SOLUCIONES DE EJERCICIOS. HOJA 5

Ej. 1. (a) $f(z) = iz$; (b) No existe; (c) Debe ser $f(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $|\lambda| = 1$, $\frac{1}{2} = -\lambda a$, $a \in D$.

Así que $|a| = 1/2$ y por tanto

$$\frac{3}{4} = f'(0) = \lambda \varphi_a'(0) = \lambda(1-|a|^2) \Rightarrow \frac{3}{4} = \lambda\left(1-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \lambda = 1, \quad a = -1/2$$

Ej. 2. Debe ser $f(z) = \lambda z$, $|\lambda| = 1$. Como $\lambda = f'(0) > 0 \Rightarrow \lambda = 1$ y $f = id$.

Ej. 3. Todo $T \in Aut(D)$ es de la forma $T(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $a \in D$, $|\lambda| = 1$, $\forall z \in D$.

Aserto Si $T \in Aut(D)$, T tiene en $\{|z| \geq 1\}$ un punto fijo.

Dem Caso 1 $a = 0$. Entonces $T(z) = \lambda z$ y, por tanto, $T(\infty) = \infty$

Caso 2 $a \neq 0$. Hallamos los puntos fijos resolviendo la ec

$$Tz = \frac{\lambda z - \lambda a}{1-\bar{a}z} = z \iff \bar{a}z^2 + (\lambda - 1)z - \lambda a = 0$$

Las raíces son: $z = \dfrac{\frac{1-\lambda}{\bar{a}} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\lambda}{\bar{a}}\right)^2 + 4\lambda \frac{a}{\bar{a}}}}{2}$. El producto de

las raíces $z_1 \cdot z_2$ es:

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-\lambda}{\bar{a}}\right)^2 - \left(\left(\frac{1-\lambda}{\bar{a}}\right)^2 + 4\lambda \frac{a}{\bar{a}}\right)\right] = -\lambda \frac{a}{\bar{a}},$$

de donde $|z_1 \cdot z_2| = 1 \Rightarrow |z_1| \geq 1$ ó $|z_2| \geq 1$ cqd

Por tanto T tendría tres puntos fijos: dos dentro de D, por hipótesis, y uno en ${}^cD$. En consecuencia $T = id$.

4.- (1) Obvio

(2) Para toda transformación de Möbius se tiene:

Γ ciclo $\Rightarrow$ $T(\Gamma)$ ciclo (en $\mathbb{C}_\infty$).

Sabemos que $T(0) = \infty$, $T(\infty) = 0$ (aquí). Así que:

Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ciclo tq. $0 \notin \Gamma \Rightarrow T(0) = \infty \notin T(\Gamma) \Rightarrow$

$T(\Gamma)$ es un ciclo en $\mathbb{C}$.

Además $\infty \notin \Gamma \Rightarrow 0 = T(\infty) \notin T(\Gamma)$.

(3) Sea Γ ciclo en $\mathbb{C}$ tq $0 \in \Gamma \Rightarrow T(0) = \infty \in T(\Gamma) \Rightarrow T(\Gamma)$

es un ciclo que pasa por ∞, e.d. es <u>una recta</u>.

Además $\infty \notin \Gamma \Rightarrow T(\infty) = 0 \notin T(\Gamma)$.

(4) Sea Γ una recta tq $0 \notin \Gamma$ (e.d un ciclo en $\mathbb{C}_\infty$ tq

$0 \notin \Gamma$, $\infty \in \Gamma$). Entonces $T(\Gamma)$ es un ciclo en $\mathbb{C}_\infty$ tq:

(i) $0 \notin \Gamma \Rightarrow T(0) = \infty \notin T(\Gamma) \Rightarrow T(\Gamma)$ es un ciclo en $\mathbb{C}$.

(ii) $\infty \in \Gamma \Rightarrow T(\infty) = 0 \in T(\Gamma)$.

(5) Γ recta que pasa por $0 \Rightarrow 0, \infty \in \Gamma$. Así que

$T(0) = \infty \in T(\Gamma) \ni 0 = T(\infty) \Rightarrow T(\Gamma)$ es recta que pasa por

el origen.

5.- (A) Sean $0 < r_1 < r_2 \leq 1$ y $f(t) = \left| \dfrac{1 + r_1 e^{it}}{1 + r_2 e^{it}} \right|$, $t \in [0, 2\pi]$

Intentemos ver el $\min\{f(t) : t \in [0, 2\pi]\}$. Para ello calculamos el mínimo de $f(t)^2$:

$$f(t)^2 = \frac{1 + r_1^2 + 2r_1 \cos t}{1 + r_2^2 + 2r_2 \cos t}$$

Derivamos y hallamos las soluciones de la ec.

$$-2r_1 \cdot \operatorname{sen} t\,(1 + r_2^2 + 2r_2 \cos t) + 2r_2 \operatorname{sen} t\,(1 + r_1^2 + 2r_1 \cdot \cos t) = 0$$

1ª solución $\operatorname{sen} t = 0 \Rightarrow t = 0$, $t = \pi$ (si $r_2 \neq 1$)

2ª solución $-2r_1 (1 + r_2^2 + 2r_2 \cos t) + 2r_2 (1 + r_1^2 + 2r_1 \cos t) = 0$

$$\Updownarrow$$

$r_2 - r_1 + r_2 r_1 (r_2 - r_1) = 0$ IMPOSIBLE

Por aquí no hay soluciones.

Por la geometría del problema se ve que hay un mínimo siempre en $t = 0$, que es $f(0) = \dfrac{1 + r_1}{1 + r_2}$, y si $r_2 \neq 1$, hay un máximo en $t = \pi$, que es $f(\pi) = \dfrac{1 - r_1}{1 - r_2}$.

(B) Veamos que $\left| \dfrac{a + b}{1 + a\bar{b}} \right| \leq \dfrac{|a| + |b|}{1 + |ab|}$

Si $a + b = 0$ ó $a = 0$ ó $b = 0$ ó $a = b$, ello es obvio.

En caso contrario, supongamos que $|a| \geq |b|$. Entonces:

$$\left| \frac{a + b}{1 + a\bar{b}} \right| \leq \frac{|a| + |b|}{1 + |ab|} \iff \frac{1 + |ab|}{|a| + |b|} \leq \left| \frac{1 + a\bar{b}}{a + b} \right| \iff$$

$$\iff \frac{1 + |a|^2 \left|\frac{b}{a}\right|}{1 + \left|\frac{b}{a}\right|} \leq \left| \frac{1 + |a|^2 \left(\frac{b}{a}\right)^-}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)} \right| = \left| \frac{1 + |a|^2 \cdot \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} \right|$$

Pero esta última desigualdad es cierta por (A).

Basta coger $r_1 = |a|^2 \cdot \left|\frac{b}{a}\right|$, $r_2 = \left|\frac{b}{a}\right|$.

(C) Veamos que $\dfrac{|a|-|b|}{1-|ab|} \leq \left|\dfrac{a+b}{1+a\bar{b}}\right|$

Si $|a| \leq |b|$ ó $a=0$ ó $b=0$, el resultado es cierto.

En caso contrario $1 > |a| > |b| > 0$ y se tiene que:

$$\frac{|a|-|b|}{1-|ab|} \leq \left|\frac{a+b}{1+a\bar{b}}\right| \iff \left|\frac{1+a\bar{b}}{a+b}\right| \leq \frac{1-|ab|}{|a|-|b|} \iff$$

$$\left|\frac{1+|a|^2\overline{\left(\frac{b}{a}\right)}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)}\right| \leq \frac{1-|a|^2\cdot\left|\frac{b}{a}\right|}{1-|b/a|}$$

$$\left|\frac{1+|a|^2\left(\frac{b}{a}\right)}{1+\left(\frac{b}{a}\right)}\right|$$

Esto es cierto por (A).

FIN.

6.- Sea $a = f(0) \Rightarrow |a| \leq 1$.

(I) $|a| = 1 \Rightarrow f = cte$ (por T. del Módulo Maximo) $\Rightarrow$ $\forall z \in D$, $|f(z)| = |a| = 1$, y se verifica el aserto trivialmente.

Si $\exists z_0 \in D$ tq $|f(z_0)| = 1 \Rightarrow f = cte$ y $|f(z)| = 1$ y también sería verdad el aserto.

(II) Así que podemos afirmar que $f(D) \subset D$. En particular $|a|<1$.

Sea $g(z) = \varphi_a \circ f(z) = \dfrac{f(z)-a}{1-\bar{a}\cdot f(z)}$. Así que

$$\left.\begin{array}{l} g \in \mathcal{H}(D) \\ g(D) \subset D \\ g(0) = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Lema de Schwarz}} |g(z)| \leq |z|$$

Por otra parte del <u>Ej. 5</u> extraemos que:

$$\frac{|f(z)|-|a|}{1-|f(z)\cdot a|} \leq \underbrace{\left|\frac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}\right|}_{\substack{\| \\ |g(z)| \\ \wedge\!| \\ |z|}} \leq \frac{|f(z)|+|a|}{1+|f(z)\cdot a|}$$

<u>De aquí que:</u>

(i) $\dfrac{|f(z)|-|a|}{1-|f(z)\cdot a|} \leq |z| \Longrightarrow |f(z)| \leq \dfrac{|a|+|z|}{1+|a\cdot z|} = \dfrac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)\cdot z|}$

(ii) También es verdad (por Ej. 5) que:

$$\frac{|a|-|f(z)|}{1-|f(z)\cdot a|} \leq |g(z)| \leq |z| \Longrightarrow \frac{|f(0)|-|z|}{1-|f(0)\cdot z|} = \frac{|a|-|z|}{1-|a\cdot z|} \leq |f(z)|.$$

7.- Sabemos que si $f \in \mathcal{H}(D)$, $f(D) \subset D$ y $f(\alpha) = \beta$, entonces $|f'(\alpha)| \leq \dfrac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$. Así que en nuestro caso debe ser

$$|f'(1/2)| \leq \frac{1-(3/4)^2}{1-1/4} = \frac{1-\frac{9}{16}}{3/4} = \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$$

Así que no existe una tal f.

8.-

(1) Se tiene (por T. de aplicación abierta) que $f(D)$ es un abierto de $\operatorname{Re} z \geq 0 \Rightarrow$ que $f(D) \subset \operatorname{Re} z > 0$.

(2) La transformación de Möbius $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$ verifica

$T(\operatorname{Re} z > 0) = D$ y $T(i\mathbb{R}_\infty) = \partial D$. Por lo tanto $T \circ f(D) \subset D$. Sea $a = T \circ f(0)$ $(a \in D)$ y denotemos

$g(z) = \varphi_a \circ T \circ f(z)$, $\forall z \in D$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l}(i)\ g \in \mathcal{H}(D),\ g(D) \subset D \\ (ii)\ g(0) = 0\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Lema de Schwarz}} |g(z)| \leq |z|, \ \forall z \in D$$

Haciendo las cuentas, esto significa que: $\left| \frac{f(z) - f(0)}{f(z) + \overline{f(0)}} \right| \leq |z|, \forall z \in D$.

De aquí que; $\forall z \in D$:

$$\frac{|f(z)| - |f(0)|}{|f(z)| + |f(0)|} \overset{\text{obvio}}{\leq} \left| \frac{f(z) - f(0)}{f(z) + \overline{f(0)}} \right| \leq |z| \Rightarrow |f(z)| \leq |f(0)| \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

$$\frac{|f(0)| - |f(z)|}{|f(0)| + |f(z)|} \leq \left| \frac{f(z) - f(0)}{f(z) + \overline{f(0)}} \right| \leq |z| \Rightarrow |f(z)| \geq |f(0)| \frac{1-|z|}{1+|z|}.$$

9.- Suponemos que G es región (si no es así trabajamos en la componente conexa que contiene a $B(0;R)$).

Si f es cte, hemos terminado.

Supongamos que f no es constante y sea $f = u + iv$.

Entonces $A(R) > 0$. En efecto, de ser $A(R) = 0$, como u es armónica, concluiríamos que $u|_{B(0;R)} \equiv 0 \Rightarrow$ $f \equiv$ cte en G. Por otra parte $|u(z)| < A(R)$, $|z| < R$.

Así que: $|2A(R) + f(z)| > (A(R)^2 + v(z)^2)^{1/2} > |f(z)|$.

Por tanto $\dfrac{f(0)}{2A(R) + f(0)} = a \in D$ y si definimos:

$$\forall z \in D, \quad g(z) = \varphi_a\left(\frac{f(Rz)}{2A(R) + f(Rz)}\right)$$

se tiene que:

(i) $g \in \mathcal{H}(D)$, $g(D) \subset D$

(ii) $g(0) = 0$ $\underset{\text{Lema de Schwarz}}{\Longrightarrow}$ $|g(z)| \leq |z|$, $\forall z \in D$

e.d.: $\forall z \in D$:

$$\underbrace{\left| \frac{\dfrac{f(Rz)}{2A(R) + f(Rz)} - \dfrac{f(0)}{2A(R) + f(0)}}{1 - \dfrac{\overline{f(0)}}{2A(R) + \overline{f(0)}} \cdot \dfrac{f(Rz)}{2A(R) + f(Rz)}} \right|}_{g(z)} \leq |z| \iff$$

$$\iff \left| \frac{f(Rz) - f(0)}{2A(R) + f(Rz) + \overline{f(0)}} \right| \leq |z|.$$

Cogemos $z = \frac{r}{R} e^{i\theta}$. Entonces:

$$|f(re^{i\theta})| - |f(0)| \leq \frac{r}{R}\left[2A(R) + |f(r e^{i\theta})| + |\overline{f(0)}|\right] \leq$$

$$\leq \frac{2r}{R} A(R) + \frac{r}{R} M(r) + \frac{r}{R}|f(0)| \implies$$

$$M(r)\left(1 - \frac{r}{R}\right) \leq \frac{2r}{R} A(R) + \frac{r+R}{R}|f(0)| \leq \frac{r+R}{R}\left(A(R) + |f(0)|\right)$$

$$\implies M(r) \leq \frac{R+r}{R-r}\left[A(R) + |f(0)|\right] \quad \text{cqd.}$$

10.- HECHO Sea $g \in \mathcal{H}(D)$, $|g(z)| \leq 1$, $\forall z \in D$, $a \in D$, $g(a) = 0$

Entonces $|g(z)| \leq \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$, $\forall z \in D$.

DEM. Sea $h(z) = g \circ \varphi_{-a}(z)$, $\forall z \in D$. Entonces:

(i) $|h(z)| \leq 1$, $\forall z \in D$; (ii) $h(0) = 0$; (iii) $h \in \mathcal{H}(D)$.

Por Lema de Schwarz $|h(z)| \leq |z|$, $\forall z \in D$, e.d.

$$\left|g\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)\right| \leq |z|, \forall z \in D$$

Poniendo $u = \varphi_{-a}(z) \iff \varphi_a(u) = z$, tenemos que:

$$|g(u)| \leq |\varphi_a(u)| = \left|\frac{u-a}{1-\bar{a}u}\right|, \quad \forall u \in D$$

Etapa 1 Por HECHO

$$|f(z)| \leq |\varphi_{z_1}(z)|, \forall z \in D.$$

Etapa 2 Definimos, $\forall z \in D$,

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/\varphi_{z_1}(z) \,, & z \neq z_1 \\ \lim\limits_{z \to z_1} \dfrac{f(z)}{\varphi_{z_1}(z)} \,, & z = z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g \in \mathcal{H}(D), \ |g(z)| \leq 1, \ \forall z \in D \\ g(z_2) = 0 \end{cases}$$

Por el **HECHO** obtenemos que:

$$\left| \frac{f(z)}{\varphi_{z_1}(z)} \right| \leq |\varphi_{z_2}(z)| \,, \quad \forall z \in D$$

Reiterando obtenemos que $|f(z)| \leq \prod\limits_{k=1}^{n} \left| \dfrac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k \cdot z} \right|$, $\forall z \in D$.

11.– Por Ej. 10 se tiene que $|f(z)| \leq \prod\limits_{k=1}^{n} \left| \dfrac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k \cdot z} \right|$, $\forall z \in D$.

Definimos $g(z)$, $\forall z \in D$, del siguiente modo

$$g(z) = \begin{cases} f(z) \Big/ \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k \cdot z} \right) \,, & z \in D \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \\ \lim\limits_{z \to z_k} \dfrac{f(z)}{\prod\limits_{r=1}^{n} \left(\dfrac{z - z_r}{1 - \bar{z}_r z} \right)} \,, & z = z_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Se tiene que $|g(z)| \leq 1$, $\forall z \in D$, $|g(0)| = 1$, $g \in \mathcal{H}(D)$. Por T. del Módulo Máximo $g = cte$ en D. Obviamente:

$$g(z) = g(0) = e^{ia} \cdot (-1)^n$$

Así que: $f(z) = e^{ia} \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k \cdot z} \right)$, $\forall z \in D$.

12.-

(A) Supongamos que f no tiene ceros en $D \Rightarrow f, 1/f \in \mathcal{H}(D)$ y

$|f(z)| \leq 1 \geq 1/|f(z)|, \forall z \in D \Rightarrow f \equiv a \;, |a| = 1.$

(B) Sean $z_1, \dots, z_k$ los ceros de f en D (en nº necesariamente finito y repetidos tantas veces como indique su multiplicidad).

Por Ej. 10 se tiene que: $|f(z)| \leq \prod_{k=1}^{n} \left| \dfrac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k \cdot z} \right|, \forall z \in D.$

Tomemos g definida por: $\forall z \in \Omega$:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) \Big/ \prod_{k=1}^{n} \left(\dfrac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k \cdot z} \right), & z \neq z_1, z_2, \dots, z_k \\[2ex] \lim\limits_{z \to z_j} \dfrac{f(z)}{\prod_{k=1}^{n} \left(\dfrac{z - z_k}{z - \bar{z}_k \cdot z} \right)}, & z = z_j,\; j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Se tiene que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $|g(z)| \leq 1, \forall z \in \bar{D}$, g no tiene ceros en $\bar{D}$, y además $|g(z)| = 1, \forall z \in \partial D$ (esto se debe a que $|\varphi_\alpha(z)| = 1, \forall z \in \partial D$, siendo $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}, \alpha \in D$)

Por (A) concluimos que $g = cte = a$, $|a| = 1$, en Ω.

Así que $f(z) = a \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\dfrac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k \cdot z} \right)$ y, necesariamente,

$\dfrac{1}{\bar{z}_k} \notin \Omega$, $k = 1, 2, \dots, n$.

13.- Por el Ej. 12 se tiene que:

$$f(z) = \lambda \cdot \left(\frac{z - \frac{1}{4}(1+i)}{1 - \frac{1}{4}(1-i)z} \right) \left(\frac{z - 1/2}{1 - \frac{1}{2}z} \right)^2, \ |\lambda| = 1$$

Como $\frac{1}{\sqrt{128}} = f(0) = \lambda \left(-\frac{1}{4}(1+i)\right) \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

14.- Sabemos que una función f en las condiciones del enunciado necesariamente verifica $|f'(0)| \leq 1 - (1/2)^2 = \frac{3}{4}$, y que caso de valer la =, entonces $f(z) = \Phi_{-1/2}(\lambda z)$, $|\lambda| = 1$. Como

$$\frac{3}{4} = f'(0) = \frac{\lambda(1 + 1/4)}{1} \Rightarrow \lambda = 1$$

Naturalmente, f es única.

15.- Sabemos que $f_n \xrightarrow{P} f_0 \iff f_n \to f_0$ uniformemente sobre compactos $K \subset G$. Sea $K = \{z_n\}_{n \geq 0} \subset G$ que es compacto y $\varepsilon > 0$.
Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\forall r \in \{0,1,2,\dots\}$, $d(f_n(z_r), f_0(z_r)) \leq \varepsilon/2$
En particular $\forall n \geq n_0$, $d(f_n(z_n), f_0(z_n)) \leq \varepsilon/2$. Pero $f_0(z_n) \to f_0(z_0)$
$\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq, $\forall n \geq n_1$, $d(f_0(z_n), f_0(z_0)) \leq \varepsilon/2$. Así que $\forall n \geq \max\{n_1, n_0\}$, se tendrá:

$$d(f_n(z_n), f_0(z_0)) \leq d(f_n(z_n), f_0(z_n)) + d(f_0(z_n), f_0(z_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

16.- Bastará ver que dados $\varepsilon > 0$ y $K \subset G$ compacto, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, $\forall z \in K$, $f_0(z) - f_n(z) \leq \varepsilon$. Por cada $z \in K$, elegimos $n_z \in \mathbb{N}$ y $U_z \subset G$ entorno abierto de z tq $\forall w \in U_z$, $f_{n_z}(w) > f_0(w) - \varepsilon$. Nos quedamos con una familia finita tq $K \subset \bigcup_{i=1}^{p} U_{z_i}$ y tomamos $n_0 = \sup\{n_{z_i} : i = 1, \dots, p\}$.

17.- Ver Lección 1.4 de Teoría.

18.- (a) Basta recordar que el desarrollo en serie de Taylor de una función holomorfa converge absoluta y uniformemente en todo compacto interior al círculo de convergencia

(b) Idem para el desarrollo de Laurent.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMATICAS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....
NOMBRE .... D.N.I. n.º ....
ASIGNATURA .... GRUPO ....
ENSEÑANZA N.º DE MATRICULA FECHA