

EXAMEN DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA

3 de septiembre de 2007

Duración: 3 horas

Cada pregunta vale 2,5 puntos.

- 1) Responde una de las dos preguntas siguientes:
- a) Enuncia y demuestra el Lema de Nakayama (si en la demostración usas el llamado “truco determinantal”, demuéstalo también).
 - b) Enuncia y demuestra el teorema de los ceros de Hilbert (para ello puedes usar el enunciado de la forma débil del teorema de los ceros).

EXAMEN DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA

3 de septiembre de 2007

- 2) Sea A un anillo noetheriano. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, argumentando tu respuesta:
- a) El anillo $A[X_1, \dots, X_n]$ es un anillo noetheriano.
 - b) El anillo $B = A[X_1, \dots, X_n, \dots]$ formado por polinomios en infinitas variables $X_1, \dots, X_n, \dots$ es un anillo noetheriano (los elementos de B son combinaciones finitas con coeficientes en A de monomios, cada uno de ellos en un número finito de variables de $\{X_1, \dots, X_n, \dots\}$; las operaciones en B son las obvias).
 - c) Si I es un ideal propio de A , A/I es un anillo noetheriano.
 - d) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A , $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo noetheriano.
- 3) Se considera el anillo $A = \mathbf{C}[X, Y, Z]/(X^3 - Y^4, X + Y + Z)$.
- a) Encuentra un subanillo de $\mathbf{C}[T]$ que sea isomorfo a A .
 - b) Demuestra que A no es normal y calcula su normalización (es decir, su clausura entera en su cuerpo de fracciones).
 - c) Encuentra elementos $z_1, \dots, z_m \in A$, algebraicamente independientes sobre $\mathbf{C}$ tales que A sea un álgebra finita sobre $B = \mathbf{C}[z_1, \dots, z_m]$ (es decir, esté finitamente generada como módulo sobre B).
- 4) Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Consideramos los siguientes ideales en $A = \mathbf{k}[X, Y, Z]$:
- $$I = (X(XY - Z), Y(XY - Z), Z(XY - Z)) \text{ y } J = (XY - Z) \cap ((XY - Z)^2, X, Y).$$
- a) Calcula el radical de I .
 - b) Encuentra tres elementos que generen J .
 - c) Demuestra que (X, Y, Z) es un primo asociado de A/I .
 - d) Calcula una descomposición primaria irredundante de I . ¿Es única? Justifica tu respuesta.