PROBLEMAS DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA. 2007-08. Hoja 2

A no ser que se diga lo contrario A será un anillo conmutativo con unidad y $\mathbf{k}$ un cuerpo.

1) Demuestra que el ideal $J = (X + Y - X^2 + XY - Y^2, X(X + Y - 1)) \subset \mathbf{k}[X, Y]$ no es igual al ideal I de los polinomios que se anulan en el subconjunto $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, a pesar de que $V(J) = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$.

2) Sea A un anillo, $S \subset A$ un conjunto multiplicativamente cerrado e I un ideal de A tal que S e I son disjuntos. Demuestra que existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ que contiene a I y tal que S y $\mathfrak{p}$ son disjuntos.

3) Dado un anillo A, sea Σ el conjunto de todos los ideales en los que cada elemento es o bien 0 o bien un divisor de cero. Demuestra que el conjunto Σ tiene elementos maximales y que cada elemento maximal de Σ es un ideal primo. Concluye que el conjunto de los divisores de cero de A es una unión de ideales primos.

4) Sea Σ el conjunto de los subconjuntos multiplicativamente cerrados de un anillo A que no contienen a 0. Demuestra que S es un elemento maximal de Σ si y sólo si $A \setminus S$ es un ideal primo minimal de A.

5) Sea $X \subset \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ un conjunto algebraico tal que $I(X)$ está generado por $f_1, \dots, f_r$ y sea $f \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Demuestra que $f_1, \dots, f_r, X_{n+1}f - 1$ generan el ideal del conjunto $Y = \{(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbf{A}^{n+1}_{\mathbf{k}} \mid (a_1, \dots, a_n) \in X,\ a_{n+1}f(a_1, \dots, a_n) = 1\}$.

6) ([Reid], ej. 2.1) Sea A un dominio de integridad y sea K su cuerpo de fracciones. Sea $f \in A$ tal que $f \neq 0$ y $f \notin U(A)$. Demuestra que $A[1/f]$ no está finitamente generado como módulo sobre A.

7) ([R], ej. 2.2) Sea A un DFU, sean $x, y \in A$ elementos sin factores comunes y sea $\varphi : A \oplus A \longrightarrow A$ el homomorfismo que satisface $\varphi((1,0)) = x$ y $\varphi((0,1)) = y$.

a) Calcula la imagen de φ y demuestra que el núcleo de φ está generado por $(-y, x)$.

b) Sea $I = (x, y)$. Concluye que la siguiente sucesión corta de A-módulos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}} A \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}} I \longrightarrow 0$$

es exacta (esta sucesión se llama el *complejo de Koszul* de x e y).

c) Si $A = \mathbf{k}[X, Y]$ y $x = X$ e $y = Y$, concluye que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix}} A \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}} A \xrightarrow{\pi} \mathbf{k} \longrightarrow 0$$

es exacta.

8) Sea $A = \mathbf{k}[X, Y, Z]$.

a) Demuestra que el núcleo del homomorfismo $A^3 \to A$ definido por $(f, g, h) \mapsto (Z^2 - X^2Y)f + (X^3 - YZ)g + (Y^2 - XZ)h$ es libre y que una base suya es $\{(X, Y, Z), (Y, Z, X^2)\}$.

b) Usa el apartado a) para construir una resolución por A–módulos libres del anillo de funciones de la curva C del apartado b) del ejercicio 1.15.

9) Sea $A = \mathbf{k}[X,Y,Z]$ y $M \subset A^4$ el módulo formado por los elementos (f_1, f_2, f_3, f_4) tales que $f_1XY + f_2XZ + f_3YZ + f_4Z^2 = 0$. Demuestra que M está generado por los elementos $(Z, -Y, 0, 0), (0, Y, -X, 0), (0, -Z, 0, X), (0, 0, -Z, Y)$, pero que no son linealmente independientes. Demuestra que, sin embargo, el módulo de las relaciones de estos últimos cuatro elementos es libre de rango uno.

10) ([R], ej. 2.5) Da una demostración elemental del lema de Nakayama usando inducción sobre el número mínimo de generadores de M.

11) Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local, $\mathbf{k} = A/\mathfrak{m}$, M un A–módulo finitamente generado y sean $s_1, \ldots, s_n \in M$. Sean $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_n \in \overline{M} = M/\mathfrak{m}M$ las clases de $s_1, \ldots, s_n$.

a) Demuestra que $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_n$ son un sistema de generadores del $\mathbf{k}$–espacio vectorial $\overline{M}$ si y sólo si $s_1, \ldots, s_n$ son un sistema de generadores de M.

b) Demuestra que $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_n$ forman una base del $\mathbf{k}$–espacio vectorial $\overline{M}$ si y sólo si $s_1, \ldots, s_n$ son un sistema de generadores de M minimal.

12) ([R], ej. 2.3) Sea $A = \mathbf{k}[X,Y,Z]$ y sea $\mathfrak{m} = (X,Y,Z)$. Consideramos el homomorfismo sobreyectivo $\alpha : A^3 \longrightarrow \mathfrak{m}$ definido por $(f,g,h) \mapsto fX + gY + hZ$.

a) Demuestra que el núcleo de α está generado por tres elementos $u, v, w \in A^3$.

b) Sea $\beta : A^3 \longrightarrow \ker\alpha$ el homomorfismo sobreyectivo dado por $(f', g', h') \mapsto f'u + g'v + h'w$. Halla el núcleo de β.

c) Concluye que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^3 \xrightarrow{\beta} A^3 \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow \mathbf{k} \longrightarrow 0,$$

(el complejo de Koszul de X, Y y Z).

13) ([R], ej. 2.9 y 2.10)

a) Sea $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de módulos sobre A. Demuestra que si L y N están finitamente generados como módulos sobre A también lo está M.

b) Sean $M_1, M_2 \subset M$ dos submódulos. Demuestra que si $M_1 + M_2$ y $M_1 \cap M_2$ están finitamente generados como módulos sobre A, también lo están M_1 y M_2.

14) Dado un A-módulo M, se define el dual de M como el conjunto de todos los homomorfismos de M en A.

a) Demuestra que el dual de M tiene una estructura natural de A-módulo.

b) Si $M = \bigoplus_{l \in \Lambda} M_l$, expresa el dual de M en función de los duales de los M_l.

15) Calcula el dual de $\mathbf{Q}$ como $\mathbf{Z}$-módulo.

16) Calcula el dual de $\mathbf{k}[X,Y]/(XY-1)$ como módulo sobre $\mathbf{k}[X]$. Deduce que el $\mathbf{k}[X]$-módulo $\mathbf{k}[X,Y]/(XY-1)$ no es libre.