SOLUCIÓN DE EJERCICIOS. HOJA Nº1

Ejercicio 1

(a) Puesto que $\alpha^n = 1$, es claro que $(\alpha^k)^n = (\alpha^n)^k = 1^k = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Es decir, $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\} \subset \{\text{raíces } n\text{-ésimas de } 1\}$. Además $\alpha^k \neq 1$, si $1 \leq k < n$, por lo que los elementos de $A := \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^n\}$ son todos distintos. Observemos también que $\{\alpha^k : k \in \mathbb{Z}\} = A$ y que A es un grupo cíclico multiplicativo.

Que $A = \{\text{raíces } n\text{-ésimas de } 1\}$ se deduce del hecho de que $z^n - 1 = 0$ no puede tener más de n raíces. (Si $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$ fuesen raíces distintas de $z^n - 1 = 0$, entonces cada $z - r_i$ dividiría a $z^n - 1$ y como son factores primos entre sí, resultaría que $\prod_{i=1}^{n+1} (z - r_i)$ divide a $z^n - 1$, lo que no puede ser)

(b) Puesto que $\alpha^n - 1 = 0$ y $\dfrac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \dots + 1$ concluimos que: $1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1} = 0$.

Ejercicio 2.

Si $r_1, \dots, r_n$ son las raíces de $a_0 \cdot z^n + \dots + a_n = 0$, resultará que $a_0 z^n + \dots + a_n = a_0 (z - r_1) \cdots (z - r_n)$, de donde $\sum_{i=1}^{n} r_i = -\dfrac{a_1}{a_0}$ y $\prod_{i=1}^{n+1} r_i = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0}$.

Ejercicio 3.

Si $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, sabemos por Ej. 1 que $\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} = -1$. Luego:

(a) $$-1 = \mathrm{Re}\left(\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}\right) = \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} \cdot 2 + \dots + \cos \frac{2\pi}{n}(n-1)$$

(b) $$0 = \mathrm{Im}\left(\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}\right) = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \cdot 2 + \dots + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}(n-1)$$

Ejercicio 4.

(a) $$z = \sqrt[4]{-81} = \left\{ 3 \cdot e^{\frac{\pi i}{4} + \frac{2\pi i}{4} k} : k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

(b) $$z = \sqrt[6]{-1 + \sqrt{3}\, i} = \sqrt[6]{2 \cdot \exp\left(\frac{2\pi}{3} i\right)} = \left\{ 2^{1/6} \cdot e^{\frac{2\pi}{18} i + \frac{2\pi i}{6} k} : k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \right\}$$

Ejercicio 5.

(i) $z = \sqrt[3]{-11-2i} \underset{\uparrow}{=} \sqrt[3]{5^3 \cdot e^{\theta i}} = \left\{ 5 \cdot e^{\frac{\theta}{3} i + \frac{2\pi i}{3} k} \,;\; k = 0, 1, 2 \right\}.$

$\theta = \text{Arg}\,(-11-2i)$

(ii) $(1+z)^5 = (1-z)^5 \Rightarrow 1 - z \neq 0$, pués $1 - z = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} z = 1 \\ + \\ z+1 = 0 \end{array}\right\}$ CONTRADICCIÓN.

Dividiendo por $(1-z)^5$, obtenemos:

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5 = 1 \Rightarrow \frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{2\pi i}{5} k},\; k = 0,1,2,3,4 \Rightarrow z = \frac{e^{\frac{2k\pi i}{5}} - 1}{e^{\frac{2k\pi i}{5}} + 1},\; k = 0, 1, \dots, 4.$$

Ejercicio 6 Como $g'(z_0) \neq 0$, en un entorno $V(z_0)$ de z_0 se verifica $g(z) \neq 0$, $\forall z \in V(z_0) \setminus \{z_0\}$

Así que existe $f(z)/g(z)$ para $z \in V(z_0) \setminus \{z_0\}$ y se tiene:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\lim\limits_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Ejercicio 7.

(a) $u(x,y) = \text{sen}\,x \cdot \text{ch}\,y$; $v(x,y) = \cos x \cdot \text{sh}\,y$; $f'(z) = \cos z$

(b) $u(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$; $v(x,y) = 0$; no existe derivada.

(c) $u(x,y) = x$; $v(x,y) = -y$; no existe derivada

(d) $u(x,y) = \text{arc.tg}\,\frac{y}{x}$; $v(x,y) = 0$; no existe derivada

(e) $u(x,y) = \text{Ln}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$; $v(x,y) = \text{Arg}\, z = \text{arc.tg.}\,\frac{y}{x}$; $f'(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$

(f) $\alpha = a + ib$.

$$u(x,y) = \exp\left(a \cdot \text{Ln}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - b \cdot \text{arc.tg}\,\frac{y}{x}\right) \cdot \cos\left(b \cdot \text{Ln}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + a \cdot \text{arc.tg}\,\frac{y}{x}\right)$$

HOJA Nº 1 (C)

$$v(x,y) = \exp\left(a\cdot \operatorname{Ln}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - b\cdot \operatorname{arc.tg}\frac{y}{x}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(b\cdot \operatorname{Ln}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + a\cdot \operatorname{arc.tg}\frac{y}{x}\right)$$

$f'(z) = \alpha \cdot z^{\alpha-1}$ s.e.u.o. (salvo error u omisión)

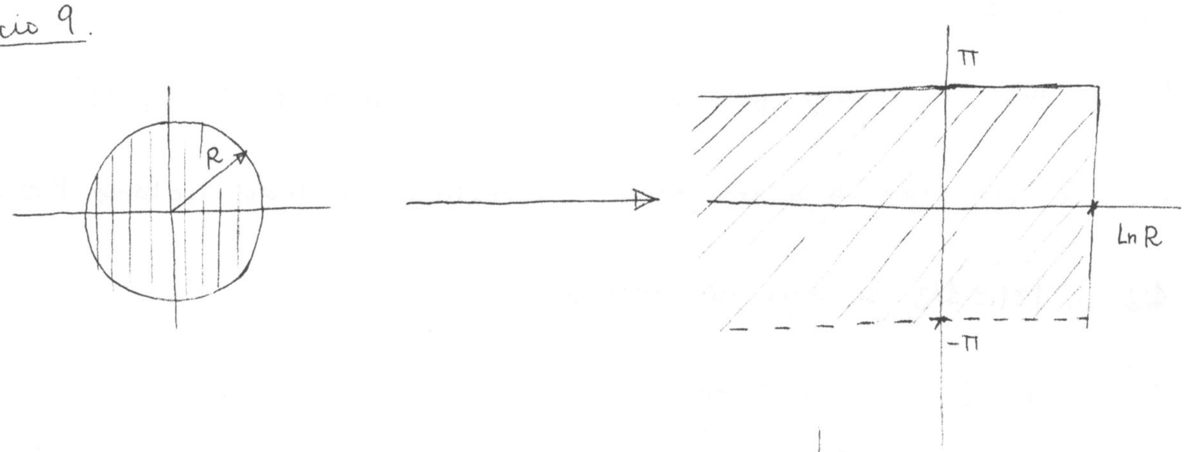
Ejercicio 8. Aplicamos la regla de L'Hôpital:

(i) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^{10}+1}{z^6+1} = \dfrac{10}{6}$; (ii) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{z^2} = \dfrac{1}{2}$; (iii) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{\operatorname{sen} z^2} = \dfrac{1}{2}$;

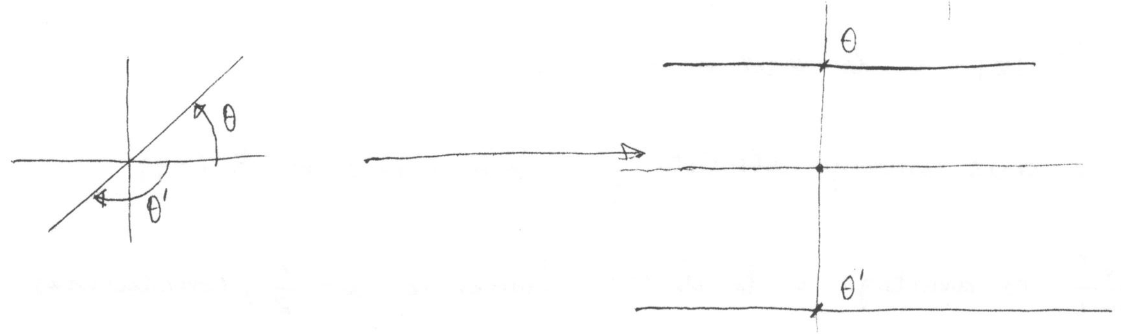
(iv) $\lim\limits_{z\to 0} (\cos z)^{1/z^2} = e^{-1/2}$; (v) $\lim\limits_{z\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}\right)^{1/z^2} = e^{-1/6}$. s.e.u.o

Ejercicio 9.

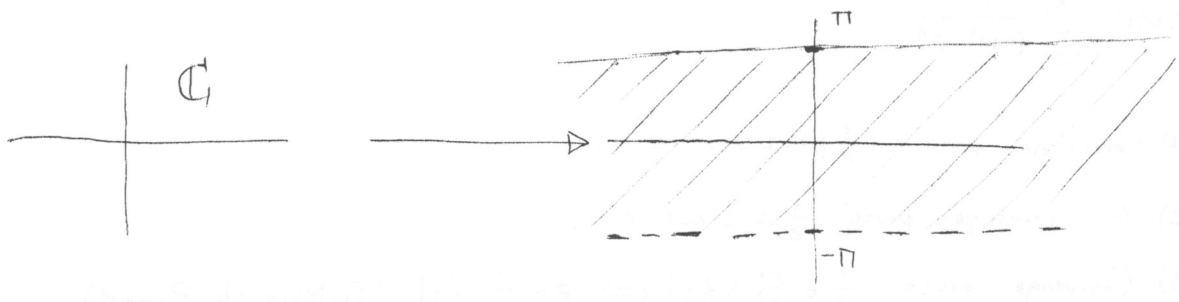
(a)



(b)



(c)



Ejercicio 10.

(a) $z^i = e^{i\cdot \log z} = e^{i(\operatorname{Ln}|z| + i\theta + 2k\pi i)} = e^{-(\theta+2k\pi) + i \operatorname{Ln} r} =$

$= e^{-(\theta+2k\pi)} \cdot \left(\cos(\operatorname{Ln} r) + i\cdot \operatorname{sen}(\operatorname{Ln} r)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Si $z \in S_1$, entonces $\operatorname{Ln}|z| = 0 \Rightarrow z^i = e^{-(\theta+2k\pi)}$, $k\in\mathbb{Z}$, y naturalmente $e^{-(\theta+2k\pi)} \in \mathbb{R}$ y $\operatorname{card}\{e^{-(\theta+2k\pi)} : k\in\mathbb{Z}\} = \aleph_0$.

(c) $i^i = e^{i\operatorname{Ln} i} = e^{i(\operatorname{Ln}|i| + i\cdot \operatorname{Arg} i)} = e^{i(i\,\pi/2)} = e^{-\pi/2}$.

Ejercicio 11.

(a) Radio de convergencia (R. de C.) $= 1$. Si $z\in S_1$, la serie no converge porque $n\cdot z^n \not\to 0$.

(b) R. de C. $= 1$. La serie converge uniforme y absolutamente en $B(0;1)$ porque está mayorada por $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

(c) R. de C. $= 1$. La serie no converge para $z = 1$, pero converge para $z \in S_1 \setminus \{1\}$.

(d) R. de C. $= +\infty$. La convergencia es uniforme y absoluta en todo acotado $B \subset \mathbb{C}$.

(e) R. de C. $= 1/2$. Si $|z| = 1/2$, la serie no converge.

(f) R. de C. $= 1$. Si $z \in S_1$, la serie no converge.

(g) R. de C. $= 3$. Si $|z| = 3$, la serie no converge.

(h) R. de C. $= 1$. La serie converge absoluta y uniformemente en $B(i;1)$.

(i) La serie $\sum_{n\geq 0} \frac{w^n}{n+1}$ es análoga a la de (c). Poniendo $w = \frac{1}{z}$, concluimos que la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)\cdot z^n}$:

(1) Converge para $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$.

(2) No converge para $\frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z = 1$.

(3) Converge para $\frac{1}{z} \in S_1 \setminus \{1\} \Leftrightarrow z \in S_1 \setminus \{1\}$. (Criterio de Picard)

Ejercicio 12.

(a) $e^z = 1+i \Leftrightarrow z \in \log(1+i) = \{\operatorname{Ln}\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$

(e)

(b) $3\cos z = 5 \iff 3\,\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 5 \iff e^{2iz}+1 = \dfrac{10}{3}e^{iz} \iff e^{iz}=w$ con $w^2-\frac{10}{3}w+1=0 \iff$

$$\iff \begin{cases} e^{iz}=3 \\ \text{ó} \\ e^{iz}=1/3 \end{cases} \iff \begin{cases} iz\in \log 3 \\ \text{ó} \\ iz \in \log 1/3 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \dfrac{\operatorname{Ln}3+2k\pi i}{i} \\ \text{ó} \\ z = \dfrac{-\operatorname{Ln}3 + 2k\pi i}{i} \end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$$

(c) $\operatorname{sen} z = i \iff \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = i \iff e^{2iz}-1 = -2e^{iz} \iff e^{iz}=w$ con $w^2+2w-1=0 \iff$

$$\iff \begin{cases} e^{iz}=-1+\sqrt{2} \\ \text{ó} \\ e^{iz}=-1-\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} iz\in\log(-1+\sqrt{2}) \\ \text{ó} \\ iz\in\log(-1-\sqrt{2}) \end{cases} \iff \begin{cases} z = \dfrac{\operatorname{Ln}(-1+\sqrt{2})+2k\pi i}{i} \\ \text{ó} \\ z = \dfrac{\operatorname{Ln}(1+\sqrt{2})+\pi i+2k\pi i}{i} \end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

(d) $e^z = 2-\cos(iz) \iff e^z = 2-\dfrac{e^{-z}+e^{z}}{2} \iff \dfrac{3}{2}e^{2z}-2e^z+\dfrac{1}{2}=0 \iff$

$$\iff e^z=w \text{ con } 3w^2-4w+1=0 \iff \begin{cases} e^z=1 \\ \text{ó} \\ e^z=1/3 \end{cases} \iff \begin{cases} z=2k\pi i \\ \text{ó} \\ z=-\operatorname{Ln}3+2k\pi i \end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

(e) $z^5 = e^{\pi i/3} \iff z = \sqrt[5]{e^{\pi i/3}} = e^{\pi i/15+\frac{2k\pi i}{5}}$, $k=0,1,2,3,4$.

(f) $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = 2z \iff 2z = \dfrac{\pi}{4}i \iff z = \dfrac{\pi}{8}i$. S. e. u. O.

Ejercicio 13.

(a) $z_0=0$: $\dfrac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\binom{-1}{n}z^n$

$z_0=1$: $\dfrac{1}{1+z} = \dfrac{1}{2+z-1} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{z-1}{2}\right)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{2^{n+1}}\binom{-1}{n}(z-1)^n$

(b) $\dfrac{1}{(1-z)^2} = (1-z)^{-2} = \sum_{n\geq 0}\binom{-2}{n}(-1)^n\cdot z^n$

(c) $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname{Ln}(1+z)-\operatorname{Ln}(1-z) = \left[z-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}-\cdots\right]-\left[-z-\dfrac{z^2}{2}-\dfrac{z^3}{3}-\cdots\right] =$

$$= 2\left[z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right].$$

Ejercicio 14.

(a) $f(z) = e^{1/z}$, $z \neq 0$, $f(0) = a$ para un cierto $a \in \mathbb{C}$ arbitrario.

Notemos que no existe $\lim\limits_{z\to 0} e^{1/z}$. Luego, $\forall a \in \mathbb{C}$, f no es continua en $z=0$.

Por tanto, $\forall a \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, no es analítica en $z=0$ y $f'(z) = -\frac{1}{z^2} e^{1/z}$, para $z \neq 0$.

(b) $f(z) = \begin{cases} (1-\operatorname{sen} z)^{-2}, & \text{si } 1-\operatorname{sen} z \neq 0 \\ \text{arbitrario}, & \text{si } 1-\operatorname{sen} z = 0 \end{cases}$

Sabemos que $1-\operatorname{sen} z = 0 \iff z = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ y que no existe $\lim \frac{1}{(1-\operatorname{sen} z)^2}$ para $z \to 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Así que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus D)$, f no es analítica en D, donde $D = \{2k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, y $f'(z) =$

$= (-2)(1-\operatorname{sen} z)^{-3}(-\cos z)$, para $z \notin D$.

(c) $f(z) = \dfrac{e^{az}}{a^2+z^2}$. Es claro que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{\pm ai\})$ y que $f'(z) = \dfrac{e^{az}[a(a^2+z^2)-2z]}{(a^2+z^2)^2}$, para $z \neq \pm ai$. Por otra parte, no existen los límites $\lim\limits_{z\to\pm ai} f(z)$. Luego para cualquier definición de $f(\pm ai)$, la función obtenida será discontinua en $z = \pm ai$

(d) $f(z) = \begin{cases} \operatorname{sen} z/z, & z = 0 \\ 1, & z = 1 \end{cases}$. Es claro que $f \in C(\mathbb{C})$ (= continuas en $\mathbb{C}$) y, de entrada, que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. Como $\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$, se verifica que $f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$. Luego $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (ver 6.9. COR). Por último es claro que $f'(0) = 0$ y $f'(z) = \dfrac{z\cos z - \operatorname{sen} z}{z^2}$, $z \neq 0$.

(e) $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-az}\right)$.

(1) $\underline{a=0} \Rightarrow f(z) = \text{cte} \Rightarrow f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $f'(z) = 0$

(2) $\underline{a\neq 0} \Rightarrow f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{1/a\})$ con $f'(z) = 2a(1-az)^{-2} \cdot \exp((1-az)^{-1})$, $z \neq 1/a$.

Como no existe $\lim_{z \to \frac{1}{a}} f(z)$, no puede extenderse f analíticamente a todo $\mathbb{C}$.

Ejercicio 15. Sea $f(z) = u(z) + i \cdot v(z) \Rightarrow f(z)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$. Notemos que $|f(z)^2 - 1| < 1$, $\forall z \in \Omega$, $\Rightarrow f(z)^2 \in \mathring{B}(1;1)$. Necesariamente $u(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$, pues si $u(z) = 0$, para cierto $z \in \Omega$, tendríamos:

$$|f(z)^2 - 1| = |-v(z)^2 - 1| = 1 + v^2(z) \nless 1 \text{ . CONTRADICCIÓN.}$$

Por último, como Ω es conexo, ó $u(z) > 0$, $\forall z \in \Omega$, ó $u(z) < 0$, $\forall z \in \Omega$.

Ejercicio 16. Se tiene: $u_x = -6xy$, $u_{xx} = -6y$; $u_y = 3y^2 - 3x^2$, $u_{yy} = 6y$ $\Rightarrow \Delta u = 0 \Rightarrow u$ es armónica

Para hallar su conjugada v, resolvemos: $v_y = -6xy$, $v_x = 3x^2 - 3y^2$ $\Rightarrow v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + C$, $C = cte$

SOLUCION DE EJERCICIOS. HOJA Nº 1

Ejercicio 17

(a) (i) En $\gamma \equiv \{|z| = R\}$ se tiene que $\bar{z} = R^2 \cdot z^{-1}$. Luego:

$$\int_\gamma \bar{z} \cdot dz = \int_\gamma \frac{R^2 \cdot dz}{z} = 2\pi i \cdot R^2 \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(0) = 2\pi R^2 i .$$

(ii) Consideremos $\gamma \equiv \partial([-R,R] \times [-R,R])$. Entonces:

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_{[R-iR,\, R+iR]} \bar{z}\, dz + \int_{[R+iR,\, -R+iR]} \bar{z}\, dz + \int_{[-R+iR,\, -R-iR]} \bar{z}\, dz + \int_{[-R-iR,\, R-iR]} \bar{z}\, dz =$$

$$= \int_{-R}^{R} [R - iy]\, i\, dy + \int_{R}^{-R} [x - iR]\, dx + \int_{R}^{-R} [-R - iy]\, i\, dy + \int_{-R}^{R} [x + iR]\, dx =$$

$$= i \int_{-R}^{R} [R + R + R + R]\, dx + \int_{-R}^{R} [x - x - x + x]\, dx = 8R^2 i . \quad \underline{\text{s.e.u.o.}}$$

← — — — — — — →

(b) $\underline{\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, \pi]}$:

$$\int_\gamma |z|\, dz = \int_\gamma dz = \gamma(\pi) - \gamma(0) = e^{i\pi} - e^0 = -1 - 1 = -2 \qquad (\text{por } 6.1.)$$

$\underline{\gamma(t) = Re^{it},\ t \in [0, 2\pi]}$:

$$\int_\gamma |z|\, dz = \int_\gamma R\, dz = 0 \qquad (\text{por } 6.2.)$$

← — — — — — — →

(c) $$\int_\gamma z^2 . dz = \left. \frac{z^3}{3} \right|_{1+i}^{2} = \frac{1}{3} [8 - (1+i)^3] \qquad (\text{por } 6.1)$$

← — — — — — — →

(d) $\underline{\gamma \equiv \{|z - a| = R\}}$:

$$\int_\gamma (z-a)^m dz = \begin{cases} 0, & \text{si } m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \quad (\text{por } 6.2) \\ 2\pi i \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(a) = 2\pi i & \text{si } m = -1 \end{cases}$$

$\gamma(t) = a + Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$:

$$\int_\gamma (z-a)^m \cdot dz = \begin{cases} \dfrac{(z-a)^{m+1}}{m+1}\Bigg|_{a+R}^{a-R} = \dfrac{R^{m+1}}{m+1}\left((-1)^{m+1}-1\right), & \text{si } m \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\} \\[2ex] \operatorname{Ln}(z-a)\Big|_{a+R}^{a-R} = \operatorname{Ln}(-R) - \operatorname{Ln} R = i\pi, & \text{si } m = -1 \end{cases}$$

s.e.u.o.

(e) $0 < R < 2$. Dentro de γ sólo está, en este caso, la raíz $z=0$ del denominador.

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z^2+1)/(z^2+4)}{z-0}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{0^2+1}{0^2+4}\cdot \operatorname{Ind}_\gamma(0) = \frac{\pi i}{2}.$$

$R > 2$. Dentro de γ están las raices $z=0$, $z=\pm 2i$ del denominador. Nos conviene hacer la descomposición :

$$\frac{z^2+1}{z(z^2+4)} = \frac{1/4}{z} + \frac{3/8}{z+2i} + \frac{3/8}{z-2i}$$

Por tanto :

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\,dz = \frac{1}{4}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname{Ind}_\gamma(0) + \frac{3}{8}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname{Ind}_\gamma(-2i) + \frac{3}{8}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname{Ind}_\gamma(2i) = 2\pi i$$

(f) La circunferencia $\gamma(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, rodea sólo a la raíz $z=-1$ del denominador. Luego:

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{z^2+z}\,dz = \int_\gamma \frac{e^{1/z}/z}{z+1}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{-1}\cdot \operatorname{Ind}_\gamma(-1) = -2\pi i \cdot e^{-1}$$

(g) Sobre $\gamma \equiv \{|z|=1\}$ se tiene que $\bar{z} = z^{-1}$ y por tanto, también sobre γ, resulta que: $|z-2|^2 = (z-2)(\bar{z}-2) = (z-2)(z^{-1}-2) = -2\,\dfrac{(z-2)(z-1/2)}{z}$

Así que:
$$\int_\gamma \frac{\cos\pi z}{|z-2|^2}\,dz = \int_\gamma -\frac{z}{2}\cdot\frac{\cos\pi z}{(z-2)}\cdot\frac{dz}{z-1/2} =$$
$$= 2\pi i\left(-\frac{1/2}{2}\right)\cdot\frac{\cos\pi/2}{\frac{1}{2}-2}\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(1/2) = 0$$

Ejercicio 18.

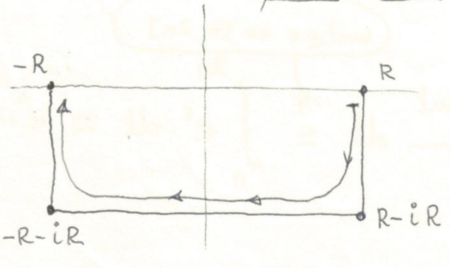
(a) $\gamma(t) = 2\cdot e^{it},\ t\in[0,\pi/2] \Rightarrow |\gamma(t)^2+1| \geq 4-1 = 3$, Luego:
$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \int_\gamma \frac{ds}{|1+z^2|} \leq \int_\gamma \frac{ds}{3} = \frac{1}{3}\,\mathrm{long}(\gamma) = \frac{\pi}{3}$$

(b) $\gamma(t) = e^{it},\ t\in[0,\pi] \Rightarrow |e^{\gamma(t)}| = |e^{\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t}| = e^{\cos t} \leq e$. Por tanto:
$$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz\right| \leq \int_\gamma \frac{|e^z|}{1}\,ds \leq \int_\gamma e\cdot ds = e\cdot\mathrm{long}(\gamma) = e\cdot\pi.$$

(c) $\Gamma_R(t) = R + iRt,\ t\in[0,1] \Rightarrow |\Gamma_R(t)| \geq R,\ |e^{i\cdot\Gamma_R(t)}| = |e^{iR-Rt}| = e^{-Rt}$.

Así que:
$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_0^1 \frac{e^{iR-Rt}}{R+iRt}\cdot iR\cdot dt\right| \leq \int_0^1 \frac{e^{-Rt}}{|1+it|}\,dt \leq$$
$$\leq \int_0^1 e^{-Rt}\cdot dt = \left.\frac{e^{-Rt}}{-R}\right|_0^1 = \frac{1-e^{-R}}{R}$$

(d)



Descomponiendo el camino en tres tramos tenemos:

(k)

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_0^{-R} \frac{e^{i(R+iy)}}{R+iy}\,i\,dy + \int_R^{-R} \frac{e^{i(x-iR)}}{x-iR}\,dx + \int_{-R}^{0} \frac{e^{i(-R+iy)}}{-R+iy}\,i\,dy =$$

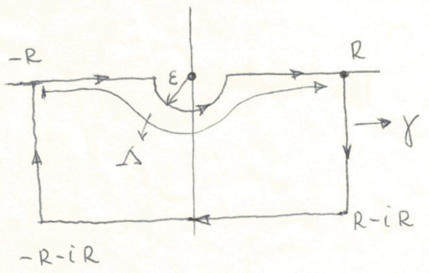
$$= \int_0^{-R} \frac{e^{-y+iR}}{R+iy}\,i\,dy + \int_R^{-R} \frac{e^{R-ix}}{x-iR}\,dx + \int_{-R}^{0} \frac{e^{-y-iR}}{-R+iy}\,i\,dy .$$

Por tanto:

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \leq \int_{-R}^{0} \frac{e^{-y}}{R}\,dy + \int_{-R}^{R} \frac{e^{R}}{R}\,dx + \int_{-R}^{0} \frac{e^{-y}}{R}\,dy =$$

$$= \frac{2}{R}\,\frac{e^{-y}}{-1}\Big|_{-R}^{0} + \frac{e^R}{R}\cdot 2R = \frac{2}{R}\left(e^R-1\right) + 2e^R .$$

NOTA Por otro método se obtiene la acotación $\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \leq 2R+\pi$.



Es claro que $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$. Luego:

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_{\Lambda} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right|$$

Pero:

$$\int_{\Lambda} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i\varepsilon(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t)}}{\varepsilon(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t)}\cdot \varepsilon\cdot i\cdot e^{it}\,dt .$$

Ahora bien:

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx = 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx$$

Como $0 < \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} \leq 1$ en $[\varepsilon, R]$, concluimos que:

$$\left|\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \leq 2\,[R-\varepsilon]$$

Para la restante integral tenemos:

$$\left|\int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i\varepsilon(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t)}}{\varepsilon\cdot e^{it}}\cdot \varepsilon i e^{it}\,dt\right| \leq \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-\varepsilon\cdot \mathrm{sen}\,t}}{1}\,dt \underset{\mathrm{sen}\,t \leq 0 \text{ en } [\pi, 2\pi]}{\leq} \int_{\pi}^{2\pi} e^{\varepsilon}\cdot dt = e^{\varepsilon}\cdot \pi .$$

Así que en definitiva: $\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \le 2(R-\varepsilon) + e^{\varepsilon}\cdot\pi$. Como $\varepsilon>0$ es arbitrario, haciendo $\varepsilon \to 0$, obtenemos finalmente: $\left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \le 2R+\pi$.

(e) $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi] \Rightarrow |1+\gamma_R(t)^2| \ge \begin{cases} R^2-1, & \text{si } R>1 \\ 1-R^2, & \text{si } 0<R<1 \end{cases}$. Luego:

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}\right| \le \int_{\Gamma_R} \frac{ds}{|1+z^2|} \begin{cases} \xrightarrow{R>1} \le \displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{ds}{R^2-1} = \frac{\pi R}{R^2-1} \\ \xrightarrow{0<R<1} \le \displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{ds}{1-R^2} = \frac{\pi R}{1-R^2} \end{cases}$$

(f) $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi] \Rightarrow |\gamma_R^2(1+\gamma_R^2)| \ge R^2(R^2-1)$, $(R>1)$. Además:

$$|1-e^{2i\gamma_R(t)}| = |1-e^{-2R\,\text{sen}\,t+2iR\cos t}| \le 1+e^{-2R\,\text{sen}\,t} \le 2, \quad t\in[0,\pi]$$

Así que:

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{1-e^{2iz}}{z^2(1+z^2)}\,dz\right| \le \int_{\gamma_R} \frac{2\,ds}{R^2(R^2-1)} = \frac{2\pi R}{R^2(R^2-1)} = \frac{2\pi}{R(R^2-1)}.$$

Ejercicio 19. Sean $r_1,\dots,r_m$ las raices de $p(z)$. Entonces, por hipótesis, $r_i \in \mathring{B}(0;R)$. Sea $p(z) = a_m\cdot(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_m)$. Se comprueba fácilmente que: $\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z-r_1} + \frac{1}{z-r_2} + \dots + \frac{1}{z-r_m}$. Así que:

$$\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz = \sum_{j=1}^m \int_\gamma \frac{dz}{z-r_j} = \sum_{j=1}^m 2\pi i\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(r_j) = 2\pi m i$$

Ejercicio 20. Se tiene que $\left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right)' = \frac{f'(z)(z-z_0)-f(z)}{(z-z_0)^2}$. Luego de 6.1

obtenemos: $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)(z-z_0)-f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = 0 \Leftrightarrow \int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz.$

/— — — — — —/

También puede comprobarse la igualdad sustituyendo $\gamma(t)$ e integrando por partes:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz \underset{z_0=0}{=} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt = \cancelto{0}{\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)}\Big|_a^b} - \int_a^b \frac{f(\gamma(t))\,(-\gamma'(t))}{\gamma(t)^2}\,dt =$$

$$= \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

Ejercicio 21. Sea $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Si existiese $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ t.q. $f'(z)=\frac{1}{z}$, $\forall z\neq 0$, resultaría, por una parte (ver 6.1) que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}=0$, pero por otra tenemos que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(0) = 2\pi i$. CONTRADICCION. En consecuencia, no existe una determinación analítica del logaritmo en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Ejercicio 22. Sea $\gamma(\theta)=e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$. Si $z=e^{i\theta}$ tenemos:

$$(z-\alpha)(\bar z-\alpha) = 1-z\alpha-\bar z\alpha+\alpha^2 = 1-\alpha(z+\bar z)+\alpha^2 = 1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2.$$

En consecuencia:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(z-\alpha)(\bar z-\alpha)} = \int_0^{2\pi} \frac{i\cdot e^{i\theta}\cdot d\theta}{e^{i\theta}(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)} = i\cdot\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}$$

Por otra parte, como $\bar z|_\gamma = z^{-1}$, tenemos que:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(z-\alpha)(\bar z-\alpha)} = \int_\gamma \frac{dz}{z(z-\alpha)(z^{-1}-\alpha)} = \int \frac{dz}{(z-\alpha)(1-\alpha z)} =$$

$$\left[\frac{1}{(z-\alpha)(1-\alpha z)} = \frac{A}{z-\alpha}+\frac{B}{z-1/\alpha} \quad \text{con } A=\frac{1}{1-\alpha^2}=-B\right]$$

$$= \int_\gamma \frac{A}{z-\alpha}\,dz + \int_\gamma \frac{B}{z-1/\alpha}\,dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{1-\alpha^2}\left(\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)-\mathrm{Ind}_\gamma(1/\alpha)\right).$$

SOLUCIÓN DE EJERCICIOS. HOJA Nº 2

Ejercicio 23

(a) $$\int_{C(0;4)} \frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}\,dz = \int_{C(0;4)} \frac{dz}{z+1} + \int_{C(0;4)} \frac{2}{z-3}\,dz = 2\pi i\left[\mathrm{Ind}_{C(0;4)}(-1) + 2\cdot \mathrm{Ind}_{C(0;4)}(3)\right] = 6\pi i.$$

(b) $$\int_{C(0;2)} \frac{2z}{z^2+1}\,dz = \int_{C(0;2)} \frac{dz}{z+i} + \int_{C(0;2)} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i\left[\mathrm{Ind}_{C(0;2)}(i) + \mathrm{Ind}_{C(0;2)}(-i)\right] = 4\pi i.$$

(c) $$\int_{C(0;2)} \frac{z^3}{z^4-1}\,dz = \int_{C(0;2)} \frac{\frac{1}{4}dz}{z+1} + \int_{C(0;2)} \frac{\frac{1}{4}dz}{z-1} + \int_{C(0;2)} \frac{\frac{1}{4}dz}{z+i} + \int_{C(0;2)} \frac{\frac{1}{4}dz}{z-i} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\pi i\cdot\left[\mathrm{Ind}_{C(0;2)}(1) + \mathrm{Ind}_{C(0;2)}(-1) + \mathrm{Ind}_{C(0;2)}(i) + \mathrm{Ind}_{C(0;2)}(-i)\right] = 2\pi i.$$

(d) $$\int_{C(2;1)} \frac{e^z}{(z-2)^2}\,dz = \int_{C(2;1)} \frac{e^z}{(z-2)}\,dz = 2\pi i\cdot e^2\cdot \mathrm{Ind}_{C(2;1)}(2) = 2\pi e^2 i.$$

Ej. 20

Ejercicio 24.

(a) $$e^z = e^i\cdot e^{z-i} = \sum_{n\geq 0} \frac{e^i\cdot(z-i)^n}{n!}$$; (b) $$z^{-2} = (1+(z-1))^{-2} = \sum_{n\geq 0}\binom{-2}{n}(z-1)^n$$

(c) $$\mathrm{sen}^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} = \frac{1}{2}\left[1-\left[1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\dots\right]\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(2z)^2}{2!}-\frac{(2z)^4}{4!}+\dots\right].$$

Ejercicio 25.

(a) $$\frac{\mathrm{sen}\, z}{z} = \frac{\mathrm{sen}(1+(z-1))}{1+(z-1)} = \left[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3\dots\right]\left[\mathrm{sen}\,1\cdot\cos(z-1)+\cos 1\cdot \mathrm{sen}(z-1)\right] =$$

$$= \left[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3\dots\right]\left[\mathrm{sen}\,1\left(1-\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^4}{4!}-\dots\right)+\cos 1\left((z-1)-\frac{(z-1)^3}{3!}+\frac{(z-1)^5}{5!}\dots\right)\right] =$$

$$= \mathrm{sen}\,1 + (\cos 1 - \mathrm{sen}\,1)(z-1) + \left[\mathrm{sen}\,1\left(1-\frac{1}{2!}\right)-\cos 1\right](z-1)^2+\dots$$

(b) $$e^z\cdot \mathrm{sen}\, z = e^z\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[e^{z(1+i)}-e^{z(1-i)}\right] = \sum_{n\geq 0}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i\cdot n!}z^n.$$

(c) $$\mathrm{tg}\, z = \frac{\mathrm{sen}\, z}{\cos z} = \frac{z-z^3/3!+z^5/5!-}{1-z^2/2!+z^4/4!\dots} = z-\frac{z^2}{3}+\dots$$

(d) Con la función $\sqrt{z^2-1}$ hay que tomar ciertas precauciones, ya que en ella aparece un punto de ramificación, a causa de la raiz cuadrada. Para definir en $\mathbb{C}$ una raiz cuadrada, que sea suficientemente buena (v.g. que sea holomorfa en un cierto abierto), se precisa elegir previamente una determinacion del argumento de z : $\theta(z) \in \arg z$. Hecho esto, si $z = |z| (\cos \theta(z) + i \operatorname{sen} \theta(z))$, se define $\sqrt{z} = z^{1/2} = |z|^{1/2} (\cos \frac{\theta(z)}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta(z)}{2})$.

Como queremos hacer un desarrollo en $z_0=0$, esto es, $z^2-1=-1$, se precisará que la determinación elegida sea continua en -1. Con esta elección la funcion $(z^2-1)^{1/2}$ ya es holomorfa en un entorno de $z_0=0$ y, por tanto, tiene desarrollo de Taylor. Nos conviene, además, que el argumento sea también continuo en 1, por razones que se evidencian en lo que sigue. Así que tomemos $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$. Ahora en un entorno de 0 se tiene:

$$(z^2-1)^{1/2} = (-1)^{1/2} \cdot (1-z^2)^{1/2} = i\,(1-z^2)^{1/2}$$

La función $(1-z^2)^{1/2}$ es holomorfa en $z_0=0$ y su desarrollo es:

$$(1-z^2)^{1/2} = \sum_{n\geq 0} \binom{1/2}{n} (-1)^n \cdot z^{2n}$$

Así que en definitiva: $(z^2-1)^{1/2} = \sum\limits_{n\geq 0} i \binom{1/2}{n} (-1)^n \cdot z^{2n}$.

(e) $$\frac{e^z}{1-z} = \Big(\sum_{n\geq 0} z^n\Big)\Big(\sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!}\Big) = 1 + \Big(1+\frac{1}{1!}\Big)z + \Big(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\Big)z^2 + \cdots$$

Ejercicio 26. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $|f(z)| \geq 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, entonces $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $|g(z)| \leq 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Por T. de Liouville, $g = cte \Rightarrow f = cte$.

Ejercicio 27. Sea f no constante en D.

(A) Supongamos f no tiene ceros en D. Entonces $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{H}(D)$. Supongamos que $|f|$ tiene en $a \in D$ un mínimo local $\Rightarrow \exists r>0$ t.q. si $m_f(r) = \min\{|f(z)| : z \in \partial B(a;r)\}$, entonces $|f(a)| \leq m_f(r)$. De aquí que $|g(a)| \geq \max\{|g(z)| : z \in \partial B(a;r)\}$. Por T. del módulo máximo $g = cte \Rightarrow f = cte$. CONTRADICCION.

(B) Si f tiene ceros en D, como $f \neq cte$ y D es región, estos ceros son aislados. Por lo tanto $|f|$ tiene un mínimo local en cada uno de estos ceros.

Ejercicio 28.

(a) Observemos que al ser $f \in \mathcal{H}(D)$ y $f(0)=0$, $\exists \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$. Por lo tanto si definimos

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z, & \forall z \in D\setminus\{0\} \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

, resultará que $g \in \mathcal{H}(D)$. Sea $\varepsilon>0$ arbitrario y $0<r<1$ t.q. $\frac{1}{r} \leq 1+\varepsilon$. Entonces, $\forall z \in \partial B(0;r)$, $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r} \leq 1+\varepsilon$. Luego por el T. del módulo máximo, $\forall z \in \mathring{B}(0;r)$, $|g(z)| \leq 1+\varepsilon$. En consecuencia, $\forall z \in D$, $|g(z)| \leq 1$, lo que conduce a que $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in D$.

(b) Sea $h(z) = \begin{cases} g(z)/z, & z \in D\setminus\{0\} \\ g'(0), & z=0 \end{cases}$. Entonces $h \in \mathcal{H}(D)$ y $|h| \equiv cte = 1$ en D. Por 3.11. PROP. $h \equiv cte \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ t.q. $h(z) = e^{it}$, $\forall z \in D$, $\Rightarrow g(z) = z\cdot e^{it}$, $\forall z \in D$.

Ejercicio 29. Sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n \cdot z^n$ el desarrollo de Taylor de f en 0, válido en todo $\mathbb{C}$. Por las desigualdades de Cauchy $|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$, $\forall r>0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $M(r) = \max\{|f(z)| : |z|=r\} \leq 1+r^\alpha$. Haciendo $r\to\infty$ se tiene $c_n = 0$, $n=1,2,3,\ldots$ Luego $f(z) = c_0$ t.q. $|c_0| \leq 1$, porque $\lim_{z\to 0} |f(z)| = |c_0| \leq \lim_{z\to 0} (1+|z|^\alpha) = 1$.

Ejercicio 30. Como en Ej. 29, $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n \cdot z^n$ y $|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \leq \frac{M\cdot r^\alpha}{r^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Haciendo $r\to\infty$, se obtiene $c_n = 0$ para $n>\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Así que:

$$f(z) = c_0 + c_1\cdot z + \cdots + c_m\cdot z^m, \quad m = [\alpha] \quad (= \text{parte entera de } \alpha)$$

Como $\lim_{z\to 0} |f(z)| = |c_0| \leq \lim_{z\to 0} M\cdot|z|^\alpha = 0$, concluimos que $f(z) = c_1\cdot z + \cdots + c_m \cdot z^m$.

Sea $f_1(z) = c_1 + c_2\cdot z + \cdots + c_m\cdot z^{m-1}$ (notemos que $\alpha-1>0$ pues hemos supuesto $m=[\alpha]$)

Como antes se deduce que $c_1 = 0$. Reiterando obtenemos que $f(z) = c_m\cdot z^m$.

(A) $\alpha = m \in \mathbb{N}$. En este caso es necesario y suficiente que $|c_m| \leq M$.

(B) $\underline{\alpha \notin \mathbb{N}}$. Entonces $m < \alpha < m+1$ y $|c_m| \cdot |z|^m \leq M \cdot |z|^\alpha \Rightarrow \frac{|c_m|}{M} \leq |z|^{\alpha - m} \xrightarrow[z \to 0]{} 0$

Luego $c_m = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

Ejercicio 31. Bajo las hipótesis del enunciado, $g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Por T. de Liouville $g = cte \Rightarrow f = cte$.

Ejercicio 32. Usando las desigualdades de Cauchy (como en Ejs. 29 y 30) se obtiene que $f(z) = c_0 + c_1 \cdot z$. Pero $\frac{f(z)}{z} \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$. Luego $c_1 = 0$. Así que $f(z) = c_0 = cte$.

Ejercicio 33. La función $g(z) = \begin{cases} z f(z), & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$ verifica $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{C})$.

Luego $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Como $\lim_{z \to \infty} \frac{g(z)}{z} = \lim_{z \to \infty} f(z) = 1$, de las desigualdades de Cauchy obtenemos $g(z) = c_0 + c_1 z$. Aún más, $g(z) \xrightarrow[z \to 0]{} 1 \Rightarrow c_0 = 1$ y $\frac{g(z)}{z} \xrightarrow[z \to \infty]{} 1 \Rightarrow c_1 = 1$.

Así que $g(z) = 1 + z \Rightarrow f(z) = \frac{1+z}{z}$, $z \neq 0$.

Ejercicio 34. Por Ej. 30, $f'(z) = b' \cdot z$ con $|b'| \leq 1$. Por tanto $f(z) = a + \frac{b'}{2} z^2$ con $|\frac{b'}{2}| \leq 1/2$.

Ejercicio 35. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(I) Si $f(1/n) = -1/n^2$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(z) = -z^2$ sobre $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ t.q. $(\operatorname{Lim} A) \cap \Omega \ni 0$. Por ppio de identidad $f(z) \equiv -z^2$ sobre Ω.

(II) Si $f(\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$, entonces $f(z) = z - 1$ sobre $B = \{\frac{n+1}{n} : n \geq 2\}$ t.q. $1 \in (\operatorname{Lim} B) \cap \Omega$. Por ppio de identidad $f(z) \equiv z - 1$ sobre Ω.

CONTRADICCION !!

Ejercicio 36.

(a) Sea, $\forall z \in \partial D$, $|f(z)| = M = cte$ y supongamos que f no tiene ceros en D.

(1) Si $M=0$, por T. del módulo máximo sería $0=|f(0)|\le M=\max\{|f(z)|:|z|=1\}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f\equiv 0$ en Ω, lo que no puede ser por hipótesis.

(2) Sea $M>0 \Rightarrow \forall z\in\overline{D},\ f(z)\neq 0 \Rightarrow \exists\varepsilon>0$ t.q. si $r=1+\varepsilon$, entonces $B(0;r)\subset\Omega$

y, $\forall z\in B(0;r),\ f(z)\neq 0$. Así que $g(z)=\frac{1}{f(z)}\in\mathcal{H}(\mathring{B}(0;r))$. Como $|f(0)|\le M \Rightarrow$

$|g(0)|\geq\frac{1}{M}=\max\{|g(z)|:|z|=1\}$. Por T. del módulo máximo $g=cte$ en

$\mathring{B}(0;r)\Rightarrow f=cte$ en $\mathring{B}(0;r)\Rightarrow f=cte$ en Ω (por ppio. de identidad), lo

que contradice la hipótesis de partida.

(b) Consideremos $g(z)=e^{f(z)}$, $\forall z\in\Omega \Rightarrow g\in\mathcal{H}(\Omega)$ y $g(z)\neq 0$, $\forall z\in\Omega$. Si $z\in\partial D$,

entonces $f(z)=iv \Rightarrow |g(z)|=|e^{iv}|=1\Rightarrow |g|\big|_{\partial D}=1=cte$. Por (a) $g=cte$

en $\Omega \Rightarrow f=cte$ en Ω.

(c) Basta considerar $h(z)=if(z)$, que es imaginaria sobre ∂D, y aplicar (b).

<u>Ejercicio 37</u>. De entrada $f\in C(\Omega)$, por ser límite uniforme sobre compactos

de funciones continuas. Sea $\Delta\subset\Omega$ triángulo ($\Rightarrow \Delta$ y $\partial\Delta$ son compactos).

Puesto que $f_n\in\mathcal{H}(\Omega)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, sabemos que $\int_{\partial\Delta} f_n\,dz=0$. La convergencia uniforme

$f_n\to f$ sobre $\partial\Delta$ permite intercambiar $\int$ y $\lim$ en lo que sigue:

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz=\int_{\partial\Delta}(\lim_n f_n)\cdot dz=\lim_n\int_{\partial\Delta} f_n\cdot dz=0$$

El T. de Morera nos dice que $f\in\mathcal{H}(\Omega)$.

Sea $K\subset\Omega$ compacto. Existe $r>0$ t.q. $E=\bigcup\{B(z;r):z\in K\}$ es compacto y

$E\subset\Omega$. Sea $a\in K$ arbitrario y apliquemos las des. de Cauchy a $f-f_n$:

$$|f'(a)-f_n'(a)|\le\frac{\max\{|f(z)-f_n(z)|:z\in\partial B(a;r)\}}{r}\le$$

$$\le\frac{\max\{|f(z)-f_n(z)|:z\in E\}}{r}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

independientemente de $a \in K$. En consecuencia $f_n' \longrightarrow f'$ uniformemente sobre compactos de Ω.

Ejercicio 38. Por Ej. 37 se tiene que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $f \not\equiv 0$ en Ω pero sin embargo existe $a \in \Omega$ t.q. $f(a) = 0$. Entonces $\underline{a}$ es un cero aislado de f.

Así que $\exists r > 0$ t.q. $B(a;r) \subset \Omega$ y $\mathcal{Z}(f) \cap B(a;r) = \{a\}$. Por tanto:

$$0 = |f(a)| < m := \min\{|f(z)| : z \in \partial B(a;r)\}$$

Puesto que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre compactos, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0$,

$|f_n(a)| < \frac{m}{4}$ pero $\min\{|f_n(z)| : z \in \partial B(a;r)\} \geq \frac{3}{4} m$. Como $f_n(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$,

se tiene que $g_n(z) = \dfrac{1}{f_n(z)} \in \mathcal{H}(\Omega)$ y además, $\forall n \geq n_0$:

$$|f_n(a)| < \frac{m}{4} < \frac{3m}{4} \leq \min\{|f_n(z)| : z \in \partial B(a;r)\}$$

$$\Downarrow$$

$$|g_n(a)| > \frac{4}{m} > \frac{4}{3m} \geq \max\{|g_n(z)| : z \in \partial B(a;r)\}$$

CONTRADICCION !!

Ej. 39. Los vectores $N_1(z) = (u_x(z), u_y(z))$ y $N_2(z) = (v_x(z), v_y(z))$ son normales a las curvas $u(z) = c_1$, $v(z) = c_2$, respectivamente. Teniendo en cuenta las ecs. de Cauchy-Riemann, obtenemos que:

$$\langle N_1(z), N_2(z) \rangle = u_x(z) \cdot v_x(z) + u_y(z) \cdot v_y(z) = 0.$$

Por tanto las curvas son ortogonales.