PROBLEMAS DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA. 2007-08. Hoja 3

A no ser que se diga lo contrario A será un anillo conmutativo con unidad y $\mathbf{k}$ un cuerpo.

1) ([Atiyah–Macdonald], ej. 7.4) ¿Cuáles de los siguientes anillos son noetherianos?

a) El anillo de funciones racionales de z que no tienen polos en el círculo $|z| = 1$.

b) El anillo de series de potencias en z con radio de convergencia positivo.

c) El anillo de series de potencias en z con radio de convergencia infinito.

d) El anillo de polinomios en z cuyas primeras k derivadas se anulan en el origen, siendo k un número natural fijado.

e) El anillo de polinomios en z, w cuyas derivadas parciales con respecto a w se anulan todas para $z = 0$.

En todos los casos los coeficientes son números complejos.

2) Sea A un anillo noetheriano. Demuestra que si M es un A–módulo finitamente generado, entonces $\mathrm{End}(M)$ es también un A-módulo finitamente generado.

3) ([Reid], ej. 3.3). Sea A un anillo e $I_1, \ldots, I_k$ ideales tales que A/I_i es un anillo noetheriano. Demuestra que $\bigoplus A/I_i$ es un A–módulo noetheriano y deduce que si $\bigcap I_i = 0$, entonces A es también un anillo noetheriano.

4) ([R], ej. 3.4). Demuestra que si A es un anillo noetheriano y M es un A–módulo finitamente generado, entonces existe una sucesión exacta $A^q \longrightarrow A^p \longrightarrow M \longrightarrow 0$; esto es, M está finitamente generado y finitamente *presentado*. Deduce que existe una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

no necesariamente de longitud finita donde los F_i son módulos libres de rango finito.

5) ([R], ej. 3.6). Sea A un anillo noetheriano. Demuestra que todo homomorfismo sobreyectivo de anillos $\varphi : A \longrightarrow A$ es un isomorfismo.

6) Sea M un A–módulo. Definimos el *anulador* de M como $\mathrm{ann}M = \{a \in A | am = 0$ para todo $m \in M\}$.

a) Comprueba que $\mathrm{ann}M$ es un ideal de A.

b) ([AM], ej. 6.4) Demuestra que si M es un A–módulo noetheriano entonces $A/\mathrm{ann}M$ es un anillo noetheriano. ¿Sigue siendo cierto el resultado si se sustituye noetheriano por artiniano?

7) Si $A[X]$ es noetheriano, ¿es A necesariamente noetheriano?

8) Demuestra que si A es anillo noetheriano entonces el anillo de series formales $A[[X]]$ también lo es.

9) Sea A un anillo no noetheriano y sea Σ el conjunto de ideales en A que no están finitamente generados. Prueba que Σ tiene elementos maximales y que los elementos maximales de Σ son ideales primos. Deduce de ello el teorema de I. S. Cohen, que afirma que un anillo en el que cada ideal primo está finitamente generado es noetheriano.

10) Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta de A–módulos.

a) Demuestra que M es artiniano si y sólo si L y N son artinianos.

b) Demuestra que la suma directa de una cantidad finita de A–módulos artinianos es un A–módulo artiniano.

c) Demuestra que si A es artiniano y M es un A–módulo finitamente generado, entonces M es artiniano.

11) ([R], ej. 3.2). Sea A un anillo y $\mathbf{k}$ un cuerpo tal $\mathbf{k} \subset A$ es un subanillo de A (i.e., A es una $\mathbf{k}$–álgebra). Demuestra que si A es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$ (i.e., si A es una $\mathbf{k}$–álgebra finita), entonces A es un anillo artiniano.

12) a) ([R], ej. 3.8) Demuestra que los únicos dominios de integridad artinianos son los cuerpos.

b) Demuestra que en un anillo artiniano todo ideal primo es maximal.

13) a) Demuestra que existen, salvo isomorfismos (de $\mathbf{C}$–álgebras) sólo dos $\mathbf{C}$–álgebras finitas de dimensión 2 (como espacio vectorial) sobre $\mathbf{C}$.

b) Demuestra que existen, salvo isomorfismos (de $\mathbf{R}$–álgebras) sólo tres $\mathbf{R}$–álgebras finitas de dimensión 2 (como espacio vectorial) sobre $\mathbf{R}$.

c) Da ejemplos de cuatro $\mathbf{C}$–álgebras, no isomorfas como $\mathbf{C}$–álgebras, de dimensión 3 (como espacio vectorial) sobre $\mathbf{C}$. Di cuáles de ellas son anillos locales.

d) Sean $A_1 = \mathbf{C}[X,Y]/(X^2,Y^2)$ y $A_2 = \mathbf{C}[X,Y]/(X^3,XY,Y^2)$. Comprueba que A_1 y A_2 tienen dimensión 4 como espacios vectoriales sobre $\mathbf{C}$ y estudia si son isomorfas como $\mathbf{C}$–álgebras.

Nota: por el ejercicio 11, todos los ejemplos del ejercicio 13 son anillos artinianos.

14) Demuestra que si A es un anillo artiniano entonces $\sqrt{(0)}$ es nilpotente, es decir, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $(\sqrt{(0)})^k = 0$. Concluye que si $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local artiniano, $\mathfrak{m}$ es nilpotente.

15) Consideramos el anillo A.

a) Demuestra que si el ideal $(0) \subset A$ es un producto de ideales maximales (no necesariamente distintos), entonces A es un anillo noetheriano si y sólo si es un anillo artiniano.

b) Demuestra que si A es un anillo artiniano, A tiene un número finito de ideales maximales (i.e., A es *semilocal*).

c) Concluye que si A es un anillo artiniano entonces es también un anillo noetheriano.

16) Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local artiniano y sea $\mathbf{k} = A/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) cada ideal de A es principal;

ii) $\mathfrak{m}$ es principal;

iii) el $\mathbf{k}$–espacio vectorial $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ tiene dimensión menor o igual que 1.