SOLUCIÓN DE EJERCICIOS. HOJA Nº 3

Ejercicio 40

(a) $\frac{z+1}{z} = \frac{1}{z} + z$; (b) $\frac{z}{z^2+1} = \frac{1/2}{z-i} + \frac{1/2}{2i+z-i} = \frac{1/2}{z-i} + \frac{1/2}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} =$

$= \frac{1/2}{z-i} + \frac{1/2}{2i} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n$; (c) $\operatorname{sen}\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \cdots$

(d) En $\{0<|z|<1\}$: $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^n$.

En $\{|z|>1\}$: $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+1/z} = \frac{1}{z^2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{z^n} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{z^{n+2}}$.

En $\{0<|z+1|<1\}$: $\frac{1}{z(z+1)} = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} = -\frac{1}{z+1} - \frac{1}{1-(z+1)} = -\frac{1}{z+1} - \sum_{n\geq 0}(z+1)^n$.

(e) $\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1}$; (f) $\frac{e^z}{z^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{n-2}}{n!}$

(g) Primero tenemos la descomposición: $\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1/2}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{1/2}{z-2}$.

En $\{0<|z|<1\}$: $\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1/2}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1/2}{2(1-z/2)} =$

$= \frac{1/2}{z} + \sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n$.

En $\{1<|z|<2\}$: $\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1/2}{z} + \frac{-1}{z(1-1/z)} - \frac{1/2}{2(1-\frac{z}{2})} =$

$= \frac{1/2}{z} - \sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n$.

Ejercicio 41. Tenemos que: $\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}\cdots}$. Desarrollamos:

$\left[1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots\right]^{-1} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = 1 + (-1/2!)z + \left(\left(\frac{1}{2!}\right)^2 - \frac{1}{3!}\right)z^2 + \cdots$, por lo

que: $\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} + (-1/2!) + \left(\left(\frac{1}{2!}\right)^2 - \frac{1}{3!}\right)z + \cdots$.

Ejercicio 42.

(a) $\frac{\cos z}{z^2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. Su desarrollo de LAURENT en $z_0=0$ es $\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \cdots$

Así que $z_0=0$ es un polo de orden 2 con residuo $c_{-1}=0$; (b) $\frac{e^z-1}{z^2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ y en $z_0=0$ tiene un polo simple con residuo $c_{-1}=1$; (c) $\frac{z+1}{z-1}$ tiene en $z_0=1$ un polo simple con residuo $c_{-1}=2$; (d) $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene en $z_0=0$ una singularidad evitable. Así que, en realidad, $\frac{\operatorname{sen} z}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$; (e) $\frac{e^z}{z}$ tiene en $z_0=0$ un polo simple con residuo $c_{-1}=1$; (f) En $z_0=0$ esta función tiene una singularidad evitable. Así que $\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$; (g) $\operatorname{sen}\frac{1}{z}$ tiene en $z_0=0$ una singularidad esencial (ver Ej. 40 (c)); (h) En $z_0=0$ y $z_0=-1$ hay polos simples con residuos $c_{-1}=1$ y $c_{-1}=-1$, respectivamente; (i) En $z_0=-1$ hay un polo simple con residuo $c_{-1}=-1$; (j) $\frac{e^z}{z^2}$ tiene en $z_0=0$ un polo doble con residuo $c_{-1}=1$; (k) $\frac{\cos(z-1)}{z^2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. El desarrollo de LAURENT en $z_0=0$ es:

$$\frac{\cos(z-1)}{z^2} = \frac{\cos z\cdot\cos 1 + \operatorname{sen} z\cdot\operatorname{sen} 1}{z^2} = \frac{\cos 1\left[1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right]+\operatorname{sen} 1\left[z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right]}{z^2} =$$

$$= \frac{\cos 1}{z^2} + \frac{\operatorname{sen} 1}{z} + \frac{-\cos 1}{2!} + \frac{-1}{3!}z + \cdots.$$

Luego se trata de un polo doble con residuo $c_{-1}=\operatorname{sen} 1$;

(l) Polo simple en $z_0=1$ con residuo $c_{-1}=1$; (m) Polos simples en $z_0=\pm 1$ con residuos $c_{-1}=\pm\frac{1}{2}$, respectivamente; (n) $\frac{e^z-1}{z}$ tiene en $z_0=0$ una singularidad evitable; ($\tilde{n}$) La función $\left[\cos\frac{1}{z}\right]^{-1}$ tiene singularidades en los puntos $\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}: \cos\frac{1}{z}=0\}$ y en $z_0=0$. Notemos que $\cos\frac{1}{z}=0$ sii $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Sea $z_k=\frac{2}{(2k+1)\pi}$. Se tiene que:

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\left(\cos\tfrac{1}{z}\right)^{-1} = \lim_{w\to\frac{1}{2}(2k+1)\pi}\left[\tfrac{1}{w}-\tfrac{2}{2(k+1)\pi}\right]/\cos w = \lim_{w\to z_k^{-1}}\frac{1}{w-z_k^{-1}}\cdot\frac{z_k^{-1}-w}{\cos w} =$$

$$= (z_k)^2\cdot(-1)^k.$$

Por tanto en cada z_k, $k \in \mathbb{Z}$, tenemos un polo simple con residuo $c_{-1} = (-1)^k \cdot z_k^2$.

En $z_0 = 0$ tenemos una singularidad no aislada (porque $z_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ y, por tanto, no existe ningún $r>0$ t.q. $[\cos\frac{1}{z}]^{-1}$ sea holomorfa en $\{0<|z|<r\}$); (o) En $z_0 = 1$ y $z_0 = 5$ tenemos sendos polos simples con residuos $c_{-1} = \frac{e}{2}$ y $c_{-1} = \frac{e^5}{2}$, respectivamente;

(p) En $z_0 = 1$ hay un polo simple con residuo $c_{-1} = -\cos 1$.

Ejercicio 43

(a) $\operatorname{Res}(f;1) = e$; (b) $\operatorname{Res}(f;0) = 0$. Es holomorfa en $z_0 = 0$; (c) $\operatorname{Res}(f;0) = 0$. Es holomorfa en $z_0 = 0$; (d) $\operatorname{Res}(f;i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^2}{z^4-1} = \lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z^2-1)(z+i)} = \frac{1}{4i}$; (e) $\operatorname{Res}(f;0) = 0$. La función es holomorfa en $z_0 = 0$; (f) $\operatorname{Res}(f;0) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = 1$; (g) $\operatorname{Res}(f;0) = \lim_{z\to 0}\frac{z(z+2)}{z(z-2)} = -1$; (h) $\operatorname{Res}(f;0) = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}(z^4\cdot f(z)) = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 0} e^z = \frac{1}{3!}$;

(i) $\operatorname{Res}(f;1) = \lim_{z\to 1}[(z-1)^2\cdot f(z)]' = \lim_{z\to 1}\left[\frac{e^z}{(z+1)^2}\right]' = 0$.

Ejercicio 44.

(a) Hay singularidades aisladas en $e^z - 1 = 0$ e.d. $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Como:

$$\lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{e^z-1} = \lim_{z\to z_k}\frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{z_k}} = 1$$

concluimos que se trata de polos simples con residuo $c_{-1} = 1$.

(b) En $z_0 = 0$ hay un polo triple con residuo: $\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}((z+4)^{-1}) = 4^{-3}$.

En $z_0 = -4$ hay un polo simple con residuo $c_{-1} = -4^{-3}$.

(c) $(z^2+2z+1)^{-1} = \frac{1}{(z+1)^2} \Rightarrow$ en $z_0 = -1$ hay un polo doble con residuo $c_{-1} = 0$.

(d) En $z_k = 3^{1/3}\cdot e^{\frac{2k\pi i}{3}}$, $k = 0,1,2$, tenemos polos simples con residuo:

$$\mathrm{Res}(f; z_i) = \frac{1}{(z_i - z_j)(z_i - z_k)} \quad , \quad j \neq i \neq k \quad , \quad \{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}.$$

(e) En $z_0 = 0$ hay un polo simple con residuo $c_{-1} = 1$. En $z_0 = 1$ hay un polo triple con residuo:

$$\mathrm{Res}(f; 1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 1} \frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3 f(z)\right) = -\frac{1}{2!} \lim_{z \to 1} \frac{[e^z(z-1) + e^z]z^2 - 2z \cdot e^z(z-1)}{z^4} =$$

$$= -\frac{e}{2!}.$$

Ejercicio 45. La función $\frac{e^{-z^2}}{z^2}$ tiene en $z_0 = 0$ un polo doble con residuo $c_{-1} = 0$. Por tanto, si $A = \{\text{conjunto de singularidades aisladas de } e^{-z^2}/z^2\} = \{0\}$, del teorema de los residuos obtenemos:

$$\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z^2}\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{a \in A} \mathrm{Res}\left(\frac{e^{-z^2}}{z^2}; a\right) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$$

Ejercicio 46. Rama analítica de $\sqrt{z^2-1}$ en $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ es toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ t.q. $f(z)^2 = z^2 - 1$, $\forall z \in \Omega$. Como hay una raíz cuadrada de por medio, necesitamos tomar un argumento adecuado. Elegimos el argumento principal $\mathrm{Arg}\, z \in [0, 2\pi)$, que presenta, como sabemos, discontinuidad en $\{z = x + iy : y = 0, x \geq 0\}$. Definimos $f_1, f_2, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ como sigue (ver fig. 1): $\forall z \in \Omega$:

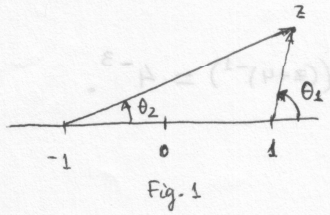


Fig. 1

$$f_1(z) = |z-1|^{1/2} \cdot e^{i\theta_1/2} \quad , \quad f_2(z) = |z+1|^{1/2} \cdot e^{i\theta_2/2}$$

$$f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) = |z^2-1|^{1/2} \cdot e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$$

Se tiene que:

(a) $f_1(z) = \sqrt{z-1}$, $\forall z \in \Omega$. Por lo tanto $f_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus [1, \infty))$, siendo discontinua en la semirrecta $(1, \infty)$.

(b) $f_2(z) = \sqrt{z+1}$, $\forall z \in \Omega$, que verifica $f_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{[-1,\infty)\})$ siendo discontinua en $(-1,\infty)$

(c) Por lo tanto $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{[-1,\infty)\})$ al menos. Veamos que $f \in C(\mathbb{C} \setminus \{(-1,1)\})$

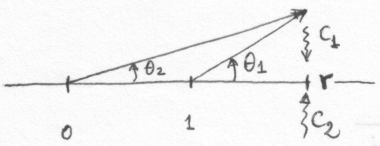


Fig. 2

(i) Es claro que $f(z) \xrightarrow[z \to -1]{} 0$, con $z \in \mathbb{C} \setminus \{[-1,\infty)\}$.

(ii) Sea $r \geq 1$. Tanto por el camino C_1 como por el C_2 (ver fig. 2), $\lim_{z \to r} f(z) = (r^2-1)^{1/2}$.

Ahora $f \in C(\mathbb{C} \setminus \{(-1,1)\})$ y es fácil ver que $\lim_{z \to r} f(z)$ existe para $-1 < r < 1$, pero que es distinto según se calcule siguiendo un camino del semiplano superior o inferior.

(d) Así que, en particular, $f \in C(\mathbb{C} \setminus \{[-1,1]\}) = C(\Omega)$. Sea $\Delta \subset \Omega$ triángulo. Si $\Delta \cap (1,\infty) = \emptyset$, es claro que $\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0$. Si $\Delta \cap (1,\infty) \neq \emptyset$, descomponemos Δ como se ve en fig. 3. Tenemos:

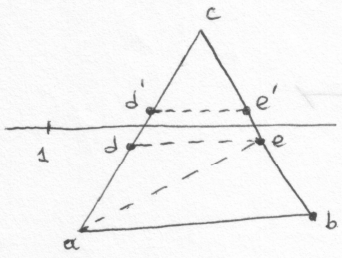


Fig. 3

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \lim_{\substack{d \to d' \\ e \to e'}} \left[\int_{[cd'e']} f + \int_{[aed]} f + \int_{[abe]} f \right] = 0$$

(los tres sumandos $\to 0$)

Por el T. de Morera, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(e) Es claro que: $\int_\gamma f = \int_{\delta_\varepsilon} f$, $\forall \varepsilon > 0$. Por tanto:

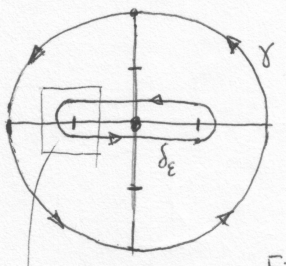
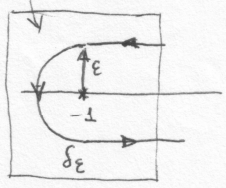


Fig. 4



$$\int_\gamma f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta_\varepsilon} f = \int_1^{-1} |z^2-1|^{1/2} e^{i\pi/2} \cdot dx + \int_{-1}^{1} |z^2-1|^{1/2} \cdot e^{i\frac{2\pi+\pi}{2}} \cdot dx =$$

$$= -2i \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{1/2} dx = -2i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2 u)^{1/2} \cdot \cos u \cdot du =$$

$$= -2i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\, du = -i\pi \qquad (\text{s.e.u.o}).$$

Ejercicio 47.

(a) Los ceros del denominador son: $e^{2\pi i z^3} - 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z_{kp} = k^{1/3} \cdot e^{\frac{2\pi i}{3} p}$, $k \in \mathbb{Z}$, $p = 0, 1, 2$. Dentro de la circunferencia $\gamma(t) = re^{it}$, como $n < r^3 < n+1$, están los ceros $\{z_{kp} : k = \pm 0, 1, 2, \cdots, n\ ;\ p = 0, 1, 2\}$. En total $6n+1$ ceros.

(I) En $z_{0p} = 0$ tenemos un polo simple con residuo:

$$\operatorname{Res}(f; 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z^3}{e^{2\pi i z^3} - 1} = \frac{1}{2\pi i}$$

(II) En z_{kp}, $|k| \geq 1$, tenemos un polo simple con residuo:

$$\operatorname{Res}(f; z_{kp}) = \lim_{z \to z_{kp}} \frac{(z - z_{kp})\, z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} = \frac{1}{6\pi i}$$

En consecuencia por el T. de los residuos se obtiene que:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f; a) \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(a) = 2\pi i \left[\frac{1}{2\pi i} + 6n \cdot \frac{1}{6\pi i} \right] = 1 + 2n \quad \text{(s.e.u.o)}$$

