PROBLEMAS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

SOLUCIONES

HOJA Nº 3

(1) (I) Probemos que si $h \in L_1([0,1])$ verifica $\int_0^1 t^n \cdot h \, dt = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces $h = 0$ en $L_1([0,1])$ e.d. $h(t) = 0$ ctp. $t \in [0,1]$. **Por Ej. 13, H.2**, bastará ver que $\int_0^c h \cdot dt = 0$, $\forall c \in [0,1]$. Como $\chi_{[0,c]} \in L_1([0,1])$, sabemos que existe una sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset C([0,1])$, $\|f_n\| \leq 1$, t.q. $f_n \to \chi_{[0,c]}$ **ctp.** (ver **Ej. 14, H.1**)
Pero el espacio $\mathcal{P}$ de los polinomios es denso en $C([0,1])$. Así que existe una sucesión $\{p_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}$, $\|p_n\| \leq 1$, t.q. $p_n \to \chi_{[0,c]}$ ctp. Por T. de la convergencia dominada:

$$\int_0^c h \cdot dt = \int_0^1 h \cdot \chi_{[0,c]} \cdot dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 h \cdot p_n \cdot dt = 0$$

porque: $\int_0^1 t^n \cdot h \cdot dt = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ $\Rightarrow \int p(t) \cdot h \cdot dt = 0$, $\forall p \in \mathcal{P}$.

Notemos que lo anterior prueba que: (i) $C([0,1])$; (ii) $\mathcal{P}$; (iii) $\{t^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ son totales sobre $L_1([0,1])$.

(II) Sean $f, g \in L_1([0,1])$ con los mismos momentos. Entonces $h = f - g$ verifica las hipótesis de (I). Luego $f = g$ ctp.

(2) Si X^* es separable, existe una familia contable $\mathcal{F} = \{x_n^*\}_{n\geq 1} \subset X^*$ densa en X^*. Sabemos que $\|x_n^*\| = \sup\{|x_n^*(x)| : x \in B_X\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego existe una familia contable $\mathcal{E} = \{x_k\}_{k\geq 1} \subset B_X$ <u>normante</u> sobre $\mathcal{F}$ e.d. $\|x_n^*\| = \sup\{|x_n^*(x)| : x \in \mathcal{E}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea $Y = \overline{[\mathcal{E}]}$ el subespacio cerrado generado por $\mathcal{E}$. Es claro que Y es <u>separable</u>. Veamos que Y es <u>normante</u> sobre X^*. Para ello bastará ver que si $x^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$, $\sup\{|x^*(x)| : x \in B_Y\} \geq \|x^*\| - \varepsilon$. Por hipótesis existe $x_{n_0}^* \in \mathcal{F}$ t.q. $\|x^* - x_{n_0}^*\| \leq \varepsilon/2$. Así que:

$$\sup\{|x^*(x)| : x \in B_Y\} = \sup\left\{|x_{n_0}^*(x) - (x_{n_0}^* - x^*)(x)| : x \in B_Y\right\} \geq$$

$$\geq \sup\{|x_{n_0}^*(x)| - |(x_{n_0}^* - x^*)(x)| : x \in B_Y\} \geq$$

$$\geq \sup\{|x_{n_0}^*(x)| - \varepsilon/2 : x \in B_Y\} = \|x_{n_0}^*\| - \varepsilon/2 \geq \|x^*\| - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 = \|x^*\| - \varepsilon.$$

En particular Y es <u>total</u> sobre X^* e.d. si $x^*(x) = 0$, $\forall x \in Y$, $\Rightarrow x^* = 0$.
Supongamos que X no es separable y por tanto $X \neq Y$ y sea $x_0 \in X \setminus Y$. Por T. de H-B existe $x^* \in X^*$ t.q. $Y \subset \ker x^*$ y $x^*(x_0) \neq 0$. Pero esto es contradictorio porque $Y \subset \ker x^* \Rightarrow x^*(x) = 0$, $\forall x \in Y \Rightarrow x^* = 0$.

---

(3) (a) Supongamos $I = [0,1]$, $1 \leq p < +\infty$, $f \in L_p([0,1])$ y $\varepsilon > 0$. Por 5.14, H.1, $C([0,1])$ es denso en $(L_p(I), \|\cdot\|_p) \Rightarrow \exists g \in C([0,1])$ t.q. $\|f - g\|_p \leq \varepsilon/2$. Pero el espacio de los polinomios $\mathcal{P}$ es denso en $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \Rightarrow \exists q \in \mathcal{P}$ t.q. $\|g - q\|_\infty \leq \varepsilon/2$. Por tanto: $\|g - q\|_p = \left[\int_0^1 |g - q|^p dt\right]^{1/p} \leq \left[\int_0^1 (\varepsilon/2)^p dt\right]^{1/p} = \varepsilon/2$. En definitiva: $\|f - q\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - q\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(b) (i) Sean $E = \{q(t)\cdot e^{-t} : q \in \mathcal{P}\}$ y $F = \{q(t)\cdot e^{-t/2} : q \in \mathcal{P}\}$. Por Ej. 80, E es denso en $(C_0([0,\infty)), \|\cdot\|_\infty)$ y vamos a ver que también lo es F. En efecto, sea $f \in C_0([0,\infty))$. Entonces si $g(s) = f(2s)$, $\forall s \in [0,\infty)$, es claro que $g \in C_0([0,\infty))$ por lo que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists q \in \mathcal{P}$ t.q.:

$$|g(s) - q(s)\cdot e^{-s}| \le \varepsilon,\ \forall s \in [0,\infty) \Rightarrow |f(2s) - q(s)\cdot e^{-s}| \le \varepsilon,\ \forall s \in [0,\infty) \Rightarrow$$

$$\underset{2s=t}{\Rightarrow} \quad |f(t) - q(t/2)\cdot e^{-t/2}| \le \varepsilon,\ \forall t \in [0,\infty), \quad \text{con } q(t/2) \in \mathcal{P}.$$

(ii) $E \subset L_p([0,\infty))$ para $1 \le p \le \infty$

Si $p=\infty$, ello es evidente **porque** $\forall f \in E$ es acotada ya que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Sea $1 \le p < +\infty$ y $f(t) = q(t)\cdot e^{-t}$, $q \in \mathcal{P}$. Llamemos $M = \sup\{|q(t)e^{-t/2}| : t \in [0,\infty)\}$.

Entonces:

$$\|f\|_p = \left[\int_0^\infty |q(t)\cdot e^{-t}|^p dt\right]^{1/p} = \left[\int_0^\infty |q(t)\cdot e^{-t/2}|^p \cdot e^{-tp/2} \cdot dt\right]^{1/p} \le$$

$$\le M\cdot\left[\int_0^\infty e^{-tp/2}\cdot dt\right]^{1/p} = M\left[\frac{e^{-tp/2}}{-p/2}\Big|_0^\infty\right]^{1/p} = M\left(\frac{2}{p}\right)^{1/p} < +\infty.$$

(iii) Sean $f \in L_p([0,\infty))$, $1 \le p < +\infty$, y $\varepsilon > 0$. **Por Ej. 14, H. 1**, $\exists g \in C_{00}([0,\infty))$ (= = funciones continuas con **soporte compacto** en $[0,\infty)$) **t.q.** $\|f-g\|_p \le \varepsilon/2$.

Como $g(t)\cdot e^{t/2} \in C_{00}([0,\infty))$, por (i) existe $q \in \mathcal{P}$ t.q.:

$$|g(t)\cdot e^{t/2} - q(t)e^{-t/2}| \le \frac{\varepsilon}{2}\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p},\ \forall t \in [0,\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |g(t) - q(t)\cdot e^{-t}| \le \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p}\cdot e^{-t/2},\ \forall t \in [0,\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|g - q(t)\cdot e^{-t}\|_p \le \frac{\varepsilon}{2}\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p}\left[\int_0^\infty e^{-pt/2}\cdot dt\right]^{1/p} = \varepsilon/2$$

En definitiva $\|f - q(t)\cdot e^{-t}\|_p \le \varepsilon$, lo que prueba (b).

(c) Es análogo a (b)

(i) Sean $E = \{q(t)\cdot e^{-t^2} : q \in \mathcal{P}\}$ y $F = \{q(t)\cdot e^{-t^2/2} : q \in \mathcal{P}\}$. Veamos que F es denso en $C_0(\mathbb{R})$. Sea $f \in C_0(\mathbb{R})$ y $g(s) = f(s\sqrt{2})$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Entonces $g \in C_0(\mathbb{R})$ y por Ej. 80, dado $\varepsilon > 0$, existe $q \in \mathcal{P}$ t.q.:

$$|g(s) - q(s)\cdot e^{-s^2}| \le \varepsilon, \ \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(s\sqrt{2}) - q(s)\cdot e^{-s^2}| \le \varepsilon, \ \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\underset{s\sqrt{2}=t}{\Rightarrow} \quad |f(t) - q(t/\sqrt{2})\cdot e^{-t^2/2}| \le \varepsilon, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } q(t/\sqrt{2}) \in \mathcal{P}.$$

(ii) $E \subset L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le +\infty$

Si $p = \infty$, ello es evidente pues $\forall f \in E$ es acotada

Si $1 \le p < \infty$, sale igual que en (b) pues $\int_0^\infty e^{-pt^2/2}\,dt < +\infty$.

(iii) Es igual que en (b). No vale la pena repetir el razonamiento.

(4) Supongamos que $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\ge 1} G_n$, $G_n \in T_{\mathbb{R}}$. Entonces, si $F_n = {}^cG_n$, se tiene que $F_n \in C_{\mathbb{R}}$ y $\mathring{F}_n = \emptyset$ (pues $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$). Sea $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$. Es claro que $\{r_n\} \in C_{\mathbb{R}}$ y que $\mathring{\{r_n\}} = \emptyset$. Como $\mathbb{I} = \bigcup_{n\ge 1} F_n$, concluimos que $\mathbb{R} = (\bigcup_{n\ge 1} F_n) \cup (\bigcup_{n\ge 1}\{r_n\})$ e.d. $\mathbb{R}$ es de 1ª categoría, lo que no puede ser por el T. de Baire, ya que $\mathbb{R}$ es métrico completo.

(5) Bastará probar que si $\emptyset \ne G \in T_X$, entonces $G \cap (\bigcup_{n\ge 1} \mathring{A}_n) \ne \emptyset$. Sea $Y = \overline{G}$ y $Y_n = A_n \cap Y$. Se tiene que $Y = \bigcup_{n\ge 1} Y_n$, $Y_n \in C_Y$. Por T. de Baire (Y es métrico completo por ser cerrado de X) existe $m \in \mathbb{N}$ t.q. $V = \operatorname{int}_Y(Y_m) \ne \emptyset$ (int_Y = interior relativo a Y). Así que existe $\emptyset \ne \mathcal{U} \in T_X$ t.q. $\mathcal{U} \cap Y = V$. Como G es denso en Y, $\emptyset \ne \mathcal{U} \cap G$ y obviamente $\mathcal{U} \cap G \subset V \subset A_m$.

HOJA Nº 3

Pero $\mathcal{U} \cap G \in T_X \Rightarrow \emptyset \neq \mathcal{U} \cap G \subset \mathring{A}_m \Rightarrow \mathcal{U} \cap G \subset G \cap \mathring{A}_m \Rightarrow G \cap \mathring{A}_m \neq \emptyset$

$\Rightarrow G \cap \left[\bigcup_{n \geq 1} \mathring{A}_n \right] \neq \emptyset.$

---

(6) Si $\{x_k\}_{k\geq 1} = x \in c_0$, los funcionales $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k$ son continuos sobre c_0 y $\|T_n\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$. Además como existe el $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k \cdot x_k$ (porque $\sum_{k\geq 1} \alpha_k \cdot x_k$ converge) resulta que $\{|T_n(x)| : n = 1, 2, \dots\}$ es acotado, $\forall x \in c_0$. Del T. de Banach-Steinhaus deducimos que $\sup\{\|T_n\| : n = 1, 2, \dots\} = \sum_{n\geq 1} |\alpha_n| < +\infty$.

---

(7) Bastará ver que $T(B_X)$ es acotado en Y y por 18.5. COR. que $f(T(B_X)) = (f \circ T)(B_X)$ es acotado, $\forall f \in Y^*$. Pero por hipótesis $f \circ T \in X^*$, $\forall f \in Y^*$, y B_X es acotado en X. Luego $f(T(B_X))$ es acotado, $\forall f \in Y^*$.

---

(8) Tomemos v.g., $\forall \{x_k\}_{k\geq 1} = x \in c_{00}$, $f_n(x) = n \cdot x_n$. Notemos que esta construcción es posible porque $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$ es e.n. pero no e.B. Si fuese e.B., el T. de Banach-Steinhaus lo impediría.

---

(9) Sea $T: \ell_\infty \ni y = \{y_k\}_{k\geq 1} \longrightarrow T(y) = \{\alpha_k \cdot y_k\}_{k\geq 1} \in \ell_1$. Es claro que T es lineal continuo e inyectivo. Si $\forall \{y_n\}_{n\geq 1}$, $y_n > 0$, $\overline{\lim_n}\, y_n = +\infty$ verifica que $\sum_{n\geq 1} \alpha_n \cdot y_n = +\infty$, entonces T sería sobreyectivo y, por T. de la aplicación abierta, un isomorfismo. Pero ello es imposible porque ℓ_∞ y ℓ_1 no son isomorfos.

---

(10) (i) $M \cap N = \{0\}$. Evidente.

(ii) Sea $x \in c_{00}$. Entonces $y = \{y \dots$

$y_{2n} = x_{2n} - n \cdot x_{2n-1}$ verifica $y \in N$, $x - y \in M$. Luego $X = M \oplus N$

(iii) La proyección $P : X \to M$ sobre M paralela a N es: $Px = z$ t.q. $z_{2n-1} = x_{2n-1}$, $z_{2n} = n \cdot x_{2n-1}$. Sea $e_n = (0, \dots, 0, \overset{\text{n-ésimo lugar}}{1}, 0, \dots)$. Entonces $\|e_n\|_1 = 1$, pero $\|P(e_{2n-1})\|_1 = 1 + n$. Por tanto P no es acotada.

(11)

$\Rightarrow$ Supongamos que existen $b_n \geq 0$ t.q. $\sum_{n\geq 1} b_n^2 \cdot c_n < +\infty$ pero $\sum_{n\geq 1} b_n = +\infty$. Entonces debe ser $\sum_{n\geq 1} c_n^{-1} = +\infty$, pues si $\sum_{n\geq 1} c_n^{-1} < +\infty$ tendríamos:

$$\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} b_n \cdot c_n^{1/2} \cdot c_n^{-1/2} \leq \Big(\sum_{n\geq 1} b_n^2 \cdot c_n\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{n\geq 1} c_n^{-1}\Big)^{1/2} < +\infty$$

$\Leftarrow$ Sea $\sum_{n\geq 1} c_n^{-1} = +\infty$ y supongamos que si $b_n \geq 0$ y $\sum_{n\geq 1} b_n^2 \cdot c_n < +\infty$, entonces $\sum_{n\geq 1} b_n < +\infty$. Entonces $T : \ell_2 \to \mathbb{K}$ t.q. $\ell_2 \ni y = \{y_k\}_{k\geq 1} \longrightarrow T(y) = \sum_{k\geq 1} y_k \cdot c_k^{-1/2}$ es un operador continuo. En efecto:

(i) $\sum_{n\geq 1} (y_n \cdot c_n^{-1/2})^2 \cdot c_n = \sum_{n\geq 1} y_n^2 < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1} |y_n| \cdot c_n^{-1/2} < +\infty \Rightarrow T$ está bien definido y es claramente lineal.

(ii) Si $T_n(y) = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot c_k^{-1/2}$, entonces $T_n \in (\ell_2)^*$ y $\{|T_n(y)| : n = 1, 2, \dots\}$ es acotado para cada $y \in \ell_2$ (porque $T_n(y) \to T(y)$) (ver Ej. 6). Por el T. de la acotación uniforme concluimos que $\|T\| < +\infty$, e.d. T es continuo.

Por tanto $T \in (\ell_2)^* = \ell_2$ e.d. $\{c_n^{-1/2}\}_{n\geq 1} \in \ell_2 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} c_n^{-1} < +\infty$. CONTRADICCION

HOJA Nº 3

(12) (a) Sea $\varepsilon>0$. Por ser $\{x_i\}_{i\in I}$ sumable, $\exists\, I_0\subset I$ finito t.q. $\forall K\subset I\setminus I_0$ finito, $\|s_K\|\le\varepsilon$. Sea $J_0=I_0\cap J \Rightarrow J_0$ es finito y obviamente $\forall K\subset J\setminus J_0$ finito verifica $\|s_K\|\le\varepsilon$. Por el criterio de Cauchy $\{x_j\}_{j\in J}$ es sumable.

(b) Si $T=0$, es obvio. Sea $M=\|T\|>0$ y $\varepsilon>0$. Por hipótesis existe $I_0\subset I$ finito t.q., $\forall I_0\subset J\subset I$ finito, $\|x-S_J\|\le \varepsilon/M$. Entonces para estos J's resulta $\|Tx-\sum_{i\in J}Tx_i\| = \|T(x-S_J)\|\le M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$. Luego $\sum_{i\in I}Tx_i = Tx$.

---

(13) (a) $\Leftarrow$| Esta implicación siempre es cierta aunque $\dim X=\infty$. En efecto, si $\sum_{i\in I}\|x_i\|$ es sumable, dado $\varepsilon>0$, $\exists\, I_0\subset I$ finito t.q. $\forall K\subset I\setminus I_0$ finito, resulta $\sum_{i\in K}\|x_i\|\le\varepsilon$. Entonces para estos K's, $\|\sum_{i\in K}x_i\|\le\sum_{i\in K}\|x_i\|\le\varepsilon$. Luego $\sum_{i\in I}x_i$ es sumable por el criterio de Cauchy.

$\Rightarrow$|

(i) Si $\{a_i\}_{i\in I}\subset\mathbb{R}$ es sumable $\Rightarrow \sum_{i\in I}|a_i|$ es sumable. En efecto, si $\sum_{i\in I}|a_i|$ no es sumable, $\exists\,\varepsilon>0$ t.q. $\forall I_0\subset I$ finito, $\exists\, K\subset I\setminus I_0$ finito t.q. $\sum_{i\in K}|a_i|\ge 2\varepsilon \Rightarrow$ ó $\sum_{\substack{i\in K\\ a_i\ge 0}}a_i\ge\varepsilon$ ó $\sum_{\substack{i\in K\\ a_i<0}}|a_i|\ge\varepsilon$. En cualquiera de los dos casos ello implicaría que $\sum_{i\in I}a_i$ no es sumable.

(ii) Sea $\{z_j\}_{j\in J}\subset\mathbb{C}$, $z_j=a_j+ib_j$, sumable. Entonces obviamente $\sum_{j\in J}a_j$, $\sum_{j\in J}b_j$ son sumables $\Rightarrow \sum_{j\in J}|a_j|$, $\sum_{j\in J}|b_j|$ son sumables (por (i)). Como $|z_j|\le|a_j|+|b_j|$, concluimos que $\sum_{j\in J}|z_j|$ es sumable.

(iii) Sea $X = \mathbb{K}^n$ y $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ sumable, con $x_i = \{x_i^{(k)}\}_{k=1}^n$.

Tomemos en X la norma $\|\cdot\|_1$. Si $\sum_{i\in I} x_i$ es sumable $\Rightarrow \sum_{i\in I} x_i^{(k)}$ es sumable, $k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \sum_{i\in I} |x_i^{(k)}|$ es sumable, $k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow$

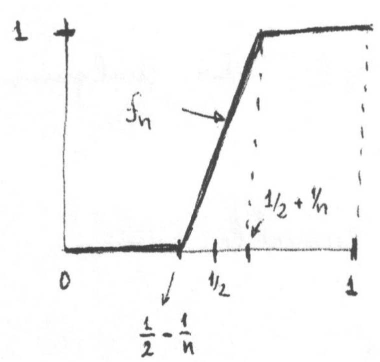
$\Rightarrow \sum_{i\in I} \sum_{k=1}^{n} |x_i^{(k)}| = \sum_{i\in I} \|x_i\|$ es sumable.

(b) Sea $\{i\in I : \|x_i\| > 0\}$ no contable $\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q. $\tilde{I} = \{i \in I : \|x_i\| > \delta\}$ es no contable. En particular $\tilde{I}$ es infinito. Luego $\forall I_0 \subset I$ finito, $\tilde{I} \setminus I_0 \neq \emptyset$. De aquí que $\forall I_0 \subset I$ finito, $\exists K \subset I \setminus I_0$ finito t.q. $\|S_K\| > \delta$, lo que implica que $\sum_{i\in I} x_i$ no es sumable.

---

(14) (i) La norma en este caso es: $\|f\| = \left[\sum_{n\geq 1} n^{-2}\cdot|f(t_n)|^2\right]^{1/2} = \left[\int_{[0,1]} |f(t)|^2 \, d\mu\right]^{1/2}$

donde μ es la medida finita t.q. $\mu(\{t_n\}) = \frac{1}{n^2}$. Estamos pues considerando $C([0,1]) \subset (L_2(\mu), \|\cdot\|_2)$. Sea f_n la función de la figura. Entonces



$\{f_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $L_2(\mu)$ pues si $m \geq n$:

$$\|f_m - f_n\|_2 = \left[\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_m - f_n|^2 \, d\mu\right]^{1/2} \leq$$

$f_m(\frac{1}{2}) = f_n(\frac{1}{2})$

$$\leq \left[\mu\left(\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{n}\right] \setminus \{\tfrac{1}{2}\}\right)\right]^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Sea $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ en $L_2(\mu)$. Entonces $f(t) = 0$ en $t \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2})$ y $f(t) = 1$ en $t \in \mathbb{Q} \cap (\frac{1}{2}, 1]$. Obviamente no existe en $C([0,1])$ ninguna función en estas condiciones $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = f \notin C([0,1]) \Rightarrow (C([0,1]), \|\cdot\|_2)$

(ii) La norma ahora es $\|f\| = \left[\int_0^1 |f(t)|^2 \cdot dt\right]^{1/2}$ e.d. se considera $C([0,1]) \subset (L_2(\lambda), \|\cdot\|_2)$ siendo λ la probabilidad de Lebesgue en $[0,1]$. Se considera la sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ anterior, que es de Cauchy en $L_2(\lambda)$. Si $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ en $L_2(\lambda)$, necesariamente $f(t) = 0$ c.t.p. $t \in [0, 1/2]$ y $f(t) = 1$ c.t.p. $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Obviamente no hay en $C([0,1])$ ninguna función en estas condiciones. Luego $(C([0,1]), \|\cdot\|_2)$ no es completo.

---

(15) Es claro que $\dim \mathcal{P}^n = 1+n$. Sea $T: \mathcal{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q., $\forall f \in \mathcal{P}^n$, $T(f) = \int_{-1}^0 f(t)\cdot dt$. Entonces $T \in (\mathcal{P}^n)' = (\mathcal{P}^n)^*$. Sabemos también que $\dim(\mathcal{P}^n)^* = 1+n$. Sea $\Psi: \mathcal{P}^n \longrightarrow (\mathcal{P}^n)^*$ t.q.

$$\forall p, f \in \mathcal{P}^n, \quad \Psi(p)(f) = \int_0^1 f(t)\cdot p(t)\cdot dt$$

Es obvio que Ψ es lineal y también inyectivo porque si $\Psi(p)(f) = 0$, $\forall f \in \mathcal{P}^n$, entonces $0 = \Psi(p)(p) = \int_0^1 |p(t)|^2 \cdot dt \Rightarrow p \equiv 0$. Como $\dim \mathcal{P}^n = \dim(\mathcal{P}^n)^* = 1+n$, resulta ser Ψ sobreyectivo $\Rightarrow \Psi$ es una biyección $\Rightarrow$ existe un único $p \in \mathcal{P}^n$ t.q. $T = \Psi(p)$ e.d., $\forall f \in \mathcal{P}^n$, $\int_{-1}^0 f\, dt = \int_0^1 f(t)\cdot p(t)\cdot dt$.

---

(16) Este resultado es el Teorema de JORDAN

(A) CASO REAL

Si X es un e.n. con la propiedad del paralelogramo, entonces:

$$\forall a,b \in X, \quad \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\left[\|a\|^2 + \|b\|^2\right]$$

y en particular, $\forall z, x, y \in X$:

$$(*) \qquad \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 = 2\left[\left\|\frac{x+y}{2} + z\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right]$$

Definimos $\langle x,y\rangle = 4^{-1}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$ y probemos:

(1) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

(2) $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$

(3) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(4) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

(1) y (2) son evidentes. Se tiene que:

$$\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle = 4^{-1}\left[\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right] \overset{(*)}{=}$$

$$= 4^{-1}\left[2\left[\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right] - 2\left[\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right]\right] =$$

$$= 2^{-1}\left[\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right] = 2\left\langle \frac{x+y}{2}, z\right\rangle$$

Poniendo $y=0$, obtenemos $\langle x,z\rangle = 2\left\langle \frac{x}{2}, z\right\rangle$, ya que $\langle 0,z\rangle = 0$. De aquí que $\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle = 2\left\langle\frac{x+y}{2}, z\right\rangle = \langle x+y, z\rangle$, lo que prueba (4) y parte de (3) (para $\alpha = \frac{1}{2}, 2$). En consecuencia (3) es válida para los puntos de $D = \left\{\alpha = \frac{m}{2^n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$, que es un conjunto denso de $\mathbb{R}$.

Como la aplicación: $\mathbb{R} \ni \alpha \xrightarrow{\varphi} \langle \alpha x,y\rangle - \alpha\langle x,y\rangle =$

$$= 4^{-1}\left[\|\alpha x+y\|^2 - \|\alpha x-y\|^2\right] - \alpha \cdot 4^{-1}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

es continua en $\mathbb{R}$, $\Psi(\alpha)=0$, $\forall\alpha\in D$, y $\overline{D}=\mathbb{R}$, concluimos que $\Psi(\alpha)=0$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, es decir, que se verifica (3).

(B) CASO COMPLEJO

Adoptamos para $<x,y>$ la definición del enunciado. Veamos que se verifican:

(I) $<x,y> = \overline{<y,x>}$

(II) $\|x\|^2 = <x,x>$

(III) $<\alpha x,y> = \alpha\cdot<x,y>$, $\forall\alpha\in\mathbb{C}$,

(IV) $<x+y,z> = <x,z> + <y,z>$

(I) y (II) son inmediatas, (IV) se obtiene de modo análogo a (4). En cuanto a (III) tenemos que:

(i) (3) $\Rightarrow \forall\alpha\in\mathbb{R}$, $<\alpha x,y> = \alpha\cdot<x,y>$ (comenzar con $\alpha\in D$ y extender luego a todo $\mathbb{R}$)

(ii) Se comprueba directamente que $<ix,y> = i<x,y>$

(iii) Por tanto aplicando (i), (ii) obtenemos:

$$<(\alpha+i\beta)x,y> = <\alpha x+i\beta x,y> = <\alpha x,y> + <i\beta x,y> =$$

$$= \alpha<x,y> + i<\beta x,y> = \alpha<x,y> + i\beta<x,y> = (\alpha+i\beta)<x,y>$$

es decir, (III) es cierta.

(17) Si $u\in L_2([-\pi,\pi])$ y $u\sim\{c_n\}$, por la identidad de Parseval tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(t)|^2\cdot dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2$$

Sea $u(t)=t$. Entonces $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt = \frac{\pi^2}{3}$, mientras que $c_0=0$ y, $n\neq 0$, $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\cdot e^{-int}\cdot dt = \frac{(-1)^{n-1}}{in}$. Así que: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

HOJA Nº 3

(18) Así como $X \subset X^{**}$ copia isométrica, también $X^* \subset X^{***}$ copia isométrica.

Queremos definir una proyección continua $P : X^{***} \longrightarrow X^*$. Si $z \in X^{***}$, Pz estará determinado si conocemos su acción sobre X, e.d. si conocemos $P(z)(x)$, $\forall x \in X$.

Definimos $Pz = z_{|X}$ e.d. $P(z)(x) = z(x)$, $\forall x \in X$, definición que tiene sentido pues si $z \in X^{***}$, z es un funcional continuo sobre X^{**}. Como $X \subset X^{**}$, su restricción $z_{|X}$ es un funcional continuo sobre $X \Rightarrow Pz = z_{|X} \in X^*$.

(1) Es claro que P es lineal. También es continuo pues $\forall z \in X^{***}$:

$$\|Pz\| = \sup\{|P(z)(x)| : x \in B_X\} = \sup\{|z(x)| : x \in B_X\} \leq$$

$B_X \subset B_{X^{**}}$

$$\leq \sup\{|z(x^{**})| : x^{**} \in B_{X^{**}}\} = \|z\|.$$

(2) $P^2 = P$. En efecto, sea $z \in X^* \subset X^{***}$ y veamos que $Pz = z$. Bastará ver que, $\forall x \in X$, $(Pz)(x) = z(x)$. Pero ello es evidente por la definición de Pz.

---

(19) Sea $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0} \in \ell_1$ y $x = (x_n)_{n\geq 1} \in C$, con $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Definimos

$$\ell_1 \ni \alpha \xrightarrow{\Psi} \Psi(\alpha) \in C^* \quad \text{t.q.} \quad \Psi(\alpha)(x) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \cdot x_n$$

las desigualdades siguientes:

$$\left|\sum_{n\geq 0} \alpha_n \cdot x_n\right| \leq \sum_{n\geq 0} |\alpha_n|\cdot|x_n| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{n\geq 0} |\alpha_n| = \|x\|_\infty \cdot \|\alpha\|_1$$

prueban que $\Psi(\alpha) \in C^*$ y que $\|\Psi(\alpha)\| \leq \|\alpha\|_1$. En realidad $\|\Psi(\alpha)\| = \|\alpha\|_1$.

En efecto, sean $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\sum_{n=0}^{n_0} |\alpha_n| \geq \|\alpha\|_1 - \varepsilon/2$. Sea $(x_n)_{n\geq 1} = x \in C$ t.q. $|x_n| = 1$, $x_n \cdot \alpha_n = |\alpha_n|$ para $n = 1, \ldots, n_0$, y $x_n = x_0$ t.q. $|x_0| = 1$, $x_0 \cdot \alpha_0 = |\alpha_0|$ para $n > n_0$. Entonces $\|x\|_\infty = 1$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ y $|\Psi(\alpha)(x)| \geq \sum_{n=0}^{n_0} |\alpha_n| - \varepsilon/2 \geq \|\alpha\|_1 - \varepsilon$.

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\|\Psi(\alpha)\| \geq \|\alpha\|_1 \Rightarrow \|\Psi(\alpha)\| = \|\alpha\|_1$

Así que $\Psi: \ell_1 \to c^*$ es un isomorfismo isométrico sobre su imagen.

Sabemos que $c = c_0 \oplus \mathbb{K}$ (suma topológica, siendo la proyección $P: c \to \mathbb{K}$ $P(x) = x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x = (x_n)_{n\geq 1} \in c$, y $Q: I-P: c \to c_0$ t.q. $Q(x) = (x_n - x_0)_{n\geq 1}$)

Por tanto si $z^* \in c^*$, se podrá descomponer $z^* = x^* + y^*$ donde $x^* = z^*_{|c_0} \in c_0^* = \ell_1$ $\Rightarrow x^* = (\tilde{\alpha}_n)_{n\geq 1}$, mientras que $y^* = z^*_{|\mathbb{K}} \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \Rightarrow y^* = \tilde{\alpha}_0$ (un solo número), y además, para $(x_n)_{n\geq 1} = x \in c$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, se tiene que:

$$z^*(x) = \sum_{n\geq 1} \tilde{\alpha}_n (x_n - x_0) + \tilde{\alpha}_0 \cdot x_0 = \left(\tilde{\alpha}_0 - \sum_{n\geq 1} \tilde{\alpha}_n\right) x_0 + \sum_{n\geq 1} \tilde{\alpha}_n \cdot x_n$$

Sea $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0} \in \ell_1$ t.q. $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 - \sum_{n\geq 1} \tilde{\alpha}_n$, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$, $n \geq 1$. Se tiene trivialmente que $\Psi(\alpha) = z^*$. Luego Ψ es sobreyectivo. Por tanto c^* y ℓ_1 son isomorficamente isométricos.

---

(20) $1 \Rightarrow 2$. Como K es métrico compacto, su topología tiene base contable de abiertos, digamos $\{U_n\}_{n\geq 1}$. Sea $f_n \in C(K, \mathbb{R})$ t.q. $f_n(k) > 0$, $\forall k \in U_n$, pero $f_{n|^c U_n} = 0$ (por ejemplo $f_n(k) = \inf\{1, d(k, {}^c U_n)\}$). El álgebra $\mathcal{A} = \text{alg}\{1, \{f_n\}_{n\geq 1}\}$ separa puntos de K, contiene a 1 y es separable. El T. de Stone-Weierstrass nos dice que $C(K, \mathbb{R}) = \overline{\mathcal{A}}$. Luego $C(K, \mathbb{R})$ es separable, y también $C(K, \mathbb{C})$ pues $C(K, \mathbb{C}) = C(K, \mathbb{R}) + i\, C(K, \mathbb{R})$.

$2 \Rightarrow 1$. Sea (K, τ) compacto t.q. $C(K, \mathbb{R})$ es separable ($C(K, \mathbb{C})$ separable $\Rightarrow C(K, \mathbb{R})$ separable). Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\geq 1}$ familia densa en $B_{C(K,\mathbb{R})}$ y τ_0 la topología inicial en K para la familia $\mathcal{F}$. Notemos que τ_0 es T_2 (porque $\mathcal{F}$ separa puntos de K) y $\tau_0 \leq \tau$ (pues toda f_n es continua en (K,τ)). Así que $(K,\tau) \xrightarrow{id} (K,\tau_0)$ es continua $\Rightarrow \tau = \tau_0$ (por ejemplo, tienen los mismos cerrados $\Rightarrow$ tienen los mismos abiertos). Pero τ_0 es metrizable. Concretamente si ponemos:

$$\forall x,y \in K, \quad d(x,y) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\left(|f_n(x) - f_n(y)|\right)$$

resulta que d es una distancia cuya topología subordinada τ_d verifica $\tau_d = \tau_0$.

---

(21) Recordemos que $L_2([0,1])^* = L_2([0,1])$. Probemos que $x_n \xrightarrow{w} 0$ e.d.

$$\forall f \in L_2([0,1]), \quad \int_0^1 f(t)\cdot \operatorname{sen} nt \cdot dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (*)$$

Pero $(*)$ es consecuencia del Lema de Riemann-Lebesgue y de que $L_2([0,1]) \subset L_1([0,1])$. Por otra parte:

$$\|x_n\|_2 = \left[\int_0^1 \operatorname{sen}^2 nt\cdot dt\right]^{1/2} = \left[\int_0^1 \frac{1-\cos 2nt}{2}\, dt\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}t - \frac{\operatorname{sen} 2nt}{4n}\Big|_0^1\right]^{1/2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2n}{4n}\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$$

---

(22)

$\underline{1 \Rightarrow 2}$. Notemos que (1) equivale a decir que $T: (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ es continuo. Para probar (2) (e.d. que $T: (X,w) \to (Y,w)$ es continuo) tenemos que ver que $\forall y^* \in Y^*$, $y^* \circ T: (X,w) \to \mathbb{K}$ es continuo. Como $y^*: (Y,\|\cdot\|) \to \mathbb{K}$ continuo, resulta que $y^*\circ T: (X,\|\cdot\|) \to \mathbb{K}$ continuo (y lineal), e.d. $y^*\circ T \in X^* = X^*_w \Rightarrow$ $\Rightarrow y^*\circ T: (X,w) \to \mathbb{K}$ continuo.

$\underline{2 \Rightarrow 3}$ Probemos que $T(B_X)$ es acotado en $(Y,\|\cdot\|)$. Por 18.5.COR. bastará ver que $y^*\circ T(B_X) \subset \mathbb{K}$ es acotado, $\forall y^* \in Y^*$. Por (2), $y^* \circ T \in X^*_w = X^* \Rightarrow$

$\Rightarrow y^* \circ T : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow \mathbb{K}$ continua (y lineal) $\Rightarrow y^* \circ T(B_X)$ es acotado.

$3 \Rightarrow 1$ Ver **Lección 2.1**

---

(23) (A) Sea X separable y $\mathcal{F} = \{x_n\}_{n \geq 1}$ familia densa en $B_X \Rightarrow \mathcal{F}$ separa puntos de B_{X^*}. Sea τ_0 la topología inicial en B_{X^*} para las aplicaciones $B_{X^*} \ni x^* \longrightarrow x^*(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Es claro que τ_0 es T_2 (porque $\mathcal{F}$ separa puntos de B_{X^*}) y que $id : (B_{X^*}, w^*) \longrightarrow (B_{X^*}, \tau_0)$ es continua (porque obviamente $\tau_0 \leq w^*$). Al ser (B_{X^*}, w^*) compacto, es claro que $w^* = \tau_0$ (por ejemplo, tienen los mismos cerrados). Pero τ_0 es metrizable pues es la topología subordinada a la métrica:

$$\forall x^*, y^* \in B_{X^*}, \quad d(x^*, y^*) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} |(x^* - y^*)(x_n)|$$

(B) Sea (B_{X^*}, w^*) metrizable $\Rightarrow K = (B_{X^*}, w^*)$ es métrico compacto. Por Ej. 100, $C(K)$ es separable. Pero $X \subset C(K)$ isomorfica e isometricamente (21.6.COR.). Luego X es separable.

---

(24) Sea $f(t) = e^{st}$ y $f \sim \{c_n\}_{n \geq 1}$ en $L_2([-\pi, \pi])$. La identidad de Parseval dice:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2st} . dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Calculemos c_n:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{st} . dt = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{st}}{s} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{sh\, s\pi}{\pi s}$$

$$n \neq 0, \; c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{st} . e^{-int} . dt = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{(s-in)t}}{s-in} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(s-in)\pi} - e^{-(s-in)\pi}}{s-in} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{s\pi}\cdot(\cos n\pi - i \operatorname{sen} n\pi) - e^{-s\pi}\cdot(\cos n\pi + i \operatorname{sen} n\pi)}{s - in} = \frac{1}{2\pi} \frac{(e^{s\pi} - e^{-s\pi})}{s-in} (-1)^n =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sh}(s\pi)}{s-in}$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2st}\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{2st}}{2s}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{2s\pi} - e^{-2s\pi}}{2s} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\cdot \operatorname{sh} 2s\pi}{2s} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{sh} s\pi \cdot \operatorname{ch} s\pi}{s}$$

Así que: $\frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sh} s\pi \cdot \operatorname{ch} s\pi}{s} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\operatorname{sh}^2 s\pi}{s^2+n^2} \Rightarrow \frac{\pi}{s}\operatorname{cth} s\pi = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{s^2+n^2}$