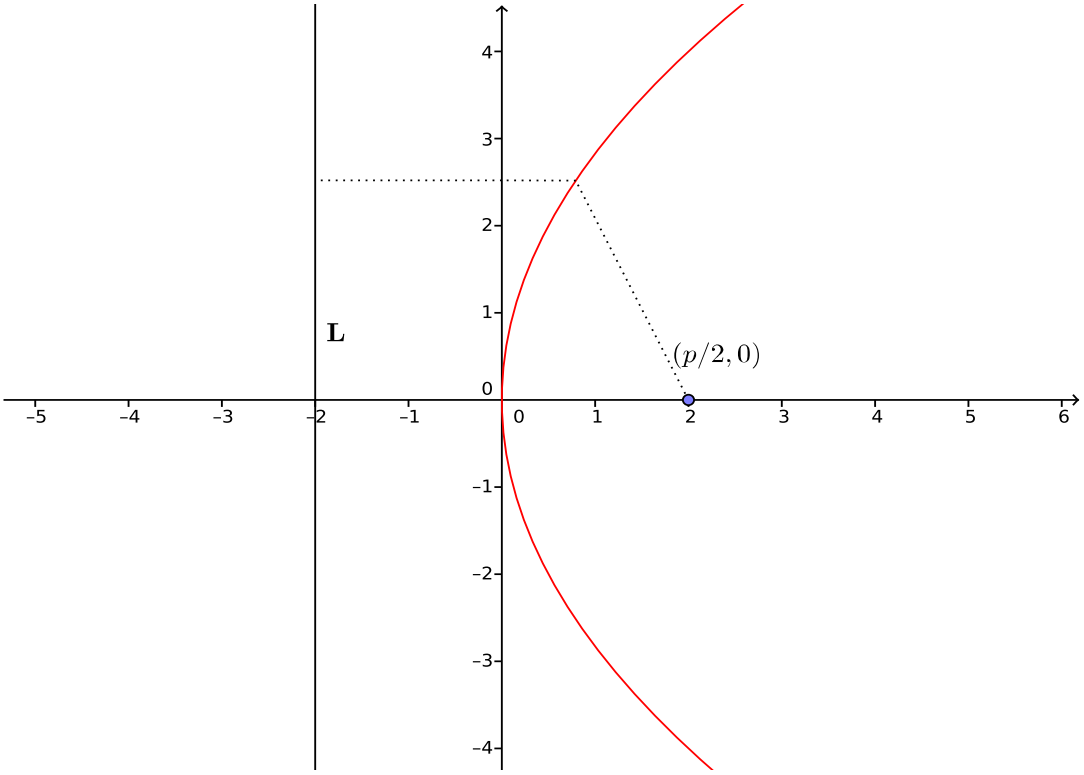
Consideramos ahora un ejemplo concreto de parábola:

Ejemplo 10.10. Sea C_3 la curva formada por los puntos p que equidistan del punto $(1/4, 0)$ y de la recta de ecuación $x = -1/4$ (según la definición que acabamos de dar $(1/4,0)$ es el foco de C_3, la recta de ecuación $x = -1/4$ es su directriz, la recta de ecuación $y = 0$ es su eje y el punto $(0,0)$ es su vértice). Argumentando como en el ejemplo 10.1, vemos que C_3 es el conjunto de puntos $p = (x,y)$ que satisfacen la ecuación

$$x = y^2. \tag{10.10.1}$$

Así pues observamos que, de nuevo, podemos describir la cónica C_3 como el conjunto de ceros de un polinomio de grado 2, concretamente, el polinomio $y^2 - x$.

FIGURA 3. Parábola de foco $(p/2, 0)$ y directriz la recta L de ecuación $x = -p/2$.



Ejercicio 10.11. Comprueba que el conjunto C_3' de puntos $p = (x, y)$ que cumplen $x^2 - 2x - y - 1 = 0$ es una parábola. ¿Cuál es el foco y la directriz de C_3'?

A continuación generalizamos el ejemplo 10.10 considerando parábolas que tienen como vértice el punto $(0, 0)$ y como eje la recta de ecuación $y = 0$:

Ejercicio 10.12. En el plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con su estructura euclídea estándar consideramos la parábola P que tiene como vértice el punto $(0, 0)$, como eje la recta de ecuación $y = 0$ y como foco el punto $(p/2, 0)$, donde p es un número real positivo. Demuestra que

(a) la directriz L de P es la recta de ecuación $x = -p/2$;
(b) un punto $p = (x, y)$ pertenece a P si y solo si

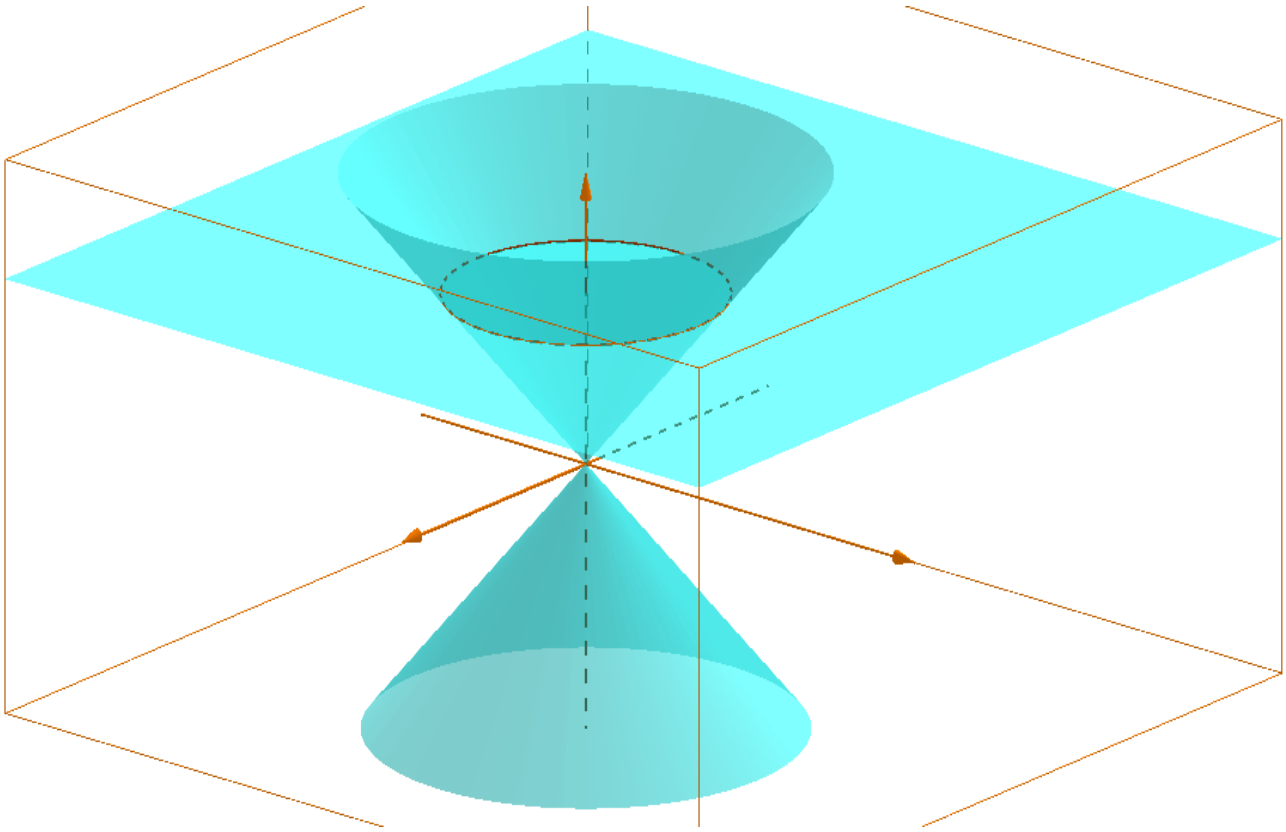
$$y^2 = 2px \tag{10.12.1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$y^2 - 2px = 0.$$

Al igual que pasaba en los ejemplos 10.4 y 10.19, si consideramos una parábola cuyo vértice no sea el $(0, 0)$ y cuyo eje no sea la recta de ecuación $y = 0$, la ecuación que obtendremos será más complicada que (10.12.1), pero seguirá siendo una ecuación de segundo grado.

FIGURA 4. Intersección de Q y Π_2.



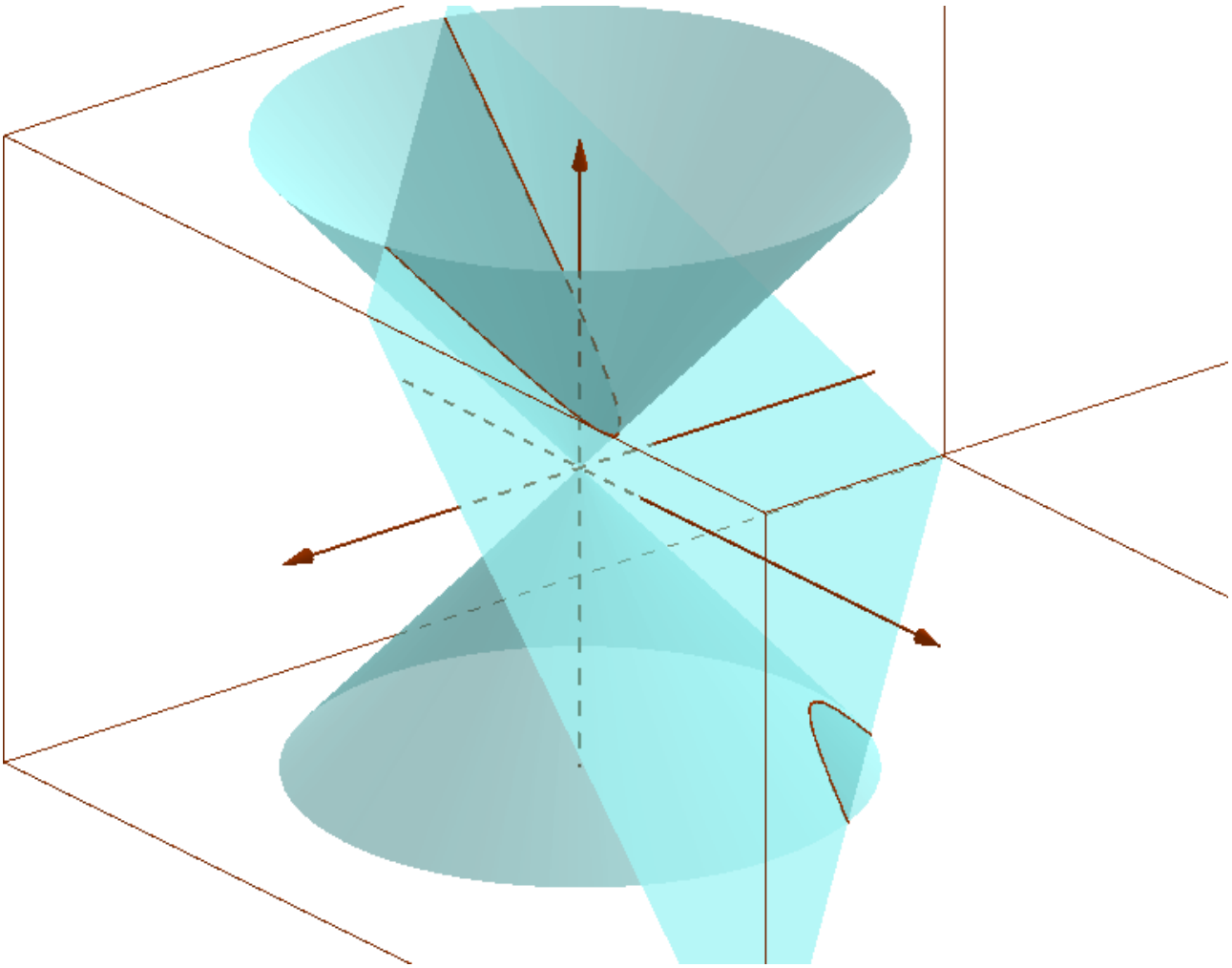
Secciones cónicas

Otro enfoque para acercarnos a las cónicas es verlas como secciones de un cono con base circular (de ahí viene precisamente el nombre de cónica). Consideramos un cono Q concreto: el conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ que satisfacen la ecuación $x^2+y^2-z^2 = 0$. La sección que se obtiene al intersecar Q con el plano Π_r de ecuación $z = r$, donde $r \in \mathbf{R}, r \neq 0$, es una circunferencia contenida en Π_r, con centro $(0, 0, r)$ y radio $|r|$. Por otra parte, la intersección $Q \cap \Pi_0$ consiste solamente en el punto $(0, 0, 0)$ por lo que Q es efectivamente un cono, cuyo vértice es el punto $(0, 0, 0)$. Este como es por otra parte una *superficie cuádrica* ya que está definido por una ecuación cuadrática en las variables x, y, z.

Si intersecamos Q con diferentes planos vamos obteniendo diferentes tipos de cónicas. Ya hemos comentado que si intersecamos Q con planos horizontales Π_r, exceptuando el plano Π_0 de ecuación $z = 0$, obtenemos circunferencias, que son un tipo especial de elipses. Por ejemplo, si intersecamos Q con el plano horizontal Π_2 de ecuación $z = 2$, obtenemos la circunferencia, de centro $(0, 0, 2)$ y radio 2, contenida en Π_2, que aparece en la figura 4. Si movemos Π_r un poco para que deje de ser un plano horizontal, la intersección con Q que obtendremos será también una elipse aunque ya no será una circunferencia. Si intersecamos Q con el plano Π de ecuación $x - y - z + 1 = 0$ obtenemos una hipérbola como muestra la figura 5. Si movemos un poco el plano Π, la intersección con Q seguirá siendo una hipérbola. En cambio, si intersecamos Q con el plano Π' de ecuación $x + z + 1 = 0$, el resultado es una parábola, como podemos ver en la figura 6.

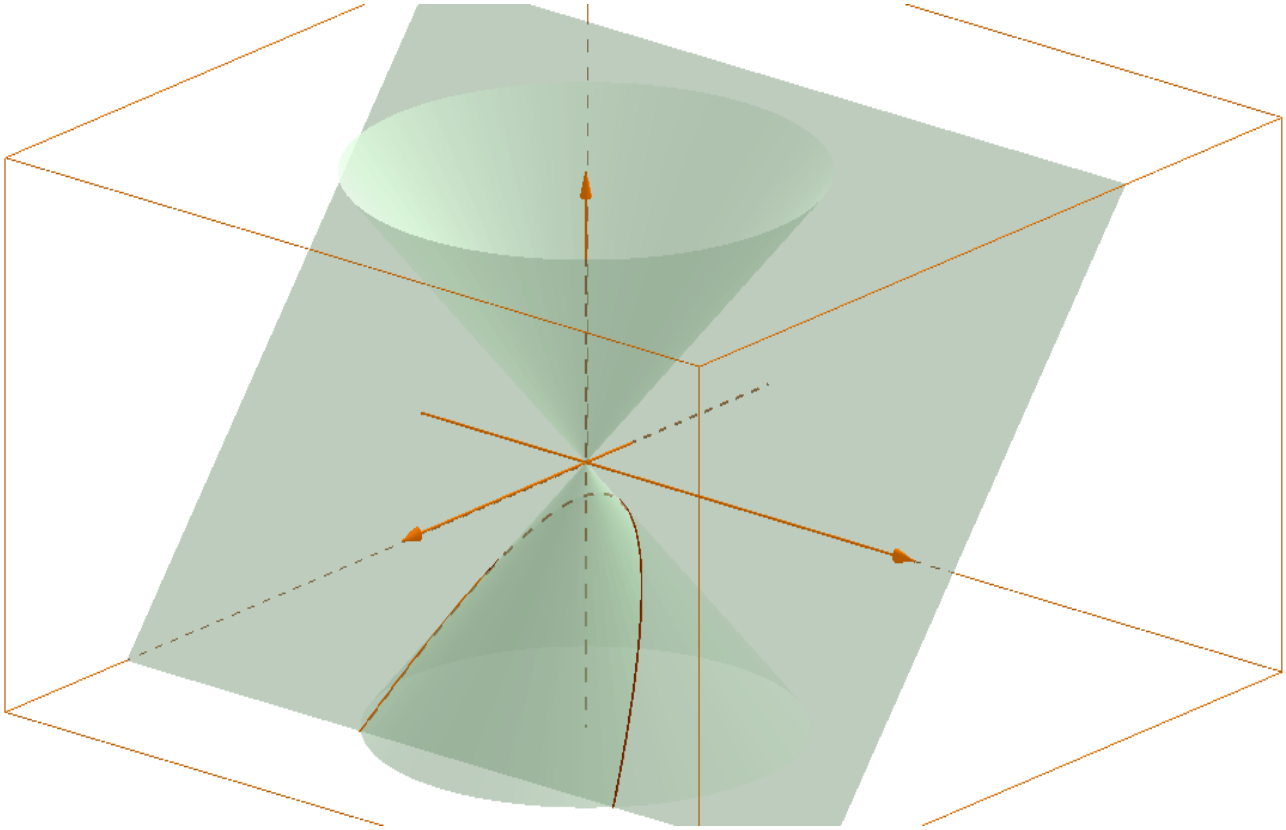
Podemos describir las interesecciones anteriores con ecuaciones. Observa que todas ellas son curvas en un plano (Π_2, Π y Π'), así que escribiremos sus puntos en coordenadas en el

FIGURA 5. Intersección de Q y Π.



plano correspondiente. Por ejemplo, en el caso del plano Π de ecuación $x-y-z+1=0$, si fijamos la referencia cartesiana $\mathscr{R}=\{(0,0,1);(1,0,1),(0,1,-1)\}$, las coordenadas de un punto $(x,y,z)=(x,y,x-y+1)$ de Π respecto de $\mathscr{R}$ son (x,y) (como Π tiene dimensión 2 podemos expresar sus puntos con dos coordenadas). Entonces los puntos de $Q\cap\Pi$ son aquellos puntos de Π cuyas coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ cumplen la ecuación $2xy-2x+2y-1=0$ (en la práctica, lo que hemos hecho es despejar z en función de x e y y sustituir en la ecuación de Q). De igual forma, si fijamos la referencia $\mathscr{R}_2=\{(0,0,2);(1,0,0),(0,1,0)\}$ en el plano Π_2 de ecuación $z=2$, la intersección $Q\cap\Pi_2$ son los puntos de Π_2 cuyas coordenadas (x,y) respecto de $\mathscr{R}$ cumplen la ecuación $x^2+y^2-4=0$. Finalmente, si fijamos la referencia $\mathscr{R}=\{(0,0,-1);(1,0,-1),(0,1,0)\}$ en el plano Π' de ecuación $x+z+1=0$, la intersección $Q\cap\Pi'$ son los puntos de Π' cuyas coordenadas (x,y) respecto de $\mathscr{R}$ cumplen la ecuación $y^2-2x-1=0$. En los tres caso vemos que las secciones cónicas obtenidas están definidas por una ecuación de segundo grado en dos variables. De hecho esto no es exclusivo de estos tres ejemplos ya que, como la ecuación de Q es una ecuación cuadrática en tres variables x,y,z, si intersecamos Q con cualquier plano de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$, al tener este una ecuación lineal en x,y,z, despejando por ejemplo z en dicha ecuación en función de x e y y sustituyendo en $x^2+y^2-z^2=0$, obtendremos siempre una ecuación cuadrática en dos variables. Volvemos pues a la conclusión de la subsección anterior: las cónicas (y, en

FIGURA 6. Intersección de Q y Π'.



este caso, podemos ciertamente decir, las secciones cónicas) son curvas planas que vienen descritas por una ecuación de grado 2.

Definición de cónica en el plano afín estándar

Lo visto en las dos subsecciones anteriores sugiere que una forma de tratar todas las cónicas de manera unificada es considerar las curvas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ definidas como el *conjunto* o *lugar de ceros* de un polinomio F de $\mathbf{R}[x, y]$ de grado 2, que es una expresión de la forma $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00}$, donde $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{01}, a_{02}, a_{00} \in \mathbf{R}$ (los nombres que hemos dado a los coeficientes de F parecen ahora bastante extraños; justificaremos esta notación más adelante). Con la expresión *lugar de ceros* de F nos queremos referir al conjunto de puntos $p = (x, y)$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ para los que el valor de F es 0 cuando evaluamos F en p. Sin embargo, tomar esto como definición de cónica tiene algunos inconvenientes, que vemos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10.13. El lugar de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ del polinomio $x^2 + y^2 + 1$ o del polinomio $x^2 + y^2 + 2$ es el conjunto vacío. El lugar de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ del polinomio $x^2 + y^2$ es el conjunto $\{(0, 0)\}$.

El ejemplo 10.13 nos muestra que hay polinomios de grado 2 de $\mathbf{R}[x, y]$ cuyo conjunto de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ es un conjunto finito, posiblemente vacío. Calificar tales conjuntos como curvas es contrario a la intuición, por lo que, en un primer momento, sentiríamos la tentación de excluir estos polinomios y sus conjuntos de ceros de la definición de cónica. Sin embargo, esto no es deseable pues rompería la manera uniforme con la que queremos estudiar las cónicas. Por otra parte, si consideramos los conjuntos de ceros de los polinomios del

ejemplo 10.13 no en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ sino en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$, vemos que, estos sí, son conjuntos infinitos (y de hecho, el conjunto de ceros de cualquier polinomio de grado 2 en dos variables lo es). Vemos además que aunque en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ el conjunto de ceros de x^2+y^2+1 y de x^2+y^2+2 es el mismo (el conjunto vacío), no pasa lo mismo cuando consideramos los conjuntos de ceros de x^2+y^2+1 y de x^2+y^2+2 en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ (de hecho, dos polinomios F_1 y F_2 de $\mathbf{R}[x,y]$ de grado 2 tendrán el mismo conjunto de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tal que $F_2 = \lambda F_1$). Esto motiva la definición de cónica que daremos finalmente, que tiene sentido no solo sobre $\mathbf{R}$ sino en el plano afín estándar sobre cualquier cuerpo $\mathbf{k}$:

Definición 10.14. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo. Definimos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de polinomios de grado 2 de $\mathbf{k}[x,y]$: dos polinomios F_1 y F_2 son equivalentes si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $F_2 = \lambda F_1$. Una *cónica* de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es la clase de equivalencia $[F]$ de un polinomio F de grado 2 de $\mathbf{k}[x,y]$. Si F un polinomio de grado 2 de $\mathbf{k}[x,y]$, diremos que la cónica $[F]$ tiene ecuación $F=0$.

Observación 10.15. En la definición 10.14 está implícito que estamos fijando unas coordenadas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, las coordenadas en el sistema de referencia canónico; ya veremos al final de este tema qué ocurre cuando cambiamos de coordenadas. Por otra parte, es claro que si F_1 y F_2 son dos polinomios equivalentes, su lugar de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es el mismo. En muchas ocasiones (como en los ejemplos 10.1, 10.4, 10.6 y 10.10 y, más en general, en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ cuando el lugar de ceros de F sea un conjunto infinito, o en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$) el lugar de ceros de un polinomio F de grado 2 determina la cónica $[F]$ (es decir, si F' tiene el mismo lugar de ceros que F y dicho lugar de ceros es un conjunto infinito, entonces F y F' son equivalentes). En estos casos podremos identificar la cónica $[F]$ con su lugar de ceros.

Según hemos visto, la ecuación de una cónica es un polinomio de grado 2, en dos variables, igualado a 0. Vamos a expresar esta ecuación en forma matricial.

Atención: A partir de ahora los cuerpos con los que trabajaremos en este tema tendrán característica distinta de 2 (la razón es evidente a la vista de las matrices que aparecen en la siguiente definición).

Definición 10.16. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo de característica distinta de 2, sea $F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00}$ un polinomio de grado 2 de $\mathbf{k}[x,y]$ y sea $C=[F]$ la cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ correspondiente. La ecuación de C

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$$

se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Denotamos

$$M(C) = \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y decimos que $M(C)$ es una matriz asociada a la cónica C. Asimismo, denotamos como $m(C)$ a la submatriz

$$m(C) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

de $M(C)$ (observa que $m(C)$ no es nula ya que el polinomio F es de grado 2).

Observación 10.17. La matriz $M(C)$ de la definición anterior es una matriz *simétrica*. Dada una cónica C, su matriz asociada es única salvo producto por un elemento de $\mathbf{k}^*$.

Clasificación afín y métrica de las cónicas

Nos planteamos ahora una especie de problema inverso al que hemos abordado en los ejemplos 10.1, 10.4, 10.6 y 10.10. En esos ejemplos describíamos primero las cónicas C_1, C_1', C_2 y C_3 por medio de sus propiedades métricas (es decir, las describíamos de forma geométrica) y después hallábamos la ecuación que las caracterizaba. Posteriormente, en la definición 10.14, dijimos que en general una cónica es una clase de equivalencia de polinomios de grado 2 o, si se quiere, una ecuación de segundo grado. Por tanto, si nos dan una cónica $[F]$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, donde $F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00}$ y $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{01}, a_{02}, a_{00} \in \mathbf{R}$, nos gustaría ahora ser capaces de describirla geométricamente o, hablando con más propiedad, de describir geométricamente su lugar de ceros, es decir, decir cuáles son las propiedades métricas que cumplen los puntos del conjunto $\{(x, y) \in \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} \mid a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0\}$ o, al menos, decir qué aspecto tiene dicho conjunto. Supongamos ahora que nos dan las cónicas de ecuaciones (10.1.2), (10.6.1) y (10.10.1) pero que no hemos leido los ejemplos 10.1, 10.6 y 10.10. Como las ecuaciones (10.1.2), (10.6.1) y (10.10.1) son muy sencillas podemos sin muchas dificultades esbozar un dibujo de su lugar de ceros. Más aún, los ejercicios 10.2, 10.7 y 10.12 nos dicen que la cónica dada por (10.1.2) es una elipse real, la cónica dada por (10.6.1) es una hipérbola y la cónica dada por (10.10.1) es una parábola. Esos ejercicios también nos permiten hallar en cada caso los ejes, vértices, etc. de esas cónicas a partir de sus ecuaciones y decir qué condición métrica han de cumplir los puntos que pertenecen a su lugar de ceros.

Ejemplo 10.18. Imaginemos ahora que a alguien que no ha leído el ejemplo 10.4 le piden describir geométricamente o, al menos, esbozar un dibujo, del lugar de ceros dado por la ecuación (10.4.1) sin darle más información que esa ecuación. Seguramente le resultaría una tarea difícil. A nosotros, que sí hemos leído el ejemplo 10.4, nos resultará más fácil ya que sabemos cómo se construye el lugar de ceros C_1' de la ecuación (10.4.1): es el lugar de los puntos tales que la suma de sus distancias a p_1' y p_2' es igual a 4. Observamos también que la descripción geométrica de C_1' es muy similar a la descripción geométrica de C_1 en el ejemplo 10.1, ya que C_1 es el lugar de los puntos tales que la suma de sus distancias a p_1 y p_2 es igual a 4 y la distancia entre p_1 y p_2 y entre p_1' y p_2' es en ambos casos 2. Finalmente nos damos cuenta de que si queremos transformar los focos p_1' y p_2' de C_1' en los focos p_1 y p_2 de C_1 mediante una isometría (como una isometría transforma rectas en rectas y conserva las distancias, observa que en ese caso transformaremos también el eje mayor de C_1' en el eje mayor de C_1 y el centro de C_1', que es el punto $(1, 1)$, en el centro de C_1, que es el punto $(0, 0)$) lo que podemos hacer es considerar la composición f de la traslación t_v de vector $v = (-1, -1)$ seguida del giro g de centro $(0, 0)$ y ángulo $-\pi/4$. Como f es una isometría y por tanto conserva las distancias, f no solamante lleva p_1' a p_1 y p_2' a p_2 sino que transforma un punto tal que la suma de sus distancias a p_1' y p_2' es 4 en un punto tal que la suma de sus distancias a p_1 y p_2 es 4. Es decir, $f(C_1') \subset C_1$ y, como la inversa de f es de nuevo una isometría, de hecho, $f(C_1') = C_1$. Poniéndonos de nuevo en el lugar de esa persona a la que han pedido describir el lugar de ceros de la ecuación (10.4.1) sin haber leído el ejemplo 10.4, si esta es capaz de dar con la isometría f, aplicándola a C_1', obtendría la cónica C_1. Esta persona podría describir las propiedades métricas de C_1 usando el ejercicio 10.2 y, deshaciendo la isometría (es decir, aplicando f^{-1} a C_1), obtener las propiedades métricas de C_1', ya que, como ya dijimos, f^{-1} es también una isometría.

A continuación comprobamos analíticamente que $f(C_1') = C_1$. Es un sencillo ejercicio ver que las ecuaciones de f^{-1} respecto de la referencia canónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ son

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \\ y' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y \ . \end{aligned}$$

Como un punto $p = (x, y)$ pertenece a $f(C_1')$ si y solo si $f^{-1}(p)$ pertenece a C_1', los puntos p de $f(C_1')$ son aquellos cuyas coordenadas cumplen
(10.18.1)

$$\begin{gathered} 7(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y + 1)^2 + 7(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y)^2 \\ -2(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y + 1)(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y) - 12(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y + 1) - 12(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y) - 12 = 0. \end{gathered}$$

Simplificando la ecuación (10.18.1) obtenemos que los puntos de $f(C_1')$ son lo puntos que satisfacen la ecuación

$$6x^2 + 8y^2 - 24 = 0,$$

que es equivalente a la ecuación (10.1.2). Es decir, $f(C_1') = C_1$, tal como habíamos argumentado más arriba.

En el ejemplo 10.18 hemos sido capaces de encontrar una isometría que transforma C_1' en una cónica de C_1 porque teníamos previamente información geométrica de cómo era C_1'. Si nos dan una cónica de la que a priori no sabemos su aspecto ni sus propiedades geométricas, ¿cómo seremos capaces de describirla? Lo vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.19. En el plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ consideramos la cónica C_4 de ecuación $7x^2+50xy+7y^2-82\sqrt{2}x-46\sqrt{2}y-178 = 0$. Queremos describir geométricamente el lugar de ceros de C_4. Para ello seguiremos estos pasos.

Paso 1: Lo primero que haremos será buscar, si es posible, una isometría que transforme C_4 en una cónica de ecuación como las que aparecen en los ejercicios 10.2, 10.7 y 10.12. Observamos que

$$M(C_4) = \begin{pmatrix} -178 & -41\sqrt{2} & -23\sqrt{2} \\ -41\sqrt{2} & 7 & 25 \\ -23\sqrt{2} & 25 & 7 \end{pmatrix}.$$

Según el *teorema espectral* toda matriz simétrica real puede *diagonalizarse* simultáneamente por *congruencia* y por *semejanza*; es decir, existe una matriz *ortogonal* que diagonaliza dicha matriz simétrica. La matriz simétrica que consideraremos será la submatriz $m(C_4) = \begin{pmatrix} 7 & 25 \\ 25 & 7 \end{pmatrix}$ de $M(C_4)$. El polinomio característico de $m(C_4)$ es $\lambda^2 - 14\lambda - 576$, de donde los valores propios de $m(C_4)$ son 32 y -18. El subespacio propio del valor propio 32 es $L((1,1))$ y el subespacio propio del valor propio -1 es $L((1,-1))$. Tomando un vector de norma 1 de cada subespacio obtenemos una base ortonormal de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, como por ejemplo $\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$, formada por vectores propios de $m(C_4)$. Entonces

$$M_{B,B_c} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 25 \\ 25 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}.$$

Como M_{B,B_c} es una matriz ortogonal, $M_{B,B_c}^{-1} = M_{B,B_c}^t$, por lo que

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 7 & 25 \\ 25 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}.$$

Consideramos ahora el isomorfismo afín g' de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ cuya matriz asociada respecto de la referencia canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Como la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal, g' es una isometría (de hecho, como el determinante de esa matriz es 1, g' es un giro, concretamente, un giro de centro $(0,0)$ (ya que g' deja fijo el punto $(0,0)$) y ángulo $\pi/4$). Las ecuaciones de g' son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Sea ahora g la isometría inversa de g' (g será el giro de ángulo $-\pi/4$ y centro $(0,0)$). Recuerda que un punto $p = (x,y)$ pertenece a (el lugar de ceros de) $g(C_4)$ si y solo si $g^{-1}(p)$ pertenece a (el lugar de ceros de) C_4. Como un punto $p = (x,y)$ pertenece a C_4 si y solo si

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -178 & -41\sqrt{2} & -23\sqrt{2} \\ -41\sqrt{2} & 7 & 25 \\ -23\sqrt{2} & 25 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

un punto $p' = (x', y')$ pertenece a $C_4' = g(C_4)$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -178 & -41\sqrt{2} & -23\sqrt{2} \\ -41\sqrt{2} & 7 & 25 \\ -23\sqrt{2} & 25 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0.$$

Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -178 & -41\sqrt{2} & -23\sqrt{2} \\ -41\sqrt{2} & 7 & 25 \\ -23\sqrt{2} & 25 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -178 & -64 & 18 \\ -64 & 32 & 0 \\ 18 & 0 & -18 \end{pmatrix},$$

un punto p' pertenece a $C_4' = g(C_4)$ si y solo si

$$16x'^2 - 9y'^2 - 64x' + 18y' - 89 = 0.$$

Podemos reescribir esta última ecuación como

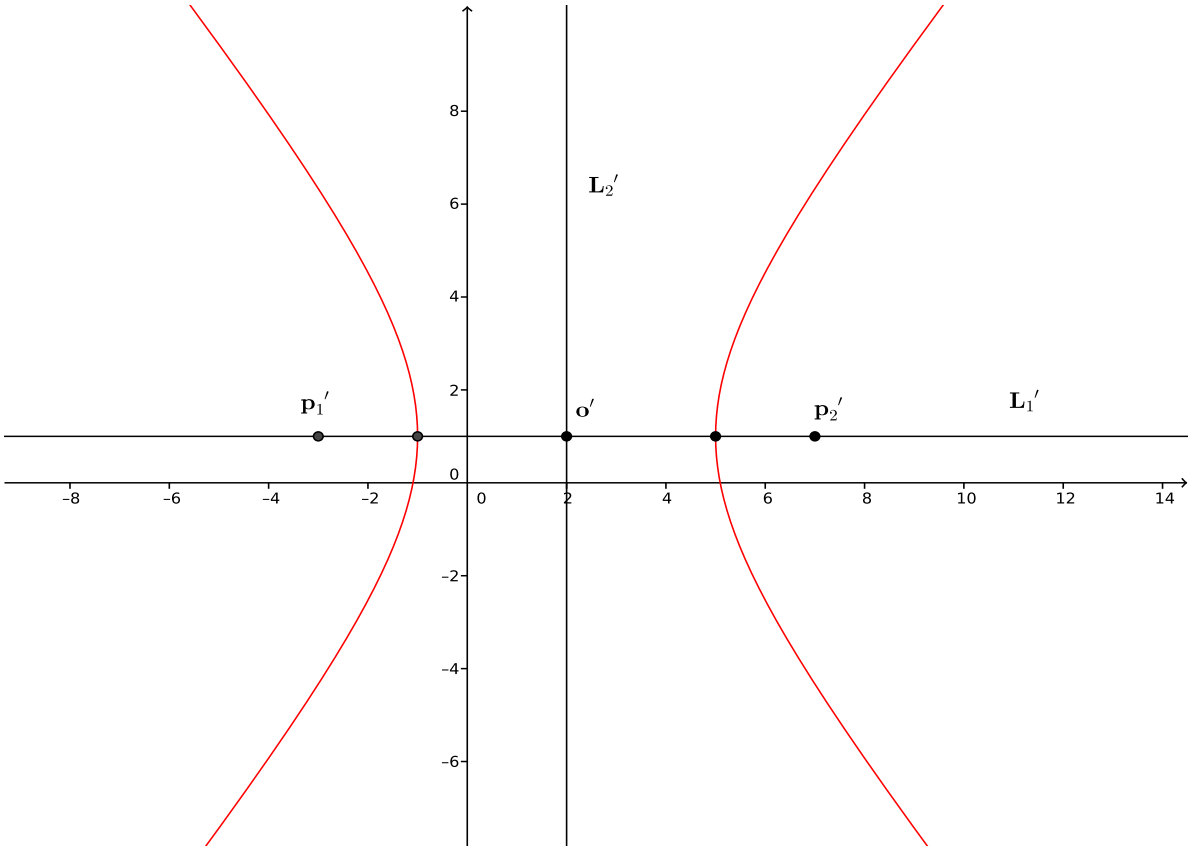
$$16(x'-2)^2 - 9(y'-1)^2 - 144 = 0.$$

Consideramos ahora la traslación t de vector $(-2,-1)$, que tiene por ecuaciones

$$\begin{aligned} x'' &= x' - 2 \\ y'' &= y' - 1\,. \end{aligned}$$

La imagen de $g(C_4)$ por t será el conjunto de puntos $p'' = (x'', y'')$ que satisfacen la ecuación $16x''^2 - 9y''^2 - 144 = 0$. Llamamos f a la composición $t \circ g$. Como nombrar a los puntos

FIGURA 7. Hipérbola C_4', de ecuación $16x^2 - 9y^2 - 64x + 18y - 89 = 0$, de focos p_1', p_2', centro o' y ejes L_1' y L_2'.



de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ como (x'', y'') en vez de (x, y) es simplemente un truco para no perdernos en el argumento que acabamos de realizar, podemos decir que $f(C_4)$ es la cónica C_4'' de ecuación $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$.

Paso 2: Usamos ahora el hecho de que en el ejercicio 10.7 vimos la descripción geométrica de C_4''. *Deshaciendo* la isometría que transforma C_4 en C_4'' podemos entonces obtener las propiedades geométricas de C_4. Así pues, observa que los focos de C_4'' son $p_1'' = (-5, 0)$ y $p_2'' = (5, 0)$, el centro de C_4'' es el punto $o'' = (0, 0)$, los vértices de C_4'' son los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y los puntos de C_4'' son aquellos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a p_1'' y p_2'' es igual a 6. Como $f(C_4) = C_4''$, tenemos que $C_4 = f^{-1}(C_4'')$. La isometría f tiene

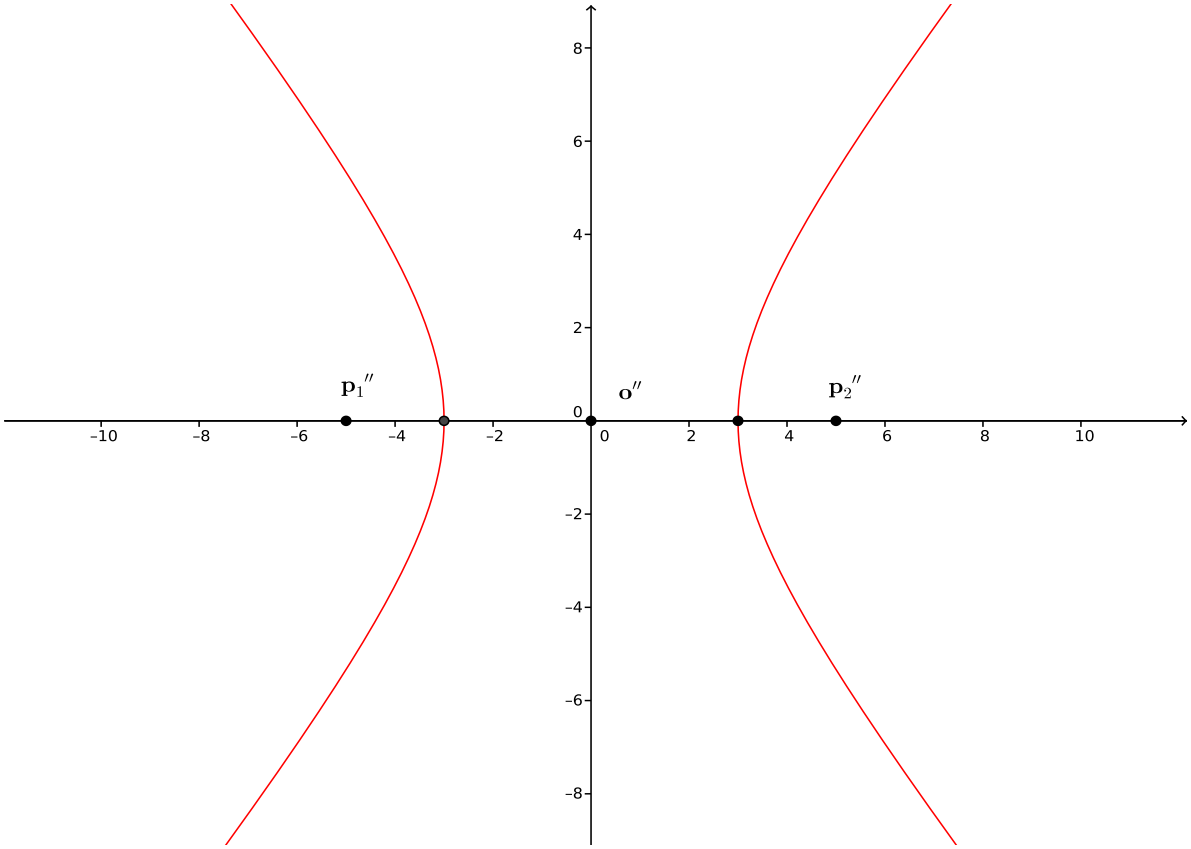
$$\begin{aligned} x'' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y - 2 \\ y'' &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y - 1 \end{aligned}$$

como ecuaciones respecto de la referencia canónica, por lo que f^{-1} tiene

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x'' - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y'' + \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x'' + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y'' + \tfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

como ecuaciones respecto de la referencia canónica. Como f^{-1} es una isometría, concluimos que C_4 es el conjunto de puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los puntos $p_1 = f^{-1}(p_1'') = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $p_2 = f^{-1}(p_2'') = (3\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ es igual a 6. Por

FIGURA 8. Hipérbola C_4'', de ecuación $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$.



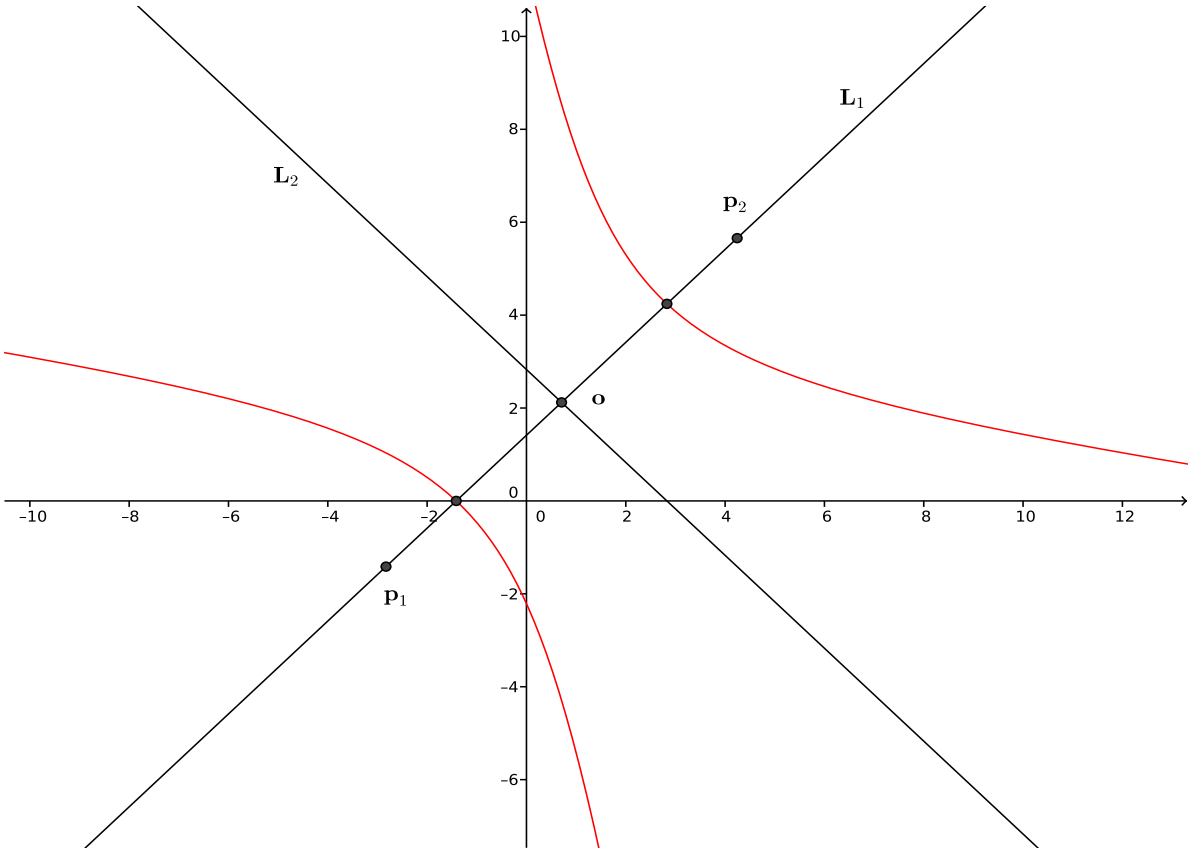
tanto, C_4 es una hipérbola cuyos focos son $p_1 = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $p_2 = (3\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, su centro es $o = f^{-1}(0,0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$, su eje principal es la recta L_1 de ecuación $x - y + \sqrt{2} = 0$, su eje secundario es la recta L_2 de ecuación $x + y - 2\sqrt{2} = 0$, etc.

Ejercicio 10.20. Demuestra que el conjunto C_3' del ejercicio 10.11 es una parábola y describe sus propiedades métricas, razonando como en el ejemplo 10.19.

El proceso que acabamos de describir en el ejemplo 10.18 y en el ejercicio 10.19 nos sugiere la estrategia para, dada una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ arbitraria de ecuación $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$, obtener sus propiedades métricas (es decir, decidir por ejemplo si es una elipse real, una hipérbola o una parábola, dar su foco o focos, la distancia focal, etc.). La idea sería encontrar una isometría que transformara el lugar de ceros de la cónica en el lugar de ceros de otra cónica cuya ecuación sea más sencilla (de forma más precisa, si es posible, una ecuación como (10.2.1), 10.7.1 o (10.12.1)). El lugar de ceros de esa cónica de ecuación más sencilla se podría describir fácilmente y, deshaciendo la isometría, esto nos permitiría describir el lugar de ceros de la cónica de partida. Sin embargo ya vimos en el ejemplo 10.13 que no toda cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ viene caracterizada por su lugar de ceros. Por ello es preciso generalizar la manera en que hemos pasado en el ejemplo 10.18, usando la isometría f, de la ecuación

$$7x^2 + 7y^2 - 2xy - 12x - 12y - 12 = 0$$

FIGURA 9. Hipérbola C_4, de ecuación $7x^2+50xy+7y^2-82\sqrt{2}x-46\sqrt{2}y-178=0$.



a la ecuación

$$6x^2+8y^2-24=0.$$

Definición 10.21. Sea F un polinomio de $\mathbf{R}[x,y]$, sea $C=[F]$ la cónica correspondiente del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y sea f una isometría de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Sean

$$\begin{array}{rcl} x' & = & \alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\beta_1 \\ y' & = & \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\beta_2 \end{array}$$

las ecuaciones (con respecto al sistema de referencia canónico) de la isometría *inversa* de f (recuerda que lo que tienen que cumplir $\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{21},\alpha_{22}$ para que f sea una isometría es que $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$ sea una matriz ortogonal). En ese caso definimos la imagen de C por f y la denotamos como $f(C)$ como la cónica de ecuación $F(\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\beta_1,\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\beta_2)=0$ (F es un polinomio de grado 2 por la observación 10.29).

Por otra parte, en el ejemplo 10.18 y en el ejercicio 10.19 también nos hemos dado cuenta de que las cónicas C_1' y C_4'' tienen las mismas propiedades métricas que C_1 y C_4 respectivamente. Así pues desde un punto de vista métrico C_1 y C_1' son *equivalentes* y lo mismo C_4 y C_4''. La razón de que C_1 y C_1' y C_4 y C_4'' tengan las mismas propiedades métricas es que podemos transformar unas en las otras mediante una isometría (que conserva las

propiedades métricas). Esto motiva que digamos que dos cónicas son *métricamente equivalentes* cuando podemos pasar de una a otra mediante una isometría:

Definición 10.22. Sean C y C dos cónicas del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Decimos que C y C' son *métricamente equivalentes* si y solo si existe una isometría f de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tal que $f(C) = C'$.

Ejercicio 10.23. Demuestra que, en efecto, la equivalencia métrica de cónicas es una relación de equivalencia (indicación: puedes resolver el ejercicio de forma directa o usar la proposición 10.30).

Entre las cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, la relación de equivalencia métrica es una relación de equivalencia muy "fina", como muestra el ejemplo siguiente:

Ejemplo 10.24. Las cónicas C_1 y C_5 de ecuaciones $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ y $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ no son métricamente equivalentes. La justificación rigurosa de esta afirmación la veremos cuando detallemos todas las clases de la clasificación métrica de las cónicas. De momento, nos conformamos con una justificación intuitiva: ambas cónicas son elipses pero la longitud de sus semiejes menores es distinta (no así la de sus semiejes mayores), por lo que no existirá una isometría que transforme una cónica en la otra. Sin embargo, son cónicas "parecidas" (como ya se ha dicho, ambas son elipses). Para expresar de forma precisa este "parecido" nos conformaremos con encontrar, en vez de una isometría, un isomorfismo afín que transforme C_5 en C_1. Por ejemplo, si consideramos el isomorfismo afín f de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x \\ y' & = & \frac{\sqrt{6}}{2}y \end{array}$$

es fácil comprobar que $C_1 = f(C_5)$. Intuitivamente lo que hace f es dejar el semieje mayor de C_5 igual y "estirar" el semieje menor de C_5, que mide $\sqrt{2}$, para que mida $\sqrt{3}$, que es lo que mide el semieje menor de C_1. Por eso es claro que f no es una isometría.

El ejemplo anterior nos motiva a dar la definición de una nueva relación de equivalencia de cónicas, más "débil" que la equivalencia métrica, que obtendremos relajando el requisito de que, para que dos cónicas sean equivalentes debe existir una isometría que transforma una en la otra; ahora solo pediremos que exista un isomorfismo afín. Por otra parte, como los isomorfismos afines tienen sentido para un plano afín sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ arbitrario, la siguiente definición la haremos para cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$:

Definición 10.25. (1) Sea F un polinomio de $\mathbf{k}[x, y]$, sea $C = [F]$ la cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ correspondiente y sea f un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. Sean

$$\begin{array}{rcl} x' & = & \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1 \\ y' & = & \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2 \end{array}$$

las ecuaciones (con respecto al sistema de referencia canónico) del isomorfismo afín *inverso* de f (recuerda que lo que tienen que cumplir $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ para que f sea un isomorfismo afín es que $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ sea una matriz invertible). En ese caso definimos la imagen de C por f y la denotamos por $f(C)$, como la cónica de ecuación $F(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2) = 0$ (el polinomio F tiene grado 2 por la observación 10.29).

(2) Sean C y C' dos cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. Decimos que C y C' son *afínmente equivalentes* si y solo si existe un isomorfismo afín f de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ tal que $f(C) = C'$.

Ejercicio 10.26. Demuestra que, en efecto, la equivalencia afín de cónicas es una relación de equivalencia (indicación: puedes resolver el ejercicio directamente o usar la proposición 10.30).

Observación 10.27. Si dos cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ son métricamente equivalentes, también son afínmente equivalentes, ya que una isometría del plano afín euclídeo estándar es un isomorfismo afín del plano afín estándar. Por eso decimos que la relación de equivalencia métrica es más fuerte (o más "fina") que la relación de equivalencia afín.

Escribir la ecuación de una cónica usando su matriz asociada nos permite expresar de otra forma la imagen de una cónica por un isomorfismo afín o por una isometría (tal como hicimos en el paso 1 del ejemplo 10.19). También podemos reformular los conceptos de equivalencia métrica y afín en términos matriciales. Enunciamos todo esto en las dos siguientes proposiciones, que se pueden demostrar como un sencillo ejercicio:

Proposición 10.28. *Sea C una cónica del plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$), sea f un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ en sí mismo (respectivamente, una isometría de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$) y sea N la matriz de la* inversa *de f respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. Si $M(C)$ es una matriz asociada a C, entonces $M(f(C)) = N^t \cdot M(C) \cdot N$ es una matriz asociada a $f(C)$.*

Observación 10.29. La matriz N de la proposición 10.28 es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

con $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ invertible. Entonces la submatriz $m(f(C))$ cumple

$$m(f(C)) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}^t \cdot m(C) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Como $m(C)$ es no nula, $m(f(C))$ tampoco lo es. Esto implica que la ecuación de $f(C)$ definida en las definiciones 10.21 y 10.25 es en efecto una ecuación de grado 2.

Proposición 10.30. *Sean C y C' dos cónicas del plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$) y sean $M(C)$ y $M(C')$ matrices asociadas de C y C'. Entonces, C y C' son afínmente equivalentes (respectivamente, métricamente equivalentes) si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ y una matriz*

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & R \end{pmatrix}$$

con $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, d_1, d_2 \in \mathbf{k}$ (respectivamente, $d_1, d_2 \in \mathbf{R}$) y R una matriz 2×2, regular, con coeficientes en $\mathbf{k}$ (respectivamente, ortogonal, con coeficientes en $\mathbf{R}$) tal que

$$M(C') = \lambda N^t M(C) N.$$

Observación 10.31. Si C y C' son dos cónicas afínmente equivalentes, entonces existen matrices asociadas $M(C)$ y $M(C')$ de C y C' (recuerda que la matriz asociada a una cónica no es única; es única salvo producto por un escalar no nulo) que son *congruentes*. Además, para esas matrices $M(C)$ y $M(C')$, sus submatrices $m(C)$ y $m(C')$ también son congruentes.

Damos a continuación las clasificaciones afín y métrica de las cónicas, de cuyas demostraciones solo daremos aquí un esbozo. Ya hemos visto en la observación anterior que la equivalencia métrica es más "exigente" que la equivalencia afín. Esto se traducirá en que habrá menos clases de equivalencia afín que de equivalencia métrica, por lo que la clasificación afín será más sencilla y por ella empezamos.

Teorema 10.32. *(Clasificación afín de las cónicas reales). Sea C una cónica del plano afín estándar real $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Entonces C es afínmente equivalente a una y solo una de las cónicas con las siguientes ecuaciones:*

(1) $X^2 + Y^2 - 1 = 0$. *En este caso decimos que C es una* elipse real.
(2) $X^2 - Y^2 - 1 = 0$. *En este caso decimos que C es una* hipérbola.
(3) $X^2 - Y = 0$. *En este caso decimos que C es una* parábola.
(4) $X^2 + Y^2 + 1 = 0$. *En este caso decimos que C es una* elipse imaginaria.
(5) $X^2 - Y^2 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas reales secantes.
(6) $X^2 - 1 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas reales paralelas.
(7) $X^2 + Y^2 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas imaginarias (conjugadas) secantes.
(8) $X^2 + 1 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas imaginarias (conjugadas) paralelas.
(9) $X^2 = 0$. *En este caso decimos que C es una* recta doble.

En particular, dos cónicas distintas de la lista anterior no son afínmente equivalentes.

Observación 10.33. Vemos por el teorema 10.32 que existen más tipos de cónicas reales que las elipses reales, hipérbolas o parábolas. Por una parte están las elipses imaginarias (que ya aparecieron en el ejemplo 10.13) cuyo conjunto de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ es vacío. Por otra parte están los pares de rectas (algunos de los cuales tienen conjuntos de ceros vacíos o formados por un solo punto) y las rectas dobles. A los pares de rectas y a las rectas dobles se les llama cónicas *degeneradas* y a las elipses, hipérbolas y parábolas, cónicas *no degeneradas*. Los pares de rectas secantes y las rectas dobles aparecen también como secciones cónicas cuando intersecamos el cono cuádrico Q de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ de ecuación $x^2+y^2-z^2 = 0$ con un plano Π que pasa por $(0,0,0)$ (según sea el plano Π, la cónica resultante será un par de rectas realas, una recta doble o un par de rectas imaginarias; en este último caso $Q \cap \Pi = \{(0,0,0)\}$). Vemos esto en las figuras 10 y 11, donde intersecamos Q con los planos de ecuaciones $x = 0$ y $x - z = 0$.

Damos también la clasificación afín de las cónicas afines complejas, que es más sencilla que la de las cónicas afines reales.

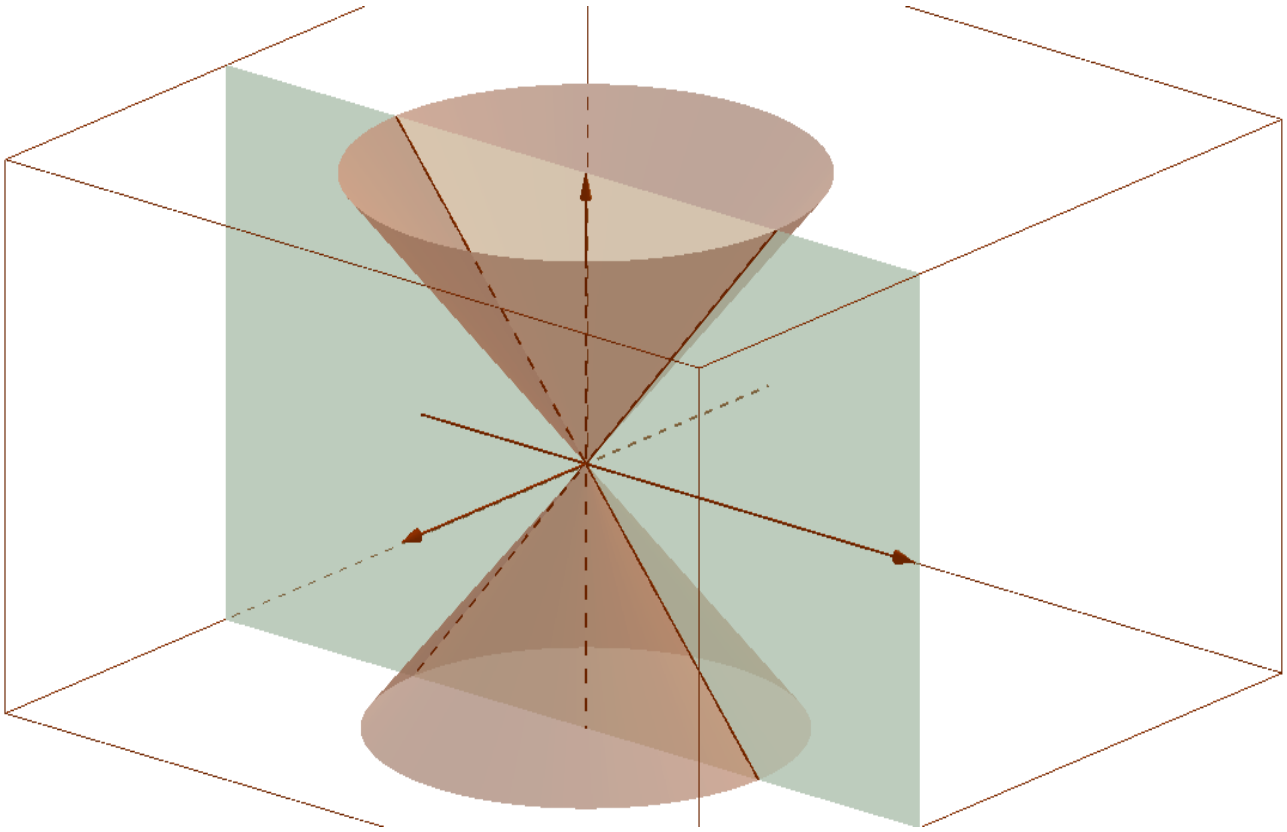
Teorema 10.34. *(Clasificación de las cónicas complejas). Sea C una cónica del plano afín estándar complejo $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$. Entonces C es afínmente equivalente a una y solo una de las cónicas de las ecuaciones siguientes:*

(1) $X^2 + Y^2 - 1 = 0$.
(2) $X^2 - Y = 0$.
(3) $X^2 - Y^2 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas secantes.
(4) $X^2 - 1 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas paralelas.
(5) $X^2 = 0$. *En este caso decimos que C es una* recta doble.

En particular, dos cónicas distintas de la lista anterior no son afínmente equivalentes.

Observación 10.35. Si te resulta extraña la diferencia entre los teoremas 10.32 y 10.34, observa lo siguiente: las cónicas de ecuaciones $X^2 + Y^2 - 1 = 0$, $X^2 - Y^2 - 1 = 0$ y $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ no son afínmente equivalentes en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ pero sí en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ (¿ves por qué?). Lo mismo ocurre con las cónicas de ecuaciones $X^2 - Y^2 = 0$ y $X^2 + Y^2 = 0$ o con las cónicas de ecuaciones $X^2 - 1 = 0$ y $X^2 + 1 = 0$. Eso explica por qué se reduce el número de clases de equivalencia en el teorema 10.34 con respecto al teorema 10.32.

FIGURA 10. Intersección de Q con el plano de ecuación $x = 0$.



Damos finalmente la clasificación métrica de las cónicas reales:

Teorema 10.36. *(Clasificación métrica de las cónicas) Sea C una cónica del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.*

(1) *Si C es una elipse real, existen $a, b \in \mathbf{R}$, tales que $a \geq b > 0$, únicos, de forma que C es métricamente equivalente a la elipse real de ecuación*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

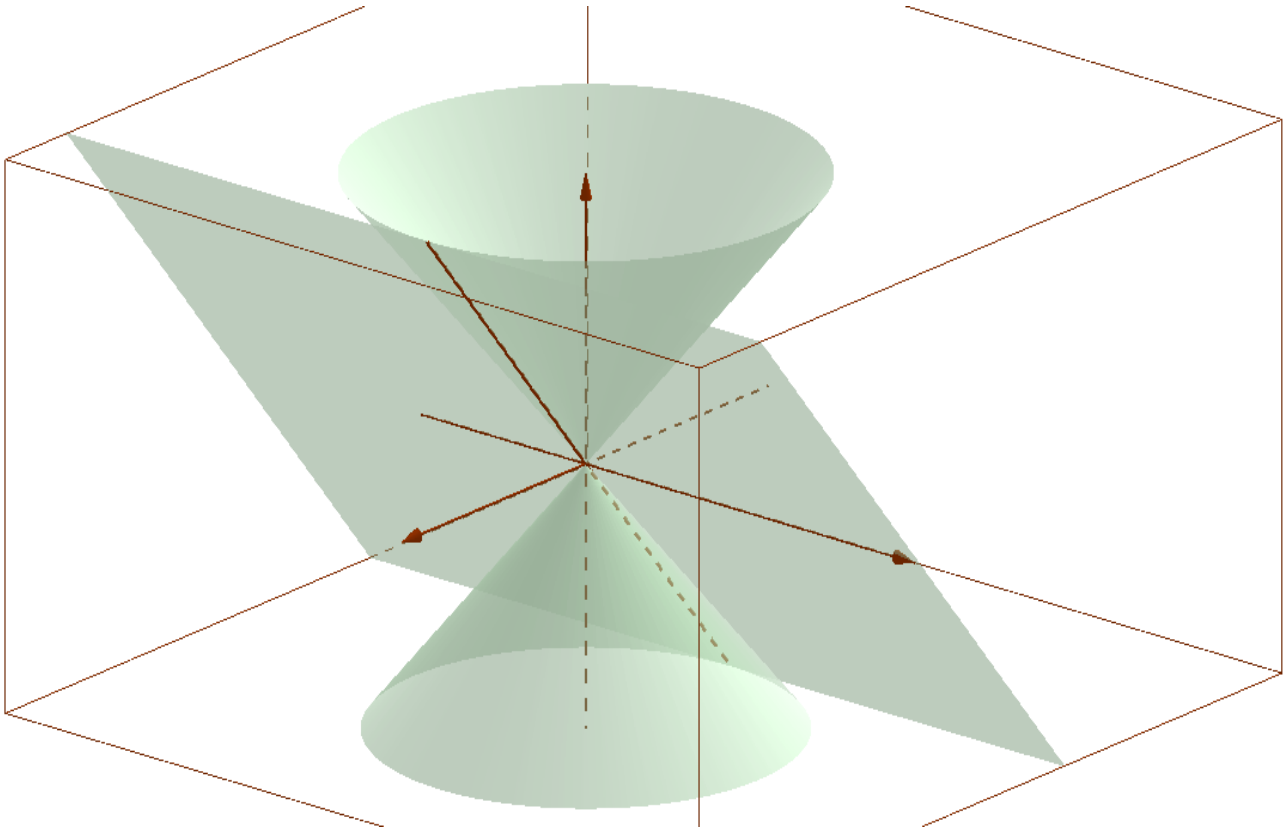
En particular, si $a', b' \in \mathbf{R}$ son tales que $a' \geq b' > 0$ y $(a, b) \neq (a', b')$, la elipse real de ecuación $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$ no *es métricamente equivalente a la elipse real de ecuación $\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} - 1 = 0$.*

(2) *Si C es una hipérbola, existen $a, b \in \mathbf{R}$, tales que $a, b > 0$, únicos, de forma que C es métricamente equivalente a la hipérbola de ecuación*

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

En particular, si $a', b' \in \mathbf{R}$ son tales que $a', b' > 0$ y $(a, b) \neq (a', b')$, la hipérbola de ecuación $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$ no *es métricamente equivalente a la hipérbola de ecuación $\frac{X^2}{a'^2} - \frac{Y^2}{b'^2} - 1 = 0$.*

FIGURA 11. Intersección de Q con el plano de ecuación $x - z = 0$.



(3) *Si C es una parábola, existe $a \in \mathbf{R}$, tal que $a > 0$, único, de forma que C es métricamente equivalente a la parábola de ecuación*

$$aX^2 - Y = 0.$$

En particular, si $a' \in \mathbf{R}$ es tal que $a' > 0$ y $a \neq a'$, la parábola de ecuación $a'X^2 - Y = 0$ no *es métricamente equivalente a la parábola de ecuación $aX^2 - Y = 0$.*

(4) *Si C es una elipse imaginaria, existen $a, b \in \mathbf{R}$, tales que $a \geq b > 0$, únicos, de forma que C es métricamente equivalente a la elipse imaginaria de ecuación*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

En particular, si $a', b' \in \mathbf{R}$ son tales que $a' \geq b' > 0$ y $(a, b) \neq (a', b')$, la elipse imaginaria de ecuación $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0$ no *es métricamente equivalente a la elipse imaginaria de ecuación $\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} + 1 = 0$.*

(5) *Si C es un par de rectas reales secantes, existe $a \in \mathbf{R}$, tal que $a > 0$, único, de forma que C es métricamente equivalente al par de rectas reales secantes de ecuación*

$$a^2X^2 - Y^2 = 0.$$

En particular, si $a' \in \mathbf{R}$ es tal que $a' > 0$ y $a \neq a'$, el par de rectas reales secantes de ecuación $a'^2X^2 - Y^2 = 0$ no *es métricamente equivalente al par de rectas reales secantes de ecuación $a^2X^2 - Y^2 = 0$.*

(6) *Si C es un par de rectas reales paralelas, existe $a \in \mathbf{R}$, tal que $a > 0$, único, de forma que C es métricamente equivalente al par de rectas reales paralelas de ecuación*

$$X^2 - a^2 = 0.$$

En particular, si $a' \in \mathbf{R}$ es tal que $a' > 0$ y $a \neq a'$, el par de rectas reales secantes de ecuación $X^2 - a'^2 = 0$ no es métricamente equivalente al par de rectas reales secantes de ecuación $X^2 - a^2 = 0$.

(7) *Si C es un par de rectas imaginarias secantes, existe $a \in \mathbf{R}$, tal que $a > 0$, único, de forma que C es métricamente equivalente al par de rectas imaginarias secantes de ecuación*

$$a^2X^2 + Y^2 = 0.$$

En particular, si $a' \in \mathbf{R}$ es tal que $a' > 0$ y $a \neq a'$, el par de rectas imaginarias secantes de ecuación $a'^2X^2 + Y^2 = 0$ no es métricamente equivalente al par de rectas reales secantes de ecuación $a^2X^2 + Y^2 = 0$.

(8) *Si C es un par de rectas imaginarias paralelas, existe $a \in \mathbf{R}$, tal que $a > 0$, único, de forma que C es métricamente equivalente al par de rectas imaginarias paralelas de ecuación*

$$X^2 + a^2 = 0.$$

En particular, si $a' \in \mathbf{R}$ es tal que $a' > 0$ y $a \neq a'$, el par de rectas imaginarias secantes de ecuación $X^2 + a'^2 = 0$ no es métricamente equivalente al par de rectas reales secantes de ecuación $X^2 + a^2 = 0$.

(9) *Si C es una recta doble, C es métricamente equivalente a la recta doble de ecuación $X^2 = 0$.*

Demostración de los teoremas 10.32 y 10.36: Damos ahora un esbozo de demostración de los teoremas de clasificación afín y métrica de las cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Empezamos por el teorema 10.36. Tenemos que demostrar dos cosas. La primera es ver que una cónica cualquiera de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$ es métricamente equivalente a alguna de las cónicas de la lista dada en el enunciado del teorema 10.36. La segunda cosa que hay que ver es que dos cónicas que tengan ecuaciones diferentes de la lista no son métricamente equivalentes.

La idea para demostrar lo primero nos la da el paso 1 del ejemplo 10.19. Allí vimos que, para transformar la cónica C_4 en otra cónica C_4'' con una ecuación como las que sale en la lista del teorema 10.36 (en aquel caso fue una de las ecuaciones del apartado (2) de la lista), lo que hacíamos era *mover* el centro y los ejes de C_2' hasta convertirlos en el punto $(0, 0)$ y en las rectas $y = 0$ y $x = 0$. Eso lo conseguíamos haciendo primero un giro y luego una traslación. En general, dada una cónica C arbitraria, gracias al teorema espectral, siempre podremos encontrar un giro g de forma que en la ecuación de $g(C)$ desaparezca el término en xy, que no aparece en ninguna de las ecuaciones de la lista. En ocasiones (cuando la cónica sea una parábola, un par de rectas paralelas o una recta doble) podremos elegir g para que también desaparezca el término en y^2. Geométricamente, en el caso de elipses e hipérbolas, esto significa girar la cónica hasta que los ejes sean horizontal y vertical (compara las figuras 9 y 7), y en el caso de las parábolas, girar la cónica hasta que el eje sea vertical.

En segundo lugar haremos, si es necesario, una traslación t para que desaparezcan de la ecuación los términos lineales (cuando a posteriori la cónica no sea una parábola) y el término en x y el término independiente (cuando a posteriori la cónica sea una parábola). Se trata entonces de ver que después de llevar a cabo estos pasos siempre somos capaces

de obtener alguna ecuación de las de la lista. En el caso en que la cónica sea una elipse o una hipérbola, esto significa geométricamente transladar el centro de la cónica al punto $(0,0)$ (compara las figuras 7 y 8). En el caso en que la cónica sea una parábola, significa trasladar el vértice de la parábola al punto $(0,0)$.

En segundo lugar tenemos que ver que dos cónicas con ecuaciones de la lista diferentes no son métricamente equivalentes. Observamos en primer lugar que dos cónicas en números distintos de la lista no pueden ser (por el teorema 10.32, del que también daremos a continuación una idea de demostración) afínmente equivalentes y por tanto, tampoco métricamente equivalentes. Nos queda entonces ver que dos cónicas del mismo número pero con ecuaciones de la lista distintas no pueden ser métricamente equivalentes. Ilustramos el argumento en el caso en que las dos cónicas estén en el apartado (1), es decir, sean elipses reales. En ese caso, según el ejercicio 10.2 si las elipses tienen ecuaciones distintas de la lista, bien la *distancia focal*, bien la constante que es igual a la suma de distancias de los puntos de una elipse a sus focos, no coincide para las dos elipses. Como una isometría conserva las distancias no puede existir ninguna isometría que transforme una cónica en la otra.

Esbozamos ahora la demostración del teorema 10.32. Ya hemos indicado cómo, por medio de una isometría, llegar de una cónica cualquiera C a una cónica C' con una ecuación como las de la lista del teorema 10.36. Sin embargo, la lista de ecuaciones del teorema 10.32 es mucho más reducida por lo que tenemos que transformar más (haciéndola aún más sencilla) la ecuación de C'. Para ello hacemos un argumento como el del ejemplo 10.24. Lo ilustramos otra vez con el caso de las elipses reales. La cónica C' tendrá una ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, donde $a \geq b > 0$. Consideramos entonces el isomorfismo afín f (que, en general, *no será* una isometría; solo lo será si $a=b=1$ y, en ese caso, el isomorfismo es la identidad) de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x' & = & \frac{1}{a}x \\ y' & = & \frac{1}{b}y\ . \end{array}$$

Entonces $f(C')$ tiene ecuación $x^2+y^2-1=0$.

Finalmente vemos que dos cónicas C y C' de ecuaciones distintas de la lista del teorema 10.32 no son afínmente equivalentes. Si lo fueran, existirían matrices asociadas $M(C)$ y $M(C')$ que serían congruentes y tales que sus submatrices $m(C)$ y $m(C')$ también lo serían. Eso implicaría que $M(C)$ y $M(C')$ tendrían el mismo rango y la misma *signatura* (por la *ley de inercia de Sylvester*; recuerda que la signatura de una matriz simétrica real M es la diferencia entre el número de elementos positivos y el número de elementos negativos de cualquier matriz diagonal congruente con M) y lo mismo pasaría para $m(C)$ y $m(C')$. Sin embargo, es un sencillo ejercicio comprobar que dos cónicas que tengan dos ecuaciones distintas de la lista no pueden tener matrices asociadas para las que los cuatro invariantes citados coincidan (al hacer el argumento recuerda que la matriz asociada a una cónica no es única; solo es única salvo producto por escalar no nulo). □

La observacion 10.31 y el teorema 10.32 nos permiten obtener el siguiente método rápido para saber cuándo dos cónicas reales son afínmente equivalentes y para conocer la clase afín de una cónica real C:

Teorema 10.37. *Sea C una cónica del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, sea*

$$M(C)=\begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

una matriz asociada a C y sea

$$m(C) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Sea $R(C)$ el rango de $M(C)$, sea $\Sigma(C) = \Sigma(M(C))$ la signatura proyectiva *de $M(C)$ (es decir, el valor absoluto de la diferencia entre el número de entradas positivas y el número de entradas negativas de cualquier matriz diagonal congruente con $M(C)$, sea $r(C)$ el rango de $m(C)$ y sea $\sigma(C) = \sigma(m(C))$ la signatura proyectiva de $m(C)$ (observa que $R(C), \Sigma(C), r(C)$ y $\sigma(C)$ no dependen de la matriz asociada a C elegida). Entonces dos cónicas C_1 y C_2 de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ son afínmente equivalentes si y solo si $R(C_1) = R(C_2)$, $r(C_1) = r(C_2)$, $\Sigma(C_1) = \Sigma(C_2)$ y $\sigma(C_1) = \sigma(C_2)$. En particular, la clase de equivalencia afín de C viene determinada por los valores de $R(C), \Sigma(C), r(C)$ y $\sigma(C)$, según la tabla siguiente:*

Clase afín de C	$R(C)$	$\Sigma(C)$	$r(C)$	$\sigma(C)$
Elipse real[1,2]	3	1	2	2
Parábola[1,2]	3	1	1	1
Hipérbola[1,2]	3	1	2	0
Elipse imaginaria[1]	3	3	2	2
Par de rectas reales paralelas[2]	2	0	1	1
Par de rectas reales secantes[2]	2	0	2	0
Par de rectas imaginarias paralelas	2	2	1	1
Par de rectas imaginarias secantes	2	2	2	2
Recta doble[2]	1	1	1	1

(1): *Recuerda que las elipses (reales o imaginarias), parábolas e hipérbolas se denominan* cónicas no degeneradas *y el resto se denominan* cónicas degeneradas.
(2): *Las elipses reales, parábolas, hipérbolas, pares de rectas reales (paralelas o secantes) y rectas dobles se denominan* cónicas reales *y el resto se denominan* cónicas imaginarias.

Demostración. Sean C_1 y C_2 dos cónicas afínmente equivalentes y sean $M(C_1)$ y $M(C_2)$ dos matrices asociadas a C_1 y a C_2 respectivamente. Entonces existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tal que $M(C_1)$ y $\lambda M(C_2)$ son congruentes. En ese caso $R(C_1) = R(C_2)$ y $r(C_1) = r(C_2)$. Si λ es positivo, la signatura de $M(C_1)$ es igual a la signatura de $M(C_2)$ y la signatura de $m(C_1)$ es igual a la signatura de $m(C_2)$. Si λ es negativo, la signatura de $M(C_1)$ es igual a la signatura de $-M(C_2)$ y la signatura de $m(C_1)$ es igual a la signatura de $-m(C_2)$. En ambos casos, $\Sigma(C_1) = \Sigma(C_2)$ y $\sigma(C_1) = \sigma(C_2)$.

Supongamos ahora que C_1 y C_2 son dos cónicas tales que $R(C_1) = R(C_2)$, $r(C_1) = r(C_2)$, $\Sigma(C_1) = \Sigma(C_2)$ y $\sigma(C_1) = \sigma(C_2)$. Por el teorema 10.32 sabemos que C_1 es afínmente

equivalente a una cónica C_1' de la lista que aparece en dicho teorema. Igualmente C_2 es afínmente equivalente a una cónica C_2' de la lista que aparece en el teorema 10.32. Por lo que acabamos de ver en el párrafo anterior, $R(C_1) = R(C_1')$, $r(C_1) = r(C_1')$, $\Sigma(C_1) = \Sigma(C_1')$ y $\sigma(C_1) = \sigma(C_1')$, y $R(C_2) = R(C_2')$, $r(C_2) = r(C_2')$, $\Sigma(C_2) = \Sigma(C_2')$ y $\sigma(C_2) = \sigma(C_2')$. Si calculamos los invariantes R, Σ, r, σ de las cónicas de la lista del teorema 10.32, obtenemos el cuadro del enunciado y en dicho cuadro no se repite ninguna cuaterna R, Σ, r, σ. Por tanto $C_1' = C_2'$ y como C_1 es afínmente equivalente a C_1' y C_2 es afínmente equivalente a C_2', C_1 es afínmente equivalente a C_2.

Finalmente, dada una cónica C sabemos por el teorema 10.32 que es afínmente equivalente a una de las cónicas C' que aparecen en la lista de dicho teorema. También sabemos que las cuaternas $R(C), \Sigma(C), r(C), \sigma(C)$ y $R(C'), \Sigma(C'), r(C'), \sigma(C')$ son iguales. Como no hay dos cónicas de la lista del teorema 10.32 que tengan cuaternas de invariantes iguales, la cuaterna $R(C), \Sigma(C), r(C), \sigma(C)$ caracteriza la clase de equivalencia afín de C, de la forma explicada en el cuadro del enunciado. □

Corolario 10.38. *Sea C una cónica del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Entonces*

(1) *C es una cónica no degenerada si y solo si $R(C) = 3$;*
(2) *C es un par de rectas si y solo si $R(C) = 2$;*
(3) *C es una recta doble si y solo si $R(C) = 1$; y*
(4) *C es una cónica real si y solo si $\Sigma(C) = 0, 1$.*

Demostración. Es consecuencia directa del teorema 10.37. □

En el caso de las cónicas complejas tenemos un teorema similar al teorema 10.37, aunque más sencillo, ya que la clasificación que aparece en el teorema 10.34 también lo es (dejamos al lector que deduzca un cuadro como el del teorema 10.37):

Teorema 10.39. *Con la notación introducida en el teorema 10.37, dos cónicas C_1 y C_2 de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ son afínmente equivalentes si y solo si $R_1 = R_2$ y $r_1 = r_2$.*

Demostración. Ejercicio. □

Los teoremas 10.37 y 10.39 nos dan un criterio "algebraico" (ya que lo que hacemos es comprobar los rangos y las signaturas proyectivas de ciertas matrices) para clasificar afínmente las cónicas. Más adelante, cuando usemos la Geometría Proyectiva para estudiar las cónicas afines, daremos un criterio geométrico de clasificación.

Cónicas y referencias cartesianas

Aprovechamos que hemos escrito las ecuaciones de las cónicas en forma matricial para ver cómo cambia la ecuación de una cónica cuando cambiamos de coordenadas. Si una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ tiene ecuación $F = 0$ y llamamos C al conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbf{A}^2_{\mathbf{k}} | F(x, y) = 0\}$ y si, por otra parte consideramos una referencia cartesiana $\mathscr{R}'$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ tal que las ecuaciones del cambio de referencia de $\mathscr{R}'$ a la referencia canónica $\mathscr{R}_c$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ son

$$\begin{array}{rcl} x & = & \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \beta_1 \\ y & = & \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \beta_2, \end{array}$$

entonces los puntos de C son aquellos cuyas coordenadas (x', y') en $\mathscr{R}'$ cumplen la ecuación $G(x', y') = F(\alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \beta_1, \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \beta_2) = 0$. El polinomio G es un polinomio (en las variables x', y') de grado 2 tal y como veremos en la observación 10.41. Es decir $G = 0$ sigue siendo la ecuación de una cónica (de hecho, de la misma cónica que teníamos, pero en coordenadas en $\mathscr{R}'$). Esto motiva que demos la siguiente definición de ecuación y matriz

de una cónica en un sistema de referencia cartesiano $\mathscr{R}'$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ que no es necesariamente el sistema de referencia canónico:

Definición 10.40. Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación $F = 0$ y sea $M(C)$ una matriz asociada de C. Sea $\mathscr{R}' = \{o'; B'\}$ una referencia cartesiana de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, sean

$$\begin{array}{rcl} x & = & \alpha_{11}x' \ +\alpha_{12}y' \ +\beta_1 \\ y & = & \alpha_{21}x' \ +\alpha_{22}y' \ +\beta_2 \end{array}$$

las ecuaciones del cambio de referencia de $\mathscr{R}'$ a la referencia canónica $\mathscr{R}_c$ y sea $M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}_c}$ la matriz de cambio de referencia de $\mathscr{R}$ a $\mathscr{R}_c$, es decir

$$M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Diremos que $F(\alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \beta_1, \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \beta_2) = 0$ es una *ecuación de C respecto de la referencia $\mathscr{R}'$* y que

$$M_{\mathscr{R}'}(C) = M^t_{\mathscr{R}',\mathscr{R}_c} M(C) M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}_c}$$

es una *matriz de C respecto de la referencia $\mathscr{R}'$* (la matriz de C respecto de la referencia $\mathscr{R}'$ es única salvo producto de un elemento no nulo de $\mathbf{k}$).

Observación 10.41. Como $m(C)$ no es la matriz nula y M_{B',B_c} es invertible, es claro que

$$M^t_{B',B_c} \cdot m(C) \cdot M_{B',B_c}$$

tampoco es nula, por lo que $F(\alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \beta_1, \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \beta_2)$ es un polinomio de grado 2.

Observación 10.42. Según la definición 10.40, $F = 0$ es la ecuación de C respecto de la referencia canónica y $M(C)$ es una matriz de C respecto de la referencia canónica.

Proposición 10.43. *Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ y sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos sistemas de referencia cartesianos de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. Entonces*

$$M_{\mathscr{R}_2}(C) = M^t_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1} M_{\mathscr{R}_1}(C) M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}.$$

Demostración. Ejercicio. □

Observación 10.44. Abordamos ahora la situación en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Si tenemos la ecuación (o la matriz) en la referencia canónica de una cónica C y hacemos un cambio de coordenadas a una referencia canónica *no rectangular*, obtendremos la ecuación (o la matriz) de C en el nuevo sistema de referencia pero no podremos conocer las propiedades métricas de C mirando su ecuación en esas nuevas coordenadas. Por ello, cuando estemos interesados en las propiedades métricas de una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y cambiemos las coordenadas, es necesario que el cambio sea de la referencia canónica a otra referencia cartesiana rectangular y, en general, que nuestros cambios de coordenadas lo sean entre dos referencias $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ rectangulares. Esto se traduce en que en la matriz $M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}$ de cambio de referencia la submatriz de cambio de base sea *ortogonal*.

Reinterpretamos ahora las relaciones de equivalencia afín y métrica, expresándolas en términos de ecuaciones y cambios de coordenadas.

Observación 10.45. Si nos dan unas ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x' & = & \gamma_{11}x \ +\gamma_{12}y \ +\delta_1 \\ y' & = & \gamma_{21}x \ +\gamma_{22}y \ +\delta_2, \end{array} \tag{10.45.1}$$

donde $\gamma_{ij}, \delta_k \in \mathbf{k}$ (respectivamente $\mathbf{R}$), tales que la matriz

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

sea *regular* (respectivamente *ortogonal*) y nos piden interpretarlas, podemos hacerlo de dos formas: (10.45.1) son las ecuaciones de un *cambio de referencia* del plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, de un *cambio de referencia rectangular* del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$) pero también son las ecuaciones de un *isomorfismo afín* del plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, de una *isometría* del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$). Lo mismo pasa si nos piden interpretar una matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta_1 & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \delta_2 & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

de la que sabemos que

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

es *regular* (respectivamente *ortogonal*): N es a la vez la matriz de un *cambio de referencia* del plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, de un *cambio de referencia rectangular* del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$) y la matriz de un *isomorfismo afín* del plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, de una *isometría* del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$).

De esta observación se sigue la siguiente proposición:

Proposición 10.46. *Sean C y C' dos cónicas del plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$). Entonces C y C' son afínmente equivalentes (respectivamente, métricamente equivalentes) si y solo si existen dos referencias cartesianas (respectivamente, referencias cartesianas rectangulares) $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ tales que la ecuación de C respecto de $\mathscr{R}$ es la misma que la ecuación de C' respecto de $\mathscr{R}'$.*

De igual forma, C y C' son afínmente equivalentes (respectivamente, métricamente equivalentes) si y solo si existen dos referencias cartesianas (respectivamente, referencias cartesianas rectangulares) $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ y matrices asociadas $M_{\mathscr{R}}(C)$ y $M_{\mathscr{R}'}(C')$ tales que $M_{\mathscr{R}}(C) = M_{\mathscr{R}'}(C')$.

En vista de la observación 10.45, el proceso descrito en el paso 1 del ejemplo 10.19 y en el esbozo de demostración del teorema 10.36, que nos permite cambiar la ecuación de una cónica C cualquiera de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ por una ecuación de las de la lista del teorema 10.36, se puede interpretar también como la realización de un cambio de coordenadas rectangulares. En el caso de una hipérbola o una elipse real, por ejemplo, lo que hacemos es pasar de la ecuación de C respecto del sistema de referencia canónico a la ecuación de C respecto de un sistema de referencia cartesiano rectangular que tiene como centro, el centro de C, y como base, los vectores directores unitarios de los ejes de C (ordenados de forma que la base que forman esté orientada positivamente).

Observación 10.47. Quizá te haya sorprendido que, mientras en el tema 1, dedicado a la Geometría Afín y a la Geometría Afín Euclídea, los enunciados se hacían para espacios afines y espacios afines euclídeos arbitarios, en este tema hemos trabajado solo en el plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ y en el plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Sin embargo, una vez fijado un sistema de referencia cartesiano (respectivamente, cartesiano rectangular) $\mathscr{R}$ en un plano afín arbitrario (A, V, φ) (resp., en un plano afín euclídeo arbitrario $(A, V, \varphi, <, >)$, no presenta demasiados problemas definir la ecuación o la matriz de una cónica del plano A

con respecto de $\mathscr{R}$. De esto se sigue que las cónicas de A tienen las propiedades geométricas que ya hemos estudiado para las cónicas del plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ y del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Un caso en que tiene interés hablar de cónicas en un plano afín que no es el plano afín estándar es cuando intersecamos una *cuádrica* de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ con un plano afín de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$. Hemos visto un ejemplo de esto en las intersecciones del cono cuádrico Q con distintos planos (páginas 103–104 y figuras 4, 5, 6, 10 y 11).

11. Cónicas proyectivas

Recordemos que una de las razones para construir el espacio proyectivo fue estudiar el "comportamiento" de los objetos afines en el infinito. Por ejemplo, en los ejercicios 2(b), 2(c) y 3 de la hojas de ejercicios de Geometría Proyectiva introdujimos la noción de *completado proyectivo* de una cónica. Para las cónicas de ecuaciones $y - x^2 = 0$ y $xy - 1 = 0$, que son las que aparecen en 2(b) y 2(c), dichos completados proyectivos son los conjuntos de puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ que cumplen respectivamente las ecuaciones $x_0x_2 - x_1^2 = 0$ y $x_1x_2 - x_0^2 = 0$ (recuerda que para ello identificamos el plano afín, de coordenadas x, y, con el conjunto de los puntos del plano proyectivo (de coordenadas homogéneas $(x_0 : x_1 : x_2)$) con $x_0 \neq 0$, identificando (x, y) con $(1 : x : y)$ y $(x_0 : x_1 : x_2)$ con $(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$). Es fácil darse cuenta de que este proceso (obtener el completado proyectivo) lo podemos hacer para cualquier cónica afín y que, dado que siempre partimos de una ecuación de grado 2, al hacer el completado proyectivo obtendremos una ecuación *homogénea* de grado 2, en tres variables. Por otra parte, si F es un polinomio homogéneo en las variables x_0, x_1, x_2 con coeficientes en un cuerpo $\mathbf{k}$, no tiene sentido hablar del valor $F(p)$ que el polinomio F toma en un punto p de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$; en cambio, sí tiene sentido hablar de en qué puntos p de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ se anula F, es decir, tiene sentido hablar del conjunto de ceros, en el proyectivo, de un polinomio homogéneo.

Definición de cónica proyectiva.

El párrafo anterior motiva que defininamos una *cónica proyectiva* como el lugar de ceros de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de un polinomio homogéneo de grado 2, en las variables x_0, x_1, x_2. Tal como nos ocurrió con las cónicas afines y por las mismas razones que entonces, esta definición no resulta del todo satisfactoria, como indica el siguiente ejemplo (compárese con el ejemplo 10.13):

Ejemplo 11.1. El lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ del polinomio $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ o del polinomio $x_0^2 + x_1^2 + 2x_2^2$ es el conjunto vacío. El lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ del polinomio $x_1^2 + x_2^2$ es el conjunto $\{(1 : 0 : 0)\}$. Por otra parte, los lugares de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ de los polinomios $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ y $x_0^2 + x_1^2 + 2x_2^2$ son distintos.

Observación 11.2. El ejemplo 11.1 nos muestra que:

(1) existen polinomios homogéneos de grado 2 con coeficientes reales cuyo lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ es un conjunto finito de puntos, posiblemente vacío;
(2) existen polinomios homogéneos de grado 2 con coeficientes reales, que a pesar de tener el mismo lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, tienen distinto lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$.

El ejemplo 11.1 y la observación 11.2 sugieren que debemos adoptar una definición de cónica proyectiva análoga a la que adoptamos en el caso afín:

Definición 11.3. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo. Definimos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de polinomios homogéneos de grado 2 de $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$: dos polinomios F_1 y F_2 son equivalentes si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $F_2 = \lambda F_1$. Una *cónica (proyectiva)* de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es una clase de equivalencia de polinomios homogéneos de grado 2 de $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$. Si F un polinomio homogéneo de grado 2 de $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$, diremos que la cónica $C = [F]$ tiene ecuación $F = 0$ y que el *conjunto de puntos o lugar de ceros* de C es el conjunto $\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$.

Proposición 11.4. *El conjunto de cónicas de* $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ *tiene estructura de espacio proyectivo sobre* $\mathbf{k}$*, de dimensión* 5*.*

Demostración. Por la definición 11.3, el conjunto de cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es el proyectivizado $\mathbf{P}(W)$ del espacio vectorial W formado por los polinomios homogéneos de grado 2 de $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ y el polinomio 0. Es fácil ver que los polinomios $x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2$ forman una base de W, por lo que W es un espacio vectorial de dimensión 6, lo que implica que $\mathbf{P}(W)$ es un espacio proyectivo de dimensión 5. □

Observación 11.5. En la definición 11.3 está implícito que estamos fijando unas coordenadas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, las coordenadas respecto del sistema de referencia proyectivo canónico; veremos más adelante qué ocurre cuando cambiamos de coordenadas. Por otra parte, es claro que si F_1 y F_2 son dos polinomios relacionados, su lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es el mismo. En ocasiones, el lugar de ceros de una cónica $C = [F]$ caracteriza dicha cónica (es decir, si F' tiene el mismo lugar de ceros que F, entonces F' y F están relacionados y por tanto $[F] = [F']$). Esto ocurre en el caso en el que el lugar de ceros de la cónica sea un conjunto infinito. En esos casos podremos identificar, abusando de la notación, la cónica $C = [F]$ con su lugar de ceros.

Matriz asociada a una cónica proyectiva

ATENCIÓN: A partir de ahora los cuerpos con los que trabajaremos tendrán característica distinta de 2.

De forma similar al caso afín, definimos la matriz asociada a una cónica proyectiva:

Definición 11.6. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo de característica distinta de 2, sea C una cónica proyectiva de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, de ecuación

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2 = 0, \tag{11.6.1}$$

(donde $a_{ij} \in \mathbf{k}$). La ecuación (11.6.1) se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} M(C) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

donde

$$M(C) = \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{a_{01}}{2} & \frac{a_{02}}{2} \\ \frac{a_{01}}{2} & a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{02}}{2} & \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Decimos que $M(C)$ es una matriz asociada a la cónica C.

Observación 11.7. La matriz $M(C)$ de la definición anterior es una matriz *simétrica*. Dada una cónica proyectiva C, su matriz asociada es única salvo producto por un elemento de $\mathbf{k}^*$.

Equivalencia proyectiva de cónicas.

De forma análoga al caso afín y afín euclídeo, parece razonable decir que dos cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ son *proyectivamente equivalentes* si y solo si se puede pasar de una a la otra mediante una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ (ya que las proyectividades son las aplicaciones que conservan las propiedades geométricas de los puntos y conjuntos de puntos del plano proyectivo: conservan las dimensiones, llevan puntos alineados a puntos alineados, conservan la razón doble...). Para ello, como en el caso afín y afín euclídeo necesitamos definir también de manera precisa qué es la imagen de una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ por una proyectividad:

Definición 11.8. Sea C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación $F = 0$ y sea f una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Sean

$$\begin{array}{rcl} y_0 &=& \alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \alpha_{02}x_2 \\ y_1 &=& \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ y_2 &=& \alpha_{20}x_0 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{array} \tag{11.8.1}$$

las ecuaciones (con respecto al sistema de referencia proyectivo canónico) de la proyectividad *inversa* de f (recuerda que lo que se tiene que cumplir para que f sea una proyectividad es que $\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ sea una matriz invertible). En ese caso definimos la imagen de C por f y la denotamos como $f(C)$ a la cónica proyectiva de ecuación $F(\alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \alpha_{02}x_2, \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \alpha_{20}x_0 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) = 0$.

Sean C_1 y C_2 dos cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuaciones $F_1 = 0$ y $F_2 = 0$. Decimos que C_1 y C_2 son *proyectivamente equivalentes* si y solo si existe una proyectividad f de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ tal que $C_2 = f(C_1)$.

Proposición 11.9. *Sea C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea f una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. El lugar de ceros de $f(C)$ es la imagen por f del lugar de ceros de C.*

Demostración. Denotemos por C^0 al lugar de ceros de la cónica C. Entonces el punto $p = (x_0 : x_1 : x_2)$ pertenece a $f(C^0)$ si y solo si el punto $q = f^{-1}(p) = (y_0 : y_1 : y_2)$ pertenece a C^0. Como q pertenece a C^0 si y solo si $F(y_0 :, y_1, y_2) = 0$ y $(x_0 : x_1 : x_2)$ e $(y_0 : y_1 : y_2)$ están relacionados por las ecuaciones (11.8.1), entonces p pertenece a $f(C^0)$ si y solo si $F(\alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \alpha_{02}x_2, \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \alpha_{20}x_0 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) = 0$, que es justamente el lugar de ceros de la cónica de ecuación $F(\alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \alpha_{02}x_2, \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \alpha_{20}x_0 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) = 0$. □

Igual que en el caso afín y afín euclídeo, es fácil reescribir el concepto de equivalencia proyectiva en términos de matrices asociadas a una cónica:

Proposición 11.10. *Sea* $\mathbf{k}$ *un cuerpo con característica distinta de* 2*, sea C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sea f una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea N una matriz asociada, respecto de la referencia proyectiva canónica, de la* inversa *de f. Si $M(C)$ es una matriz asociada de C entonces $M(f(C)) = N^t \cdot M(C) \cdot N$ es una matriz asociada de $f(C)$.*

Observación 11.11. Como $M(C)$ no es la matriz nula y N es invertible, es claro que $M(f(C))$ tampoco es nula, por lo que $F(\alpha_{00}x_0+\alpha_{01}x_1+\alpha_{02}x_2, \alpha_{10}x_0+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2, \alpha_{20}x_0+\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2)$ no es el polinomio idénticamente nulo. Es claro también que es un polinomio homogéneo de grado 2 en las variables x_0, x_1, x_2.

Teorema 11.12. *Sea* $\mathbf{k}$ *un cuerpo con característica distinta de* 2*, sean C_1 y C_2 dos cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sean $M(C_1)$ y $M(C_2)$ matrices asociadas de C_1 y C_2. Entonces, C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ y una matriz N invertible tal que*

$$M(C_2) = \lambda N^t M(C_1) N.$$

Es decir, C_1 y C_2 son proyectivamente equivalente si existe una matriz asociada a C_1 que es congruente *a una matriz asociada a C_2.*

Ejercicio 11.13. Demuestra que, en efecto, la equivalencia proyectiva de cónicas es una relación de equivalencia

Ecuación de una cónica después de un cambio de coordenadas.

Vemos cómo cambian la ecuación y la matriz de una cónica proyectiva cuando cambiamos las coordenadas homogéneas que estemos usando:

Definición 11.14. Sea C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación $F = 0$ y con matriz asociada $M(C)$, sea $\mathscr{R}'$ una referencia proyectiva de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sean

$$\begin{array}{rcl} x_0 &=& \alpha_{00}x'_0 + \alpha_{01}x'_1 + \alpha_{02}x'_2 \\ x_1 &=& \alpha_{10}x'_0 + \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 \\ x_2 &=& \alpha_{20}x'_0 + \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 \end{array}$$

unas ecuaciones del cambio de referencia de $\mathscr{R}'$ a la referencia proyectiva canónica $\mathscr{R}_c$ y sea

$$N = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

una matriz de cambio de referencia de $\mathscr{R}'$ a $\mathscr{R}_c$. Diremos que $F(\alpha_{00}x'_0+\alpha_{01}x'_1+\alpha_{02}x'_2, \alpha_{10}x'_0+\alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2, \alpha_{20}x'_0+\alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2) = 0$ es una *ecuación de C respecto de la referencia $\mathscr{R}'$* y que

$$M_{\mathscr{R}'}(C) = N^t M(C) N$$

es una *matriz de C respecto de la referencia $\mathscr{R}'$*.

Observación 11.15. Como $M(C)$ no es la matriz nula y N es invertible, es claro que $M_{\mathscr{R}'}(C)$ tampoco es nula, por lo que $F(\alpha_{00}x'_0+\alpha_{01}x'_1+\alpha_{02}x'_2, \alpha_{10}x'_0+\alpha_{11}x'_1+\alpha_{12}x'_2, \alpha_{20}x'_0+\alpha_{21}x'_1+\alpha_{22}x'_2)$ no es el polinomio idénticamente nulo. Es claro también que es un polinomio homogéneo de grado 2 en las variables x'_0, x'_1, x'_2.

Observación 11.16. Según la definición 11.14, $F = 0$ es la ecuación de C respecto de la referencia proyectiva canónica y $M(C)$ es una matriz de C respecto de la referencia proyectiva canónica.

Proposición 11.17. *Sea C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos sistemas de referencia proyectivos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Entonces, para alguna matriz asociada $M_{\mathscr{R}_1}(C)$ de C respecto de la referencia $\mathscr{R}_1$ se tiene*

$$M_{\mathscr{R}_2}(C) = M^t_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1} M_{\mathscr{R}_1}(C) M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}.$$

Demostración. Ejercicio. □

Al igual que en el caso afín, unas ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x_0 &=& \alpha_{00}x'_0 + \alpha_{01}x'_1 + \alpha_{02}x'_2 \\ x_1 &=& \alpha_{10}x'_0 + \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 \\ x_2 &=& \alpha_{20}x'_0 + \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 \end{array}$$

para las que

$$\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

es una matriz invertible con coeficientes en $\mathbf{k}$, pueden ser interpretadas de dos formas: bien como las ecuaciones de una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, bien como las ecuaciones de un cambio de referencia proyectiva. Esto justifica la siguiente proposición:

Proposición 11.18. *Sean C_1 y C_2 dos cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Entonces C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si existen dos referencias proyectivas $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ tales que la ecuación de C_1 respecto de $\mathscr{R}_1$ es la misma que la ecuación de C_2 respecto de $\mathscr{R}_2$ salvo, quizás, producto por un escalar no nulo de $\mathbf{k}$.*

De igual forma, C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si existen dos referencias proyectivas $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ tales que $M_{\mathscr{R}_1}(C_1) = M_{\mathscr{R}_2}(C_2)$ para alguna matriz asociada $M_{\mathscr{R}_1}(C_1)$ de C_1 respecto de la referencia $\mathscr{R}_1$ y para alguna matriz asociada $M_{\mathscr{R}_2}(C_2)$ de C_2 respecto de la referencia $\mathscr{R}_2$.

Clasificación de las cónicas proyectivas reales y complejas.

Para $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$, estamos listos para afrontar el problema de la *clasificación proyectiva* de las cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, usando el teorema 11.12 y resultados de Álgebra Lineal sobre congruencia de matrices. Damos primero este criterio:

Proposición 11.19. *Sean C_1 y C_2 dos cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sea $M(C_1)$ una matriz asociada a C_1 y sea $M(C_2)$ una matriz asociada a C_2.*

1. *Si $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si $M(C_1)$ y $M(C_2)$ tienen el mismo rango.*
2. *Si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si $M(C_1)$ y $M(C_2)$ tienen el mismo rango y la misma signatura proyectiva Σ (para la definición de signatura proyectiva véase el teorema 10.37).*

Demostración. La proposición se sigue del teorema 11.12, que nos dice que C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes si y solo si $M(C_1)$ y $M(C_2)$ son congruentes salvo producto por un escalar no nulo. Es un resultado conocido de Álgebra Lineal que dos matrices congruentes tienen el mismo rango y que una matriz simétrica es congruente a una matriz diagonal. En el caso complejo, una matriz simétrica es congruente a una matriz diagonal con unos y ceros en la diagonal, con los unos apareciendo en primer lugar. Además, el rango de dicha matriz es el número de unos en la diagonal. De estos resultados y observaciones se sigue (1). En el caso real, dos matrices simétricas reales son congruentes si y solo si tienen el mismo rango y la misma signatura (recuerda que la definición de signatura de una matriz simétrica real se dio en la página 121). Entonces, para demostrar (2), supongamos primero que C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes. En ese caso $M(C_1)$ es congruente a $\lambda M(C_2)$, para algún número real λ no nulo. Si λ es positivo, entonces $M(C_1)$ y $M(C_2)$ tienen el mismo rango y la misma signatura y, por tanto, tienen también la misma signatura proyectiva. Si λ es negativo, entonces $M(C_1)$ y $-M(C_2)$ son congruentes, por lo que $M(C_1)$ y $-M(C_2)$ tienen el mismo rango y la misma signatura, de lo que se sigue que $M(C_1)$ y $M(C_2)$ tienen el mismo rango y la misma signatura proyectiva. Supongamos ahora que $M(C_1)$ y $M(C_2)$ tienen el mismo rango y la misma signatura proyectiva. En ese caso, o bien $M(C_1)$ y $M(C_2)$ tienen la misma signatura o bien $M(C_1)$ y $-M(C_2)$ tienen la misma signatura. Por otra parte, el rango de $M(C_2)$ es igual al rango de $-M(C_2)$. De todo esto se deduce que, o bien $M(C_1)$ y $M(C_2)$ son congruentes, o bien $M(C_1)$ y $-M(C_2)$ son congruentes. Como $M(C_2)$ y $-M(C_2)$ son ambas matrices asociadas a C_2, concluimos que C_1 y C_2 son proyectivamente equivalentes. Esto demuestra (2). □

Describimos ahora las clases de equivalencia proyectiva de cónicas empezando con el caso complejo, que es más sencillo.

Teorema 11.20. *Si C una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, entonces C es proyectivamente equivalente a una y solo una de las cónicas proyectivas cuyas ecuaciones aparecen en la siguiente lista:*

(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 3 *y decimos que C es una cónica* no degenerada.
(2) $x_0^2 + x_1^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 2 *y C es un* par de rectas.
(3) $x_0^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 1 *y decimos que C es una* recta doble.

Demostración. Sea M una matriz asociada a C. Como ya hemos dicho M es congruente a una matriz diagonal con unos y ceros en la diagonal, con los unos apareciendo en primer lugar. Esto quiere decir que, en un sistema de referencia proyectivo adecuado o, equivalentemente, después de transformarla con una proyectividad adecuada, C tiene ecuación $\lambda_0 {x'_0}^2 + \lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2 = 0$, donde los λ_i son unos o ceros, de acuerdo a la siguiente casuística:
Si el rango de M es 3, entonces $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, ya que al ser M congruente con $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, esta última matriz ha de tener rango 3. Por tanto la ecuación de C en una referencia adecuada o la ecuación de $f(C)$, donde f es una proyectividad adecuada, es ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 + {x'_2}^2 = 0$.
Si el rango de M es 2, entonces, razonando de manera análoga, vemos que $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$. Por tanto, la ecuación de C en una referencia adecuada o la ecuación de $f(C)$, donde f es una proyectividad adecuada, queda ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 = 0$.
Por último, si el rango de M es 1, entonces $\lambda_0 = 1$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Por tanto, la ecuación de C en una referencia adecuada o la ecuación de $f(C)$, donde f es una proyectividad adecuada, queda ${x'_0}^2 = 0$.
Finalmente, es claro que las cónicas de ecuaciones ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 + {x'_2}^2 = 0$, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 = 0$ y ${x'_0}^2 = 0$ no son proyectivamente equivalentes entre sí, ya que ninguna de las matrices asociadas a una de ellas es congruente a ninguna de las matrices asociadas a otra de ellas, al tener rangos distintos. □

Teorema 11.21. *Si C es una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, entonces C es proyectivamente equivalente a una y solo una de las cónicas proyectivas cuyas ecuaciones aparecen en la siguiente lista:*
(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 3 *y* $\Sigma(M(C)) = 3$ *y decimos que C es una cónica* no degenerada imaginaria *(observa que el conjunto de puntos de C en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ es vacío).*
(2) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 3 *y signatura* $\Sigma(M(C)) = 1$ *y decimos que C es una cónica* no degenerada real *(observa que el conjunto de puntos de C en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ no es vacío; de hecho, es un conjunto infinito).*
(3) $x_0^2 + x_1^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 2 *y signatura* $\Sigma(M(C)) = 2$ *y C es un* par de rectas imaginarias *(observa que el conjunto de puntos de C en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ es un punto, el punto de intersección de las dos rectas imaginarias, que tienen ecuaciones conjungadas).*
(4) $x_0^2 - x_1^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 2 *y* $\Sigma(M(C)) = 0$ *y C es un* par de rectas reales.
(5) $x_0^2 = 0$. *En este caso cualquier matriz asociada de C tiene rango* 1 *y C es una* recta doble.

Demostración. Sea M una matriz asociada a C. Recuerda que M es congruente con una matriz diagonal con unos, menos unos y ceros en la diagonal. Argumentando como

en la demostración del teorema 11.20 podemos afirmar que, en un sistema de referencia proyectivo adecuado o, equivalentemente, después de transformarla con una proyectividad adecuada, C tiene ecuación $\lambda_0 {x'_0}^2 + \lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2 = 0$ con los λ_i unos, menos unos o ceros. Permutando los tres primeros puntos de la referencia proyectiva y multiplicando la ecuación por -1 si fuera necesario, podemos suponer que los primeros λ_i son unos, los siguientes λ_i (si los hubiere) son menos unos, y los últimos λ_i (si los hubiere) son ceros. Siguiendo con los argumentos de la demostración del teorema 11.20, si el rango de M es 3, entonces $\Sigma(M(C))$ es, o bien 3, en cuyo caso $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, o bien 1, en cuyo caso $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. En el primer caso, la ecuación de C en la nueva referencia queda ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 + {x'_2}^2 = 0$ y, en el segundo caso, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 - {x'_2}^2 = 0$.

Si el rango de M es 2, entonces $\lambda_2 = 0$ y, o bien $\Sigma(M(C)) = 2$, en cuyo caso $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$, o bien $\Sigma(M(C)) = 0$, en cuyo caso $\lambda_0 = 1$ y $\lambda_1 = -1$. En el primer caso, la ecuación de C en la nueva referencia queda ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 = 0$, y en el segundo caso queda ${x'_0}^2 - {x'_1}^2 = 0$.

Por último, si el rango de M es 1, entonces $\Sigma(M(C)) = 1$, $\lambda_0 = 1$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La ecuación de C en la nueva referencia queda ${x'_0}^2 = 0$.

Por otra parte, es claro que las cónicas de ecuaciones ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 + {x'_2}^2 = 0$, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 - {x'_2}^2 = 0$, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 = 0$, ${x'_0}^2 - {x'_1}^2 = 0$ y ${x'_0}^2 = 0$ no son cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ proyectivamente equivalentes entre sí. En efecto, si consideramos una matriz asociada a una de esas cónicas y una matriz asociada a otra de ellas, dichas matrices no son congruentes ya que tienen distintos rangos y el número de ceros, unos y menos unos de sus diagonales es distinto. Finalmente las afirmaciones entre paréntesis se demuestran usando las ecuaciones ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 + {x'_2}^2 = 0$, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 - {x'_2}^2 = 0$, ${x'_0}^2 + {x'_1}^2 = 0$ y ${x'_0}^2 - {x'_1}^2 = 0$, teniendo en cuenta que la ecuación original de C se obtiene a partir de ellas mediante un cambio de coordenadas homogéneas *real*. □

Recta tangente, polaridad y cónica dual de una cónica no degenerada.

Proposición 11.22. *Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ (es decir, tal que el rango de una matriz asociada suya $M(C)$ sea 3) con lugar de ceros que, con un abuso de notación llamaremos también C, no vacío, y sea $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ un punto de C. Sea $\Omega(p)$ el haz de rectas que pasa por p. Entonces todas las rectas de $\Omega(p)$ excepto una, que llamaremos T_pC, cortan a C en p y en otro punto distinto de p. La recta T_pC tiene ecuación*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M(C) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

y corta a C solo en p.

Demostración. Véase la proposición 4.2 de los "Apuntes de Geometría Proyectiva" de E. Arrondo. □

Corolario 11.23. *Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.*

1. *La intersección de una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ con el lugar de ceros de C es vacía, está formada por un solo punto o está formada por dos puntos distintos.*
2. *En particular, el lugar de ceros de C no contiene tres puntos alineados y, por tanto, no contiene rectas.*
3. *Si $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, la intersección de cualquier recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ con el lugar de ceros de C es no vacía.*

Demostración. Las afirmaciones (1) y (2) son consecuencia directa de la proposición 11.22. La afirmación (3) es, de hecho, cierta para cualquier cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, incluso si se trata de una cónica degenerada. En efecto, recuerda que, según el teorema 11.20, una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ es proyectivamente equivalente a la cónica de ecuación

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0 \tag{11.23.1}$$

con los λ_i unos o ceros. Consideramos una recta l que pasa por dos puntos distintos $(a_0 : a_1 : a_2)$ y $(b_0 : b_1 : b_2)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & a_0 t_0 + b_0 t_1 \\ x_1 & = & a_1 t_0 + b_1 t_1 \\ x_2 & = & a_2 t_0 + b_2 t_1 \end{array} \tag{11.23.2}$$

es una parametrización de l. Sustituyendo (11.23.2) en (11.23.1) obtenemos una ecuación

$$A_{00} t_0^2 + A_{01} t_0 t_1 + A_{11} t_1^2 = 0, \tag{11.23.3}$$

donde $A_{00}, A_{01}, A_{11} \in \mathbf{C}$. La ecuación (11.23.3) puede ser identicamente nula o no. En el primer caso l está contenida en el lugar de ceros de C. En el segundo caso, si $(0 : 1)$ es solución de (11.23.3), ya tenemos un punto en la intersección de l con el lugar de ceros de C, el punto $(b_0 : b_1 : b_2)$. Si $(0 : 1)$ no es solución de (11.23.3) tenemos que $A_{11} \neq 0$. Entonces, consideramos la ecuación de segundo grado

$$A_{11} t^2 + A_{01} t + A_{00} = 0,$$

que en $\mathbf{C}$ siempre tiene solución y tomamos una raíz $\mu \in \mathbf{C}$ de la misma. En ese caso $(1 : \mu)$ es solución de (11.23.3) y el punto $(a_0 + \mu b_0 : a_1 + \mu b_1 : a_2 + \mu b_2)$ es un punto de la intersección de l con el lugar de ceros de C. □

Fijémonos ahora en una cónica no degenerada real S de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, por ejemplo, en la cónica de ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$, llamemos también S a su lugar de ceros y sea p un punto de S, por ejemplo, el punto $(0, 1)$. Si consideramos todas las rectas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que pasan por p vemos que todas cortan a S en p y en otro punto además de p, excepto la recta l de ecuación $y = 1$, que, según lo que nos dice el cálculo elemental, es la *tangente* de S en p. Cuando completamos S y las rectas que pasan por p obtenemos una cónica proyectiva $\overline{S}$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ y el haz de rectas $\Omega(p)$ y vemos que, por la proposición 11.22, no existen puntos nuevos de corte de las rectas del haz con $\overline{S}$. Vemos también que, cuando pensamos en las rectas del haz aproximándose a $\bar{l}$, el punto de corte distinto de p de cada recta se va acercando cada vez más a p, hasta convertirse en p cuando consideramos la intersección de C con la recta $\bar{l}$. Esta es la forma en que en cálculo elemental se define intuitivamente la tangente a una curva en un punto. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 11.24. Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea p un punto del lugar de ceros de C. Decimos que la recta T_pC de la proposición 11.22 es la *recta tangente* a C en el punto p.

Proposición 11.25. *Dada una cónica C no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ con matriz M, el conjunto de rectas tangentes a C forma el lugar de ceros de una cónica no degenerada en $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$. Dicha cónica tiene a M^{-1} como matriz asociada respecto de la referencia dual de la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.*

Demostración. Consideramos la recta l de ecuación $u_0x_0+u_1x_1+u_2x_2 = 0$, que corresponde por tanto al punto de $\mathbf{P}^{2*}_{\mathbf{k}}$ de coordenadas homogéneas $(u_0 : u_1 : u_2)$ respecto de la

referencia dual de la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. De la proposición 11.22 se sigue que la recta l es tangente a C en un punto $p = (a_0 : a_1 : a_2) \in C$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} M^{-1}$$

(recuerda que, al ser C no degenerada, M es invertible). Por otra parte la condición de que p pertenezca a C se traduce en

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0,$$

que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} M^{-1} M M^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

□

Damos ahora nombre a la cónica del dual que aparece en la proposición 11.25 y generalizamos la definición de recta tangente:

Definición 11.26. Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ con matriz asociada M, sea $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea l una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.

(1) Llamamos *recta polar* de p respecto de C a la recta de ecuación

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

(2) Llamamos *cónica dual* de C y la denotamos por C^* a la cónica de $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$ con matriz asociada M^{-1} respecto de la referencia dual de la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.

(3) Llamamos *polo* de l respecto de C al punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que corresponde por dualidad a la recta polar (en $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$) de l respecto de C^*.

Vemos ahora algunas propiedades de la recta polar:

Proposición 11.27. *Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sean p y q puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea l una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.*

(1) *l es la recta polar de p si y solo si p es el polo de l.*

(2) *p está en la recta polar de q si y solo si q está en la recta polar de p.*

(3) *p está contenido en su recta polar si y solo si p pertenece al conjunto de puntos de C.*

Demostración. Sea $p = (a_0 : a_1 : a_2)$, sea M una matriz asociada a C y sea

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix}.$$

En ese caso

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

La recta l es la polar de p si y solo si

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$$

es ecuación l (es decir, si y solo si l corresponde al punto de $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$ de coordenadas $(u_0 : u_1 : u_2)$) y esto equivalente a que la recta $a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0$ de $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$ sea la recta polar del punto de $\mathbf{P}^{2^*}_{\mathbf{k}}$ correspondiente a l. Esto prueba (1).

Sean ahora $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ y $q = (b_0 : b_1 : b_2)$. La recta polar de p tiene ecuación

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.27.1}$$

y la recta polar de q tiene ecuación

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Entonces p pertenece a la polar de q si y solo si

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.27.2}$$

y q pertenece a la polar de p si y solo si

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{11.27.3}$$

Como M es simétrica, (11.27.2) y (11.27.4) son equivalentes. Esto prueba (2).

Por último, $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ pertenece a su recta polar, que tiene ecuación (11.27.1) si y solo si

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{11.27.4}$$

y esto es equivalente a que p satisfaga la ecuación de C, es decir, a que pertenezca al conjunto de puntos de C. □

Dada una cónica no degenerada C de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ podemos usar bien la proposición 11.27, bien directamente la cónica dual de C para hallar las rectas tangentes a C que pasan por un punto dado de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Lo vemos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11.28. Sea C la cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación $2x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0$ y sea p el punto $(1 : 0 : 0)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$. Hallamos las rectas tangentes a C que pasan por p de dos formas:

Método 1: Consideramos l, la recta polar a p respecto de C, que es la recta de ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

es decir, la recta de ecuación $x_0 = 0$. Vemos que los puntos de intersección de l con el conjunto de puntos de C son $p_1 = (0 : 1 : 1)$ y $p_2 = (0 : 1 : -1)$. Como p_1 está en el conjunto de puntos de C, su recta polar es la recta tangente a C por p_1. Por otra parte, p_1 está en la recta polar de p, por lo que, por la proposición 11.27, (2), p está en la recta polar de p_1, es decir en la tangente a C en p_1. Razonamos de igual manera para p_2 y concluimos que p está también contenido en la recta tangente a C por p_2. Como p_1 y p_2 son los únicos puntos de corte del conjunto de puntos de C con l, la proposición 11.27, (2), también nos dice que las únicas rectas que pasan por p y son tangentes a C son las rectas tangentes a C en p_1 y en p_2. Es fácil ver que estas rectas tienen ecuaciones $x_1 - x_2 = 0$ y $x_1 + x_2 = 0$.

Método 2: Consideramos C^*, la cónica dual de C, que tiene como matriz asociada la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la ecuación de C^* respecto a las coordenadas u_0, u_1, u_2 respecto de la referencia dual de la referencia canónica es $u_0^2 - 2u_1^2 + 2u_2^2 = 0$. Las rectas tangentes a C se corresponden con los puntos de $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{R}}$ contenidos en el conjunto de puntos de C^*. Las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ que pasan por $p = (1 : 0 : 0)$ se corresponden con los puntos de la recta de $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{R}}$ de ecuación $u_0 = 0$. Por tanto, las rectas tangentes a C que pasan por p se corresponden con los puntos de $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{R}}$ que están en la intersección del conjunto de puntos de C^* con la recta de ecuación $u_0 = 0$. Estos puntos son los puntos de $\mathbf{P}^{2\,*}_{\mathbf{R}}$ de coordenadas $(0 : 1 : 1)$ y $(0 : 1 : -1)$, que corresponden a las rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuaciones $x_1 - x_2 = 0$ y $x_1 + x_2 = 0$. Estas rectas son, pues, las tangentes a C por p.

Observación 11.29. Los argumentos del ejemplo anterior se pueden generalizar. De ellos y del corolario 11.23 se deduce que, si C es una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ y p es un punto que no está contenido en el conjunto de puntos de C, existen exactamente dos rectas que pasan por p y son tangentes a C. Si C es una cónica no degenerada real de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ y p es un punto que no está contenido en el conjunto de ceros de C, pueden ocurrir dos cosas:

- que existan exactamente dos rectas que pasen por p y sean tangentes a C (en este caso diremos que p es un punto *exterior* respecto de C);
- que ninguna de las rectas (reales) que pasan por p sean tangentes a C (en realidad, lo que ocurre es que hay exactamente dos rectas que pasan por p y son tangentes a C, pero son rectas imaginarias; en este caso diremos que p es un punto *interior* respecto de C).

Si C es una cónica no degenerada real de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ y p es un punto exterior respecto de C, la polar a p con respecto de C corta al conjunto de puntos de C exactamente en dos puntos (reales). Estos puntos son los puntos del conjunto de puntos de C por los que pasan las dos tangentes a C por p. Si C es una cónica no degenerada real de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ y p es un punto interior respecto de C, la polar a p con respecto de C no corta al conjunto de puntos de C (corta al conjunto de puntos de C exactamente en dos puntos imaginarios conjugados).

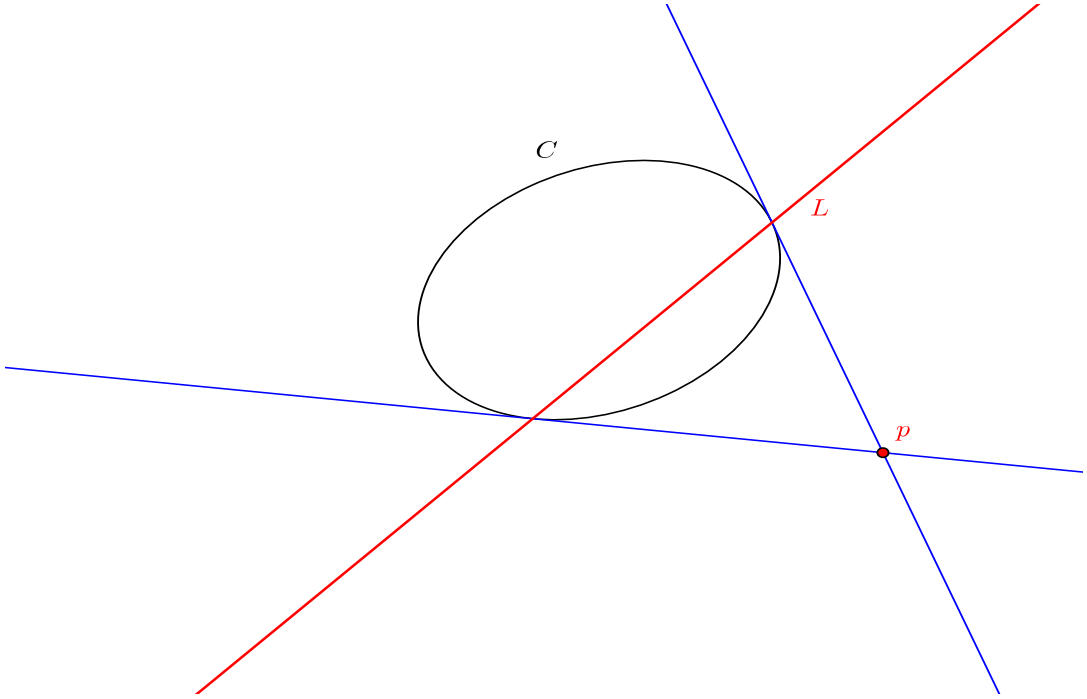
Dada una cónica C no degenerada real de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ y un punto p exterior respecto de C, lo anterior nos permite dibujar la recta polar L de p respecto de C, tal como nos muestra la figura 12. Si q es un punto interior respecto de C, ¿cómo harías para dibujar la polar de q respecto de C?

Parametrizaciones de cónicas

Si C es una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ cuyo conjunto de puntos es no vacío, la proposición 11.22 nos permite establecer una biyección entre $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ y el conjunto de puntos de C. Lo vemos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11.30. Sea C la cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación $x_0x_2 - x_1^2 = 0$. Elegimos un punto p del conjunto de puntos de C, por ejemplo, elegimos $p = (1 : 0 : 0)$. Consideramos el haz de rectas $\Omega(p)$, que está en biyección con $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ mediante, por ejemplo, la correspondencia biyectiva que envía cada punto $(t_0 : t_1)$ de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ a la recta de $\Omega(p)$ de ecuación $t_1x_1 - t_0x_2 = 0$. Es fácil ver que la intersección de $l_{(t_0:t_1)}$ con el conjunto de puntos de C es el conjunto $\{p, (t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2)\}$. Este conjunto está formado por dos puntos distintos si $(t_0 : t_1) \neq (1 : 0)$ y por un solo punto si $(t_0 : t_1) = (1 : 0)$ (en este último caso esto ocurre porque la recta de

FIGURA 12. Recta polar del punto p respecto de la cónica C.



ecuación $x_2 = 0$ es la tangente a C en p). Es claro que la aplicación que va del haz de rectas $\Omega(p)$ al conjunto de puntos de C, enviando la recta $l_{(t_0:t_1)}$ al punto $(t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2)$ es una aplicación biyectiva. Componiéndola con la biyección entre $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ y $\Omega(p)$ descrita más arriba, obtenemos la biyección (con un abuso de notación llamamos C al conjunto de puntos de C)

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbf{P}^1_{\mathbf{k}} & \longrightarrow & C \\ & (t_0 : t_1) & \mapsto & (t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2) \end{array}$$

(observa que φ está bien definida, es decir, si $(t_0 : t_1)$ es un punto de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$, no ocurre que t_0^2, t_0t_1 y t_1^2 sean simultáneamente nulos y, si $\lambda \in \mathbf{k}^*$, $(t_0 : t_1) = (\lambda t_0 : \lambda t_1)$ pero también $(t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2) = (\lambda^2 t_0^2 : \lambda^2 t_0t_1 : \lambda^2 t_1^2)$). En particular, el conjunto de puntos de C es el conjunto $\{(t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2) \mid (t_0 : t_1) \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}\}$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.

Geométricamente, lo que φ nos permite es recorrer el conjunto de puntos de C a medida que el parámetro homogéneo $(t_0 : t_1)$ recorre $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$.

Diremos que la biyección φ del ejemplo 11.30 es una *parametrización* de C:

Definición 11.31. Si C es una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ con conjunto de puntos no vacío, decimos que una aplicación ψ de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ dada por

$$\psi(t_0 : t_1) = (c_{00}t_0^2 + c_{01}t_0t_1 + c_{02}t_1^2 : c_{10}t_0^2 + c_{11}t_0t_1 + c_{12}t_2^1 : c_{20}t_0^2 + c_{21}t_0t_1 + c_{22}t_1^2) \tag{11.31.1}$$

de forma que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

es invertible es una *parametrización* de C si ψ da una biyección entre $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ y el conjunto de puntos de C.

Ejercicio 11.32. Demuestra que, en efecto, la aplicación ψ de la definición 11.31 está bien definida, como lo estaba la aplicación φ del ejemplo 11.30, y es inyectiva.

Proposición 11.33. (1) *Toda cónica no degenerada con conjunto de puntos no vacío admite una parametrización y toda aplicación ψ como la de* (11.31.1) *es una parametrización de alguna cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ con conjunto de puntos no vacío.*

(2) *Para* $\mathbf{k}$ cuerpo arbitrario *de característica distinta de* 2*, todas las cónicas no degeneradas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ son proyectivamente equivalentes.*

Demostración. Consulta las proposiciones 4.9 y 4.10 de los "Apuntes de Geometría Proyectiva" de E. Arrondo. □

Si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, ya sabíamos, por los teoremas 11.20 y 11.21, que lo que afirma la proposición 11.33, (2) es cierto. Sin embargo, y esto es bastante sorprendente, la proposición 11.33, (2) se cumple para cualquier cuerpo $\mathbf{k}$ de caracterśtica distinta de 2. Apoyándonos en los teoremas 11.20 y 11.21 podemos dar una demostración alternativa de la proposición 11.33, (1):

Ejercicio 11.34. Demuestra la proposición 11.33, (1) usando los teoremas 11.20 y 11.21 y el ejemplo 11.30.

Sistemas lineales de cónicas

Según la proposición 11.4, el conjunto de cónicas proyectivas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es el espacio proyectivo $\mathbf{P}(W)$, de dimensión 5, donde W es el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado 2 en x_0, x_1, x_2 con coeficientes en $\mathbf{k}$, junto con el polinomio 0. Igual que haríamos en cualquier espacio proyectivo, podemos estudiar los subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(W)$.

Definición 11.35. Sea $\mathbf{P}(W)$ el espacio proyectivo de las cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.

(1) A un subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(W)$ le llamaremos *sistema lineal de cónicas.*

(2) Sea Λ un sistema lineal de cónicas. A la intersección de los conjuntos de puntos de las cónicas de Λ se le llama *base* de Λ.

Los puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ *imponen condiciones lineales* en las cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, es decir, nos permiten definir sistemas lineales de cónicas. Comenzamos viendo qué condición impone un solo punto:

Proposición 11.36. *Sea p un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. El conjunto de cónicas que pasan por p (es decir, tal que sus conjuntos de puntos contienen a p) es un hiperplano del espacio proyectivo de cónicas $\mathbf{P}(W)$.*

Demostración. En $\mathbf{P}(W)$ consideramos la referencia proyectiva

$$\mathscr{R} = \{[x_0^2], [x_0x_1], [x_0x_2], [x_1^2], [x_1x_2], [x_2^2]; [x_0^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2]\}. \tag{11.36.1}$$

Entonces la cónica C de ecuación

$$u_{00}x_0^2 + u_{01}x_0x_1 + u_{02}x_0x_2 + u_{11}x_1^2 + u_{12}x_1x_2 + u_{22}x_2^2 = 0$$

tiene coordenadas homogéneas $(u_{00} : u_{01} : u_{02} : u_{11} : u_{12} : u_{22})$ respecto de $\mathscr{R}$. Sea $p = (a_0 : a_1 : a_2)$. En ese caso las cónicas C que pasan por p son aquellas cuyas coordenadas $(u_{00} : u_{01} : u_{02} : u_{11} : u_{12} : u_{22})$ respecto de $\mathscr{R}$ cumplen la condición

$$a_0^2u_{00} + a_0a_1u_{01} + a_0a_2u_{02} + a_1^2u_{11} + a_1a_2u_{12} + a_2^2u_{22} = 0. \tag{11.36.2}$$

Como a_0, a_1 y a_2 no son todos nulos, a_0^2, a_1^2 y a_2^2 no son todos nulos, por lo que la expresión en la parte izquierda de (11.36.2) es un polinomio homogéneo de grado 1 en las variables $u_{00}, u_{01}, u_{02}, u_{11}, u_{12}, u_{22}$. Entonces (11.36.2) es la ecuación, respecto de $\mathscr{R}$, de un hiperplano de $\mathbf{P}(W)$. □

La proposición 11.36 no debe hacernos pensar que todos los hiperplanos de $\mathbf{P}(W)$ son sistemas lineales de cónicas que pasan por un punto (de hecho, la mayoría no lo son):

Ejercicio 11.37. Sea H el hiperplano del espacio proyectivo de cónicas $\mathbf{P}(W)$ que tiene ecuación $u_{00} + u_{01} + u_{02} = 0$ respecto a la referencia $\mathscr{R}$ de la proposición 11.36. Demuestra que no existe ningún punto p de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ para el cual H sea el conjunto de cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pasan por p.

El conjunto de cónicas que pasan por un conjunto finito de puntos también es un sistema lineal:

Proposición 11.38. *Sean $p_1, \ldots, p_k$ puntos distintos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$.*

1. *El conjunto Λ formado por las cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pasan por $p_1, \ldots, p_k$ es un sistema lineal de cónicas.*
2. *Si $k \leq 5$, Λ es no vacío (es decir, existe al menos una cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pasa por $p_1, \ldots, p_k$); de hecho, la dimensión de Λ es al menos $5 - k$.*

Demostración. Según la proposición 11.36, cada punto p_i del conjunto formado por $p_1, \ldots, p_k$ impone una *condición lineal* en las cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, es decir, el conjunto de cónicas que pasan por $p_1, \ldots, p_k$ es el conjunto de puntos de $\mathbf{P}(W)$ cuyas coordenadas respecto de la referencia $\mathscr{R}$ de (11.36.1) son las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con k ecuaciones y 6 incógnitas $u_{00}, u_{01}, u_{02}, u_{11}, u_{12}, u_{22}$. Eso quiere decir que el conjunto de cónicas que pasan por $p_1, \ldots, p_k$ es un subespacio proyectivo Λ de $\mathbf{P}(W)$ y su dimensión, como subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(W)$, es 5 menos el rango de la matriz asociada al sistema. □

La proposición 11.38 nos proporciona una estimación de la dimensión de aquellos sistemas Λ determinados por un conjunto de puntos $p_1, \ldots, p_k$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. La proposición no precisa más porque la dimensión exacta de Λ depende de si los puntos $p_1, \ldots, p_k$ *imponen condiciones independientes en las cónicas* o, de manera más exacta, del rango de la matriz asociada al sistema formado por las ecuaciones lineales homogéneas, en las incógnitas $u_{00}, u_{01}, u_{02}, u_{11}, u_{12}, u_{22}$. Esta condición algebraica viene determinada de manera precisa por la configuración que adoptan los puntos $p_1, \ldots, p_k$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, permitiéndonos conocer la dimensión de Λ en cada caso:

Proposición 11.39. *Sean $p_1, \ldots, p_k$ puntos distintos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea Λ el sistema lineal de las cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pasan por $p_1, \ldots, p_k$.*

1. *Si $k = 1$, entonces $\dim \Lambda = 4$.*
2. *Si $k = 2$, entonces $\dim \Lambda = 3$.*
3. *Si $k = 3$, entonces $\dim \Lambda = 2$.*
4. *Si $k = 4$, entonces*
   (a) *$\dim \Lambda = 2$, si p_1, p_2, p_3 y p_4 están alineados;*

(b) *dim* $\Lambda = 1$*, si* p_1, p_2, p_3 *y* p_4 *no están alineados*

(5) *Si* $k = 5$*, entonces*

(a) *dim* $\Lambda = 2$*, si* p_1, p_2, p_3, p_4 *y* p_5 *están alineados;*

(b) *dim* $\Lambda = 1$*, si* p_1, p_2, p_3, p_4 *y* p_5 *no están alineados pero cuatro de ellos sí lo están;*

(c) *dim* $\Lambda = 0$ *(es decir, existe una única cónica que pasa por* p_1, p_2, p_3, p_4, p_5*) si en el conjunto* $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ *no hay cuatro puntos alineados.*

Para demostrar la proposición 11.39 usamos el siguiente resultado, que se sigue como corolario de la fórmula de Grassmann, y que aparece enunciado en el ejercicio 8 de la lista de ejercicios de Geometría Proyectiva:

Lema 11.40. *Si* H *es un hiperplano de* $\mathbf{P}(W)$ *y* Λ *es un subespacio proyectivo de* $\mathbf{P}(W)$ *que no está contenido en* H*, entonces dim* $(H \cap \Lambda) =$ *dim* $\Lambda - 1$*.*

Demostración de la proposición 11.39. Si $k = 1$, ya vimos en la proposición 11.36 que la dimensión de Λ es 4. Para cada p_i de $p_1, \ldots, p_k$ denotamos por H_i el hiperplano de $\mathbf{P}(W)$ formado por las cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pasan por p_i y denotamos por Λ_i el sistema lineal de las cónicas que pasan por $p_1, \ldots, p_i$. Sea ahora $k = 2$. Entonces $\Lambda_2 = H_1 \cap H_2$ y H_1 no está contenido en H_2. En efecto, al ser p_1 y p_2 puntos distintos, podemos considerar una recta l de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pase por p_1 y no por p_2 y la cónica C que sea la recta doble cuyo conjunto de puntos sea la recta l. Entonces $C \in H_1$ pero $C \notin H_2$. Así pues el lema 11.40 implica

$$\dim\Lambda_2 = \dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Sea ahora $k = 3$. Al ser p_1, p_2, p_3 puntos distintos, podemos encontrar una recta l_1 de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pase por p_1 y no por p_3 y una recta l_2 de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que pase por p_2 y no por p_3. Sea C la cónica cuyo conjunto de puntos es $l_1 \cup l_2$. Entonces C pasa por p_1 y p_2 pero por p_3, por lo que $C \in \Lambda_2$ pero $C \notin H_3$, de donde se sigue que Λ_2 no está contenido en H_3. Por tanto el lema 11.40 implica

$$\dim\Lambda_3 = \dim(\Lambda_2 \cap H_3) = \dim\Lambda_2 - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Sea ahora $k = 4$, sean p_1, p_2, p_3, p_4 cuatro puntos alineados, sea l la recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ que los contiene y sea $G(x_0, x_1, x_2) = 0$ la ecuación de l (G es un polinomio homogéneo de grado 1 de $\mathbf{k}[X_0, X_1, X_2]$). Consideramos el conjunto de las cónicas C cuya ecuación es de la forma

$$G \cdot (u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2) = 0,$$

donde u_0, u_1 y u_2 son elementos de $\mathbf{k}$ cualesquiera no todos nulos. Es fácil ver que dichas cónicas C forman un subespacio proyectivo Λ de $\mathbf{P}(W)$, el subespacio proyectivo generado por x_0G, x_1G, x_2G, que tiene dimensión 2. Como todas esas cónicas pasan por p_1, p_2, p_3, p_4, $\Lambda \subseteq \Lambda_4$ y la dimensión de Λ_4 es mayor o igual que 2. Del lema 11.40 se sigue

$$\dim\Lambda_4 = \dim(\Lambda_3 \cap H_4) \leq \dim\Lambda_3 = 2,$$

por lo que la dimensión de Λ_4 es 2 y $\Lambda_3 = \Lambda_4 = \Lambda$.

Sea ahora $k = 4$ y sean p_1, p_2, p_3, p_4 cuatro puntos no alineados. Distinguimos dos casos, que tres de esos cuatro puntos (supondremos los tres primeros por simplicidad notacional) están alineados o que ninguna terna de entre esos cuatro puntos está alineada (es decir, que p_1, p_2, p_3, p_4 están en posición general). En el primer caso, consideramos C la cónica que es la recta doble cuyo conjunto de puntos es la recta que contiene a p_1, p_2, p_3. En ese caso $C \in \Lambda_3$ pero $C \notin H_4$. En el segundo caso, sea $l_1 =< p_1, p_3 >$, sea l_2 una recta que pasa por p_2 pero no por p_4 (tal recta existe porque p_2 y p_4 son distintos) y sea C la cónica

cuyo conjunto de puntos es $l_1 \cup l_2$. Como p_4 no pertenece ni a l_1 ni a l_2, C no pasa por p_4 por lo que $C \in \Lambda_3$ pero $C \notin H_4$. Así pues, el lema 11.40 implica

$$\dim\Lambda_4 = \dim(\Lambda_3 \cap H_4) = \dim\Lambda_3 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Sea ahora $k = 5$ y sean p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 cinco puntos alineados. Razonando como en el caso de cuatro puntos alineados vemos que $\Lambda_3 = \Lambda_4 = \Lambda_5$ y que $\dim\Lambda_5 = 2$.

Sea ahora $k = 5$ y sean p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 cinco puntos no alineados pero tales que cuatro de ellos (supondremos los cuatro primeros por simplicidad notacional) sí lo están. En ese caso la dimensión de Λ_4 es 2. Por otra parte, sea l la recta que contiene a p_1, p_2, p_3, p_4 y sea C la cónica que es la recta doble cuyo conjunto de puntos es l. En ese caso C pasa por p_1, p_2, p_3, p_4 pero no por p_5, por lo que $C \in \Lambda_4$ pero $C \notin H_5$. Entonces el lema 11.40 implica

$$\dim\Lambda_5 = \dim(\Lambda_4 \cap H_5) = \dim\Lambda_4 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Sea ahora $k = 5$ y sean p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 cinco puntos no alineados tales que no hay cuatro de ellos alineados. Distinguimos dos casos, que haya tres de ellos alineados (en cuyo caso supondremos, por simplicidad notacional, que son los tres primeros) o que no haya tres de ellos alineados. En el primer caso, sea l_1 la recta que contiene a p_1, p_2, p_3 y sea l_2 una recta que pase por p_4 y no por p_5. Como p_1, p_2, p_3, p_5 no están alineados, $p_5 \notin l_1$. Sea C la cónica cuyo conjunto de puntos es $l_1 \cup l_2$. En ese caso C pasa por p_1, p_2, p_3, p_4 pero no por p_5, por lo que $C \in \Lambda_4$ pero $C \notin H_5$. Como p_1, p_2, p_3, p_4 no están alineados, la dimensión de Λ_4 es 1. Entonces el lema 11.40 implica

$$\dim\Lambda_5 = \dim(\Lambda_4 \cap H_5) = \dim\Lambda_4 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Si entre p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 no hay tres puntos alineados, consideramos la cónica C cuyo conjunto de puntos es $< p_1, p_2 > \cup < p_3, p_4 >$. Entonces C pasa por p_1, p_2, p_3, p_4 pero no por p_5, ya que p_5 no está ni alineado con p_1 y p_2 ni alineado con p_3 y p_4. Como antes, la dimensión de Λ_4 es 1. Como $C \in \Lambda_4$ pero $C \notin H_5$, el lema 11.40 implica

$$\dim\Lambda_5 = \dim(\Lambda_4 \cap H_5) = \dim\Lambda_4 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

□

Lema 11.41. *Sea* $\mathbf{k}$ *un cuerpo arbitrario de característica distinta de* 2*. Si* C *es una cónica no degenerada (es decir, si la matriz* $M(C)$ *de* C *tiene rango menor que* 3*) de* $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$*, entonces,*

(1) *si* $M(C)$ *tiene rango* 2*, el conjunto de puntos de* C *en* $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ *es un par de rectas o un único punto (en ambos casos se dice que* C *es un par de rectas);*
(2) *si* $M(C)$ *tiene rango* 1*, el conjunto de puntos de* C *en* $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ *es una única recta (en ese caso* C *es una recta doble).*

Demostración. Aunque el enunciado es para un cuerpo $\mathbf{k}$ arbitrario, razonamos primero para el caso en que $\mathbf{k}$ es $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$, ya que, en ese caso, podemos dar una demostración basada en resultados propios de este curso. Si C es degenerada, entonces los teoremas 11.20 y 11.21 implican que C es una recta doble si el rango de $M(C)$ es 1 o un par de rectas l_1 y l_2 si el rango de $M(C)$ es 2. Entonces, si $M(C)$ tiene rango 1, el conjunto de puntos de C es una recta; si $M(C)$ tiene rango 2, el conjunto de puntos de C es un par de rectas si $\mathbf{k} = \mathbf{C}$ o si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ y C es un par de rectas reales, y un único punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ y C es un par de rectas imaginarias.

Damos ahora la demostración para $\mathbf{k}$ arbitrario. Si C es una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, entonces $M(C)$ es congruente con una matriz diagonal con la primera entrada de la

diagonal no nula y la última entrada de la diagonal nula, por lo que C es proyectivamente equivalente a una cónica C' de ecuación $\lambda_0 X_0^2 + \lambda_1 X_1^2 = 0$, donde $\lambda_0 \neq 0$. Si el rango de $M(C)$ es 1, entonces $\lambda_1 = 0$. En ese caso el conjunto de puntos de C' es una recta. Como C es proyectivamente equivalente a C', se sigue de la proposición 11.9 que el conjunto de puntos de C en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es también una recta.

Si el rango de $M(C)$ es 2, entonces $\lambda_1 \neq 0$ y denotamos $\lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$. Sea $\mathbf{k}'$ un cuerpo tal que $\mathbf{k} \subset \mathbf{k}'$ y $-\lambda$ tenga raíces cuadradas μ y $-\mu$ en $\mathbf{k}'$ (al cuerpo $\mathbf{k}'$ se le denomina *cuerpo de descomposición* del polinomio $t^2 + \lambda$; si no estás familiarizado con esta noción puedes consultar *Anillos y cuerpos conmutativos*, de J.M. Gamboa y J.M. Ruiz (UNED ediciones 2002)). Entonces C' tiene ecuación $(x_0 + \mu x_1)(x_0 - \mu x_1) = 0$ (por eso llamamos a C' y a C par de rectas, aun en el caso en que su conjunto de puntos consista en un único punto). Por tanto, el conjunto de puntos de C' en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es, si $\mu \in \mathbf{k}$, un par de rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, y, si $\mu \notin \mathbf{k}$, únicamente el punto $(1 : 0 : 0)$. Como C es proyectivamente equivalente a C', se sigue de la proposición 11.9 que el conjunto de puntos de C en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es también un par de rectas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ o un único punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. □

Corolario 11.42. *Sea* $\mathbf{k}$ *un cuerpo de característica distinta de* 2. *Sean* p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 *cinco puntos distintos de* $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ *tales que no hay tres de ellos alineados. La única cónica* C *que pasa por* p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 *es una cónica no degenerada (real, si* $\mathbf{k} = \mathbf{R}$*).*

Demostración. Según la proposición 11.39, existe una única cónica C que pasa por p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Según el lema 11.41, si C es degenerada, entonces el conjunto de ceros de C consiste en dos rectas, una recta o un punto. La última posibilidad no se puede dar porque p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 son puntos distintos. La segunda de las tres posibilidades no se puede dar pues, por hipótesis, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 no están alineados. La primera posibilidad tampoco se da porque, en ese caso, tres puntos de entre p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 estarían alineados y eso también contradice nuestras hipótesis. Por tanto, C ha de ser no degenerada y, si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, C ha de ser no degenarada real, pues en otro caso el conjunto de puntos de C en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ será vacío, lo cual es absurdo ya que ha de contener a p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. □

Definición 11.43. Un *haz de cónicas* es una recta Λ de $\mathbf{P}(W)$ (compara esta definición con la definición 9.25 de haz de rectas). Si C_1 y C_2 son dos cónicas distintas de Λ diremos que Λ está generado por C_1 y C_2.

Ejercicio 11.44. Sea Λ un haz de cónicas generado por las cónicas $C_1 = [F_1]$ y $C_2 = [F_2]$, donde F_1, F_2 son polinomios homogéneos de $\mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ de grado 2.

(1) Demuestra que las cónicas de Λ son las cónicas $[\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2]$, para todo $(\lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$.
(2) Demuestra que la base de Λ es la intersección de los conjuntos de puntos de C_1 y C_2.

Ejercicio 11.45. Sea $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{k} = \mathbf{C}$. Sean p_1, p_2, p_3, p_4 cuatro puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ en posición general (es decir, tales que no hay tres de ellos alineados) y sea Λ el haz de cónicas formado por las cónicas que pasan por p_1, p_2, p_3, p_4. Demuestra que todas las cónicas de Λ salvo tres son cónicas no degeneradas (reales si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$) y que las tres cónicas degeneradas del haz son pares de rectas (reales si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$).

Ejercicio 11.46. En $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ da un ejemplo de un haz de cónicas cuya base sea:

i) Un punto.
ii) Dos puntos.
iii) Tres puntos.

iv) Cuatro puntos.
v) Una recta.
vi) Una recta y un punto fuera de ella.

12. Relación entre cónicas proyectivas y cónicas afines y euclídeas

El completado proyectivo de una cónica afín

Comenzamos el tema 2 diciendo que una de nuestras motivaciones para introducir el plano proyectivo era poder "completar" curvas del plano afín, como por ejemplo, una hipérbola. Dada una hipérbola, existen dos rectas, llamadas *asíntotas* que, a medida que vamos hacia el infinito, parece que van a cortarla. El plano proyectivo nos permite hacer rigurosa esta idea intuitiva. Lo vimos en los ejercicios 2b, 2c y 3 de la hoja de ejercicios de Geometría Proyectiva y lo vemos de nuevo en este ejemplo:

Ejemplo 12.1. En el plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ consideramos la cónica C_2 del ejemplo 10.6, que tiene ecuación $x^2 - y^2 - 1 = 0$. El conjunto de ceros de C_2 es por tanto el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 - 1 = 0\}$ y, con un abuso de notación, lo llamaremos también C_2. Recordemos la inclusión

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \\ & (x, y) & \mapsto & (1 : x : y). \end{array}$$

Entonces los puntos de $i(C_2)$ son aquellos puntos $(x_0 : x_1 : x_2)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ tales que $x_0 \neq 0$ y

$$(\frac{x_1}{x_0})^2 - (\frac{x_2}{x_0})^2 - 1 = 0.$$

Quitando denominadores en la ecuación anterior, vemos que $i(C_2)$ es el conjunto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$

$$i(C_2) = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \mid x_0 \neq 0 \text{ y } x_1^2 - {x_2}^2 - x_0^2 = 0\}.$$

Así, de forma natural, $i(C_2)$ está contenida en el conjunto de puntos $(x_0 : x_1 : x_2)$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$

$$\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \mid x_1^2 - {x_2}^2 - x_0^2 = 0\},$$

que es el conjunto de puntos de la cónica proyectiva $\overline{C_2}$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación $x_1^2 - {x_2}^2 - x_0^2 = 0$. A $\overline{C_2}$ la llamaremos, según la definición 12.2, el completado proyectivo de C_2. Vemos que la intersección de $\overline{C_2}$ con la recta del infinito $x_0 = 0$ son los puntos $(0 : 1 : 1)$ y $(0 : 1 : -1)$. Recuerda que en el ejemplo 10.6 vimos que C_2 es una hipérbola. Una hipérbola tiene *ramas asintóticas* que se "escapan" hacia el infinito, aproximándose a las asíntotas de la hipérbola. Los puntos $(0 : 1 : 1)$ y $(0 : 1 : -1)$, que llamaremos *puntos del infinito* de C_2, corresponden a esas ramas asintóticas; de hecho, son los puntos del infinito de las asíntotas de C_2.

El ejemplo anterior inspira la siguiente definición:

Definición 12.2. Sea $F = a_{00} + a_{01}x + a_{02}y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$ un polinomio de grado 2 de $\mathbf{k}[x, y]$ y sea $C = [F]$ la cónica correspondiente de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. El *completado proyectivo* de C es la cónica proyectiva $\overline{C}$ de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación

$$a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0. \tag{12.2.1}$$

Los *puntos del infinito* de C o los puntos de C *en el infinito* son los puntos de intersección del lugar de ceros de $\overline{C}$ con la recta del infinito para la inclusión

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathbf{A}^2_{\mathbf{k}} & \longrightarrow & \mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} \\ & (x, y) & \mapsto & (1 : x : y), \end{array}$$

es decir, con la recta de ecuación $x_0 = 0$.

Observación 12.3. Recuerda que $\mathbf{k}$ es un cuerpo de característica distinta de 2, que

$$M(C) = \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es una matriz asociada a C y que la ecuación de C se puede escribir de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Por otra parte, la ecuación (12.2.1) de $\overline{C}$ se puede escribir de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

por lo que $M(C)$ es también una matriz asociada a $\overline{C}$.

Vemos ahora cómo están relacionados los completados proyectivos de una cónica y de la imagen de esa cónica por un isomorfismo afín y aprovechamos también para ver cómo están relacionados los completados proyectivos de una recta y de la imagen de esa recta por un isomorfismo afín:

Proposición 12.4. *Sea l una recta de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ y sea f un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$.*

1. *El completado proyectivo de $f(l)$ es la imagen de $\bar{l}$ por el completado proyectivo de f; es decir, $\overline{f(l)} = \overline{f}(\bar{l})$.*
2. *La proyectividad $\overline{f}$ transforma el punto del infinito de l en el punto del infinito de $f(l)$.*
3. *El completado proyectivo de $f(C)$ es la imagen de $\overline{C}$ por el completado proyectivo de f; es decir, $\overline{f(C)} = \overline{f}(\overline{C})$.*
4. *La proyectividad $\overline{f}$ transforma los puntos del infinito de C en los puntos del infinito de $f(C)$.*

Demostración. Recordemos que $\bar{l} = i(l) \cup p$, donde $p = [\tilde{v}]$, v es un vector director de l y $\tilde{v}$ es el vector de $\mathbf{k}^3$ que se define a partir de v como en el enunciado de la proposición 8.47. Por la definición-proposición 7.17, el punto p es el punto del infinito de l. Sea $w = \vec{f}(v)$. Entonces las proposiciones 8.45 y 8.47 implican

$$\overline{f}(\bar{l}) = \overline{f}(i(l)) \cup \overline{f}(p) = i(f(l)) \cup [\tilde{w}].$$

Como $w = \vec{f}(v)$ es un vector director de $f(l)$, por la definición-proposición 7.17 el punto $[\tilde{w}]$ es el punto del infinito de $f(l)$ y $\overline{f}(\bar{l})$ es el completado proyectivo de $f(l)$. Esto demuestra (1) y (2).

En segundo lugar recordamos que, según el corolario 8.48 (2), la aplicación proyectiva $\overline{f}$ es en efecto una proyectividad. Según la proposición 8.45, la matriz del isomorfismo afín f con respecto a la referencia cartesiana canónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es una matriz asociada al completado proyectivo $\overline{f}$ de f, respecto de la referencia proyectiva canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Esto implica que el completado proyectivo de f^{-1} es la proyectividad inversa de $\overline{f}$ (es decir, $\overline{f^{-1}} = \overline{f}^{-1}$) y que la matriz N de f^{-1} respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es una matriz asociada a $\overline{f}^{-1}$ respecto de la referencia proyectiva canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Recuerda

que, por la proposición 10.28, si $M(C)$ es una matriz asociada a C, entonces $N^t M(C)N$ es una matriz asociada a $f(C)$ y por la observación 12.3, una matriz asociada a $\overline{f(C)}$. Por otra parte, de nuevo según la observación 12.3, $M(C)$ es una matriz asociada a $\overline{C}$. Como N es una matriz asociada a $\overline{f}^{-1}$ respecto de la referencia proyectiva canónica, por la proposición 11.10, tenemos que $N^t M(C)N$ es una matriz asociada a $\overline{f}(\overline{C})$. Por tanto $\overline{f(C)}$ y $\overline{f}(\overline{C})$ son la misma cónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Esto demuestra (3).

Para demostrar (4) recuerda que, según el corolario 8.48 (1), la recta del infinito l_∞ es invariante por $\overline{f}$. Con un abuso de notación, llamamos $\overline{C}$ y $\overline{f(C)}$ a los lugares de ceros de las cónicas proyectivas $\overline{C}$ y $\overline{f(C)}$. Entonces

$$\overline{f}(\overline{C} \cap l_\infty) = \overline{f}(\overline{C}) \cap \overline{f}(l_\infty) = \overline{f}(\overline{C}) \cap l_\infty = \overline{f(C)} \cap l_\infty$$

(la primera igualdad se tiene por ser $\overline{f}$ una aplicación biyectiva). □

Clasificación afín de las cónicas usando Geometría Proyectiva

La proposición 12.4 nos permite dar un criterio geométrico para decidir la clase de equivalencia afín de una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$:

Teorema 12.5. *Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y sea $\overline{C}$ su completado proyectivo. La clase de equivalencia afín de C viene determinada por la clase de equivalencia proyectiva de $\overline{C}$ (en ocasiones esta información por sí sola es suficiente para caracterizar la clase afín de C) y por los puntos en el infinito de C, según la tabla siguiente:*

Clase afín de C	Clase (proyectiva) de $\overline{C}$	Puntos de C en el infinito (1)
Elipse real	No degenerada real	$\emptyset$
Parábola	No degenerada real	Un único punto
Hipérbola	No degenerada real	Dos puntos
Elipse imaginaria	No degenerada imaginaria	$\emptyset$
Par de rectas reales paralelas	Par de rectas reales	Un único punto
Par de rectas reales secantes	Par de rectas reales	Dos puntos
Par de rectas imaginarias paralelas	Par de rectas imaginarias	Un único punto
Par de rectas imaginarias secantes	Par de rectas imaginarias	$\emptyset$
Recta doble	Recta doble	Un único punto

(1): *Los puntos en el infinito de C que aparecen en la tabla son puntos de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, es decir, son puntos del infinito* reales. *En el caso de las elipses y los pares de rectas imaginarias secantes, C sí tiene puntos del infinito en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, de hecho tiene un par de puntos* imaginarios conjugados *en el infinito. En el caso de las parábolas y de los pares de rectas paralelas, C tiene un único punto del infinito tanto en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ como en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, es decir, el único punto del infinito de C es necesariamente un punto* real.

Demostración. Sea M una matriz asociada a C, que por la observación 12.3 también es una matriz asociada a $\overline{C}$. Recuerda que, según el teorema 10.37 la clase de equivalencia afín de C viene determinada por el rango de M, por $\Sigma(M)$, por el rango de $m(C)$ y por $\sigma(m(C))$. Por otra parte, según el teorema 11.21, la clase de equivalencia proyectiva de $\overline{C}$ viene determinada por el rango de M y por $\Sigma(M)$. Examinando detenidamente la lista de las clases de equivalencia afín de cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ dada en el teorema 10.32 y la lista de las clases de equivalencia proyectiva de cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ dada en el teorema 11.21, es fácil ver, si atendemos solo al rango de M, que

- C es una cónica no degenerada (es decir, C es una elipse (real o imaginaria), una parábola o una hipérbola) si y solo si $\overline{C}$ es una cónica no degenerada (real o imaginaria);
- C es un par de rectas (reales o imaginarias, paralelas o secantes) si y solo si $\overline{C}$ es un par de rectas (reales o imaginarias);
- C es una recta doble si y solo si $\overline{C}$ es un recta doble.

Si nos fijamos también en $\Sigma(M)$, es fácil ver que

- C es una cónica no degenerada real (es decir, C es una elipse real, una parábola o una hipérbola) si y solo si $\overline{C}$ es una cónica no degenerada real;
- C es una elipse imaginaria si y solo si $\overline{C}$ es una cónica no degenerada imaginaria;
- C es un par de rectas reales (paralelas o secantes) si y solo si $\overline{C}$ es un par de rectas reales;
- C es un par de rectas imaginarias (paralelas o secantes) si y solo si $\overline{C}$ es un par de rectas imaginarias ;
- C es una recta doble si y solo si $\overline{C}$ es un recta doble.

Distinguimos ahora las elipses reales, parábolas e hipérbolas. Si C es una elipse real, según el teorema 10.32, existe un isomorfismo afín f de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en sí mismo tal que $f(C)$ tiene ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$. En ese caso $\overline{f(C)}$ tiene ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ por lo $f(C)$ no tiene puntos reales en el infinito. Por la proposición 12.4 (2), C tampoco tiene puntos reales en el infinito. Razonando de manera anóloga, comprobamos que si C es una parábola, C tiene un único punto en el infinito y si C es una hipérbola, C tiene dos puntos en el infinito. Observa que esto implica también que si $\overline{C}$ es una cónica no degenerada real, C es una elipse real, una parábola o una hipérbola, según C no tenga puntos, tenga uno o tenga dos puntos en el infinito.

Una elipse imaginaria C ha quedado ya caracterizada por la propiedad de que $\overline{C}$ sea una cónica no degenerada imaginaria, por lo que no necesitaríamos recurrir a estudiar sus puntos en el infinito para decidir si C es una elipse imaginaria. En todo caso es cierto que C no tiene puntos reales en el infinito puesto que, según el teorema 11.21, una cónica no degenerada imaginaria no tiene puntos reales.

Distinguimos ahora los pares de rectas reales paralelas de los pares de rectas reales secantes. Si C es un par de rectas reales, su lugar de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ es la unión $l_1 \cup l_2$ de dos rectas distintas l_1 y l_2 de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Es un sencillo ejercicio comprobar que el lugar de ceros de $\overline{C}$ es $\overline{l_1} \cup \overline{l_2}$, donde $\overline{l_1}$ y $\overline{l_2}$ son los completados proyectivos de l_1 y l_2 respectivamente y que, al ser l_1 y l_2 rectas distintas, también lo son $\overline{l_1}$ y $\overline{l_2}$. Sea p el punto de intersección de $\overline{l_1}$ y $\overline{l_2}$. Entonces l_1 y l_2 serán rectas paralelas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ si y solo si tienen el mismo punto del infinito, es decir, si y solo si $p \in l_\infty$, es decir, si p es el único punto del infinito de C. Por otra parte, l_1 y l_2 serán rectas secantes de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ si y solo si tienen distintos puntos del infinito, es decir, si C tiene dos puntos en el infinito.

Para distinguir los pares de rectas imaginarias paralelas de los pares de rectas imaginarias secantes realizamos el mismo argumento que para los pares de rectas reales pero ahora trabajamos en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ y en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$.

Si C es una recta doble, C ha quedado ya caracterizada por la propiedad de que $\overline{C}$ sea una recta doble, por lo que no necesitaríamos recurrir a estudiar sus puntos en el infinito para decidir si C es una recta doble. En cualquier caso, como el lugar de ceros de C es una recta l (¿ves por qué?), el conjunto de puntos del infinito de C está formado únicamente por el punto del infinito de l.

Por último demostramos la observación (1) sobre los puntos del infinito de C. La intersección de $\overline{C}$ con l_∞ es el conjunto de soluciones del istema de ecuaciones homogéneas

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 0 \\ a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 & = & 0 \end{array} \tag{12.5.1}$$

con a_{11}, a_{12}, a_{22} números reales no todos simulténeamente nulos. Es un sencillo ejercicio comprobar que las soluciones de (12.5.1) en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ son

- dos puntos de coordenadas reales, si y solo si $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} > 0$;
- un punto de coordenadas reales si y solo si $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = 0$;
- dos puntos de coordenadas imaginarias conjugadas, si y solo si $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} < 0$ (en este último caso, (12.5.1) no tiene soluciones en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$).

□

Observación 12.6. Comparamos los teoremas 10.37 y 12.5 fijándonos en el caso de las elipses reales. Dada una cónica C de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, según los teoremas 10.32 y 10.37, C es una elipse real si y solo si $R(C) = 3, \Sigma(C) = 1, r(C) = 2$ y $\sigma(C) = 2$. Por otra parte, según el teorema 12.5, C es una elipse real si y solo si $\overline{C}$ es una cónica no degenerada real y C no tiene puntos reales en el infinito. Observamos que el hecho de que $R(C) = 3$ y $\Sigma(C) = 1$ equivale, por el teorema 11.21, a que $\overline{C}$ sea una cónica no degenerada real. Por otra parte, $r(C)$ y $\sigma(C)$ son el rango y la signatura proyectiva de

$$m(C) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Para estudiar los puntos del infinito de C, estudiamos las soluciones homogéneas $(x_1 : x_2)$ de la ecuación $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ (cf. (12.5.1)). Así pues, tanto para conocer $r(C)$ y $\sigma(C)$ como para ver cómo son los puntos del infinito de C estamos fijándonos en los coeficientes a_{11}, a_{12} y a_{12} de la ecuación de C (es decir, en los términos de grado 2 de la ecuación). La conclusión es que el teorema 10.37 interpretra la información contenida en $M(C)$ y en $m(C)$ de manera algebraica y el teorema 12.5 interpreta esa misma información de manera geométrica. La condición recogida en el teorema 10.37 que nos garantiza que una cónica no degenerada real C sea una elipse real es $r(C) = \sigma(C) = 2$. Por el criterio de Sylvester, $r(C) = \sigma(C) = 2$ si y solo sí el determinante $a_{11}a_{22} - \frac{1}{4}a_{12}^2$ de $m(C)$ es positivo. Esto es equivalente a que el discriminante $a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}$ del polinomio $a_{11}t^2 + a_{12}t + a_{22}$ sea negativo, y esto último es equivalente, según (12.5.1), a que C no tenga puntos reales en el infinito. Puedes comprobar que algo análogo pasa para las parábolas, hipérbolas, etc. En particular, los términos de grado 2 de la ecuación de C (sea cual sea la clase de equivalencia afín de C) nos dicen cómo son los puntos del infinito de C.

Observación 12.7. Comparando la clasificación afín y proyectiva de cónicas reales dada en los teoremas 10.32 y 11.21 vemos que hay más casos en la clasificación afín que en la

proyectiva. El teorema 12.5 nos da una razón de por qué esto ocurre: hay cónicas no afínmente equivalentes, que, al completarlas, dan lugar a cónicas proyectivamente equivalentes. Este es el caso de las elipses reales, las parábolas y las hipérbolas, cuyos completados proyectivos son cónicas no degeneradas reales. Vemos por qué pasa esto. Consideramos las cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuaciones $x^2+y^2-1=0$, $x^2-y=0$ y $x^2-y^2-1=0$ y sus correspondientes completados proyectivos, que son las cónicas D_1, D_2 y D_3 de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, de ecuaciones $x_0^2-x_1^2-x_2^2=0$, $x_0x_2-x_1^2=0$ y $x_0^2-x_1^2+x_2^2=0$ respectivamente. Sabemos por el teorema 11.21 que D_1, D_2 y D_3 son cónicas de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ proyectivamente equivalentes, ya que las tres son cónicas no degeneradas reales. Eso quiere decir que existen proyectividades f y g de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ tales que $f(D_1)=D_2$ y $g(D_1)=D_3$. Por ejemplo una proyectividad f que cumple $f(D_1)=D_2$ es la que tiene ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcr} x_0' & = & x_0 & & +x_2 \\ x_1' & = & & x_1 & \\ x_2' & = & x_0 & & -x_2 \end{array}$$

con respecto a la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ y una proyectividad g que cumple $g(D_1)=D_3$ es la que tiene ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcr} x_0' & = & & x_1 & \\ x_1' & = & x_0 & & \\ x_2' & = & & & x_2 \end{array}$$

con respecto a la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$. La clave está en que ni f ni g dejan invariante la recta del infinito l_∞ de ecuación $x_0=0$ ($f(l_\infty)$ es la recta de ecuación $x_0+x_2=0$ y $g(l_\infty)$ es la recta de ecuación $x_1=0$), por lo que ni f ni g son, según el corolario 8.48 (1), el completado proyectivo de un isomorfismo afín (lógicamente, ya sabíamos que eso era imposible, ya que si f y g fueran los completados de isomorfismos afines, entonces las cónicas afines de ecuaciones $x^2+y^2-1=0$, $x^2-y=0$ y $x^2-y^2-1=0$ serían cónicas afínmente equivalentes de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, cosa que es falsa).

Otra forma de entender por qué hay menos clases de equivalencia proyectiva que de equivalencia afín es que, dada una cónica proyectiva D de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, según *elijamos la recta del infinito* (recuerda la observación 9.14) obtenemos distintas cónicas afines que pueden no ser afínmente equivalentes. Tomemos por ejemplo una cónica no degenerada real D y, haciendo un abuso de notación, llamemos también D a su lugar de ceros en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$. Elijamos una recta del infinito l de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$. En la observación 9.14 vimos que $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \smallsetminus l$ se puede identificar con $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y que era posible sumergir $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ mediante una inclusión i'. Es un sencillo ejercicio comprobar que $D \smallsetminus l$ es el lugar de ceros de una cónica C de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y que D es el completado proyectivo de C *con respecto a* i'. Estudiemos ahora la intersección $D \cap l$. El corolario 11.23 nos dice que $D \cap l$ está formado por dos puntos, por un solo punto o es vacío. Según el teorema 12.5, en el primer caso C es una hipérbola, en el segundo caso, C es una parábola y, en el tercer caso, C es una elipse real. Para ver ejemplos concretos de esto puedes resolver los ejercicios 19 y 20 de la hoja de ejercicios de cónicas.

Cálculo de las asíntotas, del centro y de los ejes de una cónica

En la definición 11.24 introdujimos la recta tangente en un punto de una cónica no degenerada. A partir de esa definición, damos la de recta tangente a una cónica afín, que en la caso de $\mathbf{k}=\mathbf{R}$, coincide con la definición de recta tangente a una curva que has visto en cálculo elemental:

Definición 12.8. Sea C un cónica no degenerada de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ y sea p un punto del lugar de ceros de C. Decimos que l de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es la recta tangente a C en p si $\overline{l}$ es la recta tangente a $\overline{C}$ en p.

Definición 12.9. Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. Decimos que la recta l de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es una *asíntota* de C si $\overline{l}$ es la tangente a $\overline{C}$ en un punto del infinito de C.

Como consecuencia del teorema 12.5 vemos que si C es una parábola, C tiene un solo punto en el infinito por lo que la recta del infinito es tangente a $\overline{C}$ en dicho punto. Así pues, las parábolas no tienen asíntotas. De igual forma, del teorema 12.5 se deduce que las hipérbolas tienen dos asíntotas reales y las elipses, dos asínotas imaginarias.

Así como hemos definido las asíntotas de una cónica afín usando Geometría Proyectiva (y las calcularemos también usando Geometría Proyectiva), la Geometría Proyectiva también nos puede servir para calcular un concepto afín como el centro de una cónica no degenerada y un concepto euclídeo como los ejes de una cónica no degenerada (de hecho, incluso los focos de una cónica se pueden calcular usando Geometría Proyectiva, como puedes ver en la definición de la página 51 de los "Apuntes de Geometría Proyectiva" de E. Arrondo).

Proposición 12.10. *Sea C una elipse real o una hipérbola de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. El centro de C es el polo, respecto del completado proyectivo $\overline{C}$ de C, de la recta del infinito.*

Antes de demostrar la proposición, enunciamos y demostramos el siguiente lema que nos dice que las proyectividades conservan la polaridad:

Lema 12.11. *Sea D una cónica proyectiva de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sea g una proyectividad de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ a $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$, sea p un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea l una recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Entonces, l es la polar de p respecto de D si y solo si la recta $g(l)$ es la polar de $g(p)$ respecto de $g(D)$.*

Demostración. Sea N una matriz asociada a g^{-1} respecto de la referencia canónica de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea M una matriz asociada a la cónica D. Si $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ y

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} M, \tag{12.11.1}$$

entonces la polar de p tiene ecuación

$$u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0, \tag{12.11.2}$$

por lo que l es la polar de p respecto de D si y solo si l tiene por ecuación (12.11.2). Si llamamos $(a'_0 : a'_1 : a'_2)$ a $g(p)$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Según la proposición 11.10, N^tMN es una matriz asociada de $g(D)$, por lo que la recta polar de $g(p)$ respecto de $g(D)$ tiene ecuación

$$u'_0x_0 + u'_1x_1 + u'_2x_2 = 0,$$

donde

$$\begin{pmatrix} u'_0 & u'_1 & u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 & a'_2 \end{pmatrix} N^tMN = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} N^{-1^t} N^tMN = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} MN. \tag{12.11.3}$$

Un punto $(x_0 : x_1 : x_2) \in g(l)$ si y solo si $g^{-1}(x_0 : x_1 : x_2) \in l$, es decir, si y solo si

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{12.11.4}$$

Esto quiere decir que (12.11.4) es la ecuación de $g(l)$. Recuerda ahora que l es la recta polar de p si y solo si l tiene como ecuación (12.11.2). Por (12.11.1) y (12.11.3), esto equivale a que la ecuación de la polar de $g(p)$ respecto de $g(D)$ es (12.11.4), es decir, es la ecuación de $g(l)$. □

Demostración de la proposición 12.10. Recuerda que el centro de C es por definición el punto medio del segmento delimitado por los focos de C. Consideremos primero una elipse real o una hipérbola C' como las de la lista del teorema 10.36, es decir, C' tiene ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

con $a \geq b > 0$ si C' es una elipse real o

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

con $a, b > 0$ si C' es una hipérbola. Según los ejercicios 10.2 y 10.7, los focos de C' son los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ si C' es una elipse real y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ si C' es una hipérbola. Por tanto, el centro de C' es el punto $(0, 0)$. Sea ahora C una elipse real o una hipérbola cualquiera. Existe una isometría f de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tal que $C = f(C')$ para alguna elipse real o alguna hipérbola C' de la lista del teorema 10.36. Como f conserva las distancias, f transforma los focos de C' en los focos de C y el centro de C' en el centro de C, es decir, el centro de C es $f((0, 0))$ y lo llamaremos o.

Vemos ahora que el centro de C' es el polo de la recta del infinito respecto del completado proyectivo $\overline{C}'$ de C'. Eso es equivalente a ver que la recta del infinito es la recta polar, respecto de $\overline{C}'$, del centro de C'. Cuando sumergimos $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ por medio de

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}} \\ & (x, y) & \mapsto & (1 : x : y) \end{array}$$

el punto $(0, 0)$ se convierte en $i((0, 0)) = (1 : 0 : 0)$. Por otra parte, recuerda que $\overline{C}'$ tiene ecuación

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - x_0^2 = 0$$

si C' es una elipse real y

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_0^2 = 0$$

si C' es una hipérbola, por lo que una matriz asociada a $\overline{C}'$ será

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$$

si C' es una elipse real y

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$$

si C' es una hipérbola. Por tanto, la recta polar de $(1:0:0)$ respecto de $\overline{C}$ es la recta de ecuación

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & 0 & \pm\frac{1}{b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0,$$

es decir, la recta de ecuación $x_0=0$, que es la recta del infinito.

Usamos ahora el lema 12.11. Si la recta del infinito l_∞ es la polar de $(1:0:0)$ respecto de $\overline{C}'$, la recta $\overline{f}(l_\infty)$ es la polar de $\overline{f}(1:0:0)$ respecto de $\overline{f}(\overline{C}')$. Según la proposición 8.45, $\overline{f}(1:0:0)=i(f((0,0))=i(o)$. Según la proposición 12.4, $\overline{f}(\overline{C}')$ es el completado proyectivo de $f(C')$, es decir $\overline{f}(\overline{C}')=\overline{C}$, ya que $f(C')=C$. Finalmente, según el corolario 8.48, la recta del infinito queda invariante por $\overline{f}$, es decir, $\overline{f}(l_\infty)=l_\infty$. Es decir, la recta del infinito es la polar del centro de C (el punto o; abusando de la notación, identificamos o con $i(o)$) respecto de $\overline{C}$ o, equivalentemente, o es el polo de la recta del infinito respecto de $\overline{C}$.

Ilustramos para una hipérbola los argumentos de esta demostración en las figuras 15 y 16 (en esas figuras también se ilustra el cálculo de los ejes de una hipérbola, que veremos más adelante). □

Observación 12.12. La proposición anterior justifica que definamos el centro de una elipse imaginaria C como el polo de la recta del infinito respecto de $\overline{C}$. Observa que la matriz de $\overline{C}$ es una matriz de entradas reales y esto implica que el polo de la recta del infinito respecto de $\overline{C}$ es un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$. De hecho, como l_∞ corta a $\overline{C}$ en dos puntos (no reales), l_∞ no es tangente a $\overline{C}$ y su polo no está en l_∞; es decir, el polo de l_∞ *es un punto de* $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.

Por otra parte, si C es una parábola, la recta del infinito l_∞ corta a $\overline{C}$ en un solo punto p. Por tanto, l_∞ es tangente a $\overline{C}$ en p o, lo que es lo mismo, p es el polo de la recta del infinito respecto de $\overline{C}$. Como $p\in l_\infty$, *p no es un punto de* $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y esto justifica que digamos que una parábola *no tiene centro*.

Hay otra razón que justifica que digamos que las elipses reales y las hipérbolas tienen centro mientras las parábolas no lo tienen: el centro de una elipse real o de una hipérbola es su *centro de simetría*; en cambio, una parábola no tiene ningún centro de simetría. Puedes ver más detalles de esto en el ejercicio 12.13. Asimismo, los ejes de una cónica también pueden definirse como *ejes de simetría*, es decir, como rectas l tales que la simetría axial con eje l deja a la cónica invariante.

Ejercicio 12.13. Sea C una cónica no degenerada real de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y llamemos también C a su lugar de ceros de C. Decimos que o es un *centro de simetría* de C si la simetría central f de centro o cumple $f(C)=C$.

(1) Demuestra que si C es una elipse real o una hipérbola, C tiene un único centro de simetría, que es el centro de C.
(2) Demuestra que si C es una parábola, C no tiene ningún centro de simetría.

Observación 12.14. Es posible que recuerdes que al principio de esta subsección mencionamos que el centro de una cónica no degenerada real es un *concepto afín*. Quizá esta afirmación te resulte extraña ya que, según la primera definición que hemos dado de centro, este es el punto medio del segmento limitado por los focos, que son un concepto métrico (observa que, sin embargo, el punto medio de un segmento *no* es un concepto métrico sino simplemente afín). A pesar de ello, de la proposición 12.10 se deduce que el centro de una

cónica no es un concepto métrico, es decir, si o es el centro de C y f es un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que *no es necesariamente* una isometría, $f(o)$ es el centro de $f(C)$. Otra forma de justificar que el centro de una cónica es un concepto puramente afín es percatarse de que, tal como dice el ejercicio 12.13, el centro de una cónica es su centro de simetría y que una simetría central, aun siendo una isometría, puede definirse sin usar para nada la estructura euclídea de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, según se vio en la proposición 3.28, la definición 3.29 y en la observación 6.14.

Vemos ahora cómo calcular el eje de una parábola y los ejes de una elipse real y de una hipérbola.

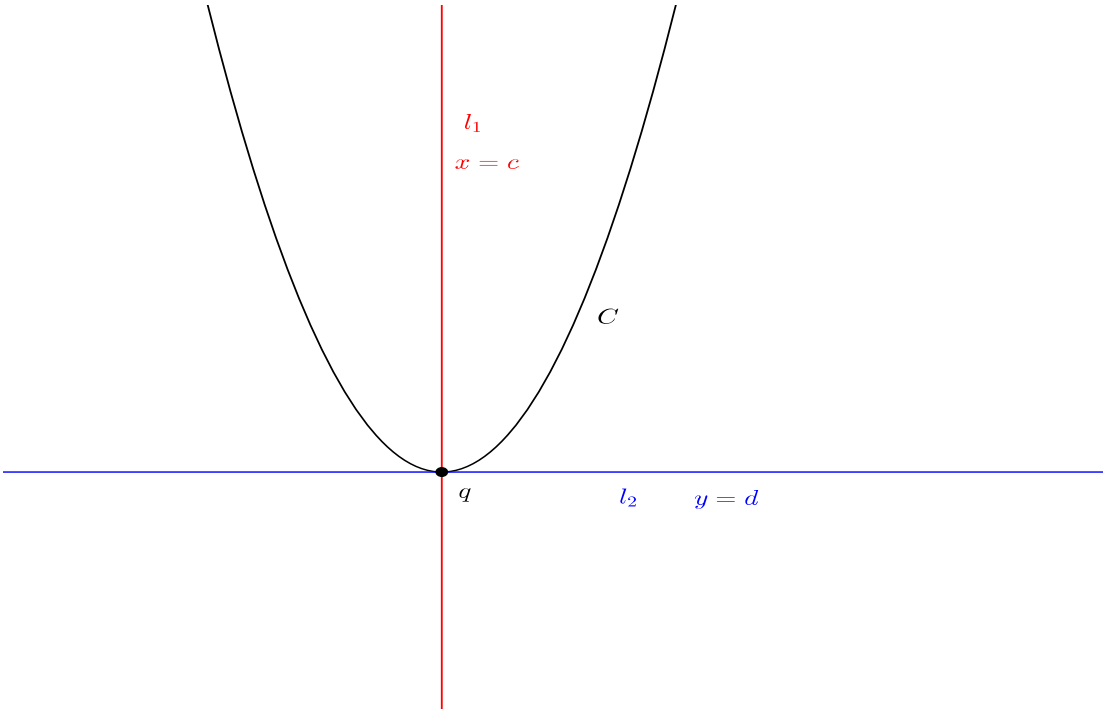
Proposición 12.15. *Sea $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ el plano afín euclídeo estándar, sea C una parábola de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y sea $(0:\alpha:\beta)$ su punto del infinito. Si el eje de C es la recta afín l, entonces el completado proyectivo $\overline{l}$ de l es la recta polar de $(0:\beta:-\alpha)$.*

Demostración. Estudiamos primero la situación para una parábola C' en forma canónica, es decir, con ecuación de la forma $ax^2 - y = 0$, con a número real positivo (véase el teorema 10.36). Por un ejercicio similar al ejercicio 10.12, sabemos que la directriz de C' es la recta de ecuación $y = -\frac{1}{4a}$ y el foco de C' es el punto $(0, \frac{1}{4a})$. Por la definición 10.9, como el eje l'_1 de C' es la recta que pasa por el foco y es perpendicular la directriz, l'_1 es la recta de ecuación $x = 0$. Vemos además que el vértice de C' es el punto $(0,0)$ y que la tangente l'_2 a C' en $(0,0)$ es la recta de ecuación $y = 0$, que es, por tanto, perpendicular al eje. Por último observamos que, como el completado proyectivo $\overline{C}'$ de C' es $ax_1^2 - x_2 = 0$, el punto del infinito de C' es $(0:0:1)$, que es también el punto del infinito del eje l'_1.
Sea ahora C una parábola cualquiera. Según el teorema 10.36 existe una isometría f de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tal que $f(C') = C$. Como el foco, la directriz y el eje de una parábola están caracterizados por sus propiedades métricas (se definen en términos de distancias y de relaciones de perpendicularidad) y f conserva ángulos y distancias, el foco, la directriz, el eje l'_1 de C' y también el vértice de C' se transforman en el foco, la directriz, el eje l_1 de y el vértice q de C. Además, como la recta tangente a una cónica en un punto p de la cónica viene caracterizada por ser la única recta por p que corta a la cónica solo en p y f es biyectiva (proposición 11.22 y definición 11.24), la recta $l_2 = f(l'_2)$ es la tangente a $C = f(C')$ en $q = f(0,0)$, que es el vértice de C. Por último, como l'_1 y l'_2 son perpendiculares y f es una isometría, el eje l_1 de C y la recta tangente l_2 a C por q también son perpendiculares. Como C es una parábola, C tiene un único punto en el infinito. Por la proposición 12.4, f transforma el punto del infinito de C', que es $(0:0:1)$, en el punto del infinito de C. Por otra parte, como $(0:0:1)$ es también el punto del infinito de l'_1 y $f(l'_1) = l_1$, se deduce de la proposición 12.4, (2) que $f(0:0:1)$ es el punto del infinito de l_1.
Llamemos $(0:\alpha:\beta)$ al punto del infinito de l_1. Entonces el vector (α,β) es un vector director de l_1. Como l_1 y l_2 son perpendiculares, el vector $(\beta,-\alpha)$ es un vector director de l_2 y $(0:\beta:-\alpha)$ es el punto del infinito de l_2. Como $(0:\alpha:\beta)$ es el único punto de intersección de $\overline{C}$ con l_∞, se deduce de la proposición 11.22 y de la definición 11.24 que l_∞ es la tangente a $\overline{C}$ en $(0:\alpha:\beta)$. Tenemos pues que las rectas l_∞ y $\overline{l}_2$ son las tangentes a $\overline{C}$ por el punto $(0:\beta:-\alpha)$. Como l_∞ corta a $\overline{C}$ en el punto $(0:\alpha:\beta)$ y $\overline{l}_2$ corta a $\overline{C}$ en el vértice q de C, la observación 11.29 nos dice que $\overline{l}_1$ de C es la recta polar de $(0:\beta:-\alpha)$. Ilustramos todo esto con las figuras 13 y 14.

□

Proposición 12.16. *Sea $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ el plano afín euclídeo estándar y sea C bien una elipse real que no es una circunferencia, bien una hipérbola. Si l_1 y l_2 son los ejes de C y $(0:\alpha:\beta)$ es el punto del infinito de l_1, entonces*

FIGURA 13.



(i) *el completado proyectivo* $\bar{l}_2$ *de* l_2 *es la recta polar de* $(0 : \alpha : \beta)$*;*
(ii) *el punto del infinito de* l_2 *es* $(0 : \beta : -\alpha)$.

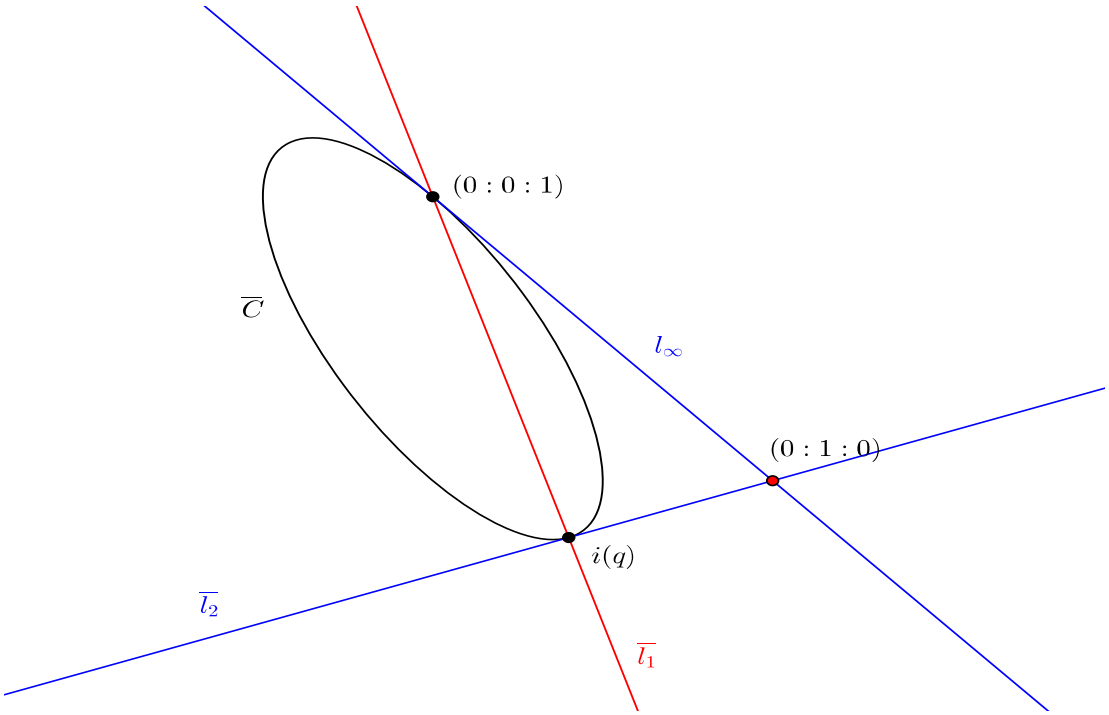
Demostración. Damos solo la idea de la demostración para el caso de una elípse real. Usamos argumentos similares a los de la demostración de la proposición 12.15. Sea C' una elipse real en forma canónica, es decir, con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

con $a > b > 0$. Es fácil ver que las tangentes a C' en los vértices de C' en el eje menor l'_2 son paralelas al eje mayor l'_1 de C'. Esto implica que el punto del infinito de l'_1 es el polo del completado proyectivo $\bar{l}'_2$ de l'_2. De igual forma, el punto del infinito de l'_2 es el polo del completado proyectivo $\bar{l}'_1$ de l'_1. Sea ahora C una elipse real cualquiera y sean l_1 y l_2 sus ejes. Argumentando como en la demostración de la proposición 12.15 deducimos que la relación que guardan $\bar{l}_1$ y $\bar{l}_2$ con respecto a los puntos del infinito de l_2 y de l_1 es la misma que la que guardan $\bar{l}'_1$ y $\bar{l}'_2$ con respecto a los puntos del infinito de l'_2 y de l'_1, es decir, el punto del infinito de l_1 es el polo de $\bar{l}_2$ y el punto del infinito de l_2 es el polo de $\bar{l}_1$. Finalmente, los ejes de C son perpendiculares, por lo que si $(0 : \alpha : \beta)$ es el punto del infinito de l_1, entonces $(0 : \beta : -\alpha)$ es el punto del infinito de l_2.

Para una hipérbola la demostración es análoga y la dejamos como ejercicio. Ilustramos el que sería el argumento con la figura 15, en la que se ve el eje principal L_1 y el eje secundario L_2 de una hipérbola C, y 16, en la que el punto del infinito $(0 : \alpha : \beta)$ de L_1 es el polo de $\overline{L_2}$ respecto de $\overline{C}$. □

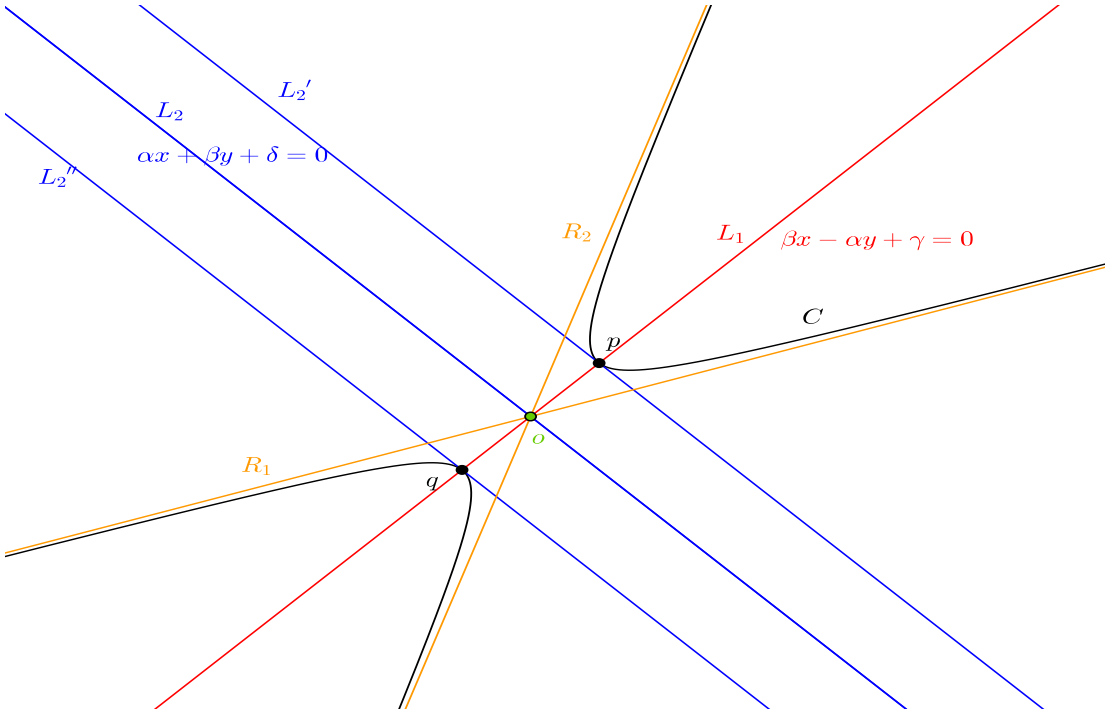
FIGURA 14. Completado proyectivo de la figura 13. Una recta tiene el mismo color que su polo respecto de $\overline{C}$



Observación 12.17. No hemos incluido en la proposición 12.16 el caso en que C sea una circunferencia, porque en ese caso C tiene infinitos ejes, que son las rectas que contienen a los diámetros de C. En efecto, si consideramos por ejemplo la circunferencia C en forma canónica y de radio r, que tiene por tanto ecuación $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, nada tienen especial las rectas de ecuaciones $x = 0$ e $y = 0$ si las comparamos con las rectas de ecuaciones $x - \gamma y = 0$ y $\gamma x + y = 0$, para algún γ número real no nulo, ya que, al ser estás últimas rectas perpendiculares que pasan por $(0, 0)$, podemos encontrar una isometría que deja C invariante y trasforma las rectas de ecuaciones $x = 0$ e $y = 0$ en las rectas de ecuaciones $x - \gamma y = 0$ y $\gamma x + y = 0$. Otra forma de entender que C tiene infinitos ejes es darse cuenta de que las rectas que pasan por el centro de C son todas ejes de simetría para C. Podemos sin embargo reformular la proposición 12.16 si C es una circunferencia: en ese caso las rectas l_1 y l_2 que aparecen son pares de diámetros perpendiculares de C.

Observación 12.18. Una vez cálculados los ejes de una elipse real podemos calcular sus vértices hallando la intersección de los ejes y la elipse. Usando entonces la relación entre la distancia focal y la longitud de los ejes expresada en el ejercicio 10.2 podemos hallar los focos de la elipse. De manera análoga es posible hallar los vértices y focos de una hipérbola (usa en este caso el ejercicio 10.7) y el vértice de una parábola. Aunque de esta forma hallamos ejes y los vértices con métodos proyectivos, el método que hemos indicado para hallar los focos no es proyectivo. Sin embargo, los focos de una cónica no degenerada sí se pueden hallar con métodos proyectivos, aunque el procedimiento a realizar es algo

FIGURA 15.



complicado. Puedes consultarlo en la página 51 de los "Apuntes de Geometría Proyectiva" de Enrique Arrondo.

La cuádrica del absoluto

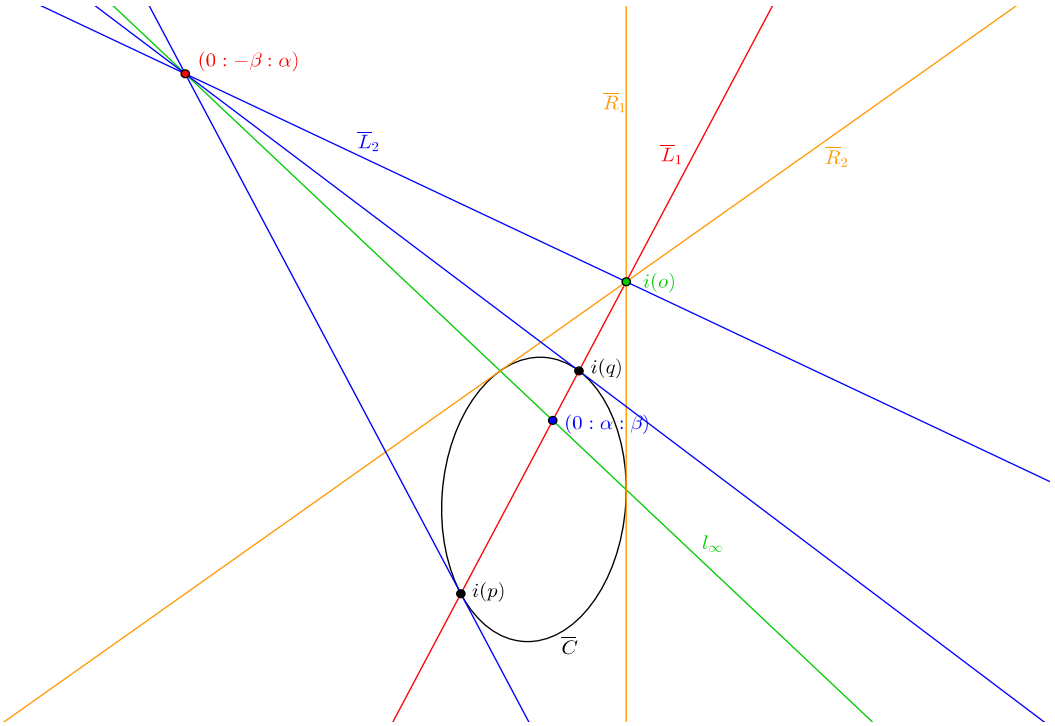
Terminamos este tema reinterpretando la noción de ortogonalidad en el plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ en términos de una noción clásica, la *cuádrica absoluta* o *del absoluto*. Esto nos permitirá reformular las proposiciones 12.15 y 12.16 de manera más sintética.

Las generalización de las cónicas a dimensión arbitraria son las *cuadrícas*, que son objetos de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ o $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ que vienen definidos por una ecuación de grado 2 en n variables $x_1, \ldots, x_n$ en el primer caso y por una ecuación homogénea de grado 2 en $n+1$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el segundo caso. Por ejemplo, en el caso de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{k}}$ una cuádrica viene definida por una ecuación homogénea de grado 2 en dos variables. Igual que para las cónicas, a una cuádrica de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ o $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ se le asocia una matriz simétrica de orden $n+1$.

Definición 12.19. Sea Q una cuádrica de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$ y sea M su matriz asociada. Sean $p = (y_0 : y_1 : \cdots : y_n)$ y $q = (z_0 : z_1 : \cdots : z_n)$ dos puntos de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{k}}$. Decimos que p y q son conjugados con respecto de Q si

$$\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0.$$

FIGURA 16. Completado proyectivo de la figura 15. Una recta tiene el mismo color que su polo respecto de $\overline{C}$



Ejemplo 12.20. Sea C una cónica no degenerada de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ y sea p un punto de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$. Un punto q de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}}$ es conjugado de p si y solo si q pertenece a la recta polar de p respecto de C.

Definición 12.21. Sea l_∞ la recta de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación $x_0 = 0$. A cada punto $p = (0 : x_1 : x_2)$ de l_∞ le asignamos las coordenadas $(x_1 : x_2)$ (que no son sino las coordenadas de p con respecto a la referencia proyectiva $\{(0:1:0),(0:0:1);(0:1:1)\}$ de l_∞). Llamamos *cuádrica del absoluto* del espacio afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ a la cuádrica de l_∞ de ecuación (con respecto de las coordenadas que acabamos de introducir) $x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Observación 12.22. A la cuádrica del absoluto le corresponde la matriz identidad I_2. El conjunto de puntos de la cuádrica del absoluto es vacío si lo pensamos en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ y, si lo pensamos en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, es el conjunto $\{I = (0:1:i), J = (0:1:-i)\}$ formando por los puntos cíclicos (que se definieron en el ejercicio 3 de la lista de ejercicios de Geometría Proyectiva).

Proposición 12.23. *Sean $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ dos vectores no nulos del espacio vectorial euclídeo estándar $\mathbf{R}^2$ y sean $p = (0 : v_1 : v_2)$ y $q = (0 : w_1 : w_2)$ los puntos del infinito correspondientes a $L(v)$ y $L(w)$ respectivamente. Los vectores v y w son ortogonales si y solo si los puntos p y q son conjugados respecto de la cónica del absoluto de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ dada en la definición 12.21.*

Demostración. Los vectores v y w son ortogonales si y solo si

$$0 = v_1w_1 + v_2w_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} I_2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \tag{12.23.1}$$

Como los puntos p y q tienen coordenadas $(v_1 : v_2)$ y $(w_1 : w_2)$ respecto a la referencia proyectiva $\{(0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1); (0 : 1 : 1)\}$ de l_∞, por la observación 12.22, la ecuación (12.23.1) quiere decir que p y q son conjugados con respecto a la cuádrica del absoluto de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. □

Observación 12.24. Acabamos de ver cómo expresar en lenguaje proyectivo, usando los conceptos de conjugación respecto a una cuádrica y de la cuádrica del absoluto, la noción euclídea de perpendicularidad. No es tan extraño que hayamos podido hacer esto ya que el conjunto de ceros (en $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$) de la cuádrica del absoluto de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ es el conjunto $\{I, J\}$ de los puntos cíclicos y ya vimos en la proposición 8.72 cómo los puntos cíclicos sirven no solo para expresar la noción de perpendicularidad sino también la de ángulo.

Ejemplo 12.25.
(1) Sea C una parábola de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, sea p su punto del infinito y sea q el punto del infinito de la recta tangente a C por el vértice de C. Entonces p y q son conjugados con respecto de la cuádrica del absoluto de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ (véanse la proposición 12.15 y las figuras 13 y 14).

(2) La condición (ii) de la proposición 12.16 se puede reescribir así: "los puntos del infinito de l_1 y l_2 son conjugados respecto de la cuádrica del absoluto de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$".