Ejercicio 1.

(1) Sean $x_0, y_0 \in \bar{A}$ y $\lambda \in [0,1]$. Tenemos que probar que $\lambda x_0 + (1-\lambda) y_0 \in \bar{A}$:

$$\begin{matrix} x_0 \in \bar{A} \\ y_0 \in \bar{A} \end{matrix} \Rightarrow \exists \begin{matrix} \{x_n\}_{n\geq 1} \subset A \\ \{y_n\}_{n \geq 1} \subset A \end{matrix} \text{ t.q. } \begin{matrix} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \\ y_n \longrightarrow y_0 \end{matrix}$$

$$A \text{ convexo} \Rightarrow \lambda x_n + (1-\lambda) y_n \in A \Rightarrow \lambda x_0 + (1-\lambda) y_0 = \lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + (1-\lambda) y_n) \in \bar{A}$$

(2) Sean $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $I_n = [0,1]^n$ y $s : I_n \to \mathbb{R}$ t.q. $s((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Se tiene que I_n es compacto y que s es continua $\Rightarrow K = s^{-1}(1) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in I_n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$ es compacto. Sea $P : K \to X$ t.q. $P((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i$. Es claro que P es continua y que $P(K) = co(A)$. Luego $co(A)$ es compacto.

(3) A, B compactos $\Rightarrow A \times B$ compacto. Como $s : A \times B \to X$ t.q. $s(a,b) = a+b$ es continua concluimos que $A + B = s(A \times B)$ es compacto.

(4) Sea $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset A + B$ t.q. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Queremos probar que $x_0 \in A+B$. Sea $x_n = a_n + b_n$ con $a_n \in A$, $b_n \in B$, $n \geq 1$. Puesto que A es compacto, podemos suponer, pasando a una subsucesión si es preciso, que $a_n \to a_0 \in A$. En consecuencia $b_n = x_n - a_n \longrightarrow x_0 - a_0$. Pero B es cerrado $\Rightarrow x_0 - a_0 := b_0 \in B \Rightarrow x_0 = a_0 + b_0 \in A + B$.

(5) Se dice que A es $\underbrace{\text{totalmente acotado}}_{\text{ó precompacto}}$ si dado $\varepsilon > 0$, $\exists \{x_1, \dots, x_m\} \subset X$ t.q. $A \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i ; \varepsilon)$. Para probar que A es compacto, tomamos una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset A$ y probamos que tiene una subsucesión convergente en A. Suponemos que los puntos $\{x_1^{(n)}, \dots, x_{m(n)}^{(n)}\} \subset X$ verifican que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m(n)} B(x_i^{(n)}; 1/n)$. Necesariamente existe $i_0 \in \{1, \dots, m(1)\}$ t.q. en $A \cap B(x_{i_0}^{(1)}; 1)$ hay una cantidad infinita de términos de $\{a_n\}_{n\geq 1}$, que denotamos por $\{a_n^{(1)}\}_{n \geq 1}$. Analogamente existe $i_0 \in \{1, \dots, m(2)\}$ t.q. en $A \cap B(x_{i_0}^{(2)}; 1/2)$ hay infinitos términos de $\{a_n^{(1)}\}_{n\geq 1}$, que denotamos por $\{a_n^{(2)}\}_{n \geq 1}$. Reiterando obtenemos subsucesiones $\{a_n^{(k)}\}_{n \geq 1}$, $k \geq 1$ t.q.:

(b)

(1) $\{a_n^{(k)}\}_{n\geq 1}$ es subsucesión de $\{a_n^{(k-1)}\}_{n\geq 1}$ $\quad (\{a_n^{(0)}\}_{n\geq 1} = \{a_n\}_{n\geq 1})$

(2) $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $\| a_n^{(k)} - a_m^{(k)} \| \leq 2/k$, $k \geq 1$.

Sea $x_n = a_n^{(n)}$, e.d. $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es la sucesión diagonal de $\{a_n^{(k)}\}_{n\geq 1}$, $k\geq 1$. Es claro que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es subsucesión de la inicial $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y además es de Cauchy pues, $\forall m \geq n \geq k$, $\|x_m - x_n\| = \|a_m^{(m)} - a_n^{(n)}\| \leq \frac{2}{k}$. En consecuencia, ya que A es completo, $x_n \longrightarrow x_0 \in A$.

Ejercicio 2. Como $\overline{co}(A)$ es un cerrado en un e.B. $\Rightarrow$ $\overline{co}(A)$ es completo. Por tanto, para probar que $\overline{co}(A)$ es compacto, bastará ver que $\overline{co}(A)$ es tot. acotado (Ejer. 1) y para ello será suficiente que $co(A)$ lo sea, cosa que probamos a continuación. Sea $\varepsilon>0$. Como A es compacto, $\exists \{x_i\}_{i=1}^n \subset A$ tq $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i; \varepsilon/2)$. Sea $K = co\{x_i\}_{i=1}^n$, que es compacto (por Ejer. 1), por lo que $\exists \{y_j\}_{j=1}^m \subset K$ tq $K \subset \bigcup_{j=1}^m B(y_j; \varepsilon/2)$. Como $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i;\varepsilon/2) = \{x_i\}_{i=1}^n + B(0;\varepsilon/2) \Rightarrow$

$$co(A) \subset co\{x_i\}_{i=1}^n + B(0;\varepsilon/2) = K + B(0;\varepsilon/2) \subset \left(\bigcup_{j=1}^m B(y_j;\varepsilon/2)\right) + B(0;\varepsilon/2) = \bigcup_{j=1}^m B(y_j;\varepsilon)$$

donde hemos aplicado que $B(y_j;\varepsilon/2) + B(0;\varepsilon/2) = B(y_j;\varepsilon)$. Así que $co(A)$ es tot. acotado.

Ejercicio 3.

(a) $x_0 \in \bigcap_{n\geq 1} (A + \frac{1}{n} B_X) \Leftrightarrow \forall n\geq 1$, $x_0 \in A + \frac{1}{n} B_X \Leftrightarrow \forall n \geq 1$, $\exists a_n \in A$, t.q. $\|x_0 - a_n\| \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow x_0 \in \bar{A}$.

(b) (1) $\underline{co(A+B) \subset co(A) + co(B)}$

$x \in co(A+B) \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (a_i + b_i)$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i \in co(A) + co(B)$.

(2) $\underline{co(A) + co(B) \subset co(A+B)}$

Notemos que si C, D son subconjuntos arbitrarios de X, entonces $co(C) + D \subset co(C+D)$, pues $x \in co(C) + D \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot c_i + d$, $c_i \in C$, $d \in D$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i (c_i + d) \in$ $\in co(C+D)$. Así que: $co(A) + co(B) \subset co(A + co(B)) \subset co(co(A+B)) = co(A+B)$.

En consecuencia $co(A+B) = co(A) + co(B)$.

(c) Consecuencia de (b) al ser $co(A+B) = co(A) + co(B) = A+B$.

(d) $\overline{co}(A) + \overline{co}(B) \subset \overline{co(A) + co(B)} = \overline{co(A+B)} = \overline{co}(A+B)$.

AF

Ejercicio 4

(i) $\varphi : X \ni x \longrightarrow x+a \in X$ es claramente continua biyectiva con inversa, $\varphi^{-1}(x) = x-a$, también continua. Luego es un homeomorfismo.

(ii) $\varphi : X \ni x \longrightarrow \lambda x \in X$, $\lambda \neq 0$, es un isomorfismo continuo con inversa, $\varphi^{-1}(x) = x/\lambda$, también continua. Luego es un isomorfismo topológico.

(iii) $\varphi : X \ni x \longrightarrow \frac{x}{1+\|x\|} \in \mathring{B}(0;1)$ es una biyección continua con inversa, $\varphi^{-1}(x) = \frac{x}{1-\|x\|}$, que también lo es. Luego φ es un homeomorfismo.

Ejercicio 5

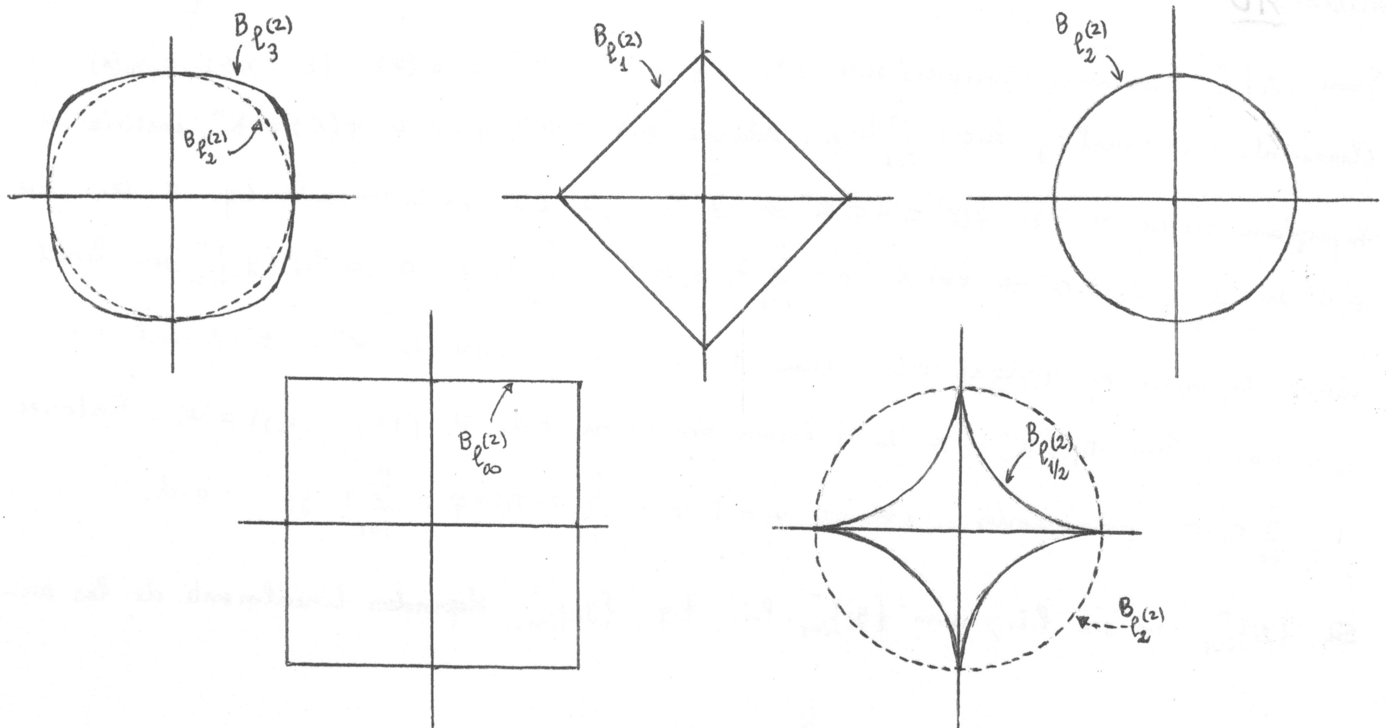
A es compacto por ser la unión de una sucesión y su límite.

Sabemos que $[0,1]^{\mathbb{N}}$ es compacto y también que $\{(\lambda_n)_{n\geq 0} \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geq 0} \lambda_n \leq 1\} = K$ es compacto. La aplicación $s : K \longrightarrow X$ tq $s((\lambda_n)_{n\geq 0}) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n \cdot x_n$ está bién definida (porque X es Banach) y es continua (porque $x_n \longrightarrow 0 = x_0$). Por tanto $s(K)$ es un compacto de X, además de ser convexo. Por otra parte $co(A) \subset s(K)$ y $co(A)$ es denso en $s(K) \Rightarrow \overline{co}(A) = s(K)$. Finalmente notemos que:

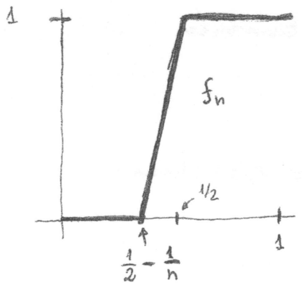
$$s(K) = \left\{ \sum_{n\geq 0} \lambda_n \cdot x_n : 0 \leq \lambda_n \leq 1, \sum_{n\geq 0} \lambda_n \leq 1 \right\} = \left\{ \sum_{n\geq 0} \lambda_n \cdot x_n : 0 \leq \lambda_n \leq 1, \sum_{n\geq 0} \lambda_n = 1 \right\}$$

porque $\lambda_0 \cdot x_0 = 0$.

Ejercicio 6



Ejercicio 7



Sea f_n, $n\geq 2$, la función de la Fig. Entonces $\{f_n\}_{n\geq 2}$ es una sucesión de Cauchy en $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ pues si $m,n\geq k$ se tiene que $\|f_m - f_n\|_1 \leq \frac{1}{2k}$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f_0 \in C([0,1])$. Entonces $f_0|_{[0,1/2)} = 0$ y $f_0|_{(1/2,1]} = 1$, lo que no puede ser ya que f_0 es continua.

Ejercicio 8. Sean $x=(1,0)$, $y=(0,1) \Rightarrow \|x\|_p = 1 = \|y\|_p$. Sin embargo:

$$\|x+y\|_p = \|(1,1)\|_p = (1+1)^{1/p} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p$$

Luego no se verifica la des. triangular $\Rightarrow \|\cdot\|_p$, $0<p<1$, no es una norma.

Ejercicio 9

(a) c_{00} es denso en c_0. Sea $x=(x_n)_{n\geq 1} \in c_0 \Leftrightarrow x_n \to 0$. Si $x^{(m)} = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots)$, entonces $x^{(m)} \in c_{00}$ y $\|x - x^{(m)}\|_0 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

(b) c_{00} es denso en ℓ_p, $1\leq p<\infty$. Sea $x=(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_p \Rightarrow \left[\sum_{n\geq 1} |x_n|^p\right]^{1/p} < +\infty \Rightarrow \left[\sum_{n\geq m} |x_n|^p\right]^{1/p} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Sea $x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots) \Rightarrow x^{(m)} \in c_{00}$ y $\|x - x^{(m)}\|_p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

(c) c_{00} no es denso en ℓ_∞. Si $x = (1,1,1,1,\dots) \in \ell_\infty$, entonces, $\forall z \in c_{00}$, $\|x - z\|_\infty \geq 1$.

Ejercicio 10

(a) Sean $\{y_i\}_{i=1}^n$ linealmente independientes (l.i.) y $\varphi: X \to \mathbb{K}^n$ t.q. $\varphi(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$. Claramente φ es lineal y $\ker\varphi = \bigcap_{i=1}^n \ker y_i$. Además $\varphi(X) = \mathbb{K}^n$, pues si $\varphi(X) \neq \mathbb{K}^n$, existiría un hiperplano propio H t.q. $\varphi(X) \subset H \subset \mathbb{K}^n \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, no todos nulos t.q. $z=(z_1,\dots,z_n) \in H$ sii $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i = 0 \Rightarrow \forall x \in X$, $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot y_i(x) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot y_i = 0 \Rightarrow$ los $\{y_i\}_{i=1}^n$ son linealmente dependientes. CONTRADICCION. Como $\ker\varphi \subset \ker y_0$, existe $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ lineal t.q. $y_0 = L\circ\varphi$. Sea $\pi_i: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ la i-ésima proyección e.d. $\pi_i((x_1,\dots,x_n)) = x_i$. Entonces $L = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \pi_i$ para ciertos $a_i \in \mathbb{K} \Rightarrow y_0 = L\circ\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\, \pi_i \circ \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \cdot y_i$ c.q.d.

(b) Si $\{y_i\}_{i=1}^n$ no son l.i., sean $\{y_i\}_{i=1}^r$ l.i. t.q. $\{y_i\}_{i=r+1}^n$ dependen linealmente de los anteriores. ~~Entonces~~ $\bigcap_{i=1}^{n} \ker y_i = \bigcap_{i=1}^{r} \ker y_i$ y aplicando (a), obtenemos que y_0 depende linealmente de $\{y_i\}_{i=1}^{r}$ y por tanto de $\{y_i\}_{i=1}^{n}$.

Ejercicio **11**. Puesto que $L_p(\mu)^* = L_q(\mu)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, se tiene que:

$$\|f\|_p = \sup\left\{ \int_\Omega fg\, d\mu \;;\; g\in L_q(\mu),\ \|g\|_q \le 1 \right\} \le c.$$

Ejercicio **12**. Puesto que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $n\cdot\chi_{[0,1/n]}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\forall x\in(0,1]$ ya que $\frac{1}{n}<x$ para $n\geq n_0$. Pero $(0,1]$ es ctp. $[0,1]$. Veamos las normas:

$1\le p<\infty$: $\|n\cdot\chi_{[0,1/n]}\|_p = \left[\int_{[0,1/n]} n^p\, d\mu\right]^{1/p} = n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p} = n^{1-1/p}$ $\begin{cases} p=1: & = 1,\ \forall n\in\mathbb{N} \\ 1<p<\infty: & \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \end{cases}$

$p=\infty$: $\|n\cdot\chi_{[0,1/n]}\|_\infty = n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Ejercicio **13**. La serie $\sum_{n\geq 1}(f_n - f_{n-1})$ es absolutamente convergente en $L_p(\mu)$ pues:

$$\|f_n - f_{n-1}\|_p \le \|f_n - f_0\|_p + \|f_{n-1} - f_0\|_p \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\|f_n - f_{n-1}\|_p \le \sum_{n\geq 1}\|f_n - f_0\|_p + \sum_{n\geq 1}\|f_{n-1}-f_0\|_p < +\infty$$

Por 14.13.PROP, $\sum_{i=1}^{n}(f_i - f_{i-1}) = f_n - f_0$ converge puntualmente ctp a cierta $g\in L_p(\mu)$, a la que también converge en la norma $\|\cdot\|_p$. Pero $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f_0$ porque $\sum_{n\geq 1}\|f_n - f_0\|_p < +\infty$ $\Rightarrow \|f_n - f_0\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Luego $g = f_0$ en $L_p(\mu)$ $\Rightarrow$ $f_n \longrightarrow f_0$ puntualmente ctp.

Ejercicio **14**. $\mu(E)<+\infty$

(a) (I) Sea $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ el σ-álgebra de los medibles-Lebesgue de $\mathbb{R}$. Dados $E\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ y $\varepsilon>0$, existe $J=\bigcup_{i=1}^{n} I_i$, $I_i\subset\mathbb{R}$ intervalos acotados, disjuntos dos a dos, t.q. $\mu(E\,\Delta\, J)\le\varepsilon$. En efecto, tomemos $T_{\mathbb{R}} \ni \mathcal{U}\supset E$ t.q. $\mu(\mathcal{U}\setminus E)\le \varepsilon/2 \Rightarrow \mu(\mathcal{U})<+\infty$. Sea $\mathcal{U} = \biguplus_{i\geq 1} I_i$, $I_i\subset\mathbb{R}$

(f)

intervalos disjuntos dos a dos y necesariamente acotados. Como $\mu(\mathcal{U}) = \sum_{i\geq 1} \mu(I_i)$, existe $n\in\mathbb{N}$ t.q. $\sum_{i=1}^{n} \mu(I_i) > \mu(\mathcal{U}) - \varepsilon/2 \Rightarrow \mu(\mathcal{U}\setminus J) < \varepsilon/2$, $J = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Además:

$$E\triangle J = (E\setminus J)\cup(J\setminus E) \subset (\mathcal{U}\setminus J)\cup(\mathcal{U}\setminus E) \Rightarrow \mu(E\triangle J) \leq \mu(\mathcal{U}\setminus J) + \mu(\mathcal{U}\setminus E) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(II) De (I) se deduce que si $\mathcal{S} = \{\sum_{i=1}^{m} a_i\cdot\chi_{E_i} : a_i\in\mathbb{K},\ E_i\in\mathcal{M}(\mathbb{R}),\ \mu(E_i)<+\infty,\ m\in\mathbb{N}\} \equiv$ espacio de las funciones simples (que verifica $\mathcal{S}\subset L_p(\mu)$, $1\leq p\leq\infty$), entonces $\mathcal{S}\subset\overline{S}$ en $L_p(\mathbb{R})$.

(III) Pero $\overline{\mathcal{S}} = L_p(\mathbb{R})$. En efecto, si $f:\mathbb{R}\longrightarrow[0,\infty]$ verifica $f\in L_p(\mathbb{R})$, pongamos:

$$s_m = \sum_{i=1}^{m\cdot 2^m} \frac{i-1}{2^m}\cdot\chi_{E_{mi}} + m\cdot\chi_{F_m}, \quad m\in\mathbb{N}$$

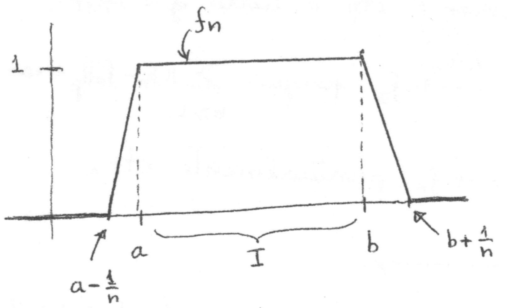
$$E_{mi} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right)\right), \quad F_m = f^{-1}([m,\infty])$$

Entonces $0\leq s_m\leq f$ $(\Rightarrow \mu(E_{mi})<+\infty>\mu(F_m) \Rightarrow s_m\in\mathcal{S})$, $s_m\uparrow f$ y $f^p \geq (f-s_m)^p \downarrow 0$. Por T. de Convergencia Dominada $\lim_m \int_{\mathbb{R}} (f-s_m)^p = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|f-s_m\|_p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

En consecuencia $\overline{S} = L_p(\mu)$, $1\leq p<\infty$

(b) Es claro que $C_{00}(\mathbb{R})\subset L_p(\mathbb{R})$, $1\leq p\leq\infty$. Para ver que $\overline{C_{00}}(\mathbb{R}) = L_p(\mu)$, $1\leq p<\infty$, bastará probar que $S\subset\overline{C_{00}}(\mathbb{R})$ y, en particular, que dados $I=[a,b]$, intervalo acotado, y $\varepsilon>0$, existe $f\in C_{00}(\mathbb{R})$ t.q. $\|f-\chi_I\|_p\leq\varepsilon$. Sean f_n las funciones de la figura. Es claro que $f_n\in C_{00}(\mathbb{R})$, $f_1\geq f_2\geq f_3\geq\cdots$, $f_n\downarrow\chi_I$ ctp. y $f_1^p\geq(f_n-\chi_I)^p\downarrow 0$ ctp. Por T. de la Convergencia Dominada se tiene



que $\int_{\mathbb{R}} (f_n-\chi_I)^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \|f_n-\chi_I\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n\geq n_0$, $\|f_n-\chi_I\|_p\leq\varepsilon$.

Ejercicio 15

(a) Si $p_1 = p_2$, el resultado es obvio. Sea $p_1 < p_2$, $p = \frac{p_2}{p_1} > 1$, $q > 1$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Tomemos $f \in L_{p_2}(\mu)$. Por des. de Hölder:

$$\|f\|_{p_1} = \left[\int_\Omega |f|^{p_1} \right]^{1/p_1} \leq \left[\left[\int_\Omega |f|^{p_1 p} \right]^{1/p} \cdot \left[\int_\Omega 1^q \right]^{1/q} \right]^{1/p_1} =$$

$$= \left[\left[\int_\Omega |f|^{p_2} \right]^{\frac{1}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p}} \cdot \mu(\Omega)^{1/q} \right]^{1/p_1} = \|f\|_{p_2}^{\frac{p_2}{p p_1}} \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{q \cdot p_1}} = K \cdot \|f\|_{p_2}.$$

$$\frac{p_2}{p \cdot p_1} = 1$$

Por tanto $\|f\|_{p_1} < +\infty$ ($\Rightarrow f \in L_{p_1}(\mu)$) y la inclusión $L_{p_2}(\mu) \hookrightarrow L_{p_1}(\mu)$ es continua.

(b) Si $p = p_1$ ó $p = p_2$, el resultado es obvio. Sea $p_1 < p < p_2 \Rightarrow \exists \theta \in (0,1)$ t.q.

$p = \theta p_1 + (1-\theta) p_2 \Rightarrow$ si $\begin{cases} \tilde{p} = \frac{1}{\theta} \\ \tilde{q} = \frac{1}{1-\theta} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$. Tomemos $f \in L_{p_1}(\mu) \cap L_{p_2}(\mu)$:

$$\int_\Omega |f|^p d\mu = \int_\Omega |f|^{\theta p_1} \cdot |f|^{(1-\theta) p_2} d\mu \leq \left[\int_\Omega |f|^{\theta p_1 \tilde{p}} d\mu \right]^{1/\tilde{p}} \cdot \left[\int_\Omega |f|^{(1-\theta) p_2 \tilde{q}} d\mu \right]^{1/\tilde{q}} =$$

des. de Hölder

$$= \|f\|_{p_1}^{\theta p_1} \cdot \|f\|_{p_2}^{(1-\theta) p_2} < +\infty \Rightarrow f \in L_p(\mu).$$

(h)

16. (a) La extensión de f, para las tres normas consideradas, es $T(x,y) = x$.

(b) La extensión T de f es: (b1) $T(x,y) = x$ para la norma $\|.\|_\infty$; (b2) $T(x,y) = \frac{x+y}{2}$ para las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$.

(c) La extensión T de f es: (c1) $T(x,y) = x$ para la norma $\|.\|_\infty$; (c2) $T(x,y) = \frac{x-y}{2}$ para las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$.

17. $\underline{\Rightarrow.}$ Sea $f : X \to Y$ lineal y continua. Entonces existe $0 \leq K < \infty$ tal que $\|f(x)\| \leq K\|x\|, \forall x \in X$. Sea $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ una sucesión de Cauchy, es decir, $\|x_m - x_n\| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Como

$$\|f(x_m) - f(x_n)\| = \|f(x_m - x_m)\| \leq K\|x_m - x_n\| \to 0,$$

concluimos que $\{f(x_n) : n \geq 1\} \subset Y$ es también una sucesión de Cauchy.

$\underline{\Leftarrow.}$ Probemos que f es acotada, lo que equivale a decir que f es continua. Supongamos que f no es acotada. Esto quiere decir que existe una sucesión $\{x_n : n \geq\} \subset X$ tal que $\|f(x_n)\| \leq \frac{1}{n}$ pero $\|f(x_n)\| = n$. Obviamente $\{x_n : n \geq 1\}$ es sucesión de Cauchy en X y, sin embargo, $\{f(x_n) : n \geq 1\}$ no es sucesión de Cauchy en Y, una contradicción. Por tanto f es acotada.

18.(a) Observemos, en primer término, que la expresión de un vector $x \in X$ en función de la base, es decir, $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, es única y sólo tiene un número finito de coordenadas no nulas. Teniendo en cuenta esta observación es inmediato probar que $\|.\|_1$ y $\|.\|_\infty$ son normas sobre E. Dichas normas no son equivalente pues para serlo deberían existir constantes $0 < k \leq K < \infty$ tales que

$$k\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq K\|x\|_\infty, \ \forall x \in E.$$

Cogiendo $J_n \subset I$ tal que $|J_n| = n \in \mathbb{N}$ y $x_n = \sum_{i \in J_n} e_i$, resulta que $\|x_n\|_\infty = 1$ pero $\|x_n\|_1 = n$, lo que prueba que las anteriores desigualdades no son posibles.

(b) Consideramos en $(E, \|.\|)$ una base algebraica $\{e_i\}_{i \in I}$, que ha de ser necesariamente infinita, tal que $\inf(\{\|e_i\| : i \in I\}) = 0$. Sea $T : E \to \mathbb{K}$ el operador lineal tal que $Tx := \sum_{i \in I} x_i$, siendo $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$. Entonces T es lineal no acotado y, por tanto, no continuo.

AF

HOJA Nº 1

(i)

19. (a) Es claro que f es lineal. Se tiene que

$$\|f\|_1 := \sup\{|f(x)| : \|x\|_1 \leq 1\} = 1,$$
$$\|f\|_2 := \sup\{|f(x)| : \|x\|_2 \leq 1\} = (\sum_{n\geq 1} \tfrac{1}{n^4})^{1/2},$$
$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : \|x\|_\infty \leq 1\} = \sum_{n\geq 1} \tfrac{1}{n^2} < \infty.$$

Por tanto f es continua para las normas $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ y $\|.\|_\infty$.

(b) La aplicación f es trivialmente lineal. Se tiene que

$$\|f\|_1 := \sup\{\|(\tfrac{1}{2^n}x_n))_{n\geq 1}\|_2 : \|x\|_1 \leq 1\} = \tfrac{1}{2},$$
$$\|f\|_2 := \sup\{\|(\tfrac{1}{2^n}x_n)_{n\geq 1}\|_2 : \|x\|_2 \leq 1\} = \tfrac{1}{2},$$
$$\|f\|_\infty := \sup\{\|(\tfrac{1}{2^n}x_n)_{n\geq 1}\|_2 : \|x\|_\infty \leq 1\} = (\textstyle\sum_{n\geq 1} \tfrac{1}{2^{2n}})^{1/2} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por tanto f es continua para las tres normas.