

MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2006–2007
Problemas
Hoja 1. Análisis de errores

1 Encontrar la expresión decimal de los siguientes números binarios:

a) 1011001 b) 0,100101 c) 11,11 d) $101.\overline{101}$

2 Encontrar la expresión binaria de los siguientes números decimales:

a) 83 b) 0,0625 c) 0,1 d) 3,2 e) $5.\overline{3}$

3 Algunos ordenadores utilizan, en lugar del sistema binario, el sistema hexadecimal, es decir, utilizan como base el 16 y los dígitos que se emplean son

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Encontrar la expresión decimal de los números hexadecimales:

a) E b) 1A c) A9B.A1 d) $A.\overline{A}$

Determinar también su expresión binaria (nótese lo cómodo que resulta expresar números hexadecimales en binario y viceversa).

4 Determinar la representación en coma flotante estándar con precisión simple de:

- a) Los números máquina de los Problemas 1 y 2.
b) El redondeo de los números de los Problemas 1 y 2 que no son números máquina.

5 Determinar los números decimales que en simple precisión tienen la siguiente representación en coma flotante estándar:

a) 11100101110010010000000000000000 c) 11111111100000000000000000000000
b) 00000011110001111000000000000000 d) 10000000010000000000000000000000

6 Supongamos que $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ son aproximaciones de x_1 y x_2 con errores ε_1 y ε_2 respectivamente, es decir, $\tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon_1$ y $\tilde{x}_2 = x_2 + \varepsilon_2$. Demostrar que el *error relativo* del producto es, aproximadamente, igual a la suma de los *errores relativos* de los factores, esto es,

$$\frac{\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - x_1x_2}{x_1x_2} \sim \frac{\varepsilon_1}{x_1} + \frac{\varepsilon_2}{x_2}$$

y, por tanto, el producto de dos números es siempre un problema *bien condicionado*. Hacer un razonamiento análogo para la suma de dos números.

7 Supongamos que tenemos un ordenador que almacena los números en base 10 con tan sólo dos dígitos de mantisa. Queremos calcular con esta máquina la menor raíz de la ecuación $x^2 - 20x + 1 = 0$.

- a) ¿Qué valor se obtendría al calcularla como $10 - \sqrt{99}$?
b) Idem calculándola como $\frac{1}{10 + \sqrt{99}}$.

8 Hallar el condicionamiento de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}), \ g(x) = \sen x \ \text{y} \ h(x) = e^x.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2006–2007
Problemas
Hoja 2. Complementos de álgebra matricial

1 Demostrar que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n \times 1}$ y

$$B = \begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_m^T \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n} \text{ entonces } Bx = \begin{pmatrix} b_1^T x \\ b_2^T x \\ \vdots \\ b_m^T x \end{pmatrix}.$$

2 Mostrar que si

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathcal{M}_{m \times n} \text{ y } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n \times 1}$$

entonces

$$Bx = \sum_{i=1}^n x_i b_i = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n.$$

3 Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_p) \in \mathcal{M}_{n \times p}$$

probar que

$$AB = (Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_p).$$

4 Utilizar los Problemas 2 y 3 para demostrar que si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n \times p}$ y $x \in \mathcal{M}_{p \times 1}$ entonces

$$A(Bx) = (AB)x.$$

5 Usar los Problemas 3 y 4 para mostrar que si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n \times p}$ y $C \in \mathcal{M}_{p \times q}$ entonces

$$A(BC) = (AB)C.$$

6 Sean $A, D \in \mathcal{M}_n$ con $D = \text{diag}(d_i)_{i=1}^n$. Encontrar las expresiones de DA y AD .

7 Si $v, w \in \mathbb{V}$, determinar la forma de vw^* .

8 a) Sean $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ y $N = \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right)$ particiones por bloques coherentes de las matrices M y N (es decir, $A, E \in \mathcal{M}_{n_1}$ y $D, H \in \mathcal{M}_{n_2}$ con $n_1 + n_2 = n$). Demostrar que

$$MN = \left(\begin{array}{c|c} AE + BG & AF + BH \\ \hline CE + DG & CF + DH \end{array} \right).$$

b) Generalizar el resultado anterior para el producto de dos matrices cuadradas descompuestas en p por p bloques.

9 Sean D y E matrices diagonales y λ un escalar. Demostrar que λD , $D + E$ y DE son matrices diagonales y determinarlas.

10 Sean A y B matrices triangulares superiores (resp. inferiores) y λ un escalar. Demostrar que λA , $A + B$ y AB son matrices triangulares superiores (resp. inferiores) y determinar sus elementos diagonales.

11 a) Demostrar que si D es una matriz diagonal e inversible, su inversa es también diagonal. Determinar D^{-1} .

b) Mostrar que si A es una matriz triangular superior (respectivamente inferior) e inversible, su inversa es también triangular superior (respectivamente inferior). Determinar los elementos diagonales de A^{-1} .

12 Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz triangular y normal entonces A es diagonal.

13 Una matriz de la forma

$$P^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \vdots & & & 1 \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i) \\ \\ \\ j) \end{matrix}$$

se denomina *matriz de permutación* de las líneas i y j . Comprobar que si $B = (b_{kl})_{k,l=1}^n$ entonces

$$(P^{ij}B)_{kl} = \begin{cases} b_{kl} & \text{si } k \neq i, j, \quad l = 1, 2, \dots, n \\ b_{jl} & \text{si } k = i, \quad l = 1, 2, \dots, n \\ b_{il} & \text{si } k = j, \quad l = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{y} \quad (BP^{ij})_{kl} = \begin{cases} b_{kl} & \text{si } l \neq i, j, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ b_{kj} & \text{si } l = i, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ b_{ki} & \text{si } l = j, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

es decir, al multiplicar la matriz B a la izquierda (resp. derecha) por P^{ij} se intercambian las filas (resp. columnas) i y j de B . Además, probar que

$$\det P^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{y} \quad (P^{ij})^{-1} = P^{ij}.$$

14 Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_n$ es normal e inversible entonces A^{-1} es también normal.

15 Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$. Probar los siguientes resultados:

$$a) \operatorname{sp}(AB) = \operatorname{sp}(BA). \quad b) \varrho(A^k) = (\varrho(A))^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

16 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Probar que

$$\lambda \in \operatorname{sp}(A) \Leftrightarrow \alpha\lambda \in \operatorname{sp}(\alpha A).$$

17 Si $A \in \mathcal{M}_n$ es inversible demostrar que

$$\lambda \in \operatorname{sp}(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \operatorname{sp}(A^{-1})$$

y

$$\varrho(A^{-1}) = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i(A)| : \lambda_i(A) \in \operatorname{sp}(A)\}}.$$

18 Demostrar que si A es triangular por bloques entonces

$$\operatorname{sp}(A) = \bigcup_{i=1}^p \operatorname{sp}(A_{ii}).$$

siendo $A_{ii}, i = 1, \dots, p$ los bloques de la diagonal de A . Deducir que el determinante de una matriz triangular por bloques es el producto de los determinantes de los bloques de su diagonal.

19 Generalizar los resultados del Problema 11 para matrices diagonales, triangulares superiores e inferiores, por bloques.

20 Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz hermítica definida positiva y se descompone en bloques, los bloques diagonales son matrices hermíticas y definidas positivas. En particular, deducir que los elementos diagonales de A son números positivos así como sus menores principales.

21 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz hermítica (resp. simétrica) definida positiva.

a) Probar que existe $B \in \mathcal{M}_n$ hermítica (resp. simétrica) definida positiva tal que $A = B^2$.

b) Demostrar que si $\operatorname{cond}_2(A) > 1$ entonces $\operatorname{cond}_2(B) < \operatorname{cond}_2(A)$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2006–2007

Problemas

Hoja 3. Resolución de sistemas lineales: métodos directos

1 Método de Gauss–Jordan para el cálculo de la inversa de una matriz. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz invertible.

- a) Adaptar la demostración del método de Gauss para probar que existe una matriz $\tilde{M}$ de manera que $\tilde{M}A$ sea la identidad.
- b) Explicar cómo se puede utilizar el resultado del apartado anterior (*método de Gauss–Jordan*) para el cálculo de la inversa de la matriz A .

2 Demostrar que la factorización LU sigue siendo posible si A es singular, siempre que los $n - 1$ menores principales δ_k , $k = 1, 2, \dots, n - 1$, sean no nulos. Probar que, en ese caso, $u_{nn} = 0$.

- 3
- a) Sea A una matriz cuadrada. Adaptar el método de eliminación de Gauss para probar que existe M invertible tal que MA es triangular inferior.
 - b) Encontrar condiciones suficientes para que una matriz A pueda factorizarse en la forma $A = UL$ con U triangular superior y L triangular inferior. ¿Es única tal factorización?

4 Sea A una matriz simétrica invertible (aunque no necesariamente definida positiva) que admite factorización LU . Probar que se puede escribir $A = B\tilde{B}^T$ donde B es triangular inferior y las columnas de $\tilde{B}$ son las de B salvo, quizá, el signo.

5 ¿Cuántas factorizaciones de Cholesky distintas (es decir, sin suponer que los elementos diagonales de B son positivos) admite una matriz simétrica definida positiva?

6 Se considera una matriz A cuyos menores principales son todos no nulos.

- a) Demostrar que A se puede factorizar en la forma $A = LDR$ con L triangular inferior, R triangular superior, $l_{ii} = r_{ii} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ y D diagonal. Encontrar fórmulas para los elementos de L , D y R .
- b) Probar que si A es simétrica entonces $R = L^T$. Adaptar las fórmulas anteriores para el caso en que A sea simétrica.
- c) ¿Cómo resolverías, mediante a) –o b), en el caso de que A sea simétrica– el sistema $Au = b$?

7 Algoritmo para la resolución de sistemas tridiagonales. Se considera el sistema lineal $Ax = d$ para una matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

- a) Llamando $\delta_0 = 1$ y δ_k al menor principal de orden k de A ($k = 1, 2, \dots, n$) probar, desarrollando el determinante por la última columna, que

$$\delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

- b) Definimos las sucesiones

$$\begin{cases} m_1 = b_1 \\ m_k = b_k - \frac{c_{k-1}}{m_{k-1}} a_k, \quad k = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} g_1 = \frac{d_1}{m_1} \\ g_k = \frac{d_k - g_{k-1} a_k}{m_k}, \quad k = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Probar que $m_k = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$ y deducir que si $\delta_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ entonces $m_k \neq 0$ y, por tanto, los números m_k y g_k , $k = 1, 2, \dots, n$, están bien definidos.

- c) Demostrar que la solución del sistema viene dada por

$$x_n = g_n \quad \text{y} \quad x_k = g_k - \frac{c_k}{m_k} x_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1.$$

d) Comprobar que

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \frac{a_2}{m_1} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{a_{n-1}}{m_{n-2}} & 1 & \\ & & \frac{a_n}{m_{n-1}} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & c_1 & & & \\ & m_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & m_n \end{pmatrix}$$

es la factorización LU de la matriz A .

- 8 a) Probar que la factorización LU preserva la estructura de matrices banda, es decir, si $a_{ij} = 0$ para $|i - j| \geq p$ entonces $l_{ij} = 0$ para $i - j \geq p$ y $u_{ij} = 0$ para $j - i \geq p$.
- b) Demostrar el mismo resultado para la factorización de Cholesky.

9 Factorización de Cholesky: demostración alternativa.

- a) Se considera una matriz A simétrica cuyos menores principales son todos positivos. Si se escribe A en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline a^T & \alpha \end{array} \right)$$

siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, demostrar que $\alpha - a^T(A_{n-1})^{-1}a > 0$.

(Indicación: aplicar el método de Gauss por bloques para anular el bloque ocupado por a^T).

- b) En el supuesto de que A_{n-1} admita factorización de Cholesky de la forma

$$A_{n-1} = B_{n-1}(B_{n-1})^T,$$

¿cómo deben elegirse $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ para que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^T & \beta \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B_{n-1}^T & x \\ \hline \mathbf{0} & \beta \end{array} \right)?$$

Probar que tal elección de x y β es posible.

- c) Demostrar, por inducción sobre la dimensión de la matriz, la existencia de factorización de Cholesky para una matriz simétrica cuyos menores principales son todos positivos.
- d) Deducir, del apartado c), que toda matriz simétrica con menores principales positivos es definida positiva.

10 Cálculo recursivo de la inversa de una matriz.

- a) **Fórmula de Sherman–Morrison.** Sea $B \in \mathcal{M}_n$ real e inversible y sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ tales que la matriz $B + uv^T$ es inversible. Comprobar que

$$(B + uv^T)^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1}uv^TB^{-1}}{1 + v^TB^{-1}u}.$$

- b) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz escrita en la forma

$$A = D + \sum_{i=1}^m u_i v_i^T$$

donde D es una matriz diagonal e inversible y los vectores $u_i, v_i \in \mathbb{R}^n$ son tales que las m matrices

$$M_k = D + \sum_{i=1}^k u_i v_i^T$$

para $k = 1, 2, \dots, m$ son inversibles. Si $C_k = (M_k)^{-1}$, encontrar una fórmula recurrente para C_{k+1} .

- c) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que A se puede escribir en la forma

$$A = D + \sum_{i=1}^n u_i e_i^T$$

siendo e_i el i -ésimo vector de la base canónica, verificándose las hipótesis requeridas en b).

- d) Razonar cómo pueden usarse los resultados anteriores para calcular la inversa de una matriz simétrica definida positiva.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2006–2007

Problemas

Hoja 4. Resolución de sistemas lineales: métodos iterativos

1 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

estudiar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por puntos para A y B .

- 2 a) Se considera el método iterativo $u^{k+1} = Bu^k + c$ con u^0 dado. Estudiar el comportamiento de la sucesión $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ cuando $\varrho(B) = 0$.
- b) Sea A una matriz triangular superior por bloques. Estudiar la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss–Seidel y relajación asociados a la descomposición por bloques de A .
- c) Idem si A es triangular inferior.

3 a) Demostrar que si A verifica

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad j = 1, \dots, n$$

el método de Jacobi por puntos para A es convergente.

- b) i) Probar que si $0 < w \leq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \geq 1$ entonces $\left| \frac{1-w-\lambda}{\lambda w} \right| \geq 1$.

(Indicación: Utilizar que $|x-y| \geq ||x| - |y||$, $x, y \in \mathbb{C}$).

- ii) Demostrar que si A es de diagonal estrictamente dominante, el método de relajación por puntos para A es convergente si $0 < w \leq 1$.

4 Si A es una matriz de diagonal estrictamente dominante, probar que el método de:

- a) Jacobi por bloques para A es convergente.
- b) relajación por bloques para A es convergente si $0 < w \leq 1$.

5 Sea A una matriz hermítica e inversible, $A = M - N$ con M inversible.

- a) Se considera la sucesión $v^{n+1} = M^{-1}Nv^n$ con $v^0 \in \mathbf{V} \setminus \{0\}$ arbitrario. Probar que si la matriz $M^* + N$ es definida positiva entonces la sucesión $\{(v^n)^* A v^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona decreciente.
- b) Demostrar que si $M^* + N$ es definida positiva y $\varrho(M^{-1}N) < 1$ entonces A es definida positiva.

6 a) Demostrar el Teorema de los círculos de Gershgorin: si $A \in \mathcal{M}_n$ entonces

$$\text{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}.$$

(Indicación: Téngase en cuenta que las matrices de diagonal estrictamente dominante son inversibles).

- b) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ de diagonal estrictamente dominante con

$$a_{ii} > 0, \quad i = 1, \dots, n \text{ y } \text{sp}(A) \subset \mathbb{R}.$$

Utilizar el apartado a) para probar que sus autovalores son estrictamente positivos.

- c) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz hermítica, de diagonal estrictamente dominante con

$$a_{ii} > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Probar que el método de relajación por bloques para A es convergente si, y sólo si, $0 < w < 2$.

- 7 a) Se considera una matriz A de diagonal estrictamente dominante escrita en la forma $A = M - N$ con

$$m_{ii} = a_{ii} \text{ y } m_{ij}n_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Demostrar que el método iterativo asociado a tal descomposición de A está bien definido y es convergente.

- b) Deducir, a partir de a), resultados de convergencia para los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel por bloques.

- 8 Demostrar que si A es de diagonal estrictamente dominante y $0 < w \leq 1$ el método de relajación-Jacobi es convergente.

- 9 Método iterativo para el cálculo de la inversa de una matriz. Se consideran las sucesiones de matrices

$$A_n = A_{n-1}(I + E_n + E_n^2) \text{ y } E_n = I - AA_{n-1}$$

siendo A inversible y A_0 una matriz arbitraria.

- a) Demostrar que $E_n = (E_1)^{3^{n-1}}$.

- b) Probar que si $\rho(E_1) < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A^{-1}$.

- c) Estudiar la convergencia cuando se toma $A_0 = \frac{A^*}{\text{tr}(AA^*)}$.

- 10 a) Sea $B \in \mathcal{M}_n$ tal que $\rho(B) < 1$. Demostrar que $I - B$ es inversible y comprobar que

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k.$$

- b) Una matriz $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ es *no negativa* (y se representa $B \geq 0$) si $b_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Si B es una matriz no negativa, demostrar la equivalencia:

$$I - B \text{ es inversible y } (I - B)^{-1} \geq 0 \Leftrightarrow \rho(B) < 1.$$

(Indicación: Para la implicación $\Rightarrow$) considerar $\lambda \in \text{sp}(B)$ y un vector $v \neq 0$ tal que $Bv = \lambda v$ y probar que $|v| \leq (1 - |\lambda|)(I - B)^{-1}|v|$ donde $|v| = (|v_i|)_{i=1}^n$).

- c) Se considera la descomposición $D - E - F$ por puntos de una matriz A inversible que verifica

$$a_{ij} \leq 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A^{-1} \geq 0.$$

- α) Probar que $a_{ii} > 0$. Deducir que las matrices de los métodos de Jacobi y relajación por puntos asociados a A están bien definidas.

- β) Demostrar que el método de Jacobi para A es convergente.

- γ) Utilizar el apartado b) para demostrar que:

$$i) \left(\frac{D}{w} - E \right)^{-1} \geq 0 \text{ si } w > 0.$$

- ii) El método de relajación por puntos para A es convergente si $0 < w \leq 1$.

- 11 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma $A = M - N$ siendo $M \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible y sea $B = M^{-1}N$. Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ se definen las matrices

$$M_\alpha = (1 + \alpha)M, \quad N_\alpha = M_\alpha - A \text{ y } B_\alpha = M_\alpha^{-1}N_\alpha.$$

- a) Demostrar que

$$B_\alpha = \frac{1}{1 + \alpha}(B + \alpha I).$$

- b) Probar la equivalencia

$$\lambda \in \text{sp}(B) \Leftrightarrow \frac{\lambda + \alpha}{1 + \alpha} \in \text{sp}(B_\alpha).$$

- c) Suponiendo que los autovalores de B verifican la relación

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n < 1,$$

demostrar que el método asociado a B_α converge para $\alpha > -\frac{1 + \lambda_1}{2}$.

- d) ¿Qué ocurre si $\lambda_n \geq \dots \geq \lambda_1 > 1$?

- e) Comprobar que el método asociado a B_α es, de hecho, un método de relajación de parámetro $w = \frac{1}{1 + \alpha}$ aplicado al método asociado a B , en el sentido introducido en clase.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2006–2007
Problemas
Hoja 5. Interpolación e integración numéricas

- 1 Hallar el polinomio P que interpola la función $f(x) = \cos \pi x$ en los puntos $\left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$.
- 2 Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ puntos distintos del intervalo $[a, b]$. Si P y Q son, respectivamente, los polinomios de interpolación de f y g en los puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
- a) ¿Es $\alpha P + \beta Q$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) el polinomio de interpolación de $\alpha f + \beta g$ en los puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$?
- b) ¿Es PQ el polinomio de interpolación de fg en los puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$?
- 3 Sean $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ puntos distintos. Demostrar:

$$a) \sum_{i=0}^n L_i(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad b) E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \sum_{i=0}^n [f(x) - f(x_i)] L_i(x).$$

- 4 Sean $P \in \mathcal{P}_n$ y $n+1$ puntos distintos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Hallar el valor de $P[x_0, x_1, \dots, x_n]$.
- 5 Sean $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y $f(x) = x^{n+1}$. Calcular el polinomio de interpolación de Lagrange de f en los puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y determinar su término independiente.
- 6 Demostrar que si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ y existe $f'(x_i)$ para algún $x_i \in [a, b]$ entonces la función

$$g(x) = \begin{cases} f[x, x_i] & \text{si } x \neq x_i \\ f'(x_i) & \text{si } x = x_i \end{cases}$$

es continua en el intervalo $[a, b]$ (esto permite definir la diferencia dividida $f[x, x_i]$ en todo punto del intervalo). ¿Tiene $f[x, x_i]$ alguna propiedad similar a $(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi'$?

- 7 Sea $a > 0$, $\{-x_n, -x_{n-1}, \dots, -x_1, 0, x_1, \dots, x_n\} \subset [-a, a]$ y P_{2n} el polinomio de interpolación de Lagrange de $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ en estos puntos. Demostrar los siguientes resultados:
- a) Si f es una función par (resp. impar) entonces P_{2n} es par (resp. impar).
- b) Si f es par existe $Q_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $P_{2n}(x) = Q_n(x^2)$. ¿Quién es Q_n ? ¿Qué utilidad tiene esto?

- 8 Determinar los valores de λ y μ para que

$$S(x) = \begin{cases} \lambda x(x^2 + 1), & 0 \leq x \leq 1 \\ -\lambda x^3 + \mu x^2 - 5\lambda x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

sea una función spline cúbica.

- 9 Sea $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Demostrar:

- a) Si $n < 4$ toda función spline cúbica que verifique

$$S_{\Delta}^{(k)}(a) = S_{\Delta}^{(k)}(b) = 0, \quad k = 0, 1, 2$$

es idénticamente nula.

- b) Si $n = 4$ la anterior función spline cúbica está unívocamente determinada por el valor que tome en x_2 .

- 10 Demostrar, a partir del teorema de Rolle, la unicidad de la función spline cúbica de interpolación en los casos I y II.

- 11 Sea $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y $S_{\Delta}(y; \cdot)$ la función spline cúbica que interpola los valores $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T$ con condiciones de tipo I. ¿Qué deben verificar los valores $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ para que $S_{\Delta}(y; \cdot)$ coincida en todo el intervalo $[a, b]$ con un polinomio $P \in \mathcal{P}_3$?

- 12 Si f es suficientemente regular demostrar, usando desarrollos de Taylor, que:

$$f'(x) = \frac{-3f(x-h) - 10f(x) + 18f(x+h) - 6f(x+2h) + f(x+3h)}{12h} + O(h^4).$$

13 Método de diferencias finitas para problemas de contorno. Dada una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se considera la función $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ solución de la *ecuación diferencial*

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1) \quad (1)$$

verificando además las *condiciones de contorno* $u(0) = u(1) = 0$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, se consideran $h = \frac{1}{n+1}$ y los puntos $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n+1$. Para cada punto $x = x_i$ con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ utilizar el valor aproximado

$$u''(x_i) \simeq \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2}$$

y reemplazarlo en la ecuación (1) para obtener un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas (que aproximará la ecuación diferencial anterior). ¿De qué tipo es la matriz del sistema? Demostrar que es inversible.

14 Aplicar la regla de Simpson compuesta a la integral

$$\int_1^x \frac{dt}{t}$$

para obtener una aproximación del logaritmo neperiano de 2 determinando el número m de subintervalos necesario para que el error cometido en esa aproximación sea inferior a 10^{-3} .

15 Hallar la expresión de la regla de Simpson abierta compuesta.

16 Se considera la fórmula de integración

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq A(f(x_0) + f(x_1)).$$

Hallar el valor de A , x_0 y x_1 para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

17 Encontrar una fórmula que aproxime $\int_1^3 f(x)dx$ utilizando los valores de f en los puntos 0, 2 y 4 y que sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

18 Determinar la fórmula abierta de Newton–Côtes de un punto (denominada *fórmula del punto medio*). Hallar la expresión de la *regla del punto medio compuesta*.

19 Sea $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ con $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ y $h = \frac{b-a}{n}$. Para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ se puede considerar la interpolación mediante funciones spline cúbicas. Encontrar una fórmula de integración aproximada en función de $f(x_i)$ y los momentos M_i de una función spline cúbica $S_\Delta(y, \cdot)$, siendo $y_i = f(x_i)$.

20 Dado $n \in \mathbb{N}$ se considera $h = \frac{1}{n}$, $x_i = ih$ para $i = 0, 1, \dots, n$ y la función

$$f_n(x) = x^n \cos(2\pi nx).$$

Hallar el valor de la aproximación de $\int_0^1 f_n(x)dx$ que se obtiene utilizando la fórmula de Newton–Côtes cerrada de $n+1$ puntos.

21 Hallar el valor de la aproximación que se obtiene al calcular

$$\int_{-4}^4 |x-2|^3 (1 - \sin \pi x) dx$$

mediante la regla de Simpson compuesta para 4 subintervalos.

22 a) Hallar la expresión de la fórmula abierta de Newton–Côtes de dos puntos.

b) Determinar la expresión de la regla anterior compuesta.

c) ¿Qué valor se obtendría si se utilizara la regla de b) con 100 subintervalos para aproximar $\int_{-5}^5 |x|dx$? ¿Qué ocurriría si se tomaran 99 subintervalos?

23 Hallar la aproximación que se obtiene de $\int_a^b f(x)dx$ cuando se considera la integral de la interpolación lineal a trozos de f en una partición equiespaciada.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2006–2007
Problemas
Hoja 6. Resolución de ecuaciones no lineales

- 1 Utilizar el método de la bisección para aproximar una raíz de la ecuación

$$\sqrt{x} \sin x - x^3 + 2 = 0$$

en el intervalo $[1, 2]$ con un error menor que $\frac{1}{30}$.

- 2 Comprobar que se puede aplicar el teorema del Punto Fijo a las siguientes funciones en los intervalos dados:

$$a) f(x) = \frac{\cos x}{8} + \frac{x^2}{4} \text{ en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad b) g(x) = \frac{x - x^2 + 1}{5} \text{ en } [0, 1].$$

- 3 Determinar un intervalo y una función para poder aplicar el método del Punto Fijo a las siguientes ecuaciones:

$$a) x^3 - x - 1 = 0. \quad b) x - \ln(1 + x) - 0,2 = 0. \quad c) 4 - x - \tan x = 0. \quad d) x = -\ln x.$$

Determinar, en cada caso, el número de iteraciones necesario para que el error cometido sea inferior a 10^{-5} .

- 4 Se considera la ecuación $x^2 - 1 - \sin x = 0$.

a) Probar que dicha ecuación tiene, al menos, una raíz positiva.

b) Encontrar un intervalo en el que la iteración

$$x_n = \sqrt{1 + \sin x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

converja, para cualquier valor inicial x_0 de dicho intervalo, a una raíz positiva de la ecuación anterior. ¿Cuántos pasos deben darse, a partir de $x_0 = \frac{\pi}{2}$, para obtener una aproximación de la raíz con un error inferior a la milésima?

- 5 Se considera la función

$$g(x) = \sin^2 x, \quad x \in [0, \pi].$$

Aplicar el teorema del Punto Fijo a la función

$$f(x) = 2 + \frac{\sin 2x}{2}$$

en el intervalo $[1,6, 2]$ para determinar el valor del punto ζ para el que se verifica que

$$\int_0^\zeta g(t) dt = 1$$

de forma que el error cometido sea inferior a 10^{-4} .

- 6 Sea $F: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \frac{x-1}{x} - e^{-x}$.

a) Dibujar la gráfica de F y determinar el número de raíces reales de la ecuación $F(x) = 0$, localizando cada raíz entre dos enteros consecutivos.

b) Para cada una de las funciones siguientes:

$$f_1(x) = 1 + xe^{-x}, \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right), \quad f_3(x) = (x-1)e^x$$

consideramos el siguiente método iterativo: dado $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario sea

$$x_n = f_i(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Estudiar cuáles de estas sucesiones convergen hacia alguna de las raíces de la ecuación $F(x) = 0$.

c) Elegir intervalos y puntos iniciales adecuados para que el método de Newton converja a cada una de las raíces.

- 7 Dados un número natural n y un número positivo α , una forma de calcular las raíces reales n -ésimas de α sin usar radicales es aplicar el *método de Newton* a la ecuación

$$x^n - \alpha = 0.$$

Encontrar un intervalo y un valor inicial para los que el método sea convergente.

- 8 Demostrar que la ecuación

$$e^x \ln x + x^3 - 2 = 0$$

tiene una única raíz positiva. Determinar un intervalo y un valor inicial para los que el método de Newton converja a dicha raíz.

- 9 Se considera la función

$$F(x) = e^{-x} - \sin x - 2.$$

- a) Demostrar que

$$F(x) < 0, x \geq 0.$$

- b) Probar que la ecuación $F(x) = 0$ tiene una única raíz negativa.

- c) Determinar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar dicha raíz, así como los dos primeros términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que determina dicho método.

- 10 Demostrar que la ecuación

$$\cos x - 3x = \frac{\pi}{2}$$

tiene una única raíz real. Encontrar un intervalo, un valor inicial y un valor de λ para los que el método de Whittaker converja a dicha raíz. Determinar el número de iteraciones necesario para que el error cometido sea inferior a 10^{-3} .

MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2006–2007
Problemas
Hoja 7. Cálculo de raíces de polinomios

1 Calcular las raíces de la ecuación $x^3 - x^2 + 3x = 3$.

2 Encontrar las raíces reales, determinando su multiplicidad, de las ecuaciones

$$a) x^{13} - x^{11} + x^2 - 1 = 0. \quad b) x^{13} - x^{12} - x^{11} + x^{10} - x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$$

3 Si $\{P, P_1, \dots, P_m\}$ es la secuencia de Sturm del polinomio $P(x)$ probar que

$$P_m(x) = \text{MCD}\{P(x), P'(x)\}.$$

4 Separar en intervalos de longitud uno, mediante el método de Sturm, las raíces reales de las ecuaciones:

$$a) 80x^3 + 28x^2 - 148x - 15 = 0. \quad b) 50x^3 + 5x^2 - 228x + 180 = 0.$$

5 Dados dos números, $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, se considera el polinomio $P(x) = x^3 - bx^2 + ax - ab$.

- a) Encontrar una relación entre a y b que garantice que la sucesión de Sturm de P tenga sólo tres términos, es decir, que sea de la forma $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$.
- b) Decidir, en el caso en que a y b verifiquen la relación anterior, el número de raíces reales y distintas de P . ¿Son simples?

6 Consideremos el polinomio $P(x) = 9x^3 + 9x^2 + 9\lambda x + \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

- a) Estudiar, en función del parámetro λ , el número de raíces (reales y complejas) de la ecuación $P(x) = 0$.
- b) ¿Para qué valores de λ las raíces de P son múltiples? Hallar todas las raíces de P para esos valores de λ .
- c) Fijado $\lambda = \sqrt{3}$ encontrar un intervalo donde pueda aplicarse el *método de Newton* para calcular una raíz negativa de P . Determinar los dos primeros términos de la sucesión definida por dicho método.

7 Calcular las raíces reales de la ecuación algebraica $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + 3 = 0$.

8 Calcular las raíces de los siguientes polinomios:

$$a) P_1(x) = 5x^5 - 17x^4 - 79x^3 + 269x^2 - 34x - 24. \quad b) P_2(x) = 2x^5 - \pi x^4 - 8x^3 + 4\pi x^2 + 8x - 4\pi.$$

9 Dada la ecuación algebraica $x^5 + x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 13x - 10 = 0$,

- a) Determinar el número de raíces positivas.
- b) Encontrar una raíz racional negativa.
- c) Hallar el número de raíces reales y complejas de la ecuación anterior.
- d) Determinar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva más pequeña, así como los dos primeros términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que determina dicho método.

10 Calcular las raíces reales de las ecuaciones:

$$a) x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1 = 0. \quad b) 2x^5 - 100x^2 + 2x - 1 = 0.$$