# ANALISIS FUNCIONAL. HOJA N. 4

1.- Se tiene que $\begin{matrix} U(I-ST) = I \\ (I-ST)U = I \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} UST = U - I \\ STU = U - I \end{matrix}$.

Así que: (a) $(I-TS)(I+TUS) = I + TUS - TS - TSTUS =$

$$= I + T(U-I)S - TSTUS =$$
$$= I + T(STU)S - TSTUS = I$$

(b) $(I+TUS)(I-TS) = I - TS + TUS - TUSTS =$

$$= I + T(U-I)S - TUSTS =$$
$$= I + T(UST)S - TUSTS = I$$

---

2.- (a) Sean $x, y \in H$ arbitrarios. Entonces:

$$0 = \langle T(x+y), x+y \rangle = \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle$$

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tq $\lambda^2 \langle T^2 x, x \rangle \geq 0$ y cojamos $y = \lambda \cdot Tx$.

Entonces:

$$\bar{\lambda} \langle Tx, Tx \rangle + \lambda \langle T^2 x, x \rangle = 0 \xRightarrow{\boxed{\text{multipli. por } \lambda}} |\lambda|^2 \cdot \|Tx\|^2 + \lambda^2 \langle T^2 x, x \rangle = 0$$

$\Rightarrow \|Tx\| = 0$, $\forall x \in H \Rightarrow T = 0$.

(b) Sea $H = \mathbb{R}^2$ eH sobre $\mathbb{R}$ y $T$ = giro de $\underline{\underline{90^\circ}}$.

---

3.- Supongamos que el espectro $\sigma(T) = \emptyset \Leftrightarrow \rho(T) = \mathbb{C}$. Vamos a deducir una contradicción:

Aserto 1 "Sean $x^* \in E^*$, $x \in E$ fijos y definamos:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = x^*((zI - T)^{-1} x) = x^*(R(z,T)x).$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $\|(zI-T)^{-1}\| \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$, $f(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$ y $f = \text{cte}$."

DEM

Por 2.5.3.2 (Teoría), $f'(z) = x^*(-R(z,T)^2 x)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Se tiene que $(zI-T)^{-1} = \frac{1}{z}(I - T/z)^{-1}$, $z \neq 0$. Como $I - T/z \xrightarrow[z\to\infty]{} I$, y la inversión es continua, concluimos que $(I-T/z)^{-1} \xrightarrow[z\to\infty]{} I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|(zI-T)^{-1}\| = \left\|\frac{1}{z}(I-T/z)^{-1}\right\| \xrightarrow[z\to\infty]{} 0 \Rightarrow (zI-T)^{-1}x \xrightarrow[z\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0 \Rightarrow f = cte.$$

Aserto 2 "Sea $x \in E \setminus \{0\}$. Entonces la aplicación $\mathbb{C} \ni z \longrightarrow (zI-T)^{-1}x \in E$ es inyectiva. En particular $|\{(zI-T)^{-1}x : z \in \mathbb{C}\}| \geq 2$."

DEM Por 2.5.3, si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$, se tiene que:

$$R(z_1,T)x - R(z_2,T) = (z_2 - z_1) \circ R(z_1,T) \circ R(z_2,T)x \neq 0$$

($\neq 0$ porque $R(z,T)$ es un isomorfismo de $E$).

Sea $x^* \in E \setminus \{0\}$ arbitrario y $x^* \in E^*$ tq $x^*$ no cte sobre $\{(zI-T)^{-1}x : z \in \mathbb{C}\}$.
Entonces $f(z) = x^*((zI-T)^{-1}x) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es acotada y no cte $\Rightarrow$ CONTRADICCIÓN

4.- Sea $S = (\lambda I - T)^{-1}$. Entonces:

$$I = S(\lambda I - T) \Rightarrow \lambda S - ST \Rightarrow 1 \geq |\lambda| \cdot \|S\| - \|S\| \cdot \|T\| \Rightarrow$$

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| = \|S\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$$

5.- Por 2.5.3 (Teoría) sabemos que $R(\lambda_n,T) - R(\lambda_m,T) = (\lambda_m - \lambda_n) \cdot R(\lambda_m,T) \circ R(\lambda_n,T)$.

Por tanto $\{R(\lambda_n,T)\}_{n\geq 1}$ es sucesión de Cauchy $\Rightarrow R(\lambda_n,T) \xrightarrow[n\to\infty]{} S \in \mathcal{B}(E)$.

~~Para cada $x \in E$~~:

$$\begin{array}{ccccc} R(\lambda_n, T)(\lambda_n I - T) & = & I & = & (\lambda_n I - T)\, R(\lambda_n, T) \\ \downarrow & & \downarrow\ n\to\infty & & \downarrow \\ S \circ (\lambda I - T) & = & I & = & (\lambda I - T) \cdot S \end{array}$$

Por tanto $\exists\ (\lambda I - T)^{-1} = S \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$.

6.- ① Obvio

② ⓐ Es claro que $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} = ev(T)$ (= autovalores de T). En efecto,

$\subseteq|$ $Te_n = \lambda_n e_n \Rightarrow \lambda_n \in ev(T)$, $n \geq 1$

$\supseteq|$ Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $\exists\, x \in \ell_p \setminus \{0\}$ de modo que $(\lambda I - T)x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda x_n = \lambda_n \cdot x_n$, $n \geq 1$. Como $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tq $x_m \neq 0$, deberá ser $\lambda = \lambda_m$.

ⓑ Veamos que $\sigma(T) = \overline{ev(T)}$.

$\subseteq|$ Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus ev(T) \Rightarrow \lambda I - T$ es 1-a-1 pero no sobre.

Afirmamos que $\lambda \in \overline{ev(T)}$. En efecto, si $\lambda \notin \overline{ev(T)} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tq $|\lambda - \lambda_n| \geq \varepsilon$, $\forall n \geq 1$. Así que, $\forall\, u \in \ell_p$, tomando

$$x = \left(\frac{u_n}{\lambda - \lambda_n}\right)_{n\geq 1} \in \ell_p$$ resultaría que $(\lambda I - T)x = u \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda I - T$ es sobre. CONTRADICCIÓN

$\supseteq|$ Sea $\lambda \in \overline{ev(T)} \setminus ev(T) \Rightarrow \exists\, \{n_i\}_{i\geq 1} \subset \mathbb{N}$, $n_i < n_{i+1}$, $\lambda_{n_i} \to \lambda$,

tq $\displaystyle\sum_{i\geq 1} \left|\frac{1/2^i}{\lambda - \lambda_{n_i}}\right|^p = +\infty$. Sea $u \in \ell_p$ tq $u(n) = \begin{cases} 0, & n \notin \{n_i\}_{i\geq 1} \\ 1/2^i, & n = n_i \end{cases}$.

Se tiene que $\nexists\, x \in \ell_p$ tq $(\lambda I - T)x = u \Rightarrow \lambda I - T$ no es sobre $\Rightarrow \lambda \in \sigma(T)$.

7.- (1) ⓐ Sea $p < +\infty$. Probemos que $ev(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}$.

$\subseteq|$ Sea $\lambda \in ev(S) \Rightarrow \exists\, u \in \ell_p \setminus \{0\}$ tq $\lambda u - Tu = 0 \Leftrightarrow u(n+1) = \lambda \cdot u(n)$, $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow |\lambda| < 1$ porque $u \in \ell_p \setminus \{0\}$.

$\supseteq|$ Sea $0 < |\lambda| < 1$ y $u = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots)$. Entonces $u \in \ell_p$ y $(\lambda I - T)u = 0$

Si $\lambda = 0$, cogemos $u = (1, 0, 0, \ldots)$ que verifica $Tu = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$

en ambos casos $\lambda \in ev(S)$.

(b) Sea $p=\infty$. Probemos que $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$.
Es análogo al caso anterior.

(2) En primer término $\|S^n\| = 1$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow r(S) = \lim_{n\to\infty} \|S^n\|^{1/n} = 1$.

Así que $\sigma(S) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$. Por otra parte $\sigma(S)$ es <u>compacto</u> $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$.

---

8.- (a) <u>T es operador lineal y continuo pues</u>:

$$\forall x \in H, \quad \|Tx\| = \Big\|\sum_{n\geq 1} \mu_n \langle x, f_n\rangle f_n\Big\| = \Big(\sum_{n\geq 1} \mu_n^2 \cdot |\langle x, f_n\rangle|^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \big(\sup_{n\geq 1} |\mu_n|\big) \cdot \Big(\sum_{n\geq 1} |\langle x, f_n\rangle|^2\Big)^{1/2} \leq \big(\sup_{n\geq 1} |\mu_n|\big) \cdot \|x\|.$$

(b) <u>T es autoadjunto porque $\mu_n \in \mathbb{R}$</u>, e.d.

$u \perp \{f_n\}_{n\geq 1}$

$$\forall x, y \in H, \quad \langle Tx, y\rangle = \Big\langle \sum_{n\geq 1} \mu_n \langle x, f_n\rangle f_n, \sum_{n\geq 1} \langle y, f_n\rangle f_n + u \Big\rangle =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \mu_n \langle x, f_n\rangle \langle y, f_n\rangle = \Big\langle \sum_{n\geq 1} \langle x, f_n\rangle f_n + u, \sum_{n\geq 1} \mu_n \langle y, f_n\rangle f_n \Big\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

Así que $T = T^*$ (= adjunto de Hilbert de T).

(c) <u>T es compacto</u>.

¿$A \subset c_0$

<u>Aserto</u> Sea $A \subset \ell_p$, $1 \leq p < +\infty$, Son equivalentes:

(1) A es acotado y, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tq $\forall u \in A$, $\|u|_{[n_0, \to)}\| \leq \varepsilon$.

(2) A es relativamente compacto

<u>DEM</u> Es conocido y trivial (probar que es precompacto).

Pero $T(B_H)$ es acotado y verifica el ASERTO, pues si $x \in B_H$, $k \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\|Tx|_{[k,\to)}\| = \Big(\sum_{n\geq k} \mu_n^2 |\langle x, f_n\rangle|^2\Big)^{1/2} \leq \sup_{n\geq k} |\mu_n| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

---

9.- (A)

(a) T es compacto $\Leftrightarrow \lambda_n \to 0$

$\Rightarrow$ Es inmediato que, $\forall \varepsilon > 0$, $|\{n : |\lambda_n| \geq \varepsilon\}| < \aleph_0 \Rightarrow \lambda_n \to 0$

(porque si $A_\varepsilon = \{n : |\lambda_n| \geq \varepsilon\}$ fuese infinito $\Rightarrow T|_{\ell_p(A_\varepsilon)}$ es un isomorfismo)

$\Leftarrow$ Se verifica el <u>ASERTO</u> de Ej. 8 (es válido para los en esta dirección)

(b) Sabemos que T es Hilbert-Schmidt sii $\sum_{n \geq 1} \|Te_n\|^2 < +\infty$ ; pero $\|Te_n\| = |\lambda_n|$.

(B) No es compacto, porque $|\sigma(R)| \leq \aleph_0$, $\forall R$ compacto.

(C) Es claro que TS es compacto. Afirmamos que $ev(TS) = \sigma(TS) = \{0\}$.

(1) <u>$\lambda \in ev(TS)$</u> pues si $u = (1, 0, 0, \ldots) \Rightarrow TSu = 0$

(2) Observemos que $(TSx - \lambda x)(n) = \lambda_n \cdot x(n+1) - \lambda \cdot x(n)$.
Por tanto $(TS - \lambda)x = 0 \Leftrightarrow x(n+1) = \frac{\lambda}{\lambda_n} \cdot x(n)$. Si <u>$\lambda \neq 0$</u>, como $\lambda_n \to 0$, nos saldríamos de $\ell_p \Rightarrow ev(TS) = \{0\}$.

(3) Por lo tanto, $\forall \lambda \neq 0$, $TS - \lambda I$ es inyectivo. Por otra parte:

"Si R es compacto, $I - R$ es invertible $\Leftrightarrow$ $I - R$ es inyectivo"

Así que, $\forall \lambda \neq 0$:

$TS - \lambda I$ inyectivo $\Leftrightarrow \frac{TS}{\lambda} - I$ inyectivo $\Leftrightarrow \frac{TS}{\lambda} - I$ invertible

Por tanto $\sigma(TS) = \{0\}$

---

10.- $\Rightarrow$ Sea $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset B_H$ sucesión, $y_n = T^* x_n$. Entonces:

$$\|y_n - y_m\|^2 = \langle T^*(x_n - x_m), T^*(x_n - x_m) \rangle = \langle x_n - x_m, T \circ T^*(x_n - x_m) \rangle =$$

$$= \langle x_n - x_m, T(y_n - y_m) \rangle \leq \|x_n - x_m\| \cdot \|Ty_n - Ty_m\| \leq$$

$$\leq 2 \cdot \|Ty_n - Ty_m\|$$

Como T es compacto y la sucesión $\{y_n\}_{n \geq 1}$ es acotada, existe una subsucesión $\{Ty_{n_k}\}_{k \geq 1}$ convergente $\Rightarrow \|y_{n_k} - y_{n_s}\| \xrightarrow[k,s \to \infty]{} 0$

e.d. $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1}$ es de Cauchy.

$\Leftarrow$ No se necesita pues $T^{**} = T$. (es como antes)

11.- <u>a ⇒ b</u> Obviamente $Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$. También $\{Tx_n\}_{n\geq 0}$ es acotado

$\Rightarrow \exists \{n_k\}$ tq $\{Tx_{n_k}\}_{k\geq 1}$ converge en la norma. Obviamente $Tx_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx_0$.

Afirmamos que $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx_0$. En efecto, si $\exists \varepsilon > 0$ y $\exists \{m_p\}_{p\geq 1} \subset \mathbb{N}$

tq $\|Tx_{m_p} - Tx_0\| \geq \varepsilon$, se tendría que:

(i) $\exists \{p_i\}_{i\geq 1} \subset \mathbb{N}$ tq $\{Tx_{m_{p_i}}\}_{i\geq 1}$ converge en norma y, obviamente,

ha de ser $Tx_{m_{p_i}} \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx_0$.

(ii) Por otra parte $\|Tx_{m_{p_i}} - Tx_0\| \geq \varepsilon$. <u>CONTRADICCIÓN</u>.

<u>b ⇒ a</u> Aprovechamos que de toda secuencia acotada en un reflexivo se puede sacar una subsecuencia convergente.

12.- (a) Basta probarlo para $x_n \xrightarrow{w} 0$. Así que supongamos que $x_n \overset{\|\cdot\|}{\not\to} 0$. Spdg podemos suponer que $\exists \varepsilon > 0$, $\exists \{n_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$, $n_k < n_{k+1}$, tq.

(i) $\| x_k|_{[n_k, n_{k+1})} \| \geq \varepsilon$

(ii) $\| x_k|_{[1, n_k)} \| \leq \varepsilon/20 \geq \| x_k|_{[n_{k+1}, +\infty)} \|$.

Gracias a esta situación fabricamos $z = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$, $\varepsilon_n = +1$ ó $-1$

tq $z(x_k) \geq \varepsilon - \frac{2}{20}\varepsilon$. <u>CONTRADICCIÓN</u>.

(b) Basta considerar la id: $\ell_1 \longrightarrow \ell_1$

13.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $K \in C([a,b]^2)$ y $\alpha, \beta: [a,b] \to [a,b]$ continuas.

Si $f \in C([a,b])$, $x \in [a,b]$ ponemos:

$$Tf(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y)\cdot f(y)\, dy$$

Prueba que $T: C([a,b]) \to C([a,b])$ es lineal y compacto

14.- Sea $T: C([0,1]) \to C([0,1])$ tq $\forall f \in C([0,1])$, $\forall x \in [0,1]$

$$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(t)\, dt$$

Prueba que $T$ es ~~operador~~ compacto y calcula $\sigma(T)$.

13.- Solución

En primer término, es claro que $Tf \in C([a,b])$ y que $T$ es lineal.

Por otra parte, $\|Tf\| \leq \|K\| \cdot \|f\| (b-a) \Rightarrow T$ es operador continuo.

Veamos que $T(B_{C([a,b])})$ es un conjunto equicontinuo en $C([a,b])$.

Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$, $f \in C([a,b])$. Entonces:

$$|Tf(x_1) - Tf(x_2)| = \left| \int_{\alpha(x_1)}^{\beta(x_1)} K(x_1,y) f(y)\,dy - \int_{\alpha(x_2)}^{\beta(x_2)} K(x_2,y) f(y)\,dy \right| =$$

$$= \left| \int_{\alpha(x_2)}^{\beta(x_2)} (K(x_1,y) - K(x_2,y)) f(y)\,dy + \int_{\beta(x_2)}^{\beta(x_1)} K(x_1,y) f(y)\,dy - \int_{\alpha(x_2)}^{\alpha(x_1)} K(x_1,y) f(y)\,dy \right| \leq$$

$$\leq \|f\| \cdot \int_a^b |K(x_1,y) - K(x_2,y)|\,dy + \|f\| \cdot \|K\| \left( |\beta(x_1) - \beta(x_2)| + |\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| \right) \leq$$

$$\leq \|f\| \cdot \left[ (b-a) \cdot \sup_{a \leq y \leq b} |K(x_1,y) - K(x_2,y)| + \|K\| \left( |\beta(x_1) - \beta(x_2)| + |\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| \right) \right]$$

La equicontinuidad sale de la cont. uniforme de $K, \alpha, \beta$.

Aplicando T. de Ascoli concluimos que $T$ es compacto.

14.- Por Ej. 13, sabemos que $T$ es compacto y que $0 \in \sigma(T)$ aunque claramente $0 \notin ev(T)$. Sea $0 \neq \lambda \in ev(T)$ y $g \in C([0,1])$ el correspondiente autovector no nulo. Entonces:

$$\forall x \in [0,1], \quad \lambda g(x) = \int_0^{1-x} g(t)\,dt \quad \Longrightarrow \quad g \in C^1, \; g(1) = 0$$

$$\lambda g'(x) = -g(1-x), \quad \forall x \in [0,1]$$

Por tanto $g \in C^2$ y además:

$$g \neq 0, \quad g(1) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad \lambda g'(1) = -g(0)$$

$$\lambda g''(x) = -\frac{g(x)}{\lambda}, \quad \forall x \in [0,1].$$

La solución de la anterior ec. dif. es de la forma

$$g(x) = A \cdot \cos(x/\lambda)$$

Los condicions se satisfacen cuando $\cos(1/\lambda) = 0$, $\text{sen}(1/\lambda) = 1$, e.d.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff \lambda = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto $\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

---

Ej. 15

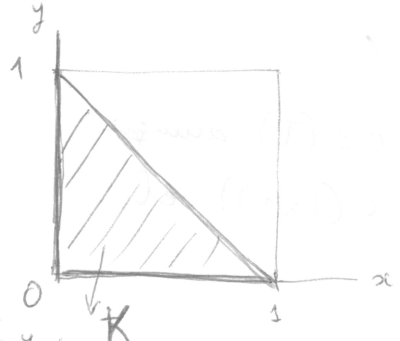
(a) Por ser cada $P_n$ de rango finito, $\dim P_n X < +\infty$ y obviamente

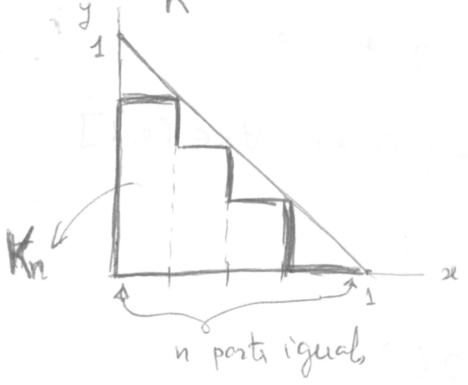
$\overline{\bigcup_{n \geq 1} P_n X} = X \Rightarrow X$ es separable.

(b) Basta considerar los operadores $T_n = P_n \circ T$ y observar que la convergencia de $\{P_n x\}_{n \geq 1}$ es uniforme para $x \in K$, $K \subset X$ compacto.

---

16.– De entrada observemos que $L_\infty([0,1]) \subset L_p([0,1]) \subset L_1([0,1])$ y que $\forall f \in L_p([0,1])$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_p$. Sean $K_n, K$ las superficies de la figura y definamos, $\forall f \in L_p$, $\forall x \in [0,1]$ :




$$T_n f(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{K_n}(x,y) \cdot f(y)\, dy$$

$$Tf(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_K(x,y) \cdot f(y)\, dy = \int_0^{1-x} f(y) \cdot dy$$

Se tiene que :

(a) $T_n f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mathbb{1}_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, tq

$|\lambda_i| \leq \int_0^1 |f(y)|\, dy$. Por tanto $T_n f \in L_p([0,1])$,

$T_n : L_p([0,1]) \to L_p([0,1])$ es lineal y tiene rango finito.

(b) Es claro que, $\forall x \in [0,1]$, $Tf(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x)$. Como $T_n f$ es medible concluimos que <u>$Tf$ es medible</u>.

(c) Sea $S = T_n$ ó $S = T$ y $f \in L_p([0,1])$. Acotemos $\|Sf\|_p^p$:

$$\|Sf\|_p^p = \int_0^1 |Sf(x)|^p \cdot dx \leq \int_0^1 \left| \int_0^1 |f(y)|\, dy \right|^p \cdot dx =$$

$$= \left| \int_0^1 |f(y)|\, dy \right|^p = \|f\|_1^p \leq \|f\|_p^p$$

En consecuencia $T_n f, Tf \in L_p([0,1])$ y las aplicaciones:

$$T, T_n : L_p([0,1]) \longrightarrow L_p([0,1])$$

son lineales y continuas.

(d) $\|T - T_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. En efecto, si $f \in B_{L_p([0,1])}$:

$$\int_0^1 |(T-T_n)f(x)|^p \cdot dx = \int_0^{1/n} |(T-T_n)f(x)|^p dx + \cdots + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 |(T-T_n)f(x)|^p \cdot dx \leq$$

$$\leq \int_0^{1/n} \left| \int_{1-1/n}^1 |f(y)|\, dy \right|^p \cdot dx + \cdots + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 \left| \int_0^{1/n} |f(y)|\, dy \right|^p \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{n} \left| \int_{1-1/n}^1 |f(y)|\, dy \right|^p + \cdots + \frac{1}{n} \left| \int_0^{1/n} |f(y)|\, dy \right|^p \leq \frac{\|f\|_1 \; {\leq 1/n}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(e) Por tanto $T$ es compacto porque $T_n$ es de rango finito

(f) Si $f \in L_1([0,1])$, la funcion $g(x) = \int_0^{1-x} f(y)\, dy$ es continua.

(g) Es claro que $0 \in \sigma(T)$ y además $0 \notin ev(T)$ porque $Tf = 0$ sii $f = 0$ (e.d. $T$ es inyectivo). Sea $\lambda \in ev(T)$, $\lambda \neq 0$, y $g$ un autovector correspondiente a $\lambda$. Entonces:

$\forall x \in [0,1]$, $\lambda \cdot g(x) = \int_0^{1-x} g(y)\,dy \Rightarrow g \in C([0,1])$.

Por tanto, estamos en el Ej. 14 e.d.

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

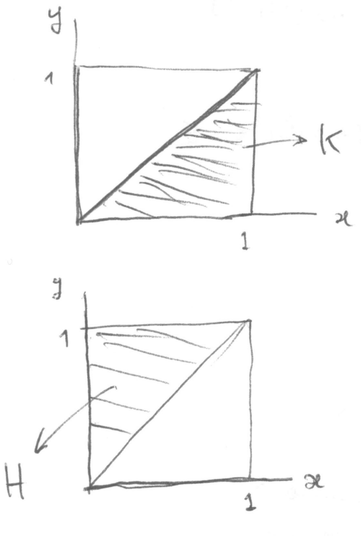
Ej. 17

(a) Es inmediato. Por otra parte, $g_1, g_2 \in E$ siendo

$$g_1(x) = \int_0^x y \cdot f(y)\,dy, \quad g_2(x) = x \cdot \int_x^1 f(y)\,dy$$

y se comprueba sin dificultad que $T: E \to E$ es lineal y continuo.

(b) El operador $Af(x) = \int_0^x y f(y)\,dy = \int_0^1 \mathbb{1}_K(x,y) \cdot y f(y)\,dy$ es límite de operadores de rango finito (como en Ej. 16). Luego es compacto. Análogamente $Bf(x) = x \int_x^1 f(y)\,dy = \int_0^1 x \cdot \mathbb{1}_H(x,y)\, f(y)\,dy$ es compacto. Por tanto T es compacto.




(c) Claramente $0 \in \sigma(T)$. Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ y $f$ autovector asociado. Entonces:

$$\lambda f(x) = \int_0^x y f(y)\,dy + x \int_x^1 f(y)\,dy \Rightarrow f \in C([0,1])$$

Así que:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lambda \cdot f'(x) = x \cdot f(x) + \int_x^1 f(y)\,dy - x \cdot f(x) = \int_x^1 f(y)\,dy \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda f''(x) = -f(x)$$

La solución de esta ec. dif. es $f(x) = A \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ con

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\lambda = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right)^2$. Así que:

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right)^2 : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$