EXAMEN DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA
31 de enero de 2008

Duración: 3 horas
Cada pregunta vale 2,5 puntos.

1) Responde una de las dos preguntas siguientes:

a) Sea A un anillo noetheriano. Demuestra que todo ideal I de A, $I \neq (1)$, posee una descomposición primaria (finita).

b) Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y sea I un ideal de $\mathbf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Demuestra que $I(V(I)) = \sqrt{I}$ (puedes usar la forma débil del teorema de los ceros sin demostrarla).

EXAMEN DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA
31 de enero de 2008

2) Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, argumentando tu respuesta:

a) El anillo $\mathbf{Z}[X]_{(5,X)}$ es un anillo noetheriano local.

b) Todo ideal I, $I \neq (1)$ de un dominio de ideales principales posee una descomposición primaria (finita) irredundante y ésta es única.

c) Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo, sea $\mathfrak{p} = (Y) \subset \mathbf{k}[X, Y]$ y sea $A = \mathbf{k}[X, Y]_{\mathfrak{p}}$. Existe un elemento $t \in A$ tal que, para todo $a \in A$, $a \neq 0$, existe $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ y $u \in U(A)$ tal que $a = u \cdot t^n$.

3) Se considera el anillo $A = \mathbf{C}[X, Y, Z]/(Y^2 - X(X-1)^2, X - Y + Z)$.

a) Demuestra que A no es normal y calcula su normalización (es decir, su clausura entera en su cuerpo de fracciones) (indicación: puede ayudarte saber que $f = Y^2 - X(X-1)^2$, entonces $f(T^2, T^3 - T) = 0$).

b) Encuentra elementos $z_1, \ldots, z_m \in A$, algebraicamente independientes sobre $\mathbf{C}$ tales que A sea un álgebra finita sobre $B = \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_m]$ (es decir, esté finitamente generada como módulo sobre B).

4) Sea $A = \mathbf{C}[X, Y]$, sea $I = (X^3 - Y, X^2 - 1) \subset \mathbf{C}[X, Y]$ y sea $B = \mathbf{C}[X, Y]/(X, Y)^2$.

a) Demuestra que A/I encaja en una sucesión exacta de la forma:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus A \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

b) Calcula $\operatorname{Spec}(A/I)$.

c) Demuestra que A/I^2 y $B \times B$ son anillos isomorfos.