PROBLEMAS DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA. 2007-08. Hoja 4

A no ser que se diga lo contrario A será un anillo conmutativo con unidad y $\mathbf{k}$ un cuerpo.

1) Demuestra que, si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de $\mathbf{k}$-álgebras finitamente generadas, entonces la imagen inversa por φ de un ideal maximal es necesariamente maximal. Interpreta geométricamente el resultado.

2) Demuestra que el número real $\alpha = (1 + \sqrt{3})/2$ no es entero sobre $\mathbf{Z}$.

3) Sea A un dominio de factorización única, sea K su cuerpo de fracciones, sea $K \subset L$ una extensión de cuerpos y sea $\alpha \in L$ algebraico sobre K. Demuestra que α es entero sobre A si y sólo si el polinomio mínimo sobre K de α tiene coeficientes en A.

4) Sea $A \subset B$ una extensión entera. Encuentra una relación de dependencia entera sobre A para $f \in B$ en los siguientes casos:

a) $A = \mathbf{k}[X^2]$, $B = \mathbf{k}[X]$ y f es un elemento arbitrario de B.

b) $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{Z}[\tau]$, $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ (la razón áurea) y f es un elemento arbitrario de B.

c) $A = \mathbf{Z}$ y $f = \sqrt{3} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $f = \sqrt{3} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

d) $y, z \in B$ satisfacen relaciones de dependencia entera sobre A, $y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ y $z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0 = 0$ respectivamente y $f = y + z$; $f = y \cdot z$.

5) Sea d un entero libre de cuadrados (i.e., sin factores múltiples). Prueba que la clausura íntegra de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ es $\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ si $d \equiv 1 \pmod 4$ y $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ en caso contrario.

6) Sea $A = \mathbf{k}[X, Y]/(Y^2 - X^3)$.

a) Demuestra que A es isomorfo al subanillo $\mathbf{k}[T^2, T^3]$ de $\mathbf{k}[T]$.

b) Demuestra que A no es un dominio de factorización única (indicación: demuestra que $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ son elementos irreducibles no asociados).

c) Demuestra que A y $\mathbf{k}[T]$ tienen el mismo cuerpo de fracciones, y que la normalización de A es $\mathbf{k}[T]$.

7) Se considera $\mathbf{k}[X, Y]/(Y^2 - X^2 - X^3)$ como subanillo de $\mathbf{k}[T]$ identificando la clase de un polinomio $f(X, Y)$ con $f(T^2 - 1, T^3 - T)$. Demuestra que $\mathbf{k}[X, Y]/(Y^2 - X^2 - X^3)$ y $\mathbf{k}[T]$ tienen el mismo cuerpo de fracciones, y que la normalización de $\mathbf{k}[X, Y]/(Y^2 - X^2 - X^3)$ es $\mathbf{k}[T]$.

8) Halla la normalización de los siguientes anillos:

a) $\mathbf{k}[X, Y]/(X^2Y - XY^2 - (X + Y)^4)$.

b) $\mathbf{k}[X, Y]/(Y^2 - 4X^3 - 6XY - 3X^2 - 4Y)$.

c) $\mathbf{k}[X, Y]/(Y^3 - X^5)$.

d) $\mathbf{k}[X, Y]/(Y^5 - X^{19})$.

9) ([Reid], Ej. 4.6) Sea $A = \mathbf{k}[X]$, $f \in A$ y $B = \mathbf{k}[X, Y]/(Y^2 - f)$.

a) Encuentra la condición necesaria y suficiente que debe cumplir f para que B sea un dominio de integridad.

b) Supongamos que B es un dominio de integridad. Sea K el cuerpo de fracciones de B, es decir, $K = \mathbf{k}(X)(\sqrt{f})$. Para cada $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{f} \in K$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{k}(X))$, encuentra un polinomio $h(T) \in A[T]$ tal que $h(\alpha) = 0$.

c) Si la característica de $\mathbf{k}$ no es 2, demuestra que B es normal si y sólo si f está libre de cuadrados.

d) Si B no es normal, muestra como obtener su normalización en función de f.

e) ¿Puedes extender este resultado a una clase de anillos A mayor?

10) (Demostración alternativa del lema de normalización de Noether). Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo infinito (por ejemplo, sea $\mathbf{k}$ algebraicamente cerrado).

a) Sea $f \in \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_r]$. Demuestra que el complementario de $V(f)$ en $\mathbf{A}^r_{\mathbf{k}}$ es un conjunto no vacío.

b) Sea $\mathbf{k} \subset A$ una extensión de anillos y sean $y_1, \ldots, y_n \in A$ algebraicamente dependientes. Sea $F \in \mathbf{k}[Y_1, \ldots, Y_n]$ tal que $F(y_1, \cdots, y_n) = 0$, sea F_* la forma homogénea de F de mayor grado y sea $f = F_*(Y_1, \ldots, Y_{n-1}, 1) \in \mathbf{k}[Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$. Demuestra que si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}) \in \mathbf{A}^{n-1}_{\mathbf{k}}$ está en el complementario de $V(f)$, los elementos $y_i^* = y_i - \alpha_i y_n$ cumplen lo siguiente:

$\mathbf{k}[y_1, \ldots, y_n] = \mathbf{k}[y_1^*, \ldots, y_{n-1}^*, y_n]$ e y_n es entero sobre $\mathbf{k}[y_1^*, \ldots, y_{n-1}^*]$.

c) Concluye que en el enunciado del lema de normalización de Noether se puede tomar como z_i $(1 \leq i \leq m)$ la suma de y_i y una combinación lineal *general* de $y_{m+1}, \ldots, y_n$.

d) Deduce que si X es una subvariedad algebraica $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ la extensión $\mathbf{k}[z_1, \ldots, z_m] \subset \mathbf{k}[Y_1, \ldots, Y_n]/I(X)$ está inducida por la restricción de una proyección lineal *general* de X a $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$.

11) Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo arbitrario. Consideramos $A = \mathbf{k}[X, Y]/(XY - 1)$. Sea $\epsilon \in \mathbf{k}$, $\epsilon \neq 0$. Sea $X' = X - \epsilon Y$. Demuestra que $\mathbf{k}[X'] \subset A$ es una extensión finita. Interpreta geométricamente este hecho y el hecho de que $\mathbf{k}[X] \subset A$ no sea una extensión finita.

12) ([R], Ej. 4.9). Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo arbitrario y sea $B = \mathbf{k}[X, Y, Z]/(X^2 - Y^3 - 1, XZ - 1)$. Encuentra $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$ tales que B sea entero sobre $A = \mathbf{k}[X + \alpha Y + \beta Z]$ y da para esos α, β un sistema de generadores de B como A–módulo.

13) ([R], Ej. 4.10). Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo finito. Encuentra un ejemplo de $f \in \mathbf{k}[X, Y]$ tal que el anillo $B = \mathbf{k}[X, Y]/(f)$ no está finitamente generado como módulo sobre $A_\alpha = \mathbf{k}[X - \alpha Y]$ para ningún $\alpha \in \mathbf{k}$. Esto prueba que la demostración del lema de normalización de Noether sugerida en el ejercicio 8 no es válida cuando $\mathbf{k}$ es finito.

14) Sea $A \subset B$ una extensión finita de anillos.

a) Sea $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo. Demuestra que existe un ideal primo $\mathfrak{q} \subset B$ tal que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

b) En la situación del apartado a) demuestra que $\mathfrak{p}$ es maximal si y sólo si $\mathfrak{q}$ es maximal.

c) Si $A = \mathbf{k}$ es un cuerpo, demuestra que B posee una cantidad finita de ideales primos.

15) Sea G un grupo finito de automorfismos de un anillo A y sea $A^G = \{a \in A | \sigma(a) = a$ para todo $\sigma \in G\}$ el subanillo de elementos invariantes por G. Demuestra que A es entero sobre A^G.

16) Sea A un dominio integramente cerrado, K su cuerpo de fracciones y L una extensión de K finita, normal y separable. Sea G el grupo de Galois de L sobre K y sea B la clausura íntegra de A en L. Demuestra que $\sigma(B) = B$ para todo $\sigma \in G$ y que $B^G = A$.