VARIABLE COMPLEJA. HOJA N. 1

1.- Demostrar que las raíces n-ésimas de la unidad son $\alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^n$ donde $\alpha = e^{2\pi i/n}$. Pobar que las raíces $\neq 1$ satisfacen la ecuación $1 + x + \cdots + x^{n-1} = 0$.

2.- Demostrar que la suma y el producto de todas las raíces de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0,\ a_0 \neq 0$, son $-\frac{a_1}{a_0}$ y $(-1)^n \frac{a_n}{a_0}$, respectivamente.

3.- Probar que: (a) $cos\frac{2\pi}{n} + cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$;
(b) $sen\frac{2\pi}{n} + sen\frac{4\pi}{n} + \cdots + sen\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0,\ n = 2, 3, \cdots$.

4.- Resolver las ecs.:(a) $z^4 + 81 = 0$: (b) $z^6 + 1 = i\sqrt{3}$.

5.- (i) Hallar las raíces cúbicas de $-11 - 2i$.
(ii) Hallar todas las raíces de $(1 + z)^5 = (1 - z)^5$

6.- Probar que si f, g son derivables en $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$, entonces $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$ (Regla de L'Hôpital).

7.- En cada uno de los siguientes casos escribir la parte real e imaginaria de la función y su derivada, si existe: (a) $senz$; (b) $|z|$; (c) $\overline{z}$: (d) $Arg(z)$; (e) $Log(z)$; (f) valor principal de $z^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}$.

8.- Halla: (i) $\lim_{z\to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$; (ii) $\lim_{z\to 0} \frac{1-cosz}{z^2}$; (iii) $\lim_{z\to 0} \frac{1-cosz}{senz^2}$; (iv) $\lim_{z\to 0}(cosz)^{1/z^2}$; (v) $\lim_{z\to 0}(\frac{senz}{z})^{1/z^2}$.

9.- Sea la transformación $w = Logz$. Halla la imagen de:
(a) Círculos centrados en el origen; (b) Rectas que pasan por el origen; (c) Todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

10.- (a) Si $z = re^{i\theta}$, probar que $z^i = e^{-(\theta+2k\pi)}(cos(Lr) + i \cdot sen(Lr))$, $k \in \mathbb{Z}$. (b) Si $z \in S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, probar que z^i representa infinitos números reales. (c) Hallar el valor principal de i^i.

11.- Estudiar la convergencia de las series: (a) $\sum_{n\geq 1} nz^n$; (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$; (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$; (d) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$; (e) $\sum_{n\geq 0}(1 + (-1)^n)^n \cdot z^n$; (f) $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$; (g) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{3^n+1}$; (h) $\sum_{n\geq 1} \frac{(z-i)^{2n}}{n^2}$; (i) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)z^n}$.

12.- Resolver las ecs.: (a) $e^z = 1 + i$; (b) $3cosz = 5$;(c) $senz = i$; (d) $e^z = 2 - cosiz$; (e) $z^5 = e^{i\pi/3}$; (f) $Log(\frac{1+i}{\sqrt{2}}) = 2z$.

13.- Desarrollar en serie de potencias de $(z - z_0)$ las siguientes funciones: (a) $f(z) = \frac{1}{1+z}$ para $z_0 = 0$ y $z_0 = 1$; (b) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2},\ z_0 = 0$; (c) $f(z) = Log(\frac{1+z}{1-z}),\ z_0 = 0$.

14.- Hallar los dominios de analiticidad de las siguientes funciones calculando sus derivadas: (a) $e^{1/z}$; (b) $\frac{1}{(1-senz)^2}$; (c) $\frac{e^{az}}{a^2+z^2},\ a \in \mathbb{R}$; (d) $\frac{senz}{z}$; (e) $exp(\frac{1}{1-az}),\ a \in \mathbb{C}$.

15.- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ región y $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ tq $|f^2(z) - 1| < 1,\ \forall z \in \Omega$. Probar que $Re(f(z)) > 0$ ó $Re(f(z)) < 0$ en Ω.

16.- Sea $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$. Prueba que u es armónica y halla su conjugada.

17.- Calcular $\int_\gamma f(z) \cdot dz$ en los siguientes casos:

(a) $f(z) = \overline{z}$ para $\gamma = \{|z| = R\}$ y $\gamma = \partial([-R, R]^2)$.

(b) $f(z) = |z|$ para $\gamma = \{|z| = 1 : 0 \leq Argz \leq \pi\}$ y $\gamma = \{|z| = R\}$.

(c) $f(z) = z^2$ para $\gamma = [1 + i, 2]$.

(d) $f(z) = (z - a)^m$ siendo $a \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{Z}$, para $\gamma = \{|z - a| = R\}$ y $\gamma = \{|z - a| = R : 0 \leq Argz \leq \pi\}$.

(e) $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z^2+4)},\ \Gamma = \{|z| = R\},\ R \neq 2$.

(f) $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2+z},\ \gamma = \{|z + 1| = 1/2\}$. (g) $f(z) = \frac{cosz\pi}{|z-2|^2},\ \gamma = \{|z| = 1\}$.

18.- Demostrar que: (a) $|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}| \leq \pi/3$, donde $\gamma = \{|z| = 2 : 0 \leq Argz \leq \pi/2\}$. (b) $|\int_\gamma \frac{e^z dz}{z}| \leq \pi e$, donde $\gamma = \{|z| = 1 : 0 \leq Argz \leq \pi\}$.

(c) $|\int_\gamma \frac{e^{iz}dz}{z}| \leq \frac{1-e^{-R}}{R}$, donde $\gamma = [R, R + iR],\ R > 0$.

(d) $|\int_\gamma \frac{e^{iz}dz}{z}| \leq 2\frac{e^R-1}{R} + 2e^R$ para $R > 0$ y:

$$\gamma = [R, R - iR] \cup [R - iR, -R - iR] \cup [-R - iR, -R].$$

(e) $|\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}| \leq \begin{cases} \pi\frac{R}{R^2-1}, & R > 1 \\ \pi\frac{R}{1-R^2}, & 0 < R < 1 \end{cases}$ donde $\gamma = \{|z| = R : 0 \leq Argz \leq \pi\}$.

(f) $|\int_\gamma \frac{1-e^{2iz}}{z^2(1+z^2)}dz| \leq \frac{2\pi}{R(R^2-1)}$ siendo $R > 1$ y $\gamma = \{|z| = R : 0 \leq Argz \leq \pi\}$.

VARIABLE COMPLEJA. HOJA N. 2

19.- Sea P un polinomio de grado m que no se anula en $\{|z| \geq R\}$. Calcular $\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}dz$ siendo $\gamma = \{|z| = R\}$ recorrido en sentido positivo.

20.- Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y γ un camino cerrado de Ω. Probar que para todo $z_0 \notin \gamma^*$ se verifica:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}.$$

21.- Probar que no existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ tq $f'(z) = \frac{1}{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Concluir que en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ no se puede definir una determinación analítica del logaritmo.

22.- Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \neq 1$. Calcular $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2\alpha\cdot cos\theta+\alpha^2}$.

23.- Si $C(z_0; r)$ es la circunferencia de centro z_0 y radio r orientada positivamente, probar que:

$$(a) \int_{C(0;4)} \frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}dz = 6\pi i \ ; (b) \int_{C(0;2)} \frac{2z}{z^2+1}dz = 4\pi i;$$
$$(c) \int_{C(0;2)} \frac{z^3}{z^4-1}dz = 2\pi i; (d) \int_{C(2;1)} \frac{e^z}{(z-2)^2}dz = 2\pi i \cdot e^2.$$

24.- Desarrolla en serie de Taylor: (a) e^z en $z_0 = i$; (b) z^{-2} en $z_0 = 1$; (c) $sen^2 z$ en $z_0 = 0$.

25.- Calcula los primeros términos del desarrollo de Taylor de: (a) $\frac{senz}{z}$ en $z_0 = 1$; (b) $e^z \cdot senz$ en $z_0 = 0$;(c) tgz en $z_0 = 0$; (d) $\sqrt{z^2-1}$ en $z_0 = 0$; (e) $\frac{e^z}{1-z}$ en $z_0 = 0$.

26.- Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tq $|f(z)| \geq 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Prueba que f es constante.

27.- Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ una región y $f \in \mathcal{H}(\mathcal{D})$ tal que f no es constante y no tiene ceros en $\mathcal{D}$. Prueba que $|f|$ no tiene mínimos locales en $\mathcal{D}$. ¿Qué ocurre si f tiene algún cero en $\mathcal{D}$?

28.- (a) Sea $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $f \in \mathcal{H}(D)$ tq $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$, $\forall z \in D$. Prueba que $|f'(0)| \leq 1$ y que $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in D$.

(b) Sea $g \in \mathcal{H}(D)$ tq $|g(z)| = |z|$, $\forall z \in D$. Prueba que existe $t \in \mathbb{R}$ tq $g(z) = ze^{it}$, $\forall z \in D$.

29.- Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tq existe $0 < \alpha < 1$ verificando $|f(z)| \leq 1 + |z|^\alpha$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Prueba que f es constante en $\mathbb{C}$.

30.- ¿Cómo son las funciones $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ que satisfacen $|f(z)| \leq M \cdot |z|^\alpha$, $\forall z \in \mathbb{C}$, para ciertas constantes $M, \alpha > 0$?

31.- Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tq $\exists \alpha \in \mathbb{C}, \exists \epsilon > 0$, verificando $|f(z) - \alpha| > \epsilon$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Prueba que f es constante. Concluir que la imagen de $\mathbb{C}$ por una función entera no constante es densa en $\mathbb{C}$.

32.- Prueba que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$, entonces f es constante.

33.- Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ tq $\lim_{z\to 0} zf(z) = 1$ y $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$. Prueba que $f(z) = \frac{z+1}{z}$.

34.- Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tq $|f'(z)| \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Prueba que $\exists a, b \in \mathbb{C}$, $|b| \leq 1/2$, tq $f(z) = a + bz^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

35.- Sea $\Omega = \overset{\circ}{B}(0;2)$. ¿Existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $f(1/n) = -1/n^2$ y $f(\frac{n+1}{n}) = 1/n, \forall n \geq 2$?

36.- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ región tq $\overline{D} \subset \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Prueba lo siguiente:

(1) Si f no es constante en Ω, pero $|f|$ es constante en ∂D, entonces f tiene, al menos, un cero en D.
(2) Si f es imaginaria en ∂D, entonces f es constante en Ω.
(3) Si f es real en ∂D, entonces f es constante en Ω.

37.- Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f_n \to f : \Omega \to \mathbb{C}$ uniformemente sobre compactos de Ω. Prueba que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y que $f_n' \to f'$ uniformemente sobre compactos de Ω.

38.- Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $\{f_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f_n \to f : \Omega \to \mathbb{C}$ uniformemente sobre compactos de Ω y que $\mathcal{Z}(f_n) = \emptyset$, $\forall n \geq 1$. Prueba que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y que ó bien $f = 0$ en Ω ó bien $\mathcal{Z}(f) = \emptyset$.

39.- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ región, $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$. Prueba que las curvas $u(x,y) = c_1$, $v(x,y) = c_2$, c_1, c_2 constantes, son ortogonales en los puntos regulares de f, es decir, en los puntos $z \in \Omega$ tales que $f'(z) \neq 0$.

VARIABLE COMPLEJA. HOJA N. 3

40.- Halla el desarrollo de Laurent de las siguientes funciones: (a) $\frac{z+1}{z}$ en $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$; (b) $\frac{z}{z^2+1}$ en $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 2\}$; (c) $sen\frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; (d) $\frac{1}{z(z+1)}$ en $\{0 < |z+1| < 1\}$, en $\{1 < |z|\}$ y en $\{0 < |z| < 1\}$; (e) $\frac{z}{z+1}$ en $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$; (f) $\frac{e^z}{z^2}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; (g) $[z(z-1)(z-2)]^{-1}$ en $\{0 < |z| < 1\}$ y en $\{1 < |z| < 2\}$.

41.- Determina los primeros términos del desarrollo de Laurent de $(e^z-1)^{-1}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

42.- Discutir las singularidades calculando residuos en los siguientes casos: (a) $\frac{cosz}{z^2}$; (b) $\frac{e^z-1}{z^2}$; (c) $\frac{z+1}{z-1}$; (d) $\frac{senz}{z}$; (e) $\frac{e^z}{z}$; (f) $\frac{(e^z-1)^2}{z^2}$; (g) $sen\frac{1}{z}$; (h) $\frac{1}{z(z+1)}$; (i) $\frac{z}{z+1}$; (j) $\frac{e^z}{z^2}$; (k) $\frac{cos(z-1)}{z^2}$; (l) $\frac{z}{z-1}$; (m) $\frac{1}{z^2-1}$; (n) $\frac{e^z-1}{z}$; (ñ) $(cos\frac{1}{z})^{-1}$; (o) $\frac{e^z(z-3)}{(z-1)(z-5)}$; (p) $\frac{cosz}{1-z}$.

43.- Calcular los residuos de las siguientes funciones en los puntos indicados: (a) $\frac{e^{z^2}}{z-1}$, $z_0 = 1$; (b) $\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$, $z_0 = 0$; (c) $[\frac{cosz-1}{z}]^2$, $z_0 = 0$; (d) $\frac{z^2}{z^4-1}$, $z_0 = e^{i\pi/2}$; (e) $\frac{e^z-1}{senz}$, $z_0 = 0$; (f) $\frac{1}{e^z-1}$, $z_0 = 0$; (g) $\frac{z+2}{z^2-2z}$, $z_0 = 0$; (h) $\frac{1+e^z}{z^4}$, $z_0 = 0$; (i) $\frac{e^z}{(z^2-1)^2}$, $z_0 = 1$.

44.- Estudiar los puntos singulares, calculando residuos, de las siguientes funciones: (a) $\frac{1}{e^z-1}$; (b) $\frac{1}{z^3(z+4)}$; (c) $\frac{1}{z^2+2z+1}$; (d) $\frac{1}{z^3-3}$; (e) $\frac{e^z}{z(1-z)^3}$.

45.- Calcula $\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz$, donde γ es la elipse $\gamma(t) = acost + ibsent$, $a, b > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

46.- Elegir una rama de $\sqrt{z^2-1}$ que sea analítica en $\mathbb{C} \setminus \{[-1,1]\}$. Calcular $\int_\gamma \sqrt{z^2-1} \cdot dz$ donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

47.- Calcular:

(a) $\int_\gamma \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1} dz$ donde $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $n < r^3 < n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^4}$ donde γ es la elipse $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$ orientada positivamente.

48.- Calcular las siguientes integrales por el método de los residuos:

$$(a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{senx}{x^2-2x+2}dx\ ;\ (b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cosax}{x^2+b^2}dx,\ a,b>0;$$

$$(c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^3x}{x^3}dx; (d)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen^2x}{x^2(1+x^2)}dx; (e)\ \int_{0}^{\infty} \frac{cos(\frac{\pi x}{2})}{x^2-1}dx;$$

$$(f)\ \int_{0}^{\infty} \frac{x\cdot senx}{x^2+1}dx; (g)\ \int_{0}^{\infty} \frac{senx}{x}dx; (h)\ \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1+x)},\ 0<\alpha<1;$$

$$(i)\ \int_{0}^{\infty} \frac{logx}{(1+x)^3}dx\ ; (j)\ \int_{0}^{\infty} \frac{logx}{x^2-1}dx\ ; (k)\ \int_{0}^{\infty} \frac{log(x^2+1)}{x^2+1}dx.$$

49.- Sea $f \in \mathcal{H}(D)$. Prueba que $\overline{f}(\overline{z}) =: g(z) \in \mathcal{H}(D)$.

50.- Prueba que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{sennz}{n^2}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ pero diverge en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

51.- Probar que el Teorema del Valor Medio (TVM) no es válido para $h:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ tq $h(t)=cost+isent$.

52.- ¿En dónde es holomorfa $f(z)=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3z}$?

53.- Hallar una función holomorfa f tq $2\pi i = \int_{C(0;1/2)} \frac{f(z)}{z^n}dz,\ \forall n\geq 1$.

54.- (a) Halla $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tq $f(z)=f(2z),\ \forall z\in\mathbb{C}$; (b) Halla $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tq $f'(z)=f(z),\ \forall z\in\mathbb{C}$.

55.- Sea $f \in \mathcal{H}(D)$ tq $f(\frac{1}{n+1})\in\mathbb{R}$. Prueba que $f(\overline{z})=\overline{f}(z),\ \forall z\in D$.

56.- Sean $U\subset\mathbb{C}$ región, $\overline{D}\subset U$ y $f\in\mathcal{H}(U)$ tq $|f(z)|=1,\ \forall z\in\partial D$. Probar que si f no es constante, f tiene en D una cantidad finita no vacía de ceros.

57.- Estudia las singularidades, calculando residuos, de $f(z)=tg\pi z$ en $\mathbb{C}$. ¿Es f meromorfa en $\mathbb{C}$?

VARIABLE COMPLEJA. HOJA N. 4

1.- Sea $r > 0$. Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, todos los ceros de la función

$$f_n(z) := 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + ... + \frac{1}{n!z^n}$$

están dentro del círculo $|z| < r$.

2.- Sea $0 < r < 1$. Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, la función

$$f_n(z) := 1 + 2z + 3z^2 + ... + nz^{n-1}$$

no tiene ceros dentro del círculo $|z| < r$.

3.- ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $z^4 - 5z + 1 = 0$ dentro del círculo $|z| < 1$? ¿Y dentro del anillo $1 < |z| < 2$?

4.- Hallar el nº de raíces de $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ en D.

5.- Probar el T. Fundamental del Álgebra: (i) a partir del Ppio. del Argumento; (ii) a partir del T. de Rouché.

6.- Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $\overline{D} \subset U$ y $f \in \mathcal{H}(U)$ tq $|f(z)| < 1$, $\forall z \in \partial D$. Hallar el nº. de soluciones de $f(z) = z^n$ en D.

7.- Probar que no existe un polinomio $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, $n \geq 1$, tq $|p(z)| < 1$, $\forall |z| = 1$.

8.- Sea $\lambda > 1$. Prueba que la ec. $\lambda - z - e^{-z} = 0$ tiene exactamente una solución en el semiplano $\{Rez > 0\}$ y además esta solución es real. ¿Qué le ocurre a la solución si $\lambda \to 1$?

9.- Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathcal{H}(U)$ inyectiva. Probar que $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.

10.- Sean Ω, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ abiertos y $\Omega \xrightarrow{f} \Omega_1 \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ tq $f(\Omega) = \Omega_1$, $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ y $g \circ f(z) = z$, $\forall z \in \Omega$. Probar que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g'(f(z)) \neq 0$ y $f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}$, $\forall z \in \Omega$.

11.- Hallar $T(A)$ en los siguientes casos: (a) $T(z) = \frac{i}{z}$, $A = D(0; r)$; (b) $T(z) = \frac{1}{z}$, $A = \{z : Rez > 0\}$; (c) $T(z) = \frac{z+i}{z-i}$, $A = \{z : Rez > 0, Imz > 0\}$; (d) $T(z) = \frac{z}{z-i}$, $A = \{z : 0 \leq Argz \leq \frac{\pi}{4}\}$.

12.- Sean $G \subset \mathbb{C}$ región acotada y $f \in C(\overline{G}) \cap \mathcal{H}(G)$ tq $|f|_{|\partial G} = c$. Prueba que f es constante en G ó f tiene un cero en G.

13.- Sean $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ no constante y $c > 0$. Prueba que $\overline{\{z : |f(z)| < c\}} = \{z : |f(z)| \leq c\}$.

14.- Sean p polinomio de grado ≥ 1 y $c > 0$. Probar que p tiene un cero en cada componente conexa de $\{z : |p(z)| < c\}$.

15.- Sean $0 < r < R$ y $A = \{z : r \leq |z| \leq R\}$. Probar que existe $\epsilon > 0$ tq para todo polinomio p se tiene que $\sup\{|\frac{1}{z} - p(z)| : z \in A\} \geq \epsilon$.

16.- (T. de las tres circunferencias de Hadamard) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ tq $\{z : r_1 \leq |z| \leq r_2\} \subset \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ para $r_1 \leq r \leq r_2$. Probar que se verifica:

$$M(r) \leq M(r_1)^{\frac{Lr_2 - Lr}{Lr_2 - Lr_1}} \cdot M(r_2)^{\frac{Lr - Lr_1}{Lr_2 - Lr_1}}$$

17.- Sean $0 < R < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ región, $B(0; R) \subset \Omega$ y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $|f(z)| = |g(z)|$, $\forall |z| = R$ y $|f(z)| \neq 0 \neq |g(z)|$, $\forall z \in B(0; R)$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $f = \lambda g$.

18.- Sean $0 < R < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ región, $B(0; R) \subset \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $A(r) = \sup\{Ref(z) : |z| = r\}$, $0 \leq r \leq R$. Probar que, si f no es constante, $A(r)$ es estrictamente creciente.

19.- (a) Hallar la transformación de Möbius T en los siguientes casos: (i) T lleva $0, i, 1-i$ en $-1, 0, i$;(ii) $T(D(1; 1)) = D(0; 1)$ y $T(1 + \frac{i}{2}) = 0$; (iii) $T(C(0; 2)) = \mathbb{R}$ y $T(0) = -i$.

(b) Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ transforma el eje real en sí mismo, demostrar que podemos suponer que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(c) Sean $H = \{z : Imz > 0\}$, $z_0 \in H$ y $\varphi_{z_0} : H \to D$ tq $\varphi_{z_0}(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$. Probar que $\varphi_{z_0} \in \mathcal{H}(H)$ y es biyectiva de H sobre D.

(d) Demostrar que todas las transformaciones de Möbius que aplican el semiplano superior sobre D son de la forma $T(z) = \lambda \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$ con $Imz_0 > 0$, $|\lambda| = 1$, $z_0 = T^{-1}(0)$.

(e) Hallar la forma general de una transformación T de Möbius tq $T(\partial D) = \partial D$.

VARIABLE COMPLEJA. HOJA N. 5

1.- Hallar un automorfismo f de D verificando: (a) $f(0)=0,\ f(\frac{1}{2})=\frac{i}{2}$; (b) $f(0)=0,\ f(\frac{1}{3})=\frac{1}{4}$; (c) $f(0)=\frac{1}{2},\ f'(0)=\frac{3}{4}$.

2.- Demostrar que el único automorfismo f de D con $f(0)=0$ y $f'(0)>0$ es la identidad.

3.- Demostrar que el único automorfismo de D con dos puntos fijos es la identidad.

4.- Sea $T(z)=\frac{1}{z}$. Probar que:

(1) $T(C(0;r))=C(0;\frac{1}{r})$.
(2) T transforma circunferencias que no pasan por el origen en circunferencias que no pasan por el origen.
(3) T transforma circunferencias que pasan por el origen en rectas que no pasan por el origen.
(4) T transforma rectas que no pasan por el origen en circunferencias que pasan por origen.
(5) T transforma rectas que pasan por el origen en rectas que pasan por el origen.

5.- Probar que si $|a|<1>|b|$ entonces:

$$\frac{|a|-|b|}{1-|ab|}\leq\left|\frac{a+b}{1+a\bar{b}}\right|\leq\frac{|a|+|b|}{1+|ab|}.$$

6.- Sea $f\in\mathcal{H}(D)$ tq $|f(z)|\leq 1,\ \forall z\in D$. Probar que:

$$\frac{|f(0)|-|z|}{1-|f(0)z|}\leq|f(z)|\leq\frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)z|}.$$

7.- ¿Existe una función holomorfa $f:D\to D$ tq $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$ y $f'(\frac{1}{2})=\frac{2}{3}$?

8.- Sea $f\in\mathcal{H}(D)$ tq $Ref(z)\geq 0,\ \forall z\in D$. Si f no es constante, probar que:

(1) $Ref(z)>0,\ \forall z\in D$.
(2) Usando una transformación de Möbius adecuada y el Lema de Schwarz probar que $\forall z\in D$: $\frac{1-|z|}{1+|z|}|f(0)|\leq|f(z)|\leq\frac{1+|z|}{1-|z|}|f(0)|$.

9.- (Des. de Caratheodory) Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto, $0 < R < \infty$, $B(0;R) \subset G$ y $f \in \mathcal{H}(G)$. Denotemos para $0 \leq r \leq R$:

$$M(r) = max\{|f(z)| : |z| = r\},\ A(r) = max\{|Ref(z)| : |z| = r\}.$$

Probar que para $0 \leq r < R$ se tiene: $M(r) \leq \frac{R+r}{R-r}(A(R) + |f(0)|)$.

10.- Sean $f \in \mathcal{H}(D)$ con $|f(z)| \leq 1,\ \forall z \in D$, y $z_k \in D, k = 1, 2, ..., n$, (parte de las) raíces de f, pudiendo estar repetida una raíz un número de veces $\leq$ a su multiplicidad. Probar que:

$$|f(z)| \leq \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z} \right|,\ \forall z \in D.$$

11.- Sea $f \in \mathcal{H}(D)$ tq :(i) $|f(z)| \leq 1,\ \forall z \in D$; (ii) $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathcal{Z}(f) \cap (D \setminus \{0\})$, pudiendo estar las raíces z_i repetidas un número de veces $\leq$ que su multiplicidad; (iii) $f(0) = e^{ia} z_1 z_2 \cdots z_n$. Hallar una expresión para f.

12.- Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ región, $B(0;1) \subset \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $|f(z)| = 1,\ \forall |z| = 1$. Hallar una expresión para f.

13.- Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ región, $B(0;1) \subset \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $|f(z)| = 1,\ \forall |z| = 1$. Supongamos que: (i) $f(0) = 128^{-1/2}$; (ii) los ceros de f en D son: $\frac{1}{4}(1 + i)$ (simple), $\frac{1}{2}$ (doble). Hallar f.

14.- ¿Existe una función $f \in \mathcal{H}(D)$ tq $|f(z)| < 1,\ \forall z \in D,\ f(0) = \frac{1}{2}$ y $f'(0) = \frac{3}{4}$? Si existe, hallarla. ¿Es única?

15.- Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto, $\{z_n\}_{n \geq 0} \subset G$ tq $z_n \to z_0$, E em completo y $\{f_n\}_{n \geq 0} \subset C(G, E)$ tq $f_n \xrightarrow{\rho} f_0$. Probar que $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$.

16.- (T. de Dini) Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto y $\{f_n\}_{n \geq 0} \subset C(G, \mathbb{R})$ tq, $\forall z \in G, f_n(z) \uparrow f_0(z)$ y $f_n(z) \leq f_{n+1}(z),\ n \geq 1$. Probar que $f_n \xrightarrow{\rho} f_0$.

17.- Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto, E em completo y $\{f_n\}_{n \geq 0} \subset C(G, E)$ familia equicontinua tq $f_n(z) \to f_0(z),\ \forall z \in G$. Probar que $f_n \xrightarrow{\rho} f_0$.

18.- (a) Sean $0 < R < \infty$ y $f \in \mathcal{H}(D(0;R))$ tq $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,\ |z| < R$. Si $f_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, probar que $f_n \xrightarrow{\rho} f$ en $C(D(0;R); \mathbb{C})$.

(b) Sea $G = An(0;0;R)$ y $f \in \mathcal{H}(G)$ con desarrollo de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$. Sea $f_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$. Probar que $f_n \xrightarrow{\rho} f$ en $C(G; \mathbb{C})$.

VARIABLE COMPLEJA. HOJA N. 6

1.- Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$. Probar que son equivalentes: (1) $\mathcal{F}$ es normal; (2) existe $\{M_n\}_{n\geq 0}$ sucesión de constantes positivas tq $\overline{\lim}\sqrt[n]{M_n} \leq 1$ y si $f \in \mathcal{F},\ f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, entonces $|a_n| \leq M_n,\ \forall n \geq 0$.

2.- Sean $G \subset \mathbb{C}$ región y $\{f_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{H}(G)$ tq: (i) cada $f_n,\ n \geq 1$, es inyectiva; (ii) $f_n \xrightarrow{\rho} f_0$. Probar que f_0 es constante ó f_0 es inyectiva.

3.- Sean $G \subset \mathbb{C}$ región y $\{f_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{H}(G)$ tq f_0 no es constante y $f_n \xrightarrow{\rho} f_0$. Sean $a \in G$ y $\alpha := f_0(a)$. Probar que existe $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset G$ tq: (i) $a_n \to a$; (ii) $f_n(a_n) = \alpha,\ \forall n \geq n_0$, para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$.

4.- Probar que $\lim_{n\to\infty} tg(nz) = +i$ uniformemente sobre compactos $K \subset \{z : Imz > 0\}$.

5.- (a) Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto, $a \in G, 0 < R < \infty,\ B(a;R) \subset G$ y $f \in \mathcal{H}(G)$. Probar que:

$$|f(a)|^2 \leq \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|^2 r dr dt.$$

(b) Sean $G \subset \mathbb{C}$ región y $0 < M < \infty$ constante fija. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ tq $f \in \mathcal{F}$ sii, $\forall B(z_0;r) \subset G,\ \int_{B(z_0;r)} |f(x,y)|^2 dxdy \leq M$. Probar que $\mathcal{F}$ es normal.

6.- Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto y $\{f_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{H}(G)$. Probar que son equivalentes: (A) $f_n \xrightarrow{\rho} f_0$; (B) $\forall \gamma \subset G$ camino se tiene que $f_n \to f_0$ uniformemente sobre γ.

7.- (T. de Vitali) Sean $G \subset \mathbb{C}$ región, $\{f_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{H}(G)$ familia localmente acotada y $A = \{z \in G : f_n(z) \to f_0(z)\}$. Si $A' \cap G \neq \emptyset$, probar que $f_n \xrightarrow{\rho} f_0$.

8.- Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$. Probar que son equivalentes: (1) $\mathcal{F}$ es normal; (2) $\forall \epsilon > 0,\ \exists c > 0$ tq $c\mathcal{F} = \{cf : f \in \mathcal{F}\} \subset B(0;\epsilon)$ en el em $(\mathcal{H}(G), \rho)$.

9.- Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$. Probar que:

(1) $\mathcal{F}$ normal $\Rightarrow\ \mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ normal.

(2) $\mathcal{F}'$ normal no implica $\mathcal{F}$ normal.

(3) $\mathcal{F}$ normal $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}'$ normal y en cada componente conexa de G existe un punto en el que $\mathcal{F}$ es acotada.

10.- Sean $\Omega, G \subset \mathbb{C}$ abiertos, $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ normal tq $f(G) \subset \Omega$, $\forall f \in \mathcal{F}$. Sea $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ fija. Es $\{g \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ normal? Y viceversa?

11.- Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto y $u \in Har(G)$. Probar que: (1) $f := u_x - iu_y \in \mathcal{H}(G)$; (2) $u_x, u_y \in Har(G)$; (3) Si $0 < R < \infty, a \in G, B(a;R) \subset G$ entonces $u(a) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{B(a;R)} u(x,y)dxdy$.

12.- Sea $p(x,y) = \sum_{k,l=0}^{n} a_{kl} x^k y^l,\ x, y \in \mathbb{R}$. Probar que $p \in Har(\mathbb{C})$ sii:
(a)$k(k-1)a_{k,l-2} + l(l-1)a_{k-2,l} = 0,\ 2 \leq k, l \leq n.$
(b) $a_{i,j} = 0, i, j \in \{n, n-1\}$.

13.- Probar que las funciones armónicas no constantes son abiertas.

14.- Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathcal{H}(G)$ tq $f(z) \neq 0,\ \forall z \in G$. Entonces $u := Log|f| \in Har(G)$.

15.- Sea $u(z) = Im[(\frac{1+z}{1-z})^2],\ |z| < 1$. Prueba que $u \in Har(D)$ y que $\lim_{r\uparrow 1} u(re^{i\theta}) = 0,\ \forall \theta \in \mathbb{R}$. ¿Viola este hecho el Ppio. del Máximo?

16.- Sea $f = u + iv : B(0;1) \to \mathbb{C}$ continua tq $u, v \in Har(D) \cap C(B(0;1))$. Probar que $f \in \mathcal{H}(D)$ sii $\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{int}dt = 0,\ \forall n \geq 1$ y que:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t)dt,\ 0 \leq r < 1,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

17.- (T. de aproximación de Weierstrass) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continua tq $f(0) = f(1)$. Probar que existe una secuencia de polinomios trigonométricos $\{p_n\}_{n\geq 1}$ tq $p_n(t) \to f(t)$ uniformemente para $t \in [0,1]$.

18.- Sea $u \in Har(D)$. $u \geq 0$. Hallar cotas para $u(1/2)$ si $u(0) = 1$.

19.- Sean $G \subset \mathbb{C}$ región, $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{H}(G)$ y $u_n = Re(f_n), n \geq 1$, tq :(i) $u_n \xrightarrow{\rho} u_0$ (convergencia uniforme sobre compactos de G); (ii) $\exists z_0 \in G$ tq $\{f_n(z_0)\}_{n\geq 1}$ converge. Probar que:
(1) $\exists f_0 \in \mathcal{H}(G)$ tq $f_n \xrightarrow{\rho} f_0$; (2) $D_x u_n \xrightarrow{\rho} D_x u_0,\ D_y u_n \xrightarrow{\rho} D_y u_0$.

20.- Sean U región, $z_0 \in U$ y $f \in \mathcal{H}(U)$ tq $Ref(z) \leq Ref(z_0),\ \forall z \in U$. Probar que f es constante en U.