Problemas de Variable Compleja. Soluciones. Hoja 4

Ejercicio 1.- Sobre la circunferencia $C(0, 1/r)$ se verifica que

$$\min\{|e^z| : |z| = 1/r\} = e^{-1/r}.$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$

$$\max\{\left|e^z - (1 + \tfrac{z}{1!} + ... + \tfrac{z^n}{n!}\}\right| : |z| = \tfrac{1}{r}\} < e^{-1/r} \leq \min\{|e^z| : |z| = 1/r\}.$$

Por el T. de Rouché la función $1 + \frac{z}{1!} + ... + \frac{z^n}{n!}$ carece de ceros dentro de $B(0, 1/r)$. Por tanto sus ceros (n en total) están en ${}^cB(0, 1/r)$, es decir, los ceros $\mathcal{Z}(f_n)$ de f_n, $n \geq N$, verifican $\mathcal{Z}(f_n) \subset \overset{\circ}{B}(0, r)$.

Ejercicio 2.- Sabemos que

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + ... \quad \text{y que} \quad \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + ...$$

Se verifica que $\min\{|\frac{1}{(1-z)^2}| : |z| = r < 1\} = \frac{1}{(1+r)^2}$. Por tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se verifica

$$\max\{|\frac{1}{(1-z)^2} - (1+2z+3z^2+...+nz^{n-1})| : |z| = r < 1\} < \frac{1}{(1+r)^2} \leq \min\{|\frac{1}{(1-z)^2}| : |z| = r\}.$$

Como $\frac{1}{(1-z)^2}$ no tiene ni ceros ni polos en $B(0, r)$, concluimos que $1 + 2z + 3z^2 + ... + nz^{n-1}$ no tiene ceros en $B(0, r)$, $\forall n \geq N$.

Ejercicio 3.- Sea $p(z) = z^4 - 5z + 1$.

(a) Estudiemos $\mathcal{Z}(p) \cap D$. Observemos que

$$\forall z \in \partial D, \quad |p(z) - (-5z + 1)| = |z^4| = 1 < 4 \leq |-5z + 1|.$$

Por el T. de Rouché p tiene en D el mismo número de ceros que $-5z + 1$, es decir, un (1) cero.

(b) Estudiemos $\mathcal{Z}(p) \cap \{1 < |z| < 2\}$. Para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 2$ se verifica

$$|p(z) - z^4| = |-5z + 1| \leq 11 < 16 = |z^4|.$$

Por el T. de Rouché p tiene en $\{|z| < 2\}$ el mismo número de ceros que z^4, es decir, cuatro (4) ceros. Por tanto p tiene en $\{1 < |z| < 2\}$ tres (3) ceros.

Ejercicio 4.- Sea $p(z) = z^7 - 4z^3 + z - 1$. Entonces

$$\forall z \in \partial D, \ |p(z) - (-4z^3)| = |z^7 + z - 1| \leq 3 < |4z^3| = 4.$$

Por el T. de Rouché p tiene en D tres (3) ceros.

Ejercicio 5.- (i) Sea

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

que tiene, como máximo, n raíces en $\mathbb{C}$. Si $a \in \mathcal{Z}(p)$ es un cero de p, indicaremos por $m(a)$ la multiplicidad de a. Tomando $R_0 > 0$ suficientemente grande, todas las raíces de p están dentro de $D(0, R_0)$. Por tanto para todo $R \geq R_0$ se verifica

$$\sum_{a\in\mathcal{Z}(p)} m(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)} \frac{p'(z)}{p(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{n(1+\frac{(n-1)a_{n-1}}{nz}+\cdots+\frac{a_1}{nz^{n-1}})}{z(1+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n})}Rie^{it}dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\left(\frac{1+\frac{(n-1)a_{n-1}}{nz}+\cdots+\frac{a_1}{nz^{n-1}}}{1+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}}\right)dt. \tag{1}$$

Fijemos $\epsilon > 0$. Se puede elegir $R_1 \geq R_0$ tal que para todo $R \geq R_1$ se verifique que

$$\forall z \in \partial B(0,R), \quad \left| n - n\left(\frac{1+\frac{(n-1)a_{n-1}}{nz}+\cdots+\frac{a_1}{nz^{n-1}}}{1+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}}\right)\right| \leq \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, teniendo en cuenta (1) obtenemos

$$\sum_{a\in\mathcal{Z}(p)} m(a) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R)} \frac{p'(z)}{p(z)}dz = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ndt = n.$$

En consecuencia p tiene n ceros en $\mathbb{C}$, contado cada cero según su multiplicidad.

(ii) Sea

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

con $a_0 \neq 0$. Haciendo R suficientemente grande se tiene que $|\frac{p(z)}{z^n} - 1| < 1$ para todo $z \in \partial B(0,R)$. Aplicando el T. de Rouché obtenemos

$$\mathcal{N}_{p(z)/z^n} - \mathcal{P}_{p(z)/z^n} = \mathcal{N}_1 - \mathcal{P}_1 = 0.$$

Como $a_0 \neq 0$, entonces $\mathcal{N}_{p(z)/z^n} = \mathcal{N}_{p(z)}$ y $\mathcal{P}_{p(z)/z^n} = n$. En consecuencia $\mathcal{N}_{p(z)} = n$.

Ejercicio 6.- Para todo $z \in \partial D$ se tiene que

$$|f(z) - z^n - (-z^n)| = |f(z)| < 1 = |z^n|.$$

Por el T. de Rouché se tiene

$$\text{número de ceros de } f(z) - z^n = 0 \text{ en } D \;=\; \text{número de ceros de } z^n = 0 \text{ en } D \;= n.$$

Ejercicio 7.- Supongamos que existe un polinomio

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,\; n \geq 1, \quad \text{tal que } |p(z)| < 1,\; \forall |z| = 1.$$

Sea $f(z) = a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, que verifica

$$\forall z \in \partial D, \quad |f(z) - (-z^n)| < 1 = |z^n|.$$

Por el T. de Rouché $f(z)$ tendría n ceros en D, lo que no puede ser porque f es un polinomio de grado $\leq n-1$.

Ejercicio 8.- Dados $\epsilon > 0$ y $R > 0$, sea γ el camino del dibujo 1 (ver hoja final). Observemos que para todo $z = x + iy \in \gamma^*$ verifica $x \geq \epsilon > 0$ por lo que

$$\forall z \in \gamma^*, \quad 0 < |e^{-z}| = e^{-x} < 1.$$

Así que haciendo $R \geq \lambda + 1$ se verifica $|\lambda - z| \geq 1,\; \forall z \in \gamma^*$, y, en consecuencia

$$|\lambda - z - e^{-z} - (\lambda - z)| < 1 \leq |\lambda - z|.$$

Por tanto

n. de ceros de $\lambda - z - e^{-z} = 0$ en $\{\mathcal{R}e(z) > 0\}$ = n. de ceros de $\lambda - z = 0$ en $\{\mathcal{R}e(z) > 0\} = 1$.

Sea z_0 la única solución de $\lambda - z - e^{-z} = 0$ en $\{\mathcal{R}e(z) > 0\}$. Entonces

$$0 = \overline{\lambda} - \overline{z}_0 - e^{-\overline{z}_0} \Rightarrow z_0 = \overline{z}_0 \Rightarrow z_0 \in \mathbb{R}.$$

Así que $z_0 = x \in (0, \lambda)$ y $0 = \lambda - x - e^{-x}$, es decir, $\lambda = x + e^{-x}$. Teniendo en cuenta la forma de la función $f(t) = t + e^{-t},\ t > 0$, se concluye que, si $\lambda \downarrow 1$, entonces $x \downarrow 0$.

Ejercicio 9.- Ver la Proposición 3.2.4.

Ejercicio 10.- Como $f(\Omega) = \Omega_1$ y $g \circ f(z) = z,\ \forall z \in \Omega$, se concluye que g, f son biyecciones entre los abiertos Ω, Ω_1 tales que $f = g^{-1}$. Entonces

(a) Como g es inyectiva, del Ejercicio 9 sale que $g'(f(z)) \neq 0,\ \forall z \in \Omega$.

(b) Como g es abierta, f es continua. Aplicando la Proposición 1.1.2 (E) ó el T. de la aplicación abierta se concluye que

$$\forall z \in \Omega,\ \exists f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))} \Rightarrow f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Ejercicio 11.- (a) $T(D(0,r)) = \{|z| > 1/r\} \cup \{\infty\}$; (b) $T(A) = A$;(c) $T(A) = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}m(z) \geq 0, |z| \geq 1\}$; (d) $T(A) = B(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}, 1/\sqrt{2}) \setminus \overset{\circ}{B}(1/2, 1/2)$.

Ejercicio 12.- Por el Corolario 3.1.3 $|f(z)| \leq c,\ \forall z \in \overline{G}$. Si $c = 0, f = 0$ en G y hemos terminado. Supongamos que $c > 0$ y que no tiene ceros en G. Entonces $1/f \in \mathcal{H}(G)$ y por el Corolario 3.1.3

$$\forall z \in \overline{G},\ |f(z)| \leq c \ \text{ y } |1/f(z)| \leq 1/c \ \Rightarrow |f(z)| = c,$$

de donde sale que $f = cte$.

Ejercicio 13.- Es claro que $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$(= cerrados de $\mathbb{C}$). Como obviamente $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\} \subset \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}$, concluimos que $\overline{\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}} \subset \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}$. Supongamos que $\overline{\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}} \neq \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}$, es decir, que existe $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\} \setminus \overline{\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}}$. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(z_0, r) \cap \overline{\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}} = \emptyset,$$

de donde sale que $|f(z)| \geq |f(z_0)| = c > 0,\ \forall z \in B(z_0, r)$. En particular $1/f \in \mathcal{H}(D(z_0, r))$ y $|1/f(z_0)| \geq |1/f(z)|,\ \forall z \in D(z_0, r)$, lo que implica que $1/f$ y por tanto f son constantes en $D(z_0, r)$. Luego $f = cte$ en $\mathbb{C}$, una contradicción que prueba que $\overline{\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}} = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}$.

Ejercicio 14.- Basta aplicar Ejercicio 12 y Ejercicio 13.

Ejercicio 15.- Supongamos que el resultado es falso. Entonces dado $\epsilon > 0$ con $R\epsilon < 1$ existe un polinomio $p_\epsilon(z)$ tal que $|\frac{1}{z} - p_\epsilon(z)| \leq \epsilon,\ \forall |z| = R$. Si $\gamma(t) := Re^{it},\ \forall t \in [0, 2\pi]$, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = Ind_\gamma(0) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma p_\epsilon(z) dz = 0.$$

Por tanto

$$1 = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\frac{1}{z} - p_\epsilon(z)) dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\frac{1}{z} - p_\epsilon(z)) R e^{it} dt \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{z} - p_\epsilon(z) \right| R dt \leq R\epsilon < 1,$$

una contradicción que prueba que el resultado es cierto.

Ejercicio 16.- Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q > 0$. Por el T. del módulo máximo si $|z| = r$ y $r_1 \leq r \leq r_2$ se tiene

$$r^p \cdot |f(z)|^q \leq \max\{r_1^p \cdot M(r_1)^q,\ r_2^p \cdot M(r_2)^q\}.$$

Sea $\{(p_n, q_n) : n \geq 1\}$ una sucesión de pares de números enteros con $q_n > 0$ tal que $p_n/q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$r_1^\alpha \cdot M(r_1) = r_2^\alpha \cdot M(r_2), \quad \text{es decir,} \quad \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\alpha = \frac{M(r_2)}{M(r_1)}.$$

Entonces, si $|z| = r$, $r_1 \leq r \leq r_2$ y $n \geq 1$, se verifica la desigualdad

$$r^{p_n} \cdot |f(z)|^{q_n} \leq \max\{r_1^{p_n} \cdot M(r_1)^{q_n},\ r_2^{p_n} \cdot M(r_2)^{q_n}\},$$

que es equivalente a la desigualdad

$$r^{p_n/q_n} \cdot |f(z)| \leq \max\{r_1^{p_n/q_n} \cdot M(r_1),\ r_2^{p_n/q_n} \cdot M(r_2)\}. \tag{2}$$

Tomando límites en (2) para $n \to \infty$ llegamos a que

$$r^\alpha \cdot |f(z)| \leq r_1^\alpha \cdot M(r_1) = r_2^\alpha \cdot M(r_2),$$

de donde sale

$$\begin{aligned}
M(r) \leq M(r_1) \cdot (\frac{r_1}{r})^\alpha &= M(r_1) \cdot e^{\alpha \cdot L(r_1/r)} \\
&= M(r_1) \cdot e^{\alpha \cdot L(r_1/r_2) \cdot \frac{L(r_1/r)}{L(r_1/r_2)}} \\
&= M(r_1) \cdot \left(\frac{M(r_2)}{M(r_1)}\right)^{\frac{L(r_1/r)}{L(r_1/r_2)}} \\
&= M(r_1)^{1 - \frac{L(r_1/r)}{L(r_1/r_2)}} \cdot M(r_2)^{\frac{L(r_1/r)}{L(r_1/r_2)}} \\
&= M(r_1)^{\frac{Lr_2 - Lr}{Lr_2 - Lr_1}} \cdot M(r_2)^{\frac{Lr - Lr_1}{Lr_2 - Lr_1}}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 17.- Por las hipótesis del ejercicio existe $\epsilon > 0$ tal que $G := \overset{\circ}{B}(0, R + \epsilon) \subset \Omega$ y $f(z) \neq 0 \neq g(z)$, $\forall z \in G$. En consecuencia, si $h(z) = f(z)/g(z)$, $\forall z \in G$, resulta que $h \in \mathcal{H}(G)$ y $|h(z)| \leq 1, \forall z \in B(0, R)$, por el Corolario 3.1.3. Aplicando el mismo argumento a g/f, concluimos que $|g(z)/f(z)| = |1/h(z)| \leq 1$, $\forall z \in B(0, R)$. Por tanto $|h(z)| = 1, \forall z \in B(0, R)$, es decir, $f(z) = \lambda g(z), \forall z \in B(0, R)$, para cierto $|\lambda| = 1$. Como Ω es una región concluimos que $f(z) = \lambda g(z), \forall z \in \Omega$.

Ejercicio 18.- Sea $f(z) = u(z) + iv(z)$. Como u es armónica en Ω, del Corolario 5.2.2 sale que

$$\max\{u(z) : z \in B(0, r)\} = \max\{u(z) : z \in \partial B(0, r)\}. \tag{3}$$

Por tanto $A(r)$ crece con r. Supongamos que no fuese estrictamente creciente, es decir, que existen $r_1 < r_2$ tales que $A(r_1) = A(r_2)$. Este hecho y (3) implican que existe $z_0 \in B(0, r_1)$ tal que $u(z_0) = \max\{u(z) : z \in B(0, r_2)\}$. Por el Ppio. del máximo (Prop. 5.2.1) concluimos que $u = cte$ en Ω, de donde sale que $f = cte$ en Ω, lo que contradice las hipótesis. Por tanto $A(r)$ es estrictamente creciente.

Ejercicio 19.- (a)(i) $T(z) = \frac{z-i}{-2iz+i}$.

(a)(ii) Consideremos, en primer término, una transformación de Möbius R tal que $R(D) = D$ y $R(0) = i/2$. R es un automorfismo de D y, por ejemplo, podría ser $R(z) := \frac{z+i/2}{1-(i/2)\cdot z}$. A continuación consideramos la traslación $S(z) = z + 1$. Entonces $T = (S \circ R)^{-1}$ verifica las condiciones exigidas. Observemos que hay infinitas soluciones.

(a)(iii) Sea R una transformación de Möbius tal que $R({}^cB(0, 2)) = \{\mathcal{I}m(z) > 0\}$. Por ejemplo, podemos hacer que R mande los puntos $2, 2i, -2$ sobre los puntos $1, 0, \infty$, en cuyo caso R es de la forma

$$R(z) = (z, 2, 2i, -2) = \frac{\frac{z-2i}{z+2}}{\frac{2-2i}{2+2}} = \frac{2z - 4i}{(1 - i)(z + 2)}.$$

Es claro que $R(0) = -\frac{2i}{1-i} = 1 - i$. Sea S la traslación $S(z) = z - 1$. Entonces $T = S \circ R$ cumple los requerimientos. Hay infinitas soluciones.

(b) Si $z_2 = T^{-1}(1),\ z_3 = T^{-1}(0)$ y $z_4 = T^{-1}(\infty)$, se verifica que $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4),\ \forall z \in \mathbb{C}$. Teniendo en cuenta la expresión de la razón cruzada (z, z_2, z_3, z_4) y que $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}_\infty$ (porque $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$), concluimos que los coeficientes a, b, c, d de la transformación T pueden elegirse reales.

(c) Es claro que $\varphi_{z_0}(z) \in D,\ \forall z \in H$, porque $|z - z_0| < |z - \overline{z}_0|,\ \forall z \in H$. Obviamente $\varphi_{z_0} \in \mathcal{H}(H)$ porque $\overline{z}_0 \notin H$. Por otra parte

$$\varphi_{z_0}(1) = \frac{1 - z_0}{1 - \overline{z}_0} \in \partial D, \quad \varphi_{z_0}(0) = \frac{z_0}{\overline{z}_0} \in \partial D \quad \text{y } \varphi_{z_0}(-1) = \frac{-1 - z_0}{-1 - \overline{z}_0} \in \partial D,$$

de donde sale que $\varphi_{z_0}(\mathbb{R}_\infty) = \partial D$. Por el T. de orientación y ya que $\varphi_{z_0}(z_0) = 0$, obtenemos que $\varphi_{z_0}(H) = D$. Finalmente observemos que φ_{z_0} es 1-a-1.

(d) (1) Por (c) toda transformación de Möbius de la forma $T(z) = \lambda\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0},\ |\lambda| = 1,\ \mathcal{I}m(z_0) > 0$, verifica $T(\mathbb{R}_\infty) = \partial D$ y $T(H) = D$ siendo $H := \{\mathcal{I}m(z) > 0\}$.

(2) Sea T una transformación de Möbius tal que $T(H) = D$. Entonces $T(\mathbb{R}_\infty) = \partial D$. Sean $z_0 := T^{-1}(0) \in H$ y $R(z) = \frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$. Entonces $R \circ T^{-1}$ es un automorfismo de D por lo que

$$\exists \lambda \in \partial D \ \text{ y } \ \exists a \in D \quad \text{tales que} \quad R \circ T^{-1}(z) = \lambda \varphi_a(z),\ \forall z \in \mathbb{C}_\infty.$$

Como $\lambda\varphi_a(0) = R \circ T^{-1}(0) = R(z_0) = 0$, deducimos que $a = 0$, es decir, $\varphi_a = id$ y $R \circ T^{-1}(z) = \lambda z,\ \forall z \in \mathbb{C}_\infty$. Si $w \in H$ se tiene que

$$\lambda T(w) = R \circ T^{-1} \circ T(w) = R(w) = \frac{w - z_0}{w - \overline{z}_0} \ \Rightarrow \ T(w) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{w - z_0}{w - \overline{z}_0},\ \forall w \in H.$$

(e) Las transformaciones de Möbius T tales que $T(\partial D) = \partial D$ son de dos tipos, a saber:

Tipo I. $T(D) = D$. Estas transformaciones son automorfismos de D y por tato tienen la forma $T(z) = \lambda \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z},\ \lambda \in \partial D,\ a \in D$.

Tipo II. $T(D) = {}^cB(0,1)$. En este caso la trasformación $S(z) = 1/T(z)$ es de Tipo I, por lo que

$$S(z) = \lambda \cdot \tfrac{z-a}{1-\overline{a}z},\ \lambda \in \partial D,\ a \in D.$$

Por tanto, si $a = 0$, $T(z) = \frac{1}{\lambda z}$, y, si $a \neq 0$, se tiene

$$T(z) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1-\overline{a}z}{z-a} = \frac{\overline{a}/a}{\lambda} \cdot \frac{z-1/\overline{a}}{1-z/a} = \rho \cdot \frac{z-\mu}{1-\overline{\mu}z},\ \rho \in \partial D,\ |\mu| > 1.$$