1.- $1 \Rightarrow 2$ Supongamos que no se verifica (2). Supongamos que cada $f \in \mathcal{F}_\epsilon$ tiene el desarrollo:

$$\forall z \in D, \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n^{(f)} \cdot z^n$$

tq obviamente $\overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n^{(f)}|} \leq 1$ (porque el radio de convergencia ≥ 1).

Denotemos por $A_n = \sup \{ |a_n^{(f)}| : f \in \mathcal{F}_\epsilon \}$. Entonces, puesto que no se verifica (2), $\exists \eta > 0$ tq $\overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{A_n} > 1+\eta$. Así que podemos escoger una sucesión $\{f_k\}_{k \geq 1} \subset \mathcal{F}_\epsilon$ y $\{n_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{N}$ tq $n_k \to +\infty$ y $|a_{n_k}^{(f_k)}| > (1+\eta)^{n_k}$. Puesto que $\mathcal{F}_\epsilon$ es rel. compacto, una subsucesión de $\{f_k\}$ converge a cierta $f_0 = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot z^n \in \mathcal{H}(D)$. Spdg ~~daponemos~~ que $f_k \xrightarrow{p} f_0$.

Naturalmente, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tq $|a_n| \leq (1+\eta/6)^n$, $\forall n \geq n_0$, porque $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$. Sea $p \in \mathbb{N}$ tq:

$$\left(1 - \tfrac{1}{p}\right)(1+\eta) > (1+\eta/2)$$

$$\left(1 - \tfrac{1}{p}\right)(1+\eta/6) < (1+\eta/6) \quad \text{(Obvio)}$$

Consideremos $\gamma = \partial B(0; 1-1/p)$, que es un compacto. Puesto que $f_k \xrightarrow{p} f_0 \Rightarrow f_k$ converge uniformente a f_0 sobre γ. Así que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_1$, $\forall z \in \gamma$, $|f_n(z) - f_0(z)| \leq 1$.
De la des. de Cauchy sacamos que para $k \geq \max\{n_0, n_1\} = k_0$ se tiene:

$$\cdot\ |a_{n_k}^{(f_k)} - a_{n_k}| \leq \frac{1}{(1-\frac{1}{p})^{n_k}}$$

$\vee$

$$(1+\eta)^{n_k} - \left(1+\frac{\eta}{6}\right)^{n_k}$$

Así que $\underline{\forall k \geq k_0}$: $\left[(1+\eta)^{n_k} - \left(1+\frac{\eta}{6}\right)^{n_k}\right]\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n_k} \leq 1$

lo que no puede ser ya que:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left[1+\eta\right]^{n_k} - \left[1+\frac{\eta}{6}\right]^{n_k}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n_k} = \infty$$

$\longleftarrow$

$\underline{2 \Rightarrow 1}$ Sea $\{M_n\}_{n\geq 1}$ sucesión tq $\forall f = \sum_{n\geq 0} a_n^{(f)} \cdot z^n \in \mathcal{F}_i$ verifica $|a_n^{(f)}| \leq M_n$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} \leq 1$. Sea $g(z) = \sum_{n\geq 0} M_n \cdot z^n$. Obviamente, calculando el radio de convergencia, concluimos que $g \in \mathcal{H}(D)$. Sea

$$\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{H}(D) : f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n,\ z \in D,\ \text{con } |a_n| \leq M_n,\ n \geq 0 \}$$

Obviamente $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{A}$. Probemos que $\mathcal{A}$ es compacto en $(\mathcal{H}(D), p)$.

(a) $\underline{\mathcal{A} \text{ es cerrado}}$

Sea $f_k = \sum_{n\geq 0} a_n^{(k)} \cdot z^n \in \mathcal{A}$ tq $f_k \xrightarrow{p} f_0 = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n \in \mathcal{H}(D)$.

Por T. de Weierstrass, $\forall p \in \mathbb{N}$, $f_k^{(p)} \xrightarrow{p} f_0^{(p)}$. Por tanto

$$p! \cdot a_p^{(k)} = f_k^{(p)}(0) \xrightarrow[k\to\infty]{} f_0^{(p)}(0) = p! \cdot a_p$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS		
NOMBRE	D.N.I. n.º	
ASIGNATURA	GRUPO	
ENSEÑANZA	N.º DE MATRÍCULA	FECHA

Así que $a_p^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_p$, $\forall p \geq 0$. Pero $|a_p^{(k)}| \leq M_p$

$\Rightarrow |a_p| \leq M_p \Rightarrow f_0 \in \mathcal{U}$.

(b) $\mathcal{U}$ es localmente acotada en $\mathcal{H}(D)$

Bastará probar que si $K_m = B(0; 1-1/m)$, entonces $\mathcal{U}(B(0; 1-\frac{1}{m}))$ es acotado. Pero si

$$0 \leq R = \sum_{n\geq 0} M_n \cdot (1-\tfrac{1}{m})^n < +\infty$$

se tiene sin dificultad que $\mathcal{U}(B(0; 1-\frac{1}{m})) \subset B(0; R)$.

2.- Supongamos que f_0 no es constante. Sea $z_0 \in G$. Probemos que, $\forall z \in G\setminus\{z_0\}$, $f_0(z) \neq f_0(z_0)$. Sea $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$, $\forall z \in G\setminus\{z_0\}$. Entonces $g_n \in \mathcal{H}(G\setminus\{z_0\})$, $g_n \neq 0$ en $G\setminus\{z_0\}$ y $g_n \xrightarrow{p} f_0 - f_0(z_0) = g_0$ en $G\setminus\{z_0\}$, que es región.

El T. de Hurwitz implica que $g_0 \equiv 0$ (lo que no ocurre) ó g_0 no se anula en $G\setminus\{z_0\}$ (que es lo que debe ocurrir).

Por tanto $f_0(z) \neq f_0(z_0)$, $\forall z \in G\setminus\{z_0\}$.

3.- Como f_0 no es constante, si $g_0(z) = f_0(z) - \alpha$, $\exists\, r>0$ tq $B(a;r) \subset G$ y a es el único cero de g_0 en $B(a;r)$. En particular $g_0(z) \neq 0$, $\forall z \in \gamma_n = \partial B(a; r)$, $n \geq 1$

Etapa 1 El T. de Hurwitz dice $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$, la función $g_n(z) = f_n(z) - \alpha$ tiene en $B(a;r)$ tantos ceros como los que tiene g_0 (contados según su multiplicidad).

Etapa 2 El T. de Hurwitz dice que $\exists\, n_1 > n_0$ tq $\forall n \geq n_1$, g_n tiene en $B(a; r/2)$ tantos ceros como los que tiene

g_0 en $B(a; r/2)$.

Y así sucesivamente. Se obtiene la sucesión $\{n_k\}_{k\geq 0}$ con la que construimos la sucesión $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ de la siguiente forma

Paso 1 Para $n_0 \leq n < n_1$, cogemos $a_n \in B(a; r)$ tq $f_n(a_n) = \alpha$

Paso 2 Para $n_1 \leq n < n_2$, cogemos $a_n \in B(a; r/2)$ tq $f_n(a_n) = \alpha$

etc.

4.- Sea $K \subset \{\operatorname{Im} z > 0\}$ compacto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq si $z = x+iy \in K$ $y \geq \varepsilon$. Ahora basta tener en cuenta que si $z = x+iy$, $y > 0$,:

$$\operatorname{tg} nz = \frac{\operatorname{sen} nz}{\cos nz} = \frac{\frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i}}{\frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2}} = i\,\frac{1 - e^{2inx - 2ny}}{1 + e^{2inx - 2ny}}$$

Por tanto se tiene:

5.- (a) f analítica $\Rightarrow f^2$ analítica y

$$|f(a)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2\, d\theta, \quad 0 \leq r \leq R$$

Así que:

$$|f(a)|^2 \cdot \frac{R^2}{2} = \int_0^R |f(a)|^2 \cdot r\,dr \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2\, d\theta\right) r\,dr$$

$$\Downarrow$$

$$|f(a)|^2 \leq \frac{1}{\pi \cdot R^2}\int_0^R \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 \cdot r\,dr\,d\theta.$$

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS	
NOMBRE	D.N.I. n.º
ASIGNATURA	GRUPO
ENSEÑANZA	N.º DE MATRÍCULA / FECHA

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

(b) Sale aplicando (a) y el T. de Montel.

6.- $A \Rightarrow B$ Es inmediato porque todo camino γ^* es un compacto.

$B \Rightarrow A$ Bastará probar que hay convergencia uniforme sobre compactos $K \subset G$ y, para ello, es suficiente y necesario probar que $\forall a \in G$, $\exists r>0$ tq $B(a;r) \subset G$ y $f_n \to f_0$ uniformemente sobre $B(a;r)$. Así que elegimos $0<R$ tq $B(a;R) \subset G$ y nos quedamos con $r = R/2$, aplicando que $f_n \to f_0$ uniformemente sobre $\gamma = \partial B(0;R)$. Así que $\forall w \in B(0;r)$:

$$f_n(w) - f_0(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(z) - f_0(z)}{z - w}\, dz$$

$$\Downarrow$$

$$|f_n(w) - f_0(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f_n(z) - f_0(z)|}{R/2}\, R\, d\theta$$

desigualdad que prueba la convergencia uniforme.

7.- Por T. de Montel, $\exists \{f_{n_k}\}_{k>1} = \Sigma$ tq $f_{n_k} \xrightarrow{P} f_\Sigma \in \mathcal{H}(G)$.

Obviamente $f_\Sigma(z) = f_0(z)$, $\forall z \in A$. Como $A' \cap G \neq \emptyset$, concluimos que $f_\Sigma = f_0$. Por otra parte esto pasa para $\forall$ subsucesión convergente Σ. Así que $f_n \xrightarrow{P} f_0$

8.- $1 \Rightarrow 2$ Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\sum_{n>n_0} \frac{1}{2^n} < \varepsilon/2$.

Sea $\delta > 0$ tq $\frac{\delta}{1+\delta} \cdot \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon/2$. Puesto que $\mathcal{L}$ es normal

existe $M>0$ tq $\forall f\in\mathcal{F}$, $f(K_{n_0})\subset B(0;M)$. Sea $c>0$ tq $cM\le\delta$. Entonces $\forall f\in\mathcal{F}$, $\forall\, 1\le n\le n_0$:

$$\rho_n(cf,0)=\sup\{|cf(z)|: z\in K_n\}\le cM\le\delta$$

Así que $\forall f\in\mathcal{F}$:

$$\rho(f,0)=\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\rho_n(f,0)}{1+\rho_n(f,0)}+\sum_{n>n_0}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\rho_n(f,0)}{1+\rho_n(f,0)}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

e.d. $c\mathcal{F}\subset B(0;\varepsilon)$ ⟵

2 ⇒ 1 Sea $c>0$ tq $c\mathcal{F}\subset B(0;1)$.

Sea $K\subset G$ compacto ⇒ $cf(K)\subset B(0;1)$, $\forall f\in\mathcal{F}$, e.d.

$f(K)\subset B(0;1/c)$ ⇒ $\mathcal{F}$ es loc. acotado ⇒ $\mathcal{F}$ es normal.
T. de Montel

⟵

9.–

(1) La aplicación $(\mathcal{H}(G),\rho)\xrightarrow{\Psi}(\mathcal{H}(G),\rho)$, $f\longrightarrow f'$ es continua

por el T. de Weierstrass. Por tanto $\mathcal{F}'=\Psi(\mathcal{F})$ es normal

(2) Obvio Cogemos $\mathcal{F}=\{n: n\in\mathbb{N}\}\Rightarrow\mathcal{F}'=\{0\}$.

Pero $\mathcal{F}$ no es normal: no es acotado

(3) ⇒| Por (1) sabemos que $\mathcal{F}'$ es normal. Por otra parte

$\mathcal{F}$ normal ⇒ $\mathcal{F}$ loc. acotada ⇒ $\forall w\in G$, $\mathcal{F}(w)$ es acotada.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS	
NOMBRE	D.N.I. n.º
ASIGNATURA	GRUPO
ENSEÑANZA	N.º DE MATRÍCULA / FECHA

$\Leftarrow$ Spdg podemos suponer que G es conexo y bastará probar que $\forall w \in G$, $\exists r>0$ tq $\mathcal{F}(B(w;r))$ es acotado.

Sea $w_0 \in G$ tq $\mathcal{F}(w_0)$ acotado. Pongamos:

$$\mathcal{U} = \{ w \in G : \exists r>0,\ B(w;r) \subset G \text{ y } \mathcal{F}(B(w;r)) \text{ acotado} \}.$$

Aserto 1 $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_G$ - Obvio, por la propia definición de $\mathcal{U}$

Aserto 2 $w_0 \in \mathcal{U}$

En efecto, sea $r>0$ tq $B(w_0;r) \subset G$ y $z \in B(w_0;r)$.

Entonces, $\forall f \in \mathcal{F}$:

$$f(z) = f(w_0) + \int_{[w_0, z]} f'(w)\,dw$$

Pero $\mathcal{F}'(B(w_0;r))$ es acotado (porque $\mathcal{F}'$ es normal).

Luego $\mathcal{F}(B(w_0;r))$ es acotado.

Sea $V = G \setminus \mathcal{U}$

Aserto 3 $V \in \mathcal{T}_G$

En efecto, sea $z_0 \in V$ y $r>0$ tq $B(z_0;r) \subset G$. Afirmamos que $B(z_0;r) \cap \mathcal{U} = \emptyset$. En efecto, si $\exists z_1 \in B(z_0;r) \cap \mathcal{U}$, entonces $\forall z \in B(z_0;r)$, $\forall f \in \mathcal{F}$, se tendrá:

$$f(z) = f(z_1) + \int_{[z_1, z]} f'(w)\,dw$$

Puesto que $\mathcal{F}'$ normal $\Rightarrow \mathcal{F}'(B(z_0;r))$ acotado, concluimos que $\mathcal{F}(B(z_0;r))$ acotado $\Rightarrow z_0 \in \mathcal{U}$ CONTRADICCIÓN

Ahora por razones de conexión debe ser $V = \emptyset$, $G = \mathcal{U}$.

10.- (a) $\mathcal{F}$ normal $\not\Rightarrow$ $\{g \circ \mathcal{F}\}$ normal

CONTRAEJEMPLO

$$\begin{cases} G = \mathbb{C} \\ \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ f_n(z) = \frac{1}{n}, \ g(z) = \frac{1}{z} \end{cases}$$

$\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \geq 1}$

(b) $\{g \circ \mathcal{F}\}$ normal $\not\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ normal

CONTRAEJEMPLO

$$\begin{cases} G = \mathbb{C}, \ \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ g(z) = 1/z \\ \mathcal{F} = \{f_n\}, \ f_n(z) = n. \end{cases}$$

11.- (1) $f = u + iv$ tq $u = u_x$, $v = -u_y$. Por ser armónica, le

tiene $u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u_x = v_y$.

Además $u_{xy} - u_{yx} = 0 \Rightarrow u_y = -v_x$ $\Rightarrow f \in \mathcal{H}(G)$

(2) u_x, u_y son $\pm$ parte real, imaginaria de $f \in \mathcal{H}(G) \Rightarrow$

que son armónicas

(3) Por MVP (propiedad del Valor Medio):

$0 \leq r \leq R$, $u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})\, dt$

Así que:

$$u(a) \cdot \frac{R^2}{2} = \int_0^R u(a) \cdot r\, dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})\, dt \cdot r\, dr$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{B(0;R)} u(x,y)\, dx\, dy.$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS		
NOMBRE	D.N.I. n.º	
ASIGNATURA		GRUPO
ENSEÑANZA	N.º DE MATRÍCULA	FECHA

12.-

$$P_{xx} + P_{yy} = \sum_{\substack{l=0,\dots,n \\ k=2,\dots n}} k(k-1)\, a_{kl} \cdot x^{k-2} \cdot y^{l} + \sum_{\substack{l=2,\dots,n \\ k=0,\dots,n}} l(l-1)\, a_{kl} \cdot x^{k} \cdot y^{l-2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (a) \quad k(k-1)\, a_{k,l-2} + l(l-1)\, a_{k-2,l} = 0 \;, \quad 2 \le k, l \le n \\ (b) \quad a_{ij} = 0 \;, \quad i, j \in \{n, n-1\} \end{cases}$$

13.- Sea $u \in Har(\Omega)$ y $v \in Har(\Omega)$ su conjugada. Entonces $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$ y no es constante $\Rightarrow$ f es abierta.

Pero $u = \pi_1 \circ f$, $v = \pi_1 \circ f$ y las proyecciones son abiertas.

14.- Sea la función $\frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(G)$. Esta función puede no tener primitiva globalmente en G, pero sí la tiene localmente. Así que si $z_0 \in G$, $\exists\, r > 0$ tq $\mathring{B}(z_0; r) \subset G$ y $\exists\, g \in \mathcal{H}(\mathring{B}(z_0; r))$ tq $g'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$, $\forall z \in \mathring{B}(z_0; r)$

Naturalmente $\exists\, k = cte$ tq

$$g(z) = \operatorname{Log}|f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z) + 2k\pi, \quad \forall z \in \mathring{B}(z_0; r)$$

Así que $u = \operatorname{Log}|f(z)|$ es la parte real de g (función constante)

$\Rightarrow$ u es armónica.

15.- Obviamente $u \in Har(D)$, porque es la parte imaginaria de $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 \in \mathcal{H}(D)$. Haciendo cuentas sale que

$$0 \le r < 1, \quad u(re^{i\theta}) = \frac{4(1-r^2)\, r \cdot \operatorname{sen}\theta}{(1 - 2r\cos\theta + r^2)^2}$$

Obviamente, a θ fijo, $\lim_{r\uparrow 1} u(re^{i\theta}) = 0$. Incluso podemos afirmar que si $z_0 \in \partial D \setminus \{1\}$, entonces

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} u(z) = 0$$

Por otra parte tomando el camino $(r, \theta) = (\cos\theta, \theta)$ para $\theta \to 0$ se tiene que:

$$\lim_{\theta \to 0^+} u(re^{i\theta}) = \lim_{\theta \downarrow 0} \frac{4(1-\cos^2\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{(1-2\cos^2\theta+\cos^2\theta)^2} =$$

$$= \lim_{\theta \downarrow 0} \frac{4(1-\cos^2\theta)\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{(1-\cos^2\theta)^2} =$$

$$= \lim_{\theta \downarrow 0} \frac{4\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta}{1-\cos^2\theta} = \lim_{\theta \downarrow 0} \frac{4\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = +\infty$$

Así que $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in D}} u(z) = +\infty$

Por lo tanto no se viola el Ppio. del Máximo

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS		
NOMBRE	D.N.I. n.º	
ASIGNATURA	GRUPO	
ENSEÑANZA	N.º DE MATRÍCULA	FECHA

16.- Por ser $u, v \in \mathcal{H}(D) \cap C(\bar{D})$ se tiene que:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot P_r(\theta - t)\, dt, \quad 0 \le r < 1$$

porque individualmente se verifica:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \cdot P_r(\theta - t) \cdot dt$$

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it}) \cdot P_r(\theta - t) \cdot dt$$

Por otra parte:

(a) Sea $f \in \mathcal{H}(D) \Rightarrow 0 = \int_{\gamma_r} f(z) z^n \cdot dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) \cdot r^n e^{int} \cdot ire^{it} \cdot dt$, $n \ge 0$

$\gamma_r = \{|z| = r\}$

$$\Rightarrow 0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, e^{-int} \cdot dt, \quad n \ge 1.$$

(b) Supongamos que, $\forall n \ge 1$, $0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, e^{int} \cdot dt$. Sea $z = re^{i\theta}$.

Por la convergencia uniforme de la serie del núcleo de Poisson $P_r(\theta - t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \cdot e^{in(\theta - t)}$ se tiene que:

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} \cdot e^{in(\theta - t)} \cdot dt =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{r^{|n|} \cdot e^{in\theta}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot e^{-int} \cdot dt = \sum_{n \ge 0} \frac{r^n e^{in\theta}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, e^{-int} \cdot dt =$$

$$= \sum_{n \ge 0} a_n \cdot z^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot e^{-int} \cdot dt.$$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{H}(D)$$

17.- (T. aproximación de Weierstrass)

Podemos suponer $f: \partial D \to \mathbb{C}$ continua. Definimos $\begin{cases} \tilde{f}: D \to \mathbb{C} \\ \tilde{f}_r: \partial D \to \mathbb{C} \end{cases}$

$$\tilde{f}_r(e^{i\theta}) = \tilde{f}(r\cdot e^{i\theta}) =: \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}\cdot e^{i(\theta-t)n} \cdot dt =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{r^{|n|}e^{in\theta}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\cdot e^{-itn}\cdot dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{-n=k}^{n} \frac{r^{|k|}\cdot e^{ik\theta}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\cdot e^{-itk}\cdot dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{-n=k}^{n} a_k \cdot e^{ik\theta}$$

Así que $\tilde{f}_r$ es límite uniforme de polinomios trigonométricos.

Pero $\tilde{f}_r \to f$ uniformemente en ∂D.

18.- Por la des. de Harnack: $\frac{1-1/2}{1+1/2}u(0) \le u(1/2) \le \frac{1+1/2}{1-1/2}u(0)$

19.- **HECHO** Sean $a \in G$, $0<r<R$, $B(a;R) \subset G$. Supongamos que $\exists w \in B(a;r)$ tq $\{f_n(w)\}_{n\ge1}$ converge. Entonces $\{f_n\}_{n\ge1}$ converge uniformemente en $B(a;r)$.

DEM Para $0 \le s < R$ definimos $\tilde{f}_n(a+se^{i\theta})$ como:

$$\tilde{f}_n(a+se^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{it}+se^{i\theta}}{Re^{it}-se^{i\theta}}\, u_n(a+Re^{it})\, dt.$$

Entonces $\tilde{f}_n \in \mathcal{H}(\mathring{B}(a;R))$ y $Re\,\tilde{f}_n = u_n$.

Consideremos $\{\tilde{f}_n|_{B(a;r)}\}_{n\ge1}$. Entonces se tiene

que para $0 \le s \le r$, $\forall n,m \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{f}_n(a+se^{i\theta}) - \tilde{f}_m(a+se^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{it}+se^{i\theta}}{Re^{it}-se^{i\theta}} \left(u_n(a+Re^{it}) - u_m(a+Re^{it})\right) dt$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}_n(a+se^{i\theta}) - \tilde{f}_m(a+se^{i\theta})| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{Re^{it}+se^{i\theta}}{Re^{it}-se^{i\theta}}\right| |u_n(a+Re^{it}) - u_m(a+Re^{it})| dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R+s}{R-s} \|(u_n-u_m)_{B(a;R)}\|_\infty dt \le \frac{R+r}{R-r} \|(u_n-u_m)_{B(a;R)}\|_\infty$$

Por tanto es cierto que $\{\tilde{f}_n\}_{n\ge1}$ converge uniformte en $B(a;r)$.

Obviamte $\mathrm{Re}\,\tilde{f}_n = \mathrm{Re}\, f_n = u_n$. $\Rightarrow \exists\, c_n = c\in\mathbb{C}$ t.q. $f_n = \tilde{f}_n + c_n$ en $B(a;r)$

Pero $f_n(w) \to d_0$, $\tilde{f}_n(w) \to p_0 \Rightarrow c_n \to c_0 \Rightarrow \{f_n\}_{n\ge1}$ converge

uniformte en $B(a;r)$ c.q.d.

Sea $A = \{z \in G : \exists\, r>0$ t.q. $B(z,r) \subset G$ y $\{f_n\}_{n\ge1}$ converge unif. en $B(z;r)\}$

Obviamente A es abierto, $A \neq \emptyset$ ($z_0 \in A$).

Sea $B = G \setminus A$. Del HECHO extraemos que B es abierto: en efecto

sea $z \in B \Rightarrow \forall \varepsilon>0$, $\{f_n\}_{n\ge1}$ no converge uniformte en $B(z;\varepsilon)$. Aplicando

el HECHO, obviamente $A \cap B(z;\varepsilon) = \emptyset \Rightarrow B(z;\varepsilon) \subset B$.

Puesto que G es conexo y $A \neq \emptyset$, concluimos que $G = A$. y de

aquí sale que $\exists\, f_0 \in \mathcal{H}(G)$ t.q. $f_n \xrightarrow{\ l\ } f_0$.

La parte (b) es consecuencia del T. de Weierstrass.
