PROBLEMAS DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA. 2007-08. Hoja 6

1) Dado el homomorfismo $\varphi : \mathbf{k}[X,Y] \to \mathbf{k}[X,Y]$ definido por $\varphi(f(X,Y)) = f(XY,Y)$, calcula la imagen de la aplicación $\varphi^* : \mathrm{Spec}(\mathbf{k}[X,Y]) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{k}[X,Y])$.

2) Sean B y C anillos y sea $A = B \times C$ su producto cartesiano equipado con la estructura de anillo natural. Demuestra que B y C son anillos de fracciones de A.

3) Sea $A = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ y sea $I = (2, 1+\sqrt{-5})$. Demuestra que:

a) I es un ideal primo.

b) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo que no contiene a 2, entonces $I_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}$.

c) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo que contiene a 2, entonces $\mathfrak{p} = I$ y se tiene $I_\mathfrak{p} = (1+\sqrt{-5})A_\mathfrak{p}$.

d) Para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de A se tiene que $I_\mathfrak{p}$ y $A_\mathfrak{p}$ son isomorfos, pero I y A no son isomorfos como A-módulos.

4) Encuentra un generador del ideal maximal de la localización en $(\bar{X}-1, \bar{Y}-1, \bar{Z}-1)$ del anillo $\mathbf{k}[X,Y,Z]/(X^3 - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - X^2Y)$. ¿Existe un solo generador para el maximal de la localización en (X,Y,Z)?

5) Demuestra que existe un monomorfismo natural $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]_\mathfrak{p} \to \mathbf{k}[[X_1, \dots, X_n]]$, donde $\mathfrak{p} = (X_1, \dots, X_n)$.

6) Sea $f \in A$.

a) Consideramos el conjunto multiplicativo $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. Demuestra que $\mathrm{Spec}(A_f) \subset \mathrm{Spec}A$ es el complementario del conjunto cerrado $\mathfrak{V}(f)$.

b) Sea A el anillo de funciones de una variedad $V \subset \mathbf{A}^n_\mathbf{k}$ (i.e., $A = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]/I(V)$) y $f \in A$. Demuestra que A_f es isomorfo al anillo coordenado de una variedad $V_f \subset \mathbf{A}^{n+1}_\mathbf{k}$ que está de forma natural en correspondencia biyectiva con $V \setminus V(f)$.

7) Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $A = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ y sea $V = V(\mathfrak{p})$. Demuestra que $f/g \in \mathbf{A}_\mathfrak{p}$ da una función bien definida en una abierto de Zariski U de $\mathbf{A}^n_\mathbf{k}$ que corta a V en un abierto denso de $U \cap V$. Demuestra que la clase de f/g en $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ induce una función bien definida en $U \cap V$.

8) Sea M un módulo sobre un anillo A, sea $S \subset A$ un conjunto multiplicativamente cerrado y sean L_1 y L_2 dos submódulos de M. Demuestra que $S^{-1}(L_1 \cap L_2) = S^{-1}L_1 \cap S^{-1}L_2$.

9) Sean M y N módulos sobre A y sea $\Phi : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de A–módulos. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Φ es inyectivo;

ii) $\Phi_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \longrightarrow N_\mathfrak{p}$ es inyectivo para todo $\mathfrak{p}$ ideal primo de A;

iii) $\Phi_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \longrightarrow N_\mathfrak{m}$ es inyectivo para todo $\mathfrak{m}$ ideal maximal de A.

10) Demuestra para la sobreyectividad de homomorfismos un resultado análogo al enunciado en el ejercicio 9.

11) Sea A un dominio de integridad. Demuestra que A es normal si y sólo si $A_\mathfrak{p}$ es normal para todo $\mathfrak{p}$ ideal primo, si y sólo si $A_\mathfrak{m}$ es normal para todo $\mathfrak{m}$ ideal maximal. (Indicación: considera la inclusión de A es su clausura íntegra).

12) Sea S un conjunto multiplicativamente cerrado de A y sea I un ideal de A. Demuestra que $S^{-1}\sqrt{I} = \sqrt{S^{-1}I}$, es decir, que la operación S^{-1} conmuta con calcular el radical.