EXAMEN DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA
6 de febrero de 2007

Duración: 3 horas
Cada pregunta vale 2,5 puntos.

1) Responde una de las dos preguntas siguientes:

a) Sea A un anillo noetheriano y sea $A[X]$ el anillo de polinomios en la variable X con coeficientes en A. Demuestra que $A[X]$ es noetheriano.

b) Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo infinito y sea A una $\mathbf{k}$–álgebra, finitamente generada como $\mathbf{k}$–álgebra. Enuncia y demuestra el lema de normalización de Noether para A.

EXAMEN DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA
6 de febrero de 2007

2) Sea $A = \mathbf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente que tiene que cumplir $\mathbf{k}$ para que $V(I) \neq \emptyset$ para todo ideal $I \subset A$ distinto de A?

b) Sea f un polinomio irreducible de A y sea $\mathfrak{p} = (f)$. ¿Cuáles son los elementos de $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}}$?

3) a) Sea A un anillo local, $\mathfrak{m}$ su único ideal maximal y sea $\mathbf{k} = A/\mathfrak{m}$ el cuerpo residual de $\mathfrak{m}$. Sea M un módulo finitamente generado sobre A y sean $m_1, \ldots, m_k \in M$. Demuestra que si sus clases $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_k$ en el cociente $M/\mathfrak{m}M$ son un sistema de generadores para el $\mathbf{k}$–espacio vectorial $M/\mathfrak{m}M$, entonces $m_1, \ldots, m_k$ generan M como A–módulo.

b) Consideramos el anillo de fracciones $A = \{g/h \text{ tal que } g, h \in \mathbf{R}[X, Y] \text{ y } h(1, 0) \neq 0\}$. Demuestra que los vectores (X, Y) e (Y, X) generan A^2 como A–módulo.

4) a) Sea A un dominio de factorización única, sea $f \in A$ un elemento irreducible y sea $\mathfrak{p} = (f)$. Demuestra que $\mathfrak{p}^n$ es $\mathfrak{p}$–primario para todo $n \in \mathbf{N}$.

b) Da un ejemplo de un ideal $I \subset \mathbf{R}[X, Y]$, no radical y no primario que tenga descomposición primaria irredundante única y tal que $V(Y - X + 1) \subset V(I) \subset \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.

c) Da un ejemplo de un ideal $I \subset \mathbf{R}[X, Y]$ que no tenga descomposición primaria irredundante única y tal que $V(Y - X + 1) = V(I) \subset \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Da un conjunto finito de generadores de I.