EXAMEN DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA

1 de septiembre de 2008

Duración: 3 horas

1) (2 puntos) Enuncia y demuestra el lema de Nakayama.

EXAMEN DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA

1 de septiembre de 2008

2) (1 punto) Sea I un ideal de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ y sea $A = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]/I$. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de A. Demuestra que el cuerpo $A/\mathfrak{m}$ es isomorfo a $\mathbf{C}$.

3) (2 puntos) Decide si los siguientes dominios de integridad son normales. Justifica tu respuesta.

a) $\mathbf{R}[X, Y]$.

b) $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$.

4) (3 puntos) Consideramos el ideal $J = (XY, XZ, YZ, Z^2)$ de $B = \mathbf{C}[X, Y, Z]$ y el B–módulo $M = \mathbf{C}[X, Y, Z]/J$.

a) Halla $\sqrt{J}$ y encuentra las componentes irreducibles de $V(J)$.

b) Para $\overline{X}, \overline{Z} \in M$, calcula los ideales $\mathrm{Ann}\overline{X}$, $\mathrm{Ann}\overline{Z} \subset B$ (los anuladores de $\overline{X}$ y de $\overline{Z}$).

c) Encuentra una descomposición primaria de J y halla los primos asociados a M.

5) (2 puntos) Consideramos el anillo $\mathbf{C}[X, Y, Z, W]/(X^2 - YZ, Y^2 - XW)$ y llamamos R a su localización en el ideal primo $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} - \overline{W})$.

a) Demuestra que el ideal maximal de R se puede generar usando dos elementos.

b) Demuestra que en realidad el ideal maximal de R es principal.