

A no ser que se diga lo contrario A será un anillo conmutativo con unidad y $\mathbf{k}$ un cuerpo.

- 1) Sea A un anillo conmutativo con unidad A .
 - a) Demuestra que el conjunto $A[[X]]$ formado por las expresiones de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ forma otro anillo (conmutativo y con unidad) con las operaciones obvias (dicho anillo se llama *anillo de las series de potencias formales con coeficientes en A*).
 - b) Demuestra que una serie formal $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ es una unidad de $A[[X]]$ si y sólo si a_0 es una unidad de A . Calcula el inverso de $1 + X$ en $\mathbf{C}[[X]]$.
 - c) Encuentra todos los ideales de $\mathbf{k}[[X]]$, donde $\mathbf{k}$ es un cuerpo.
- 2) Sea A un anillo conmutativo con unidad y sea $A[[X_1, \dots, X_n]]$ el conjunto formado por las expresiones de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, donde f_n es un polinomio homogéneo de grado n en las variables $X_1, \dots, X_n$ con coeficientes en A . Demuestra que $A[[X_1, \dots, X_n]]$ es un anillo conmutativo con unidad. Demuestra que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ es una unidad en $A[[X_1, \dots, X_n]]$ si y sólo si f_0 es una unidad en A . Concluye que $\mathbf{k}[[X_1, \dots, X_n]]$ (con $\mathbf{k}$ cuerpo) posee un único ideal maximal, es decir, que $\mathbf{k}[[X_1, \dots, X_n]]$ es un anillo local.
- 3) Demuestra que el ideal $(2, X)$ no es principal ni en $\mathbf{Z}[X]$ ni en $\mathbf{Z}[[X]]$.
- 4) Sea $i : A \hookrightarrow R$ un monomorfismo de anillos y sean $T_1, \dots, T_n \in R$ tales que se verifica la siguiente propiedad: para cada anillo A' , cada homomorfismo $\varphi : A \rightarrow A'$ y elementos $a'_1, \dots, a'_n \in A'$, existe un único homomorfismo de anillos $\bar{\varphi} : R \rightarrow A'$ tal que $\varphi = \bar{\varphi} \circ i$ y $\bar{\varphi}(T_j) = a'_j$ para $j = 1, \dots, n$. Demuestra que $R \cong A[X_1, \dots, X_n]$.
- 5) Decide si $X^2 + Y^2 - 2X + 3$ y $9Y - 2X^2$ pertenecen al ideal $(X - 3, Y - 2) \subset \mathbf{R}[X, Y]$
- 6) Calcula un sistema de generadores de la intersección del ideal $(X, Y^2) \cap (X^2, Y) \subset \mathbf{k}[X, Y]$.
- 7) Calcula un sistema de generadores para el ideal formado por los polinomios de $\mathbf{k}[X, Y]$ que se anulan en los subconjuntos de $\mathbf{A}_k^2$ siguientes:
 - a) $\{(0, 0), (1, 0)\}$ b) $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ c) $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.
- 8) Se dice que dos ideales I y J son primos entre sí si $I + J = A$. Demuestra que si I y J son primos entre sí, entonces $IJ = I \cap J$ y $A/IJ \cong (A/I) \times (A/J)$.
- 9) Decide si los siguientes ideales son maximales, son primos no maximales, o no son ni maximales ni primos.
 - a) $(Y - X^2) \subset \mathbf{R}[X, Y]$. b) $(X^2 + 1) \subset \mathbf{R}[X]$.
 - c) $(X^2 + 1) \subset \mathbf{C}[X]$. d) $(X^2 - 2) \subset \mathbf{Q}[X]$.
 - e) $(X^2 - 4) \subset \mathbf{Q}[X]$ f) $(X^2 - Y^2) \subset \mathbf{R}[X, Y]$.
 - g) $(X - 1, Y - 2) \subset \mathbf{Z}[X, Y]$. h) $(X - 1, Y - 2) \subset \mathbf{Q}[X, Y]$.
 - i) $I = \{f \text{ tal que } f(1, 2) = 0\} \subset \mathcal{C} = \{f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \text{ continua}\}$.
- 10 a) Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Demuestra que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de B , $f^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de A . En particular si A es un subanillo de B y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de B , $A \cap \mathfrak{p}$ es un ideal primo de A .

- b) Sea A un anillo, $I \subset A$ un ideal y $\pi : A \longrightarrow A/I$ la proyección canónica en el cociente. Demuestra que existe una biyección entre el conjunto de primos $\mathfrak{q}$ de A/I y el conjunto de primos $\mathfrak{p}$ de A que contienen a I , dada por $\mathfrak{p} = \pi^{-1}\mathfrak{q}$.
- 11) Demuestra o refuta (con un contraejemplo) las siguientes afirmaciones:
- La intersección de dos ideales primos es primo;
 - La suma de dos ideales primos es primo;
 - La imagen inversa de un ideal maximal por un homomorfismo es maximal.
 - La imagen inversa de un ideal maximal de A/I por la proyección canónica $\pi : A \longrightarrow A/I$ es un ideal maximal de A .
- 12) Calcula el ideal I formado por los polinomios de $\mathbf{R}[X, Y]$ que se anulan al ser evaluados en $(1 + i, 1)$. ¿Es I un ideal maximal?
- 13) Sea $\mathbf{k} \subset K$ una extensión algebraica de cuerpos. Sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$. Consideramos el homomorfismo de evaluación $e_a : \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K$ dada por $f \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$. Determina el núcleo y la imagen de e_a y concluye que la intersección $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \cap \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ es un ideal maximal de $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$.
- 14) a) Da un sistema de generadores del núcleo I del homomorfismo de anillos de $\mathbf{k}[X, Y, Z]$ a $\mathbf{k}[T]$ que envía X, Y, Z a T^2, T^4, T^5 respectivamente. ¿Es un ideal maximal? ¿Es un ideal primo?
- b) Demuestra que si $\mathbf{k}$ es infinito (por ejemplo, si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$), I es el ideal de la curva de $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^3$ de parametrización $x = t^2, y = t^4$ y $z = t^5$.
- 15) a) Da un sistema de generadores del ideal de $\mathbf{k}[X, Y, Z]$ formado por los polinomios f tales que $f(T^3, T^4, T^5)$ es el polinomio nulo en $\mathbf{k}[T]$. Demostrar que dicho ideal no se puede generar por dos elementos.
- b) Demuestra que si $\mathbf{k}$ es infinito (por ejemplo, si $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$), I es el ideal de la curva C de $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^3$ con parametrización $x = t^3, y = t^4$ y $z = t^5$. Así pues éste es un ejemplo variedad algebraica cuyo ideal precisa para ser generado de un número de polinomios mayor que la codimensión de la variedad.
- 16) Sea $I = (X - 4Z - 3, Y + 2Z + 1)$ un ideal del anillo $A = \mathbf{k}[X, Y, Z]$.
- Demuestra que $I \cap \mathbf{k}[X, Y] = (X + 2Y - 1) \subset \mathbf{k}[X, Y]$.
 - Demuestra que I es primo pero no maximal, y halla un ideal maximal que lo contenga.
- 17) Dado I un ideal de un anillo A , demuestra que el conjunto $\sqrt{I}$ formado por los elementos de A que tienen alguna potencia suya en I es un ideal de A (llamado el *radical del ideal* I). Demuestra que se verifica la igualdad $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
- 18) Sea A un dominio de factorización única. Si $f = f_1^{n_1} \dots f_r^{n_r}$ es la descomposición en factores irreducibles de $f \in A$, demuestra que entonces $\sqrt{(f)} = (f_1 \dots f_r)$.
- 19) Demuestra, usando el lema de Zorn, que para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A existe un ideal primo minimal contenido en $\mathfrak{p}$.
- 20) Encuentra los elementos nilpotentes y los primos minimales de los anillos siguientes:
- $\mathbf{k}[X, Y]/(XY, Y^2)$;
 - $\mathbf{Z}_{300}$;
 - $\mathbf{k}[X, Y]/(F)$, donde $F = cf_1^{n_1} \dots f_s^{n_s}$, ($c \in \mathbf{k}, f_1, \dots, f_s$ irreducibles) es la descomposición en irreducibles de F .