Ejercicio 48
CALCULO DE INTEGRALES: METODO DE LOS RESIDUOS

Recomendamos los siguientes libros:

[1] Henry Cartan: "Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas" Ed. Selecciones Científicas, pgs. 113 – 125

[2] Murray Spiegel: "Cálculo Superior" Mc.Graw-Hill, Serie Schaum, pgs. 360 – 372.

Utilizaremos, entre otros, los siguientes resultados (ver [2], Ejercicios 27 y 33, pg. 362)

(A) Si $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, $k>1$, $M>0$, para $z = R e^{i\theta}$, entonces:

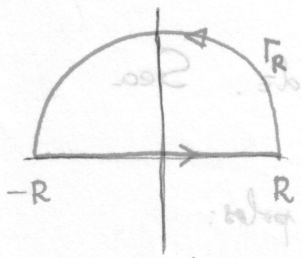


Fig. 1

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$$

siendo Γ_R el arco semicircular de radio R que se ve en la Fig. 1

(B) Si $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, $k>0$, $M>0$, para $z = R e^{i\theta}$, entonces:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\cdot e^{imz}\cdot dz = 0$$

Siendo Γ_R el arco semicircular de Fig. 1 y m constante positiva

(1) $\int_C \frac{dz}{1+z^4}$, $C = \{x+iy : x^2 - xy + y^2 + x + y = 0\}$

SOL. La función $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ tiene polos de orden 1 en $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3$, ninguno de los cuales está en C. Sustituyendo las componentes de cada z_k en la ecuación $x^2 - xy + y^2 + x + y = g(x,y)$ resulta que: $g(z_0)>0$, $g(z_1)>0$, $g(z_2)<0$, $g(z_3)>0$. Luego C engloba a z_2 y deja fuera a z_0, z_1 y z_3. Aproximadamente C tiene la forma dibujada (no necesitamos la posición exacta de C, sólo qué polos engloba)

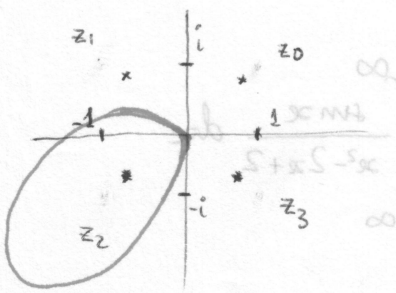


Fig. 2

Apliquemos el T. de los Residuos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \sum \text{Res}(f; z_k)\cdot \text{Ind}_C(z_k) = \text{Res}(f; z_2) = \frac{1}{(z_2-z_0)(z_2-z_1)(z_2-z_3)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{(-2-2i)(-2i)(-2)} = \frac{\sqrt{2}}{4(1-i)}$$

Luego $\displaystyle\int_C \frac{dz}{1+z^4} = -\frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{2(1+i)}$ s. e. u. o (salvo error u omisión)

---

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2-2x+2}\,dx$

SOL. Ensayaremos una integral del tipo $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}\,dz$. Sea

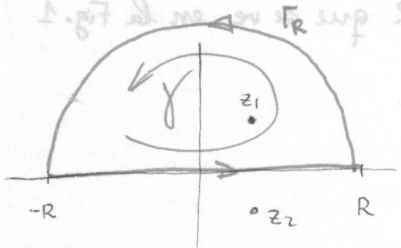


Fig. 3

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}.$$ Calculemos sus polos:

$$z^2-2z+2=0 \Rightarrow z_k = 1\pm i\,, \quad k=1,2$$

El camino γ propuesto engloba, cuando $R\to\infty$, a $z_1 = 1+i$ pero no a z_2. Por el T. de los Residuos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \text{Res}(f; z_1) = \frac{e^{i(1+i)}}{(1+i)-(1-i)} = \frac{e^{-1}(\cos 1 + i\operatorname{sen} 1)}{2i}$$

Pero: $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2-2x+2}\,dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}\,dz = \pi\,(\cos 1 + i\operatorname{sen} 1)\,e^{-1}$

Si hacemos $R\to\infty$, resulta que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}\,dz = 0$$

por (B). En definitiva:

$$\pi\,(\cos 1 + i\operatorname{sen} 1)\,e^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-2x+2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+2}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2-2x+2}\,dx$$

En consecuencia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{\pi\cdot\cos 1}{e}\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{\pi\cdot \operatorname{sen} 1}{e} \qquad (\text{s.e.u.o})$$

---

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,, \quad a>0,\ b>0$

SOL. Nos proponemos la integral $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz$ sobre el camino γ de Fig. 4, que engloba únicamente al polo simple bi de $f(z)=\dfrac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$. Por. T. de los Residuos:

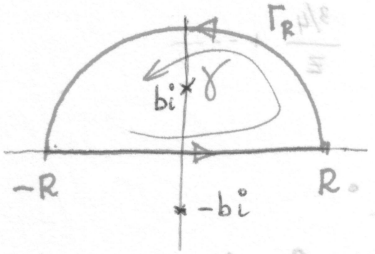


Fig. 4

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz = \operatorname{Res}(f; bi) = \frac{e^{ia\cdot bi}}{bi-(-bi)} = \frac{e^{-ab}}{2bi}$$

Por otra parte:

$$\int_{\gamma} f(z)\cdot dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2}\,dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz = \frac{\pi}{b}\,e^{-ab}$$

Por (B) tenemos que $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, así que haciendo $R\to\infty$ obtenemos:

$$\frac{\pi}{b}\,e^{-ab} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax + i\operatorname{sen} ax}{x^2+b^2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{b}\,e^{-ab} \qquad (\text{s.e.u.o})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x^2+b^2}\,dx = 0 \quad (\text{evidente pues } -\operatorname{sen}(-ax) = \operatorname{sen}(ax))$$

---

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\,dx$

SOL. Lo primero es expresar $\operatorname{sen}^3 x$ como combinación lineal de expresiones del tipo $\operatorname{sen} mx$ ó $\cos nx$:

$$\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen} x\cdot \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x\left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right] = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cdot\cos 2x$$

pero: $2\operatorname{sen}x\cdot\cos 2x = \operatorname{sen}(x-2x) + \operatorname{sen}(x+2x) = -\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}3x$. Luego:

$$\operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}3x = \frac{3}{4}\operatorname{sen}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}3x$$

Así que tomamos como función a ensayar a $f(z) = \dfrac{\frac{1}{4}[3e^{iz} - e^{3iz}]}{z^3}$.

Observemos que $f(z)$ tiene un polo en $z_0 = 0$. En efecto, desarrollando por Laurent en $z_0 = 0$, obtenemos:

$$(*)\quad f(z) = \frac{1}{4}\,\frac{\left(\left[3 + \frac{3iz}{1!} - \frac{3z^2}{2!}\cdots\right] - \left[1 + \frac{3iz}{1!} - \frac{9z^2}{2!}\cdots\right]\right)}{z^3} = \frac{1/2}{z^3} + \frac{3/4}{z} + \cdots$$

Luego $z_0 = 0$ es polo triple con residuo $\operatorname{Res}(f;0) = 3/4$.

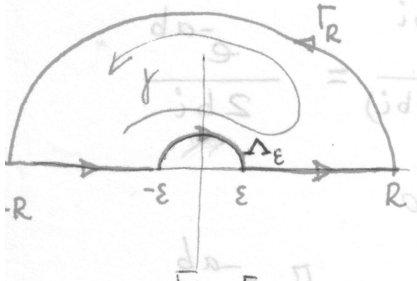


Fig. 5

El camino a utilizar debe evitar el polo $z_0 = 0$ y es el que se ve en Fig. 5. Tenemos por T. de los Residuos (ya que γ no encierra polos de f) que:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$ Así que:

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\frac{1}{4}[3e^{ix} - e^{3ix}]}{x^3}dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\frac{1}{4}[3e^{ix} - e^{3ix}]}{x^3}dx + \int_{\Lambda_\varepsilon} f(z)\,dz$$

(a) $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$ por (B)

(b)
$$\int_\varepsilon^R \frac{\frac{1}{4}[3e^{ix} - e^{3ix}]}{x^3}dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\frac{1}{4}[3e^{ix} - e^{3ix}]}{x^3}dx = \int_\varepsilon^R \frac{\frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x}{x^3}dx + i\int_\varepsilon^R \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x}{x^3}dx + i\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}dx$$

$$\xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} \quad i\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}dx + i\int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}dx$$

(c) El cálculo de $\int_{\Lambda_\varepsilon} f(z)\,dz$, para $\varepsilon > 0$ fijo y $\Lambda_\varepsilon = \{\varepsilon\cdot e^{i\theta} : \pi \geq \theta \geq 0\}$ es delicado.

Recordemos el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ (*):

$$f(z) = \frac{1/2}{z^3} + \frac{3/4}{z} + \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$$

donde $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$ es una serie suma de dos exponenciales y, por tanto, con radio de convergencia infinito y verificando $\lim_{z\to 0} \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n = a_0$. Como Λ_ε es compacto, se puede integrar término a término en $\int_{\Lambda_\varepsilon} f(z)\,dz$, es decir:

$$\int_{\Lambda_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\Lambda_\varepsilon} \frac{1}{2}\,\frac{dz}{z^3} + \int_{\Lambda_\varepsilon} \frac{3}{4}\,\frac{dz}{z} + \sum_{n\geq 0} a_n \cdot \int_{\Lambda_\varepsilon} z^n dz =$$

$$= -\frac{1}{4} z^{-2}\Big]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \frac{3}{4} \operatorname{Ln} z\Big]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}\Big]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{3}{4}\left[\operatorname{Ln}\varepsilon - \operatorname{Ln}(-\varepsilon)\right] + \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\varepsilon^{n+1} - (-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= -\frac{3}{4}\pi i + \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\varepsilon^{n+1} - (-\varepsilon)^{n+1}}{n+1}$$

Si hacemos $\varepsilon \to 0$, entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\varepsilon^{n+1} - (-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} = 0$. Así que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Lambda_\varepsilon} f(z)\,dz = -\frac{3}{4}\pi i$$

En consecuencia:

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\,dx = \frac{3}{4}\pi i$$

de donde:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\,dx = \frac{3}{4}\pi \qquad \text{(s.e.u.o)}$$

---

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+x^2)}\,dx$

SOL. En primer término $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Esto quiere decir que

Z = 6 =

debemos trabajar con la función $f(z) = \dfrac{\frac{1}{2}(1-e^{2iz})}{z^2(1+z^2)}$, cuyos polos son:

$z_0 = 0$ polo simple porque $1-e^{2iz} = 1-\left(1+\frac{2iz}{1!}\cdots\right) = -\frac{2iz}{1!}\cdots$

$z_1 = i$ polo simple con residuo $\dfrac{\frac{1}{2}(1-e^{2i^2})}{i^2(i-(-i))} = \frac{1}{4}(1-e^{-2})\,i$

$z_2 = -i$ polo simple

Solo nos interesa el residuo en $z_1 = i$, que será el único polo que englobe el el camino γ, como se aprecia en Fig. 6. Así que:

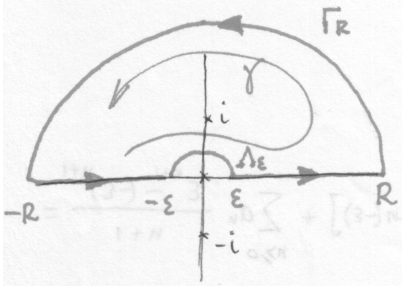


Fig. 6

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \operatorname{Res}(f;i) = \frac{1}{4}(1-e^{-2})\,i$$

Por otra parte:

$$-\frac{\pi}{2}(1-e^{-2}) = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{\frac{1}{2}(1-e^{2ix})}{x^2(1+x^2)}\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz +$$

$$+\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\frac{1}{2}(1-e^{2ix})}{x^2(1+x^2)}\,dx + \int_{\Lambda_\varepsilon} f(z)\,dz\,.$$

(a)
$$\int_\varepsilon^R \frac{\frac{1}{2}(1-e^{2ix})}{x^2(1+x^2)}\,dx \Bigg\} = \Bigg\{ \int_\varepsilon^R \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+x^2)}\,dx - \frac{i}{2}\int_\varepsilon^R \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2(1+x^2)}\,dx$$

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\frac{1}{2}(1-e^{2ix})}{x^2(1+x^2)}\,dx \Bigg\} = \Bigg\{ \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+x^2)}\,dx - \frac{i}{2}\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2(1+x^2)}\,dx \Bigg\} \xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\to 0}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+x^2)}\,dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+x^2)}\,dx$$

(b) $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$ por (B)

(c) Para hallar $\int_{\Lambda_\varepsilon} f(z)\,dz$ razonamos como en problema (4), e.d. desarrollando $f(z)$ en serie de Laurent:

$$f(z) = \frac{\frac{1}{z}\left[1 - \left[1 + \frac{2iz}{1!} - \frac{4z^2}{2!} \cdots\right]\right]}{z^2(1+z^2)} = -\frac{i}{z} + \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

Así que:

$$\int_{-\Lambda_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\Lambda_\varepsilon} -\frac{i}{z}dz + \sum_{n\geq 0} a_n \int_{\Lambda_\varepsilon} z^n dz = -i\left[\ln\varepsilon - \ln(-\varepsilon)\right] + \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\varepsilon^{n+1} - (-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= -\pi + \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\varepsilon^{n+1} - (-\varepsilon)^{n+1}}{n+1}$$

Como $\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\varepsilon^{n+1} - (-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} = 0$, resulta que $\int_{\Lambda_\varepsilon} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\pi$

Por lo tanto, haciendo $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$, obtenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+x^2)}dx - \pi = -\frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-2}\right)$$

es decir:

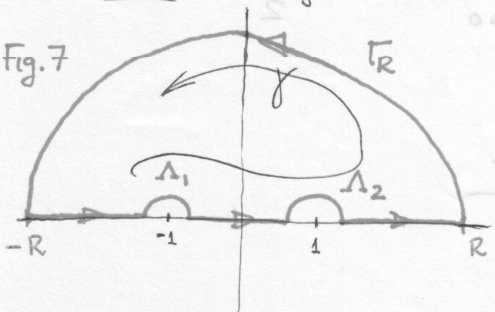
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{2}\left(e^{-2}+1\right) \quad (\text{s.e.u.o})$$

---

(6) $\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^2 - 1}dx$

SOL. Trabajaremos con $f(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}z}}{z^2-1}$, que tiene polos simples en $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, sobre el camino γ de Fig. 7, que no engloba ningún polo por lo que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Así que:

Fig. 7



2 = 8 =

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}x}}{x^2-1}\,dx + \int_{\Lambda_2} f(z)\,dz + \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}x}}{x^2-1}\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{-1-\varepsilon} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}x}}{x^2-1}\,dx + \int_{\Lambda_1} f(z)\,dz$$

(a) $$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}x}}{x^2-1}\,dx = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}\,dx + i\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{-1}^{1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}\,dx$$

Analogamente:

$$\int_{-R}^{-1-\varepsilon} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}x}}{x^2-1}\,dx + \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}x}}{x^2-1}\,dx = \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}\,dx + \int_{-R}^{-1-\varepsilon} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}\,dx +$$

$$+ i\left[\int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}\,dx + \int_{-R}^{-1-\varepsilon} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}\,dx\right] \xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2-1}\,dx$$

(b) $$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \qquad \text{por (B)}$$

(c) Para hallar $\int_{\Lambda_k} f(z)\,dz$ desarrollamos $f(z)$ en serie de Laurent alrededor de z_k, $k = 1, 2$, como en anteriores problemas. Así que alrededor de $z_2 = 1$ tenemos:

$$f(z) = \frac{e^{i\pi/2}}{2(z-1)} + \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (z-1)^n$$

Luego:

$$\int_{\Lambda_2} f(z)\,dz = \frac{e^{i\pi/2}}{2}\int_{\Lambda_2} \frac{dz}{z-1} + \sum_{n\geq 0} a_n \int_{\Lambda_2} (z-1)^n\,dz = \frac{e^{i\pi/2}}{2}\left[\operatorname{Ln}\varepsilon - \operatorname{Ln}(-\varepsilon)\right] + \sum_{n\geq 0} a_n \frac{(\varepsilon)^{n+1} - (-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{e^{i\pi/2}}{2}[-\pi i] + \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\varepsilon^{n+1} - (-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\frac{\pi i e^{i\pi/2}}{2}$$

Analogamente:

$$\int_{\Lambda_1} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{\pi i e^{-i\pi/2}}{2}$$

En consecuencia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x^2-1}\, dx + \frac{\pi i e^{-i\pi/2}}{2} - \frac{\pi i e^{i\pi/2}}{2} = 0$$

es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x^2-1}\, dx = -\pi$$

de donde:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x^2-1}\, dx = -\frac{\pi}{2} \qquad (\text{s.e.u.o})$$

(7) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\, dx$

SOL. Trabajamos con $f(z) = \dfrac{z e^{iz}}{z^2+1}$ que tiene polos simples en:

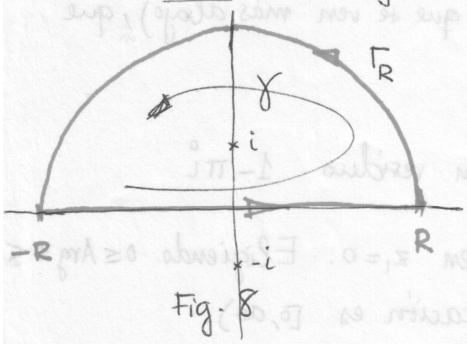


Fig. 8

$z_1 = i$ con residuo $\dfrac{1}{2e}$

$z_2 = -i$

El camino γ es el de Fig. 8. Así que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz = \frac{1}{2e}$$

Por tanto:

$$\frac{\pi}{e} i = \int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2+1}\, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z e^{iz}}{z^2+1}\, dz$$

(a) $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2+1}\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{x \cos x}{x^2+1}\, dx + i \int_{-R}^{R} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\, dx \xrightarrow[R \to \infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1}\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\, dx$.

(b) $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$ por (B).

Por lo tanto: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{e}i$, de donde:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}dx = 0 \quad \text{(evidente)}\,, \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2e} \quad \text{(s.e.u.o.)}$$

(8) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}dx$. Ver Ej. 35, pg. 365 de [2]

(9) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1+x)}$. Ver Ej. 38, pg. 367 de [2]. Cambiar $\alpha = 1-p$

En [2] están estas integrales detalladamente desarrolladas. **No creo que** yo pueda explicarlas mejor que en este libro.

(10) $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}dx$

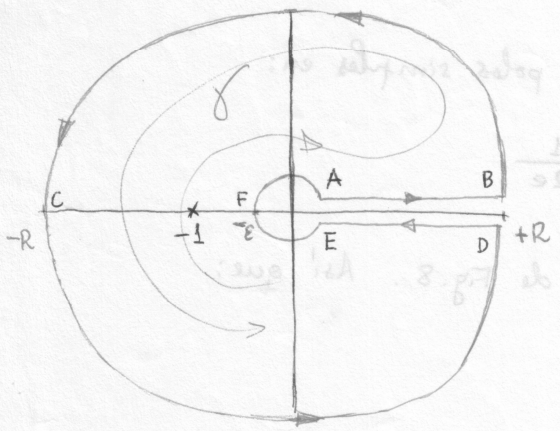


Fig. 9

SOL. Trabajaremos con $f(z) = \frac{\log^2 z}{(1+z)^3}$ (elegimos $\log^2 z$ y no $\log z$ por razones que se ven más abajo), que presenta:

(I) un polo triple en $z_0 = -1$ con residuo $1 - \pi i$

(II) un punto de ramificación en $z_1 = 0$. Eligiendo $0 \le \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$, el borde de ramificación es $[0, \infty)$.

Utilizamos el camino γ de Fig. 9. Así que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz = \mathrm{Res}(f; -1) = 1 - \pi i\,, \text{ de donde:}$$

$$2\pi^2 + 2\pi i = \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{AB} + \int_{BCD} + \int_{DE} + \int_{EFA}$$

(a) Observemos que:

$Z = 11 =$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{AB} f(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(1+x)^3}\,dx$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{DE} f(z)\,dz = -\int_0^\infty \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{(1+x)^3}\,dx \qquad \left(\begin{array}{l}\text{en el camino DE, } \log z = \log x + 2\pi i\\ \text{porque } 0 \le \operatorname{Arg} z < 2\pi\end{array}\right)$$

Así que sumando sale, para $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$:

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x - (\log x + 2\pi i)^2}{(1+x)^3}\,dx = \int_0^\infty \frac{4\pi^2 - 4\pi i \cdot \log x}{(1+x)^3}\,dx$$

(En este paso se justifica la elección de $\log^2 z$ en lugar de $\log z$)

(b) $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{BCD} \frac{\log^2 z}{(1+z)^3}\,dz = 0$ por (A), ya que si $z = Re^{i\theta}$ y R es suficientemente grande, $\exists M > 0$ t.q.

$$\left|\frac{\log^2 z}{(1+z)^3}\right| \le \frac{2\log^2 R}{(R-1)^3} \le \frac{M}{R^2}$$

(c) Si $z = \varepsilon \cdot e^{i\theta}$ y ε es suficientemente pequeño para que $\frac{1}{(1-\varepsilon)^3} \le 2$, entonces:

$$\left|\int_{EFA} \frac{\log^2 z}{(1+z)^3}\,dz\right| = \left|\int_\nu^{2\pi-\nu} \frac{\log^2(\varepsilon e^{i\theta})}{(1+\varepsilon e^{i\theta})^3}\,\varepsilon i e^{i\theta}\,d\theta\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{2\log^2 \varepsilon}{(1-\varepsilon)^3}\,\varepsilon\,d\theta \le 4\varepsilon \cdot \log^2\varepsilon \cdot 2\pi$$

Como $\varepsilon \cdot \log^2 \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, resulta que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{EFA} f(z)\,dz = 0$.

Así que en definitiva:

$$2\pi^2 + 2\pi i = \int_0^\infty \frac{4\pi^2}{(1+x)^3}\,dx - 4\pi i \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3}\,dx$$

de donde:

$$z = 12 =$$

$$\int_0^\infty \frac{4\pi^2}{(1+x)^3}\,dx = 2\pi^2 \quad , \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3}\,dx = -\frac{1}{2} \quad (\text{s.e.u.o})$$

(11) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$

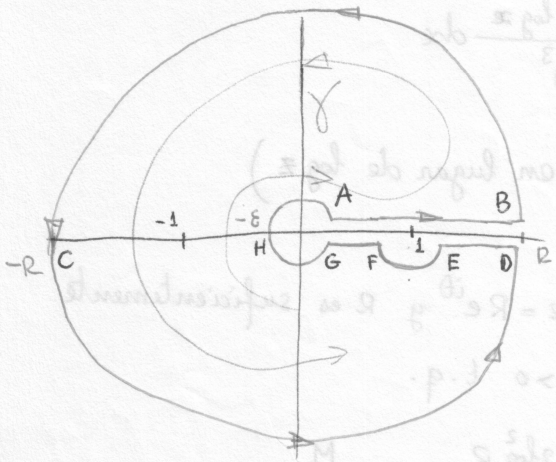


Fig. 10

SOL. Trabajamos con $f(z) = \dfrac{\log^2 z}{z^2-1}$ que presenta:

(I) Punto de ramificación en $z_0 = 0$, con borde de ramificación $[0,\infty)$ si $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$.

(II) Polo simple en $z_1 = -1$ con residuo $\dfrac{\pi^2}{2}$

(III) Semipolo simple en $z_2 = 1$, e.d. $z_2 = 1$ no es polo en el semiplano superior $\operatorname{Im} z \geq 0$ porque:

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ \operatorname{Im} z \geq 0}} \frac{\log^2 z}{z^2-1} = \frac{1}{2}$$

Pero sí es polo en el semiplano inferior $\operatorname{Im} z < 0$ porque $\log^2 z \xrightarrow[\substack{z\to +1\\ \operatorname{Im} z<0}]{} -4\pi^2$.

Elegimos el camino γ de Fig. 10. Así que:

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz \Rightarrow \pi^3 i = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{AB} + \int_{BCD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FG} + \int_{GHA}$$

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{AB} f(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2-1}\,dx \quad ; \quad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{DE} f(z)\,dz = -\int_1^\infty \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{x^2-1}\,dx$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{FG} f(z)\,dz = -\int_0^1 \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{x^2-1}\,dx$$

Sumando y haciendo $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$, sale:

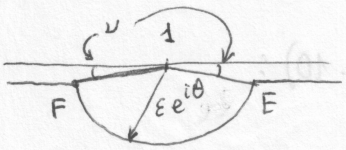
$z = 13 =$

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x - (\log x + 2\pi i)^2}{x^2-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{4\pi^2}{x^2-1}\,dx - 4\pi i \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$$

(b) $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{BCD} f(z)\,dz = 0$ por (A)

(c) Como en problema (10) se prueba que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{GHA} f(z)\,dz = 0$

(d) Notemos que $\lim\limits_{\nu\to 0} \int_{EF} f(z)\,dz = -\int_\pi^{2\pi} \frac{\log^2 z}{z+1}\,\frac{i\varepsilon e^{i\theta}\cdot d\theta}{\varepsilon\cdot e^{i\theta}}$. Como $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ \mathrm{Im}\, z<0}} \frac{\log^2 z}{z+1} =$



$= \frac{-4\pi^2}{2} = -2\pi^2$, resulta que:

$$\lim_{\substack{\nu\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \int_{EF} f(z)\,dz = 2\pi^3 i$$

Por tanto tenemos que:

$$\pi^3 i = \int_0^\infty \frac{4\pi^2}{x^2-1}\,dx - 4\pi i \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx + 2\pi^3 i$$

de donde:

$$\int_0^\infty \frac{4\pi^2}{x^2-1}\,dx = 0 \quad , \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4} \qquad \text{(s.e.u.o.)}$$

---

(12) $\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2+1}\,dx$

SOL. Primeramente transformamos la integral propuesta mediante el cambio $u = x^2+1$, en:

$$\int_1^\infty \frac{\log u}{2u\sqrt{u-1}}\,du$$

Z = 14 =

Trabajaremos con la función $f(z) = \dfrac{\log z}{2z\sqrt{z-1}}$, que verifica:

(I) tiene punto de ramificación en $z_0 = 0$. (por $\log z$). Tomando $0 \le \operatorname{Arg} z < 2\pi$, será $[0, \infty)$ borde de ramificación.

(II) $\sqrt{z-1}$ tiene punto de ramificación en $z_1 = 1$. Tomando $0 \le \operatorname{Arg} z < 2\pi$, entonces $[1, \infty)$ es el borde de ramificación. Tambien $z_1 = 1$ es de tipo semipolar, es decir, es un semipolo porque:

(a) no es polo en $\operatorname{Im} z \ge 0$ ya que $\lim\limits_{\substack{z\to 1 \\ \operatorname{Im} z \ge 0}} \dfrac{\log z}{z\sqrt{z-1}} = 0$

(b) es polo en $\operatorname{Im} z < 0$ ya que $\lim\limits_{\substack{z\to 1 \\ \operatorname{Im} z < 0}} \log z \longrightarrow 2\pi i$, pero $z\sqrt{z-1} \underset{z\to 1}{\longrightarrow} 0$

Utilizaremos el mismo camino y del problema (11) (ver. Fig. 10):

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{AB} + \int_{BCD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FG} + \int_{GHA} \qquad (*)$$

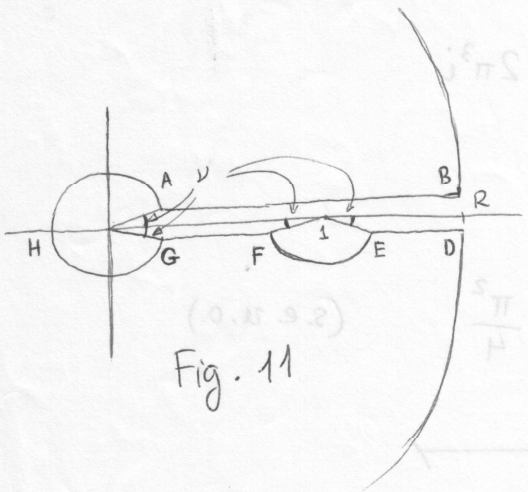


Fig. 11

El ángulo ν, que se utiliza en lo que sigue, es el que aparece en Fig. 11

(a) $\lim\limits_{\nu\to 0} \int_{AB} f(z)\,dz = -i \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \dfrac{\log x}{2x\sqrt{1-x}}\,dx + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} f(z)\,dz +$

$$+ \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{\log x}{2x\sqrt{x-1}}\,dx \qquad (\varepsilon \text{ fijo})$$

Además $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{1-\varepsilon\,AB}^{1+\varepsilon} f(z)\,dz = 0$, porque $f(z)$ está acotado en este trozo de AB ya que $z = 1$ no es polo en el semiplano $\operatorname{Im} z \ge 0$.

(b) $\lim\limits_{\nu\to 0} \int_{BCD} f(z) = \int_0^{2\pi} \dfrac{\log R + i\theta}{2Re^{i\theta}\cdot\sqrt{Re^{i\theta}-1}}\, Rie^{i\theta}\cdot d\theta \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$ por (A).

Z = 15 =

(c) $$\lim_{\nu\to 0}\int_{DE} f(z)\,dz = \int_{R}^{1+\varepsilon} \frac{\log x + 2\pi i}{2x\sqrt{x-1}\cdot e^{i\pi}}\cdot dx = \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{\log x + 2\pi i}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$\lim_{\nu\to 0}\int_{FG} f(z)\,dz = \int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\log x + 2\pi i}{2x\sqrt{1-x}\cdot e^{i\pi/2}}\cdot dx = i\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\log x + 2\pi i}{2x\sqrt{1-x}}\,dx$$

(d) $$\lim_{\nu\to 0}\int_{EF} f(z)\,dz = -\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\log z}{2z\cdot\varepsilon^{1/2}\cdot e^{i\theta/2}}\,\varepsilon\cdot i\cdot e^{i\theta}\cdot d\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \text{porque} \quad \frac{\log z}{z} \xrightarrow[\substack{z\to 1\\ \mathrm{Im}\, z<0}]{} \frac{2\pi i}{1}$$

(e) $$\lim_{\nu\to 0}\int_{GHA} f(z)\,dz = -\int_{0}^{2\pi} \frac{\log\varepsilon + i\theta}{2\varepsilon e^{i\theta}\sqrt{z-1}}\,\varepsilon i e^{i\theta}\cdot d\theta = -\frac{i\log\varepsilon}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{z-1}} + \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{\theta\,d\theta}{\sqrt{z-1}}$$

Estas integrales son difíciles de evaluar. Sin embargo la siguiente integral es fácil:

$$-\int_{0}^{2\pi}\frac{\log z}{2iz}\,dz = -\frac{1}{2i}\int_{0}^{2\pi}\frac{\log\varepsilon + i\theta}{\varepsilon\cdot e^{i\theta}}\,\varepsilon i e^{i\theta}\cdot d\theta = -\pi\cdot\log\varepsilon - \pi^2 i$$

Además $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{GHA}\left(\frac{\log z}{2z\sqrt{z-1}} - \frac{\log z}{2iz}\right)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{GHA}\frac{\log z}{2z}\cdot\frac{i-\sqrt{z-1}}{i\sqrt{z-1}}\,dz = 0$$

porque, siendo $\left|\frac{i-\sqrt{z-1}}{i\sqrt{z-1}}\right| = \frac{|-1-(z-1)|}{|\sqrt{z-1}|\cdot|i+\sqrt{z-1}|} \le \varepsilon$, para ε suficientemente pequeño, resulta que:

$$\int_{GHA}\left|\frac{\log z}{2z}\right|\left|\frac{i-\sqrt{z-1}}{i\sqrt{z-1}}\right|\varepsilon\,d\theta \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{0}^{2\pi}|\log\varepsilon + i\theta|\,d\theta \le \frac{\varepsilon\cdot\log\varepsilon}{2}2\pi + \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2\pi^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Nuestra idea es sustituir $-\int_{0}^{2\pi}\frac{\log z}{2z\sqrt{z-1}}\,dz$ por $-\int_{GHA}\frac{\log z}{2iz}\,dz$, cuando hagamos $\varepsilon\to 0$.

Hagamos $\nu\to 0$ en (*), con ε y R fijos, y apliquemos todos los puntos ante-

riores. Obtenemos:

$$0 = -i\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{\log x}{2x\sqrt{1-x}}\,dx + \int_{1-\varepsilon_{AB}}^{1+\varepsilon} f(z)dz + \int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{\log x}{2x\sqrt{x-1}}\,dx + \int_{0_{BCD}}^{2\pi} f(z)\,dz + \int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{\log x + 2\pi i}{2x\sqrt{x-1}}\,dx + \tag{**}$$

$$+ i\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{\log x + 2\pi i}{2x\sqrt{1-x}} + \int_{2\pi_{EF}}^{\pi} f(z)dz - \int_{0_{GHA}}^{2\pi}\frac{\log z}{2zi}\,dz + \int_{0_{GHA}}^{2\pi}\left[\frac{\log z}{2zi} - \frac{\log z}{2z\sqrt{z-1}}\right]dz$$

Llamemos $A(\varepsilon,R) = \int_{1-\varepsilon_{AB}}^{1+\varepsilon} f(z)dz + \int_{0_{BCD}}^{2\pi} f(z)\,dz + \int_{2\pi_{EF}}^{\pi} f(z)dz + \int_{0_{GHA}}^{2\pi}\left[\frac{\log z}{2zi} - \frac{\log z}{2z\sqrt{z-1}}\right]dz$

Sabemos que $A(\varepsilon,R) \xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\to 0} 0$. Simplificando y sustituyendo en (**) resulta:

$$0 = 2\int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{\log x}{2x\sqrt{x-1}}\,dx + \pi i\int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}} - \pi\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}} - \pi\cdot\log\varepsilon - \pi^2 i + A(\varepsilon,R)$$

Puesto que $\int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{\log x}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$ es real, nos quedamos con la parte real de la anterior expresión:

$$0 = 2\int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{\log x}{2x\sqrt{x-1}}\,dx - \pi\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}} - \pi\cdot\log\varepsilon + \operatorname{Re} A(\varepsilon,R)$$

Calculemos $\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$:

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \int_{\sqrt{1-\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{-2u\,du}{u(1-u^2)} = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon}}\frac{2\,du}{(1+u)(1-u)} = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon}}\left[\frac{1}{1+u} - \frac{-1}{1-u}\right]du =$$

$$= \left[\log|1+u| - \log|1-u|\right]\Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{1-\varepsilon}} = \log\left(1+\sqrt{1-\varepsilon}\right) - \log\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right) - \log\left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right) + \log\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)$$

En consecuencia:

$$0 = 2\int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{\log x}{2x\sqrt{x-1}}\,dx - \pi\left[\left(\log\varepsilon - \log\left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)\right) + \log\left(1+\sqrt{1-\varepsilon}\right) - \log\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right) + \log\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)\right] + \operatorname{Re} A(\varepsilon, R)$$

($\log 2$, 0, 0)

Hagamos tender $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$, y observemos que $A(\varepsilon, R) \longrightarrow 0$ y que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\log\varepsilon - \log\left(1-\sqrt{1-\varepsilon}\right)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} \log\left(\frac{\varepsilon}{1-\sqrt{1-\varepsilon}}\right) = \log 2$$

Se obtiene que:

$$0 = 2\int_{1}^{\infty} \frac{\log x}{2x\sqrt{x-1}}\,dx - \pi\left[\log 2 + \log 2\right]$$

De aquí que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{\log x}{2x\sqrt{x-1}}\,dx = \pi\cdot\log 2 \qquad (\text{s.e.u.o})$$

Ej. 49. Sean $f(z) = u(z) + iv(z)$ y $g(z) = U(z) + iV(z)$, $\forall z \in D$. Entonces:

$$U(x,y) = u(x,-y) \Rightarrow U_x(x,y) = u_x(x,-y),\ U_y(x,y) = -u_y(x,-y)$$

$$V(x,y) = -v(x,-y) \Rightarrow V_x(x,y) = -v_x(x,-y),\ V_y(x,y) = +v_y(x,-y)$$

Por tanto se verifican las ecs. de Cauchy-Riemann, ed.:

$$U_x(z) = V_y(z),\ U_y(z) = -V_x(z),\ \forall z \in D$$

Como, además, las derivadas parciales U_x, U_y, V_x, V_y existen y son continuas, concluimos que $g \in \mathcal{H}(D)$.

Ej. 50. Que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}$ converge uniformemente para $z \in \mathbb{R}$ se debe a que está acotada por la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. Que esta serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}$ no converge, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, se debe a que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}\right| = +\infty$ pues

$$\frac{\operatorname{sen} nz}{n^2} = \frac{e^{inx-ny} - e^{-inx+ny}}{2in^2} \quad \text{para } z = x+iy,\ y \neq 0$$

Ej. 51. Si valiese el TVM existiría $\xi \in (0, 2\pi)$ tq

$$0 = h(2\pi) - h(0) = h'(\xi) = i \cdot e^{i\xi} \neq 0,$$

que es una contradicción.

Ej. 52. $f(z)$ existe para $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$. Por el T. de Leibnitz de derivación de integrales sale que $\forall z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$:

$$f'(z) = \int_0^1 -\frac{t^3\,dt}{(1+t^3 z)^2}$$

Por tanto $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1])$.

Ej. 53. Se tiene que

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1/2)=\gamma} \frac{f(z)}{z^n}\,dz = \operatorname{Ind}_\gamma(0)\cdot \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^n}, 0\right) \overset{1}{\nearrow}, \quad \forall n \geq 1$$

En consecuencia $f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-z}$, $\forall z \in D$.

Ej. 54. (a) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verifica $f(z) = f(2z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, entonces f está acotada $\Rightarrow f = cte$.

(b) Debe ser $f(z) = k \cdot e^z$, $k = cte$.

Ej. 55. Como $g(z) := \overline{f(\bar{z})} \in \mathcal{H}(D)$ (por Ej. 49) y $g\left(\frac{1}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right)$, $\forall n \geq 1$, obtenemos que $g = f$, por el T. de los ceros de las funciones analíticas. Observemos que $\{0\} = \left\{\frac{1}{1+n} : n \geq 1\right\}' \cap D$.

Ej. 56. Como $\mathcal{U}$ es región y $f \neq 0$ en $\mathcal{U}$ (estamos suponiendo que $f \not\equiv cte$ en $\mathcal{U}$), necesariamente $|Z(f) \cap D| < \aleph_0$, pues de ser $|Z(f) \cap D| \geq \aleph_0$, saldría $Z(f)' \cap \bar{D} \neq \emptyset \Rightarrow f \equiv 0$ en $\mathcal{U}$ (T. de los ceros de las f. analíticas). Veamos que $Z(f) \cap D \neq \emptyset$. Suponganos que $Z(f) \cap D = \emptyset \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{H}(D)$. Incluso $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(D(0, 1+\varepsilon))$ para cierto $\varepsilon > 0$. Como $|f|_{\partial D} = 1$, por T. del módulo máximo:

$$\forall z \in D, \quad \begin{matrix} |f(z)| \leq 1 \\ |1/f(z)| \leq 1 \end{matrix} \Rightarrow |f(z)| = 1 \Rightarrow f = cte \text{ en } D \Rightarrow f = cte \text{ en } \mathcal{U}$$

Obtenemos una contradicción, que prueba que $Z(f) \cap D \neq \emptyset$.

Ej. 57. $f(z)$ tiene polo simple cuando $\cos \pi z = 0$, ed, en $z_k = k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. El residuo $\operatorname{Res}(f, z_k)$ es:

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k)\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\cos \pi z} = \left(\lim_{z \to z_k} \frac{1}{-\pi \cdot \operatorname{sen} \pi z}\right) \cdot \operatorname{sen} \pi z_k =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen} \pi z_k}{\operatorname{sen} \pi z_k} = -\frac{1}{\pi} \cdot \quad (\text{S.e.u.o})$$