PROBLEMAS DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA. 2006-07. Hoja 5

A no ser que se diga lo contrario A será un anillo conmutativo con unidad y $\mathbf{k}$ un cuerpo.

1) Demuestra que para una $\mathbf{k}$–álgebra A finitamente generada las afirmaciones

i) A es una $\mathbf{k}$–álgebra finita

ii) A es un anillo artiniano

son equivalentes, siguiendo estos pasos:

a) i) implica ii) es consecuencia del ejercicio 3.11.

Para demostrar ii) implica i):

b) Demuestra la generalización para un número finito arbitrario de ideales primos dos a dos del resultado demostrado en el ejercicio 1.8.

c) Por 3.14.b sabemos que los ideales maximales de A forman un conjunto finito $\{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s\}$. Usa b), 3.12 y 3.13.b) para demostrar que existe un $k \in \mathbf{N}$ tal que $A \simeq A/\mathfrak{m}_1^k \times \cdots \times A/\mathfrak{m}_s^k$, donde los $A/\mathfrak{m}_i^s$ son además anillos locales artinianos.

d) Demuestra ii) implica i) para un anillo artiniano local $(A, \mathfrak{m})$. (Indicación: considera las sucesiones exactas cortas (de homomorfismos de A–módulos)

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}^{l+1} \longrightarrow \mathfrak{m}^l \longrightarrow \mathfrak{m}^l/\mathfrak{m}^{l+1} \longrightarrow 0$$

para $l \geq 0$ y usa 3.12 y el teorema de los ceros de Hilbert).

e) Deduce de c) y d) que ii) implica i) para anillos artinianos arbitrarios.

f) ¿Es cierto el resultado si A no es una $\mathbf{k}$–álgebra finitamente generada?

2) Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y sea I un ideal de $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$.

a) Demuestra que $V(I)$ es un subconjunto finito de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ si y sólo si $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]/I$ es una $\mathbf{k}$–álgebra finita.

b) ¿Cómo queda el resultado si $\mathbf{k}$ es un cuerpo arbitrario?

3) Sean $X \subset \mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ e $Y \subset \mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ sendas variadades algebraicas, sean $I(X)$ e $I(Y)$ sus ideales respectivos y sean $A(X) = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]/I(X)$ y $A(Y) = \mathbf{k}[Y_1, \dots, Y_m]/I(Y)$ sus anillos de funciones respectivos.

a) Completa la demostración del resultado enunciado en clase que establece la existencia una correspondencia biyectiva entre el conjunto de morfismos entre X e Y y el conjunto de homomorfismos de $\mathbf{k}$-álgebras entre $A(Y)$ y $A(X)$

b) Decide si es cierta la siguiente afirmación: Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de morfismos entre $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ y el conjunto de homomorfismos de $\mathbf{k}$-álgebras entre $\mathbf{k}[Y_1, \dots, Y_m]$ y $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Indicación: distingue los casos $\mathbf{k}$ cuerpo finito y $\mathbf{k}$ cuerpo infinito.

c) Explica por qué la respuesta de b) no contradice la afirmación demostrada en a) Indicación: ¿Cuál es el ideal de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$?

4) Sean X e Y dos variedades algebraicas de $\mathbf{A}^n_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{A}^m_{\mathbf{k}}$ respectivamente. Sea $F : X \longrightarrow Y$ un morfismo y sea $F^\sharp : A(X) \longrightarrow A(Y)$ el homomorfismo inducido por F ($A(X)$ y $A(Y)$ como en 3)).

a) Demuestra que si F es sobreyectivo, $F^\sharp$ es inyectivo. ¿Es cierto el resultado recíproco?

b) Supongamos que $F^\sharp$ es inyectivo y que $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado. Demuestra que si $F^\sharp : A(Y) \longrightarrow A(X)$ es una extensión finita, entonces F es sobreyectivo y sus fibras son finitas (i.e., para cada $y \in Y$, $F^{-1}(y)$ es un conjunto finito). El que $F^\sharp : A(Y) \longrightarrow A(X)$ sea una extensión entera, ¿es una condición necesaria para que F sea sobreyectivo? ¿Y para que F tenga fibras finitas?

5) Encuentra un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset \mathbf{Q}[X,Y]$ que no contenga polinomios de grado uno y tal que $\mathbf{Q}[X,Y]/\mathfrak{m}$ sea isomorfo a cada uno de los siguiente cuerpos:

a) $\mathbf{Q}[T]/(T^4 - 10T^2 + 1)$.

b) $\mathbf{Q}[T]/(T^3 - 2)$.

6) Demuestra las siguientes propiedades de I y V (resp., $\mathcal{I}$ y $\mathcal{V}$) para $\mathbf{A}_k^n$ (resp. para Spec$A$):

a) Si I es un ideal, entonces $V(I) = V(\sqrt{I})$.

b) Para cualquier subconjunto X, $V(I(X))$ es la clausura de X en la topología de Zariski. En particular, si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A$, concluye que $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ es la clausura del punto $\mathfrak{p}$ en la topología de Zariski. ¿Cuáles son los puntos cerrados de Spec$A$?

c) Si $D(f)$ denota el complementario de $V(f)$, entonces los conjuntos de la forma $D(f)$ forman una base de la topología de Zariski.

7) En $\mathrm{Spec}(\mathbf{R}[X,Y]/(Y^2 - X))$, calcula $V(f)$ cuando $f = \overline{X} - a$ (con $a \in \mathbf{R}$) y cuando $f = \overline{X}^2 + 1$. Lo mismo para $\mathrm{Spec}(\mathbf{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1))$.

8) En $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[i])$, calcula $V(p)$ para cada número primo $p \in \mathbf{Z}$.

9) Encuentra un sistema finito de generadores del ideal de las siguientes variedades algebraicas afines:

a) $V(X_1, \dots, X_r) \subset \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^n$

b) $V(X,Z) \cup V(Y,Z) \subset \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^3$

c) $V(X,Z) \cup V(Y, Z-1) \subset \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^3$.

10) ([Reid], ej. 5.2, 5.3). Describe las componentes irreducibles de $V(J) \subset \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^3$ para cada uno de estos ideales $J \subset \mathbf{k}[X,Y,Z]$:

a) $(Y^2 - X^4, X^2 - 2X^3 - X^2Y + 2XY + Y^2 - Y)$;

b) $(XY + YZ + XZ, XYZ)$;

c) $((X-Z)(X-Y)(X-2Z), X^2 - Y^2Z)$.

Encuentra si es posible un elemento $f \in I(V(J))$ con $f \notin J$.

11) ([R], ej. 5.7). Sea $\mathbf{k} \subset K$ una extensión de cuerpos normal y separable con grupo de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{k})$. Sea J un ideal de $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Un *punto con valores en* K de $V(J)$ es un punto $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{A}_K^n$ tal que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todo $f \in J$. Demuestra que dos puntos con valores en K, $(a_1, \dots, a_n)$ y $(b_1, \dots, b_n)$, de $V(J)$ corresponden al mismo ideal maximal de $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ si y sólo si existe un elemento $\sigma \in G$ tal que $(a_1, \dots, a_n) = (\sigma(b_1), \dots, \sigma(b_n))$.

12) Si A es un anillo noetheriano demuestra que un conjunto cerrado $X \subset \mathrm{Spec}A$ es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo.

13) Sea $\varphi : B \longrightarrow A$ un homomorfismo de anillos.

a) Demuestra que la aplicación de Spec$A$ a Spec$B$ que envía cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A$ a $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ está bien definida y es continua para la topología de Zariski.

b) Si A y B son los anillos de funciones de sendas variedades V y W definidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, describe la restricción a V (que es el espectro maximal de A) de la aplicación descrita en a) como una aplicación polinómica entre V y W.