PROBLEMAS DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA. 2007-08. Hoja 7

A no ser que se diga lo contrario A será un anillo conmutativo con unidad y $\mathbf{k}$ un cuerpo.

1) Demuestra que (Y, X^2) es un ideal irreducible de $\mathbf{k}[X, Y]$.

2) Demuestra que $(Y, Z) \cap (X, Z) \cap (X - aZ, Y - bZ, Z^2)$ es una descomposición primaria minimal de (Z^2, XZ, YZ, XY) en $\mathbf{k}[X, Y, Z]$, para cualesquiera valores $a, b \in \mathbf{k}$.

3) Encuentra una descomposición primaria minimal del ideal $(XY + XZ + YZ, XYZ)$ de $\mathbf{k}[X, Y, Z]$. ¿Es la descomposición minimal encontrada única?

4) Demuestra que si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos y $\mathfrak{q} \subset B$ es un ideal $\mathfrak{p}$–primario, entonces $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ es un ideal $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$–primario.

5) Consideramos el ideal $I = (Y^2 - X^3, X^4 - YZ)$ de $\mathbf{k}[X, Y, Z]$.

a) Encuentra una descomposición primaria minimal de I.

b) ¿Es la descomposición minimal encontrada única?

(Una posible indicación: haz descomposión primaria en $\mathbf{k}[X, Y]/(Y^2 - X^3)$).

6) Encuentra, para cada $t \in \mathbf{k}$, la descomposición primaria en $\mathbf{k}[X, Y]/(Y - X^2)$ del ideal generado por la clase de $Y - t$, donde $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$.

7) Encuentra la descomposición primaria en $\mathbf{Z}[i]$, $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ y $\mathbf{Z}[\sqrt{7}]$ de los ideales generados por 2, 3, 5, 7 y 11.

8) Encuentra una descomposición primaria del ideal $(X^2 + Y^2 + 1, X^2 + 2XY - Y^2 + 1)$ en $\mathbf{R}[X, Y]$ y $\mathbf{Q}[X, Y]$.

9) Sea A un anillo y S un conjunto multiplicativamente cerrado.

a) Si $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario de A, demuestra que $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ si y sólo si $S \cap \mathfrak{q} = \emptyset$.

b) En las mismas condiciones, demuestra que $\frac{f}{s} \in S^{-1}\mathfrak{q}$ si y sólo si $f \in \mathfrak{q}$.

c) De nuevo en las mismas condiciones, demuestra que $S^{-1}\mathfrak{q}$ es $S^{-1}\mathfrak{p}$-primario.

d) De nuevo en las mismas condiciones, demuestra que si $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$ es el homomorfismo natural de A al anillo de fracciones, entonces $\varphi^{-1}(S^{-1}\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$.

e) Concluye que existe una biyección entre los ideales primarios de A que no cortan a S y los ideales primarios de $S^{-1}A$.

10) ([Reid], teorema 7.6) Sea A anillo noetheriano y sea M un módulo finitamente generado sobre A. Demuestra que el conjunto de primos asociados de M es finito de la siguiente forma:

a) Demuestra que existe una cadena de submódulos

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

tal que M_i/M_{i+1} es isomorfo a $A/\mathfrak{p}_i$, siendo $\mathfrak{p}_i$ un ideal primo de A.

b) Concluye que $\mathrm{Ass}M \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.

(Observación: si I es un ideal de A y $M = A/I$, ya sabíamos que M tiene un número finito de primos asociados, pues eso se sigue de la existencia de descomposición primaria y del primer teorema de unicidad).

11) ([R], ejer. 7.8 y 7.9) Sea $A = \mathbf{k}[X, Y, Z]$ y sea $I = (XY, X - YZ)$.

a) Encuentra una descomposición primaria de I y los primos asociados de A/I. (Indicación: Usa el hecho de que $\mathbf{k}[X, Y, Z]/(X - YZ)$ es isomorfo a $\mathbf{k}[Y, Z]$ y utiliza el ejercicio 4).

b) Para cada primo $\mathfrak{p}$ asociado de A/I, encuentra $\overline{a} \in A/I$ tal que $\mathrm{ann}\overline{a} = \mathfrak{p}$.

12) ([R], ejemplo 7.10.2 y ejer. 7.10) Sea $A = \mathbf{k}[X, Y, Z]/(XZ - Y^2)$, sea $I = (\overline{X}, \overline{Y}) \subset A$ y sea $M = A/I^2$.

a) Demuestra que $I^2 = (\overline{x}) \cap (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})^2$ y que es una descomposición primaria irredundante de I^2.

b) Encuentra los primos asociados de M.

c) Para cada $\mathfrak{p}$ primo asociado de M encuentra un elemento $m \in M$ tal que $\mathrm{ann}m = \mathfrak{p}$.

d) Encuentra una cadena de submódulos como la del ejercicio 10.