Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Matemáticas
Máster en Tratamiento Estadístico Computacional de la Información

Valoración de Bonos Convertibles en el Mercado Español a través del Modelo Hull and White

Por

Carely Guada

Juan Toro

Agosto 2013

Valoración de Bonos Convertibles en el Mercado Español a través del Modelo Hull and White

Carely Guada

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Matemáticas
Máster en Tratamiento Estadístico Computacional de la Información

Resumen: Este proyecto tiene la finalidad de describir la metodología empleada para valorar un bono convertible, la cual no ha sido muy explotada por los inversores e investigadores por su complejidad. Se presentarán dos maneras de valorar los bonos convertibles debido a que existen diversas formas para ello. Además, se considerará la implementación numérica de la tasa de interés estocástica mediante el modelo de Hull y White; útil para valorar cualquier tipo de derivados sobre tipo de interés, en donde en esta investigación se utilizó para calcular el valor del cupón del bono según la evolución de los tipos de interés. Para estos procedimientos fue necesario hacer uso tanto de árboles binomiales como de árboles trinomiales. Asimismo, se presentan algunos ejemplos de los mismos.

Palabras clave: Bonos convertibles, modelo Hull - White, árboles binomiales, árboles trinomiales.

Índice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Introducción

Un activo financiero es un documento legal o título que representa una inversión o un derecho económico para quien está entregando el dinero, llamado beneficiario o inversor, que espera recibir renta o retorno por la inversión realizada; y es un mecanismo de financiación para el emisor. No obstante, también existen otros tipos de activos financieros que no necesariamente son documentos.

Las clases de activo corresponden a las grandes categorías de inversiones que tienen diferentes niveles de riesgo y rentabilidad como son las acciones, las obligaciones, los inmuebles o la liquidez. Aunque generalmente las empresas para obtener capital en los mercados financieros, eligen entre tres principales clases de activos: las acciones, los bonos y los bonos convertibles. Estos últimos son una mezcla de acciones y bonos que no han sido muy explotados por parte de los inversores a pesar de arrojar resultados sorprendentes, salvo por empresas que están en riesgo de quiebra.

Un bono convertible es un bono que puede ser canjeado en acciones, y que al igual que un bono normal, tiene un valor nominal que será pagado en la fecha de vencimiento. Aunque el titular, en un periodo determinado de tiempo, tiene el derecho de convertir el bono en un número determinado de acciones de la empresa emisora.

El gran auge de los bonos convertibles tuvo lugar en la década de los 90, con el crecimiento de los fondos de cobertura y el desarrollo de arbitraje de bonos convertibles. Luego, para el año 2007, la demanda se sumerge ya que los mercados de valores cayeron. Pero a principios del 2009, volvió a surgir el interés en ellos. En España, para el periodo de 1984 - 1996, las empresas emitieron 12.987 millones de euros en 290 emisiones de convertibles. En la mayoría de los casos, estos instrumentos financieros iban dirigidos a inversores minoristas y conservadores. Por lo que las familias españolas juegan un papel importante en la inversión de España ya que no sólo invierten en depósitos bancarios.

Según la Bolsa de Madrid, para el año 2008, las familias españolas poseían el 20,2% de las acciones de empresas cotizadas de manera directa, y el 6,4% de las acciones de manera indirecta que estaba en poder de la inversión colectiva.

La investigación teórica sobre la valoración de los precios de bonos convertibles se puede dividir en varias ramas. La primera de ella implica una búsqueda de una solución de forma cerrada a la ecuación de valoración. La segunda es utilizando métodos numéricos de ecuaciones diferenciales parciales y otra, es mediante simulación Monte Carlo. El método más popular ha sido mediante modelos de estructura de árboles, como son los árboles binomiales y trinomiales, que son los que se presentarán en este proyecto. Son fáciles de entender y pueden lidiar con las características más comunes de los convertibles.

En el capítulo 1 se presentarán la definición de los bonos convertibles así como las características que definen su valor. En el capítulo 2, se definirán los árboles binomiales, su construcción y se expondrán varios ejemplos de sus usos. Posteriormente, en el siguiente apartado se describirán los árboles binomiales en modelos estocásticos de tipos de interés y se detallará el modelo de Hull - White. En el capítulo 3 se explicará con detalle el procedimiento para valorar los bonos convertibles, y seguidamente hacer la valoración utilizando las tasas de interés obtenidas con el modelo de Hull - White. Y finalmente, se expondrán las conclusiones obtenidas.

Capítulo 1

Convertibles

1.1 Definición

Son títulos de deuda corporativa que pueden ser canjeados por el poseedor del bono en un número determinado de acciones del emisor en cualquier momento antes del vencimiento; su valor se deriva de la deuda y de la acción. Al ser emitidos, los bonos convertibles se comportan exactamente igual que los bonos tradicionales, el titular recibe unos pagos periódicos (cupones); el valor del simple del bono es el valor por el cual se venderían los bonos convertibles si no se pudieran convertir en acciones ordinarias. Este dependerá de la tasa de interés y el riesgo de quiebra de la empresa. Pero bajo determinadas circunstancias especificadas en el contrato, tanto el emisor como el titular tienen el derecho de cancelar dicho contrato con la contrapartida. Esto es, hasta el periodo de madurez, el titular tiene el derecho de cambiar el título por un número previamente acordado de acciones; esto les da la ventaja de que puedan ser personalizados por los inversores y emisores con el fin de satisfacer sus necesidades. En caso de que no se llegue a hacer el canje, se recibiría lo acordado al alcanzar la madurez. En otras palabras, los convertibles son instrumentos financieros innovadores que tienen más similitudes con los derivados que con los bonos convencionales, debido a que es un bono pero que puede ser convertido en acciones.

Los convertibles pueden ser definidos según varias perspectivas. Desde el punto de vista de un derivado, se considera al convertible como un título híbrido, una parte corresponde a una deuda y otra parte sería una acción sobre el patrimonio. Desde el punto de vista de renta fija, el convertible es un bono simple con opción de compra (**call**). Desde la perspectiva del patrimonio, el convertible es una cartera de patrimonios, un **swap**[1] de dividendos en acciones para bonos y una **put**.

Usualmente, las empresas que implementan este tipo de instrumento son aquellas caracterizadas por bajas categorías de bonos, o que también se encuentren o inviertan en mercados de alta incertidumbre. Pero unas de las ventajas que puede tener una empresa al emitir bonos convertibles es que es una forma de ampliar el patrimonio, ya que una parte de la deuda se convierte en capital (acciones), además puede generar menor costo financiero, ya que el tipo de interés es menor debido a los derechos que conlleva y que el precio de conversión siempre va a ser superior al valor de las acciones. Cabe destacar, que los bonos convertibles son muy útiles para las empresas con riesgo de quiebra. Para los emisores, los convertibles son una manera de usar financiamiento debido a que bajan el costo de la financiación de la deuda comparado con toda la deuda simple. Igualmente, cuando las empresas anticipan una subida de la valoración de su patrimonio, usan los convertibles de tal forma que aplacen la financiación de capital en el momento que se haya logrado el crecimiento.

Existen varias razones por los que los emisores prefieren los bonos convertibles, pero la principal, es la oportunidad que ofrece al emisor de emitir un bono con un cupón más bajo que el que se requiere para un bono corriente. Además, otras razones principales para que una compañía emita bonos convertibles, es que pueden ser emitidos a los empleados como un bono o como un incentivo para motivarlos a trabajar con más ánimos. Y, la ventaja de emitir estos bonos en lugar de opciones, es que ellos tienen un retorno de la inversión garantizada a no ser que la empresa vaya a quiebra. También, una empresa que tenga la necesidad de financiar la emisión de nuevas acciones o bonos convertibles a accionistas es otra manera de recaudar dinero. Asimismo, la emisión de convertibles hace que el efecto de dilución se retrase; la dilución sucede cuando se emiten nuevas acciones y el número total de acciones en la compañía se incrementa, y por ende, las ganancias de la compañía por acción disminuye.

[1] Derivado en el cual las dos partes se comprometen a intercambiar una serie de flujos de efectivo.

Una de las ventajas que tienen los convertibles apreciadas por los inversores, es que los mismos ofrecen una gran estabilidad en los ingresos del subyacente común, con frecuencia proveen mayor rendimiento que el obtenido de los dividendos del subyacente común, y además son una fuente barata de volatilidad de subyacentes comunes.

En el siguiente apartado se detallarán las propiedades de los bonos convertibles que contribuyen en su cotización.

1.1.1 Características influyentes en el valor teórico de los convertibles

De acuerdo a Goldman (1994), las características de los convertibles que afectan su valor teórico son mencionadas a continuación:

Principal: Se refiere al valor nominal del convertible, usualmente la cantidad por el cual el bono es canjeado en la madurez.

Cupón: Es la tasa de interés anual que representa un porcentaje del pago principal del poseedor. En otras palabras, se refiere al pago periódico que recibe el titular del convertible expresado como porcentaje del valor nominal del mismo.

Frecuencia del bono: Se refiere al número de pago de cupones al año. Los pagos de cupones pueden darse anualmente, semestralmente o trimestralmente.

Razón de conversión: Representa el número de acciones por bono, generalmente establecidos por el emisor, por el cual el convertible puede ser canjeado.

Precio de conversión: Se refiere al precio pagado por cada acción subyacente de conversión, asumiendo que el bono principal es usado para pagar por las acciones recibidas. La relación entre la razón de conversión y el precio de conversión viene dado por: *precio de conversión=valor principal/razón de conversión.*

Paridad: Es el valor del mercado del número de las acciones correspondiente con la razón de conversión, es decir, la razón de conversión multiplicada por el precio de la acción (*paridad=razón conversión * actual periodo del subyacente).*

Primera fecha de conversión: Se refiere al primer día luego de su emisión en el cual el bono puede ser convertido en acciones. Generalmente, en la práctica, no es usual que los días de conversión sea en un único día como el contrato Europeo, ni que se den en cualquier momento como el contrato Americano; pueden ser tipo Bermuda que se den en un número discreto de ocasiones.

Provisiones de compra (call): Provee al emisor el derecho de comprar de regreso el bono antes de la madurez a un precio **call** preestablecido, generalmente en un periodo de tiempo predeterminado. Pueden ser visto como una opción **call** vendido por el inversor al emisor. Reduce el valor del bono cuando se compara con un bono convertible similar no comprable.

Disposiciones de las provisiones de compra: Esta compra de provisiones **call** están sujetas a la restricción de que el emisor puede ejercer la compra solo si el precio de la acción supera cierto nivel (nivel de provisiones **call**). Estas provisiones reducen el valor del bono forzando al inversor a convertir y dar el valor restante de la opción.

Provisiones de venta (put): Permiten al poseedor del bono vender al mismo por cierta cantidad de dinero en efectivo en una fecha previa de su vencimiento. Usualmente, se permite en un día exacto o en un número de días, más no durante un periodo de tiempo continuo. Pueden ser considerados como una opción **put** que ha sido vendido a los inversores por el emisor, y por lo tanto, aumenta el valor en comparación con los nomos convertibles no vendibles similares.

Se debe tener en cuenta, que el precio del convertible debe ser consistente con el comportamiento del mercado. El precio es siempre igual o mayor que el producto de la razón de conversión y el precio del subyacente. Además, existe el riesgo que la compañía emisora vaya a quiebra, en este caso el inversor no recibirá cualquier cupón y el valor principal del bono no será devuelto.

A continuación se listarán aquellas variables de mercado que intervienen en su precio.

1.1.2 Variables de mercado

Adicionalmente, el valor de un convertible depende de ciertas variables de mercado que se mencionan a continuación:

- Actual precio ordinario del subyacente.
- Volatilidad del precio del subyacente. Esto afecta la verosimilitud de la conversión futura.
- Rendimiento del dividendo del subyacente ordinario.
- Tasa libre de riesgo, la tasa al cual el inversor puede quitar o prestar dinero sin riesgo.
- Tasa de préstamo del subyacente, la tasa de interés ganada de los fondos recibidos de los subyacentes a corto plazo.
- Diferencial de crédito del emisor, proporciona información acerca de la probabilidad de incumplimiento de pago de cupones y del valor principal de un bono convertible, en caso de que la empresa vaya a la quiebra.

Una vez presentado los conceptos básicos de los bonos convertibles, se exponen en el siguiente capítulo las bases conceptuales y el procedimiento para la construcción de árboles binomiales, los cuales serán útiles para la valoración de dichos bonos.

Capítulo 2

Árboles binomiales

2.1 Definición

Los árboles binomiales son diagramas que representan las diferentes trayectorias posibles en tiempo discreto, que pueden seguir el precio de una acción durante la vida de la opción (Hull, 2008).

Por ejemplo, si se desea modelar un paso en el modelo binomial, suponga que el precio del subyacente en la fecha inicial 0 es S_0, y que para la fecha 1 dicho precio se puede mover a un nuevo nivel, bien sea a uno superior S_0u o inferior S_0d en donde ($u > 1$ y $d < 1$). El incremento proporcional de S_0 cuando sube es $u-1$ y el decremento proporcional cuando baja es $1 - d$. De este modo, en el nivel superior el flujo de caja (**payoff**) de la opción es f_u y en el nivel inferior esf_d. Estos dos valores se refieren a la ganancia en el vencimiento de la opción (tiempo de madurez). Por ejemplo, si K es el precio del ejercicio (**strike**) y S es el valor del activo subyacente en el momento del ejercicio, entonces el flujo de caja de una opción **call** será $max(S - K, 0)$.

Imaginemos que una cartera consiste en una posición larga en Δ acciones y una posición corta en una opción. El valor de Δ se calcula de forma que haga que la cartera sea libre de riesgo. Entonces, si el subyacente tiene un movimiento hacia arriba, el valor de la cartera al final de la vida de la opción sería: $S_0u\Delta - f_u$. Y si el movimiento es hacia abajo entonces el valor sería: $S_0d\Delta - f_d$. Por lo que para que la cartera sea libre de riesgos estos dos valores de la cartera deben ser iguales y ésto sucede cuando:

$$S_0 u\Delta - f_u = S_0 d\Delta - f_d$$
$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$$

Así, la cartera es libre de riesgo y debe ganar la tasa de interés libre de riesgo y en donde Δ se refiere a la razón de cambio en el precio de la opción por el cambio del precio del subyacente mientras nos movemos entre los nodos en el tiempo T.

Sea r la tasa libre de interés, entonces el valor presente de la cartera es:

$$(S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

El costo de establecer la cartera es $S_0\Delta - f$

Por lo que:

$$S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$
$$f = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d] \tag{2.1}$$

En donde el valor de p en un mundo libre de riesgo viene dado por:

$$p = \frac{e^{-rT} - d}{u - d} \tag{2.2}$$

De este modo, p es la probabilidad de que el precio del subyacente suba y $1-p$ la probabilidad de que baje, en un mundo libre de riesgo. Por lo tanto, el flujo de caja de la opción esperado es $pf_u + (1-p)f_d$. Sabemos, que en un mundo libre de riesgo se gana la tasa libre de interés r. Así, f es el valor de la opción en el día 0 donde es el flujo de caja esperado descontando la tasa libre de riesgo (figura 2.1).

Si se extiende el número de pasos en un modelo binomial a dos, se denomina a Δt como la longitud de pasos de tiempo y podemos modelarlo como en la figura 2.2.

En donde:

$$f = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}] \tag{2.3}$$

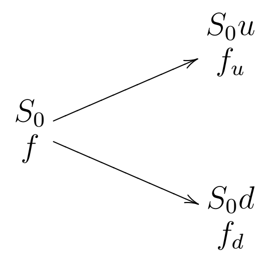

Figura 2.1: Un paso en el modelo binomial

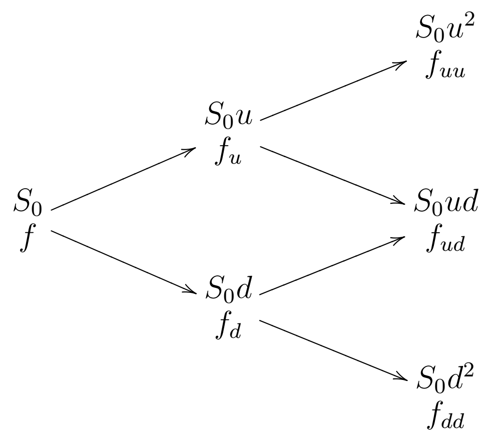

Figura 2.2: Dos pasos en el modelo binomial

Con:

$$p = \frac{e^{-r\Delta t} - d}{u - d} \tag{2.4}$$

De este modo, al seguir incrementando los pasos en el árbol, el precio de la opción sigue siendo al flujo de caja esperado en un mundo libre de riesgo descontando la tasas libre de interés.

Cabe hacer hincapié, que p es la probabilidad de un movimiento hacia arriba en un mundo de riesgo neutro. En general, no sería la misma probabilidad de un movimiento hacia arriba en el mundo real. Por ejemplo, tenemos que $p = 0,6523$. Entonces, cuando la probabilidad de un movimiento hacia arriba es $0,6523$ el valor esperado en el subyacente y la opción es la tasa libre de riesgo de 12%. Ahora, si en el mundo real el retorno esperado en el subyacente es 16%, y q es la probabilidad de un movimiento hacia arriba, entonces:

$$22q + 18(1 - p) = 20e^{0,16*3/12} \tag{2.5}$$

Luego, $q = 0,7041$.

Por lo que el flujo de caja esperado de la opción en el mundo real es entonces:

$$q * 1 + (1 - q) * 0 \tag{2.6}$$

Esto es, $0,7041$. No es fácil conocer la verdadera tasa de descuento para calcular el flujo de caja esperado en el mundo real. De este modo, es conveniente hacer la valoración con riesgo neutro, debido a que nos permite saber que en un mundo de riesgo neutro el valor de retorno esperado de todos los bienes es la tasa libre de riesgo.

2.1.1 Opciones

Una opción es un contrato que da a su comprador el derecho, más no la obligación, a comprar o vender una cantidad determinada del activo subyacente a un precio predeterminado (**strike**), en o hasta una fecha concreta (vencimiento) (Hull, 2008).

Existen varios tipos de opciones, pero una de las que más se destaca es *la Vainilla*, en donde según el tipo de derecho que ofrezca, son opciones **call** (de compra) y opciones **put** (de venta). Además, de acuerdo a la forma en que puedan ser ejercidas, se pueden diferenciar en:

Opción europea sólo pueden ser ejercidas en una fecha determinada (fecha de ejercicio).

Opción americana pueden ser ejercidas a lo largo de su vida hasta la fecha de ejercicio.

Ejemplo opción Put Europea

Sabemos que una opción **put** ofrece a su comprador el derecho, pero no la obligación, de vender una acción a un precio predeterminado hasta una fecha concreta. El vendedor de la opción **put** tiene la obligación de comprar la acción en el caso de que el comprador de la opción decida ejercer el derecho a vender la acción.

Suponga que se consideran 2 años de una **put** europea, con un **strike** de 55 y con un precio actual de 50. Se consideran dos pasos de tiempo en un año y en cada paso el precio del subyacente sube o baja en una proporción de 20%. Además, $r = 3\%$, $u = 1,2$, $d = 0,8$ y $\Delta t = 1$.

Entonces,

$$p = \frac{e^{-r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{-0,03*1} - 0,8}{1,2 - 0,8} = 0,5761$$

El precio final del subyacente posible bien puede ser $S_0u^2 = 50 * (1,2)^2 = 72$ o $S_0ud = 50 * 1,2 * 0,8 = 48$ o $S_0d^2 = 50 * (0,8)^2 = 32$. Luego, $f_{uu} = 0$, $f_{ud} = 55 - 48 = 7$ y $f_{dd} = 72 - 55 = 17$. Así, con estos valores se calcula directamente el valor de la opción en el nodo inicial, o paso a paso recorriendo el árbol calculando el valor de la opción hasta llegar al nodo del día 0.

Directamente, tenemos que el valor de la opción **put** europea es:

$$\begin{aligned} f &= e^{-2r\Delta T}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}] \\ f &= e^{-2(0,03)1}[0,5761^2(0) + 2(0,5761)(1-0,5761)7 + (1-0,5761)^(2)17] = 6,096 \end{aligned}$$

Sin embargo, si realizamos los cálculos paso a paso, para el nodo superior en el día 1 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f &= e^{-r\Delta T}[pf_u + (1-p)f_d] \\ f &= e^{-0,03*1}[0,5761(0) + (1-0,5761)7] = 2,879 \end{aligned}$$

En el nodo inferior para el día 1 se tiene:

$$f = e^{-0,03*1}[0,5761(7) + (1-0,5761)17] = 10,907$$

Por lo tanto, para el nodo inicial, el valor de la opción es el mismo que el cálculo anterior:

$$f = e^{-0,03*1}[0,5761(2,879) + (1-0,5761)10,907] = 6,096$$

2.1.2 Ejemplo opción Put Americana

Al igual que en el caso anterior, el procedimiento es recorrer el árbol hacia atrás desde el final hasta el nodo principal, pero con la diferencia de que en cada nodo visitado se prueba cuando el ejercicio adelantado es óptimo. De este modo, el valor de la opción

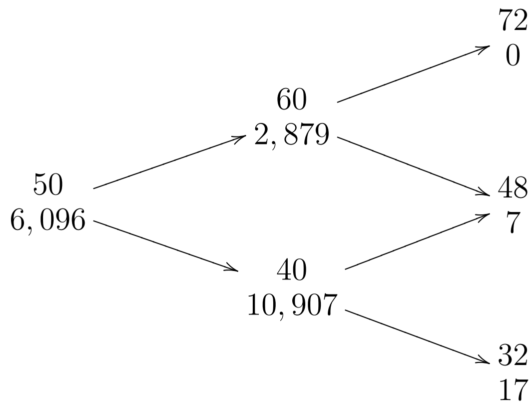

Figura 2.3: Ejemplo **put** europea

es el mayor entre $f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$ y el flujo de caja de ejercicio adelantado. Cabe hacer hincapié, que el valor de la opción en los últimos nodos, es el mismo que el que se obtiene con la opción europea.

Utilizamos el ejemplo **put** mencionado en el apartado anterior, pero ahora consideramos valorar una opción **put** americana.

El flujo de caja en los nodos finales son los mismos para opción americana 0, 7 y 17 respectivamente. La diferencia radica que para los nodos correspondiente al día 1, en el nodo superior se realizan las siguientes cuentas:

$$\begin{aligned} f &= e^{-0,03*1}[0,5761(0) + (1-0,5761)7] = 2,879 \\ payoff &= -5 \end{aligned}$$

Se aprecia que el mayor valor entre esos dos valores es el valor de la opción. Del mismo modo, para el nodo inferior se tiene:

$$\begin{aligned} f &= e^{-0,05*1}[0,0,5761(7) + (1-0,5761)17] = 10,907 \\ payoff &= 15 \end{aligned}$$

Y el mayor de esos dos valores es el flujo de caja del ejercicio adelantado. Con esos dos valores identificados en el nodo superior e inferior, se calcula el valor de la opción en el nodo inicial.

$$\begin{aligned} f &= e^{-0,03*1}[0,5761(2,879) + (1-0,5761)15] = 7,78 \\ payoff &= 5 \end{aligned}$$

Observamos que el valor de la opción americana es diferente que el obtenido con la opción europea.

2.1.3 Determinación de u y d

En la práctica u y d vienen definidos por la volatilidad del precio de la acción σ. En la fecha 0 el precio inicial es S_0, y el precio del subyacente puede subir con una probabilidad p o bajar con una probabilidad $1-p$. Entonces, las fórmulas para un periodo de tiempo Δt vienen dada por la siguientes ecuaciones (Hull, 2008):

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{2.7}$$

y

$$d = \frac{1}{u} \tag{2.8}$$

Y, en un mundo libre de riesgo, los inversores esperan ganar un interés libre de riesgo en una cartera libre de riesgo. Por lo que

$$E(S_T) = pS_u + (1-p)S_d = Se^{r\Delta t}$$

o lo que es lo mismo

$$pu + (1-p)d = e^{r\Delta t}$$

y si $a = e^{r\Delta t}$, resolviendo nos queda

$$p = \frac{a-d}{u-d} \tag{2.9}$$

Otro esquema para el cálculo de u, d y p es el denominado *Árbol Binomial Cox-Ross-Rubinstein* que asume que ud=1 y así $u = 1/d$, y está basado en la evolución log-normal usada por el modelo de Black-Scholes. Así, con las mismas suposiciones consideradas en el principio de este capítulo y adicionando una ecuación extra, los valores de u, d y p se calculan de la siguiente manera (De Spiegeleer, 2011):

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{2.10}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{2.11}$$
$$p = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \tag{2.12}$$

Posteriormente se publicó una aproximación con una mejor convergencia para un número finito de días, este otro esquema se denomina *Árbol de Chriss*. Al igual que el método anterior, se basa en la evolución log-normal y modela la variancia como $\sigma^2\Delta t$. Además, en lugar de enlazar a u y d, se considera la probabilidad de riesgo neutro el donde $p = 1/2$. Luego:

$$u = \frac{2e^{(r-q)\Delta t} + 2\sigma\sqrt{\Delta t}}{1 + e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}}} \tag{2.13}$$
$$d = \frac{2e^{(r-q)\Delta t}}{1 + e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}}} \tag{2.14}$$
$$p = \frac{1}{2} \tag{2.15}$$

La diferencia entre estos dos métodos radica en que el primero de ellos es simétrico porque $ud = 1$, aunque las probabilidades de subir o bajar no son iguales. En cambio, en el método de Chris las probabilidades son iguales.

2.1.4 Riesgo de incumplimiento incondicional en el árbol binomial

Como hemos visto, en el árbol binomial, el precio del subyacente desde la fecha 1 hasta el vencimiento se mueve multiplicando por u o por d, por lo que no debería ser cero. Alcanzar a un valor cero significaría ir a bancarrota, lo cual sería imposible simularlo con estos árboles. No obstante, sabemos que los bonos convertibles son utilizados por empresas con riesgo de quiebra. Es por ello, que la probabilidad de impago del bono debe ser añadida en el árbol binomial.

Esto es, el tiempo de ocurrencia de impago (τ) sigue un proceso Poisson con tasa media de ocurrencia λ. La probabilidad de que la empresa vaya a la quiebra el siguiente intervalo de tiempo Δt, condicionada a la supervivencia hasta t viene dad por $\lambda\Delta t$.

Por lo que la probabilidad incondicional que una empresa vaya a la quiebra antes de determinado día t es $1 - e^{-\lambda t}$. Así, la probabilidad que una empresa sobreviva hasta cierto periodo es $p_S = e^{-\lambda t}$. Dicha probabilidad, necesita ser agregada, como se ha dicho anteriormente, al árbol binomial.

$$P = e^{-r\Delta t}(p_S(pP_u + (1-p)P_d) + (1-p_S)P_{S=0})$$

con $p_S = e^{-\lambda\Delta t}$ siendo la probabilidad de que el subyacente sobreviva el próximo intervalo de tiempo Δt. La probabilidad de riesgo neutro p es ahora una probabilidad condicional. Reescribiendo la ecuación anterior tenemos:

$$P = e^{-(r+\lambda)\Delta t}(pP_u + (1-p)P_d) + e^{-r\Delta t}(1 - e^{-\lambda\Delta t})P_{S=0}$$

Y la probabilidad p de un movimiento en el árbol donde se llegue a bancarrota viene dado por:

$$p = \frac{e^{(r+\lambda-q)\Delta t} - d}{u - d}$$

Sin embargo, al momento de valorar los bonos convertibles, esta acotación de riesgo de crédito se tendrá en cuenta al momento de dicha valoración y se explicará el procedimiento utilizado para añadir este diferencial de crédito.

Se ha contemplado cómo pueden ser utilizados los árboles binomiales para valorar opciones; en la siguiente sección se mostrará la utilidad que posee la estructura temporal de la tasa de interés, la cual también puede ser modelada a través de árboles.

2.2 Árboles en modelos estocásticos de tipos de interés

En el apartado anterior se pudo apreciar que el flujo de caja de una opción depende del valor del subyacente, no obstante, equivalentemente puede depender del nivel de la tasa de interés. Es por ello, que en este apartado se observará cómo se pueden modelar los árboles binomiales en modelos estocásticos de tipo de interés.

Suponga que en el mercado la tasa de interés para seis meses y un año es de 5% y 5,15% respectivamente, y que en seis meses a partir de ahora la tasa de interés puede ser

5,5% o 4,5% con una misma probabilidad, pudiéndose modelar como un árbol binomial. Pero si se considera la probabilidad del mundo real de 0,5 de que suba o baje, el valor esperado descontado la tasa de interés para el día cero da un valor distinto al precio de la bolsa. Es por ello, que se define la probabilidad de riesgo neutro (p) que causa que el valor descontado esperado sea igual al precio del mercado. De este modo, la diferencia entre la probabilidad real y de riesgo neutro se define en términos del *drift* de la tasa de interés.

Cuando hay presencia de arbitraje[1], se puede valorar una opción replicándo su cartera. Cuando ésto sucede, y el flujo de caja no depende del tipo de interés, la replicación de la cartera es sencilla. El precio con arbitraje de una opción es igual al valor descontado esperado bajo la probabilidad de riesgo neutro.

Hasta ahora, los árboles binomiales se han modelado con pasos de tiempo de 6 meses, pero en la práctica, es muy raro que se ejecuten contratos en esos intervalos de tiempo. Mientras más pequeño sea el intervalo considerado, más realista será la distribución de la tasa de interés. Por lo que reducir el paso del tiempo a menos de 6 meses, se puede cotizar a través de los árboles con bastante precisión.

A continuación se definirá el concepto de estructura temporal de los tipos de interés, que analiza la relación que existe entre el tiempo que resta hasta el vencimiento de las diversas obligaciones o bonos, y sus rendimientos durante dicho plazo siempre que todos ellos tengan el mismo grado de riesgo.

2.2.1 Estructura Temporal

La modelización de la curva de tipo de interés y su evolución temporal son útiles para entender el funcionamiento de una economía, debido a que permiten valorar múltiples activos financieros y diseñar estrategias de inversión o de cobertura. La estructura temporal, o curva de rendimientos, es la representación gráfica de la relación entre los tipos de interés proporcionados por acciones libres de riesgo y sus diferentes plazos y se denomina *Curva Cupón Cero.* Esta estructura viene determinada por las expectativas de la tasa de interés, la volatilidad, la convexidad y la prima de riesgo que se explicarán

[1]Estrategia de operaciones financieras, que generan o que pueden generar beneficios sin ningún riesgo.

posteriormente (Moreno, 2000).

El supuesto principal de este tipo de modelo es que los tipos de interés evolucionan de modo continuo a lo largo del tiempo. Se pueden distinguir dos categorías:

- **Modelos endógenos:** Establecen una serie de supuestos sobre las variables de estado que mueven la estructura temporal y sobre el proceso estocástico que siguen dichas variables. De este modo, la estructura temporal viene determinada por los parámetros del modelo y es una variable endógena del modelo. En otras palabras, realiza un conjunto de supuestos sobre la economía y sobre los factores que mueven la estructura temporal, con estos, se calcula la estructura temporal que serviría de base para valorar activos derivados. Además, dependiendo del número de variables consideradas, se distinguen entre modelos unifactoriales y multifactoriales. Algunos ejemplos de estos modelos son Vasicek, Cox Ingersoll y Ross, entre otros.

- **Modelos exógenos:** Toman como dada la estructura temporal observada y a partir de ella, se derivan los movimientos futuros de los tipos de interés de modo que no existan oportunidades intertemporales de arbitraje. A diferencia de los modelos endógenos, no necesitan estimar el precio de mercado del riesgo asociado a los factores del modelo. Estos modelos tratan de encontrar un ajuste perfecto a los tipos de interés observados y valoran activos derivados con relación a estructura temporal observada. Por ejemplo está el modelo de Ho y Lee, Hull y White (HW) y Heath, Jarrow y Morton (HJM).

Otros conceptos a considerar que influyen en la estructura temporal de los tipos de interés se mencionan a continuación (Tuckman, 2002):

Expectativas: Se refiere a la incertidumbre presente en las predicciones de la tasa de interés por parte de los negociadores, y que dan forma a la estructura temporal describiendo su forma y nivel para horizontes cortos.

Volatilidad y Convexidad: La volatilidad hace que la estructura temporal no sea plana, ya que el valor esperado de la tasa de interés no se mantiene igual, y por ende aparece un efecto de convexidad. La convexidad aumenta con la madurez. Asimismo, a mayor volatilidad mayor convexidad.

Prima de riesgo: Con la convexidad, la estructura temporal toma una pendiente negativa, sin embargo, con la presencia de la prima de riesgo se domina a corto plazo la estructura temporal y hace que tenga pendiente positiva, y luego retomaría su pendiente negativa.

Una vez nombrados los modelos estocásticos de tipos de interés, se procederá a explicar uno de los modelos exógenos, el modelo Hull - White.

2.3 Modelo Hull - White

El modelo de Hull - White, se conoce también cómo el modelo de Vasicek extendido; este combina el enfoque de exogeneidad de la estructura temporal de los tipos de interés con la especificación de reversión a la media. Ellos extendieron el modelo mediante parámetros variables en el tiempo y demuestran que dicha extensión es consistente con los tipos de interés observados y con las volatilidades observadas en dichos tipos de interés. Además, suponen que el tipo de interés sigue un proceso cuya deriva es función del tiempo y establecen un procedimiento a través de un árbol trinomial para estimar los parámetros de modo que este modelo sea consistente con los datos observados (Backus, 1999).

El modelo de Hull y White para un factor viene dado por:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t)$$

o por el equivalente:

$$dr(t) = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r(t)\right]dt + \sigma dW(t)$$

en donde a es el parámetro que indica la reversión a la media[2], σ es la volatilidad instantánea del tipo a corto plazo y $\theta(t)$ es una función del tiempo que asegura la

[2] La reversión a la media permite al modelo capturar características del comportamiento en la estructura temporal en una vía económicamente intuitiva; por ejemplo, suponiendo que la economía tiende hacia un equilibrio basado en factores fundamentales como la productividad del capital, política monetaria a largo plazo, etc, a tasas de corto plazo, éstas se caracterizan por reversión a la media (Tuckman, 2002).

consistencia del modelo con la estructura temporal de tipos de interés observada en el mercado en un momento dado, y dW es un es un movimiento Browniano (Öhrn).

La implementación de este modelo se hace a través de un árbol trinomial de tasas de interés, con pasos de tiempo Δt entre los nodos y probabilidades p_u, p_m y p_d de producirse movimientos hacia arriba, hacia el medio o hacia abajo, respectivamente (London, 2012).

El procedimiento se divide en dos partes $r(t) = s(t) + s^*(t)$, en primer lugar se modela un árbol auxiliar $s(t)$ de tasa de interés con reversión a 0:

$$ds(t) = -as(t)dt + \sigma dW(t)$$

con $s(0) = 0$, por lo que su resolución proporciona para el proceso $s(t)$ que:

$$s(t) \approx N\left(e^{-at}, \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2at}}{2a}}\right)$$

El árbol trinomial va a crecer hasta un nivel $j_{max} = -j_{min}$ que viene definido por el valor entero superior de:

$$L = \frac{0,18350}{|M|}$$

y también se debe definir el espacio entre las tasas de interés mediante la fórmula: $\Delta r = \sqrt{3\sigma}$. De este modo, los valores que toma la tasa corta en los nodos distintos al del estado inicial están igualmente espaciados, lo que implica adaptar las probabilidades para ajustar el orden en que el cambio en r en el árbol tenga la media y la desviación estándar correctas en cada intervalo Δt del proceso que se requiere aproximar.

Así, se pretende ajustar la media (M), la varianza (V) y las probabilidades de transición que están definidas por:

$$\begin{aligned}
p_u(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 + jM}{2} \\
p_m(j) &= \frac{2}{3} - (jM)^2 \\
p_d(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 - jM}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (i,j+1) \\
(i-1,j) \arrow[ur, "p_u"] \arrow[r, "p_m"] \arrow[dr, "p_d"'] & (i,j) \\
 & (i,j-1)
\end{tikzcd}$$

Figura 2.4: Configuración central

No obstante, para que las probabilidades de transición sean siempre positivas, no se puede cumplir que

$$j < -\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{|M|}$$

y una forma de evitarlo es establecer configuraciones alternativas que se describen a continuación.

Cuando $j < -L$ la configuración es ascendente y entonces las probabilidades de transición son:

$$\begin{aligned}
p_u(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 + jM}{2} \\
p_m(j) &= -\frac{1}{3} - (jM)^2 + 2jM \\
p_d(j) &= \frac{7}{6} + \frac{(jM)^2 - 3jM}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (i,j+2) \\
 & (i,j+1) \\
(i-1,j) \arrow[uur, "p_u"] \arrow[ur, "p_m"'] \arrow[r, "p_d"'] & (i,j)
\end{tikzcd}$$

Figura 2.5: Configuración ascendente

La configuración es descendente ocurre cuando $j > L$ y las probabilidades de transición son:

$$
\begin{aligned}
p_d(j) &= \frac{7}{6} + \frac{(jM)^2 + 3jM}{2} \\
p_m(j) &= -\frac{1}{3} - (jM)^2 + 2jM \\
p_u(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 + jM}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(i-1,j) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & (i,j) \\
 & (i,j-1) \\
 & (i,j-2)
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.6: Configuración descendente

El segundo paso en la implementación del modelo consiste en construir el árbol R_t a partir de este árbol que se ha construido, y que sigue un proceso estocástico de la misma naturaleza que la tasa corta r_t. Así, $R_t = s_t + \Omega(t)$.

Tenemos que

$$d\Omega(t) = (\theta(t) - a\Omega(t))dt$$

Luego, para recuperar los tipos a plazo en el árbol $R_{i,j} \equiv R(i\Delta t, j\Delta t)$, se debe determinar en cada periodo el valor de $\Omega_j \equiv \Omega(i\Delta t)$ (London, 2012).

Entonces,

$$\Omega(t) = e^{-at}\left[r_0 + \int_0^t e^{au}\theta(u)du\right] \tag{2.16}$$

Desarrollando y estableciendo $f(0,0) = r_0$ se obtiene lo siguiente:

$$\Omega = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{at})^2$$

Así, el árbol ya construido, será desplazado en cada nodo por $x(i\Delta t) + \Omega(i\Delta t)$. No obstante, calcular Ω con la ecuación anterior, no es exactamente consistente con la estructura temporal inicial porque utiliza desplazamientos en tiempo continuo en un modelo de tiempo discreto. Por lo que, una alternativa es calcular dicho valor iterativamente al igual que con el valor Ω_i. Sea $\Omega_i = r(i\Delta t) - x(i\Delta t)$ y $Q_{i,j}$ indica el valor presente de un título que paga 1 cuando el nodo (i, j) es alcanzado y 0 en caso contrario. Por definición $Q_{(i,j)} = 1$ y Ω_0 se establece igual a la tasa de interés enel periodo Δt. También se pueden calcular las probabilidades en el día 0 y calcular el factor de descuento con $d_{i,j} = e^{r_{i,j}\Delta t}$ en cada periodo. Entonces, utilizando esas probabilidades, los factores de descuento y $Q_{0,0}$ se calculan $Q_{1,1}$, $Q_{1,0}$ y $Q_{1,-1}$:

$$Q_{1,1} = Q_{0,0}d_{0,0}p^u_{0,0} \tag{2.17}$$

$$Q_{1,0} = Q_{0,0}d_{0,0}p^m_{0,0} \tag{2.18}$$

$$Q_{1,0} = Q_{0,0}d_{0,0}p^d_{0,0} \tag{2.19}$$

Luego, se calculan los valores del bono de descuento para cada periodo $P_i = e^{r_i}i\Delta t$ con $i = 1, ..., N$. Ω_1 se escoge de forma tal que de el precio de mercado del bono de descuento con vencimiento en el momento $2\Delta t$, y esto se logra con el método de *Newton-Raphson*. En general, para un periodo $m\Delta t$, el precio de un bono de descuento con un vencimiento $(m + 1)\Delta t$ es:

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j}e^{-(\Omega_m+j\Delta r)}\Delta t$$

Por lo que la ecuación 2.3 queda de la siguiente forma:

$$\Omega_m = \frac{ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j}e^{-j\Delta r\Delta t} - \ln P_{m+1}}{\Delta t} \tag{2.20}$$

Luego,

$$Q_{m+1j} = \sum_k Q_{m,k}q_{k,j}e^{-(\Omega_m+k\Delta r)\Delta r}$$

donde $q_{k,j}$ es la probabilidad de moverse del nodo (m, k) al nodo $(m + 1, j)$.

Por ejemplo, una vez obtenido el valor de Ω_1 se calcula la tasa de interés y el factor de descuento en el nodo 1, con las siguientes fórmulas:

$$r_{1,1} = x_{1,1} + \Omega_1$$

$$d_{1,1} = e^{r_{1,1}\Delta t}$$

en el nodo $(1,0)$:

$$\begin{aligned} r_{1,0} &= x_{1,0} + \Omega_1 \\ d_{1,0} &= e^{r_{1,0}\Delta t} \end{aligned}$$

y en el nodo $(1,0)$:

$$\begin{aligned} r_{1,-1} &= x_{1,-1} + \Omega_1 \\ d_{1,-1} &= e^{r_{1,-1}\Delta t} \end{aligned}$$

De este modo, el proceso se repite para los periodos restantes. En el siguiente apartado, se explicará cómo determinar el parámetro de reversión a la media y la volatilidad de acuerdo a los precios de mercado.

2.3.1 Calibración

Por el momento, tanto la reversión a la media (a) como la volatilidad (σ) se han considerado constantes conocidas. Sin embargo, dichas medidas pueden ser determinadas a partir de cotizaciones de las volatilidades de los **caps**[3], este proceso recibe el nombre de calibración. Los **caplets** son un instrumento lo suficientemente líquido[4] en el mercado de derivados sobre tipos de interés en el caso español, por lo que son idóneos para calibrar el modelo en cuestión.

Los **caplets** suelen ser valorados mediante el *modelo de Black Scholes*, dicho modelo supone que la evolución de los precios de los activos, con y sin riesgo, son procesos estocásticos continuos en el tiempo. El valor presente de un **caplet** viene expresado por:

$$C = DF * K * \phi(-d_2) - DF * \phi(-d_1) \tag{2.21}$$

donde

[3]Principal producto derivado de la tasa de interés de mercado. Un **cap** es un contrato que puede ser visto como un pago de tasa de interés **swap** (IRS) donde cada pago cambiado es ejecutado solo si tiene un valor positivo (Brigo, 2012).

[4]Instrumento financiero que es inmediatamente transformable en dinero y que puede equipararse por su liquidez al efectivo dinerario.

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log(\frac{F}{K}) + \frac{v^2 T}{v}}{v\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - v\sqrt{T} \\ \phi(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

DF se refiere al factor de descuento, v es la volatilidad del **cap**, T es la fecha de vencimiento del **cap**, K es el **strike rate** y F corresponde a un vector definido como:

$$f(i) = -\log \frac{\left(\frac{DF(i+1)}{DF(i)}\right)}{dt(i)}$$

Luego, los precios de mercado de los **caplets** serían su suma acumulada ($MarketCap$). Posteriormente, para determinar los parámetros a y σ con los que el modelo quedaría calibrado, se escoge una medida de bondad de ajuste:

$$Y = \sum \left[\left(\frac{HWC - MarketCap}{MarketCap} \right)^2 \right]$$

donde HWC es la suma acumulada de **caplets** proporcionados por el modelo.

Se optimizaría dicha función objetivo (Y), y serían aquellos que minimizaran la distancia $d_{L1}(a_c, \sigma_c)$ los parámetros buscados.

En el siguiente capítulo, se presentará detalladamente cómo se pueden valorar los bonos convertibles usando las técnicas que han sido explicadas hasta los momentos.

Capítulo 3

Valoración de Bonos Convertibles

La característica de los convertibles de ser un instrumento híbrido los hace difíciles de valorar, porque depende de variables relacionadas con el modelo subyacente de renta variable, la parte de renta fija, los riesgos asociadas a la misma y la interacción entre dichos componentes. Como se dijo anteriormente, bajo determinadas circunstancias especificadas en el contrato, tanto el emisor como el titular tienen el derecho de cancelar dicho contrato con la contrapartida. El beneficiario tiene el derecho de convertir el bono, y por ende todos los pagos a él asociados, por un número determinado de acciones del emisor en aquellos periodos denominados "cancelables". Si la rentabilidad asociada a la acción del emisor es menor que la del bono, el titular mantendrá el bono en su poder mientras que si es mayor, convertirá el bono por el número de acciones acordadas en el contrato. También es frecuente que el titular tenga el derecho de vender el bono al emisor en una fecha determinada por una cantidad fija. El emisor del bono tiene el derecho de obligar al titular a convertir el bono en caso de que el precio de su acción en bolsa supere cierto valor. Este privilegio del emisor de recomprar el convertible es una forma de limitar su riesgo y sólo puede ejercerse en los denominados periodos de "conversión forzosa" (Goldman, 1994).

Entonces, el poseedor de un bono convertible tiene el derecho de recibir un cupón futuro, un pago principal y la opción de renuncias de estos pagos por canjes de acciones sujetos a ciertas provisiones **call** o **put**. Luego, para valorar convertibles, se utilizan árboles binomiales de periodo n similares a la valoración de opciones.

El valor de un convertible puede venir afectado por diversas fuentes de incertidumbre, pero la más destacada es el precio futuro del subyacente. Generalmente, según Goldman (1994) se asume que:

- El precio del subyacente futuro se distribuye lognormal con volatilidad conocida.
- Todas las tasas de interés futuras se conocen con certeza.
- Toda la información que se necesita sobre el riesgo de incumplimiento del bono o del valor principal, está contenido en el *diferencial de crédito para el emisor* del bono.

De esta manera, se puede valorar el bono calculando su valor esperado sobre los distintos escenarios del precio de subyacente futuro. En el siguiente apartado se describirá un primer método para la valoración de bonos convertibles.

3.1 Primer modelo de valoración

Unas de las principales dificultades según Goldman (1994) en la valoración de convertibles, son determinar la importancia relativa de cada uno de sus componentes, el bono y la opción sobre acciones del emisor en cada momento, y modelar el riesgo de crédito relacionándolo con el comportamiento en el mercado de la acción. Por lo general, el valor de un convertible en un instante t, es una función del precio de la acción del emisor, la tasa de interés libre de riesgo, y el riesgo de crédito del emisor. En donde, cada una de estas variables puede ser considerada determinista o estocástica.

El modelo de un factor como herramienta de valoración, asume que la única variable estocástica es el precio de la acción y que el resto de las variables son deterministas. Así, las otras suposiciones importantes de este modelo es que todas las tasas de interés futuras (la tasa libre de riesgo y el diferencial de crédito del emisor) junto con la volatilidad del subyacente, son conocidas con certeza.

Entonces, para modelar el comportamiento del derivado finaciero, se utiliza un árbol binomial que replique el proceso de difusión del convertible; estos son sencillos, versátiles y pueden aportar información adicional.

3.1.1 Árbol Binomial

Como en el capítulo anterior, se procede a construir el árbol binomial para los posibles precios del subyacente en un mundo libre de riesgo. Con igual probabilidad, el subyacente puede subir S_u o bajar S_d, en donde la diferencia de ambos es determinada por la volatilidad del subyacente. La media de S_u y S_d es el precio a plazo del subyacente luego del tiempo t. Posteriormente, se puede construir el árbol correspondiente de los precios de los bonos convertibles futuros; en la madurez, el valor del convertible es igual al máximo entre el valor principal y el producto de la razón de conversión con el precio del subyacente. Así, se recorre el árbol hacia atrás periodo a periodo para calcular el valor del convertible (VC) en cada uno de los nodos. Por lo que en cada uno de ellos, existen cinco posibilidades establecidas por Goldman (1994):

1. El convertible no es comprado (**called**) o convertido y continúa como un bono convertible.
2. El convertible es canjeado por el poseedor del bono.
3. El bono convertible es comprado (**called**) por el emisor.
4. El bono convertible es comprado (**called**) por el emisor e inmediatamente convertido por el poseedor; esto se conoce como conversión forzada.
5. El convertible es vendido (**put**) por el poseedor del bono.

Entonces, para determinar que acción se debe tomar, se debe calcular el valor de retención (H) del bono convertible. Este valor de retención al inicio del periodo en un modelo binomial, es el valor presente esperado de V_u y V_d más el valor presente de cualquier pago de cupón convertible durante este periodo. Se puede entender a H como el valor de retención que el inversor puede tener por la espera de un periodo adicional sin convertir, asumiendo que las provisiones no son aplicables durante este tiempo.

De este modo, existen tres formas de calcular el valor de un convertible (VC) en el nodo en cuestión dependiendo de las combinaciones de provisiones que se pueden dar:

No activar las provisiones de call o put: El inversor puede mantener el bono por un periodo más o convertirlo en acciones; también elegirá al VC como el máximo entre el valor de retención H y la paridad.

El convertible puede ser una put a un precio *P*: El poseedor del bono puede retener, convertir o vender (**put**) el bono al valor P más el cupón. Así, el VC será el máximo entre el valor de retención H, la paridad y el valor **put**.

El convertible puede ser una call a precio *C* o una put a precio *P*: El emisor pedirá comprar el bono cuando el valor **call** (C, más el cupón) sea menor que el valor de retención H. Y si el bono es comprable, el inversor todavía puede escoger entre vender el bono por el valor **put**, convertirlo, o aceptar la compra del emisor. Por lo que VC será el valor máximo entre la paridad, el valor **put** y el mínimo entre el valor de retención y valor **call**.

Se puede apreciar que con la **put** y **call** el inversor puede recibir el interés, pero si el inversor convierte, lo perdería, puesto que no pagarán nada a la empresa emisora al tratarse de una simple permuta de activos financieros.

3.1.2 Tasa de descuento de crédito ajustado

El valor de retención H de un convertible en un nodo del árbol, es la suma de los valores presentes de los cupones pagados en el siguiente periodo, más el valor presente esperado del convertible en dichos dos nodos al final del periodo. Pero entonces, ¿cuál sería la tasa de interés que se debería utilizar para calcular dichos valores presentes?

En el siguiente periodo se observa el precio del subyacente superior e inferior. Si en el siguiente nodo, el subyacente está por encima del precio de conversión, la opción de conversión será ejercida; por lo que la tasa de interés apropiada es la tasa libre de riesgo r. Pero si el precio del subyacente en el siguiente nodo está muy por debajo del precio de conversión, la opción de conversión no será ejecutada; luego, la tasa de riesgo d es la apropiada, y es obtenida añadiendo el diferencial de riesgo del emisor a la tasa de libre de interés.

De este modo, se utiliza la tasa de interés libre de riesgo r cuando el precio del subyacente es alto, ya que es posible una conversión. Y se utiliza la tasa de riesgo d

cuando el precio del subyacente es bajo debido a que la conversión es improbable. No obstante, para precios de subyacentes intermedios, se utiliza la tasa de descuento de crédito ajustado $y = p*r+(1-p)*d$; en donde p es la probabilidad de que el convertible se convierta en acción en el futuro, y en consecuencia, $(1-p)$ es la probabilidad de que siga siendo un bono de renta fija.

En resumen, se construye el árbol para el precio del subyacente desde la fecha 0 hasta la fecha de madurez del convertible. En la madurez se calcula el valor de los bonos como el máximo entre su valor de reembolso y su valor de conversión. Se establece la probabilidad de conversión a 1 en los nodos donde se convierte y a 0 en los que no. Luego, se recorre el árbol hacia atrás de nivel a nivel, y en cada nodo se define la probabilidad de conversión como el promedio de las probabilidades en los dos nodos futuros conectados. También, en cada nodo se calcula la tasa de descuento de crédito ajustado usando la probabilidad de conversión. Después, se calcula el valor de retención en cada nodo como la suma del flujo de caja ocurrido en el siguiente periodo y el valor esperado del bono en esos dos nodos siguientes, descontando la tasa de descuento de crédito ajustada. Posteriormente, se calcula el valor del convertible actual comparando el valor de retención en el nodo con el valor de la **call**, **put** y provisiones de conversión. Si el valor del convertible en cualquier nodo es producto de una **put**, se asigna la probabilidad en ese nodo a 0. Pero si el valor en el nodo resulta de una conversión, se asigna la probabilidad de conversión a 1.

En resumen, el valor del convertible será:

$$VC = \max(NS, P + B, \min(H, C + B)) \tag{3.1}$$

en donde N es la razón de conversión, S es el valor del subyacente en el nodo, P es el valor **put**, C es el valor **call**, B es el cupón y H es el valor de retención.

3.2 Ejemplo

Se tiene un bono convertible de 5 años con un valor principal de 100, que puede ser canjeado por una acción, y a partir del segundo año el emisor lo puede comprar por un valor **call** a partir del segundo año por 115, disminuyendo 5 hasta la madurez; el inversor puede venderlo pasado el tercer año en un valor **put** de 120. La tasa de interés libre de riesgo es de 5%, el diferencial de crédito es de 5%, y la volatilidad es de 10%. El cupón tiene un valor de 10% por año y un valor actual de 100.

Espacialmente tenemos lo siguiente:

Tiempo	0	1	2	3	4	5
Calls	NA	NA	115	110	105	100
Put	NA	NA	NA	120	NA	NA
Bonos	10	10	10	10	10	10

Con la ayuda de la herramienta de software matemático MATLAB se ha construido el árbol del subyacente (figura 3.1) basado en la evolución log-normal utilizada por el modelo de Black-Scholes para activos de renta variable. Por lo que el valor futuro en tiempo t de un activo de renta variable S viene dado por:

$$S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\sqrt{\Delta t W}}$$

en donde S_t es el valor en tiempo t de la variable, S_0 es el valor actual de la variable, σ representa la volatilidad, r es la tasa libre de riesgo y Z es la variable browniana.

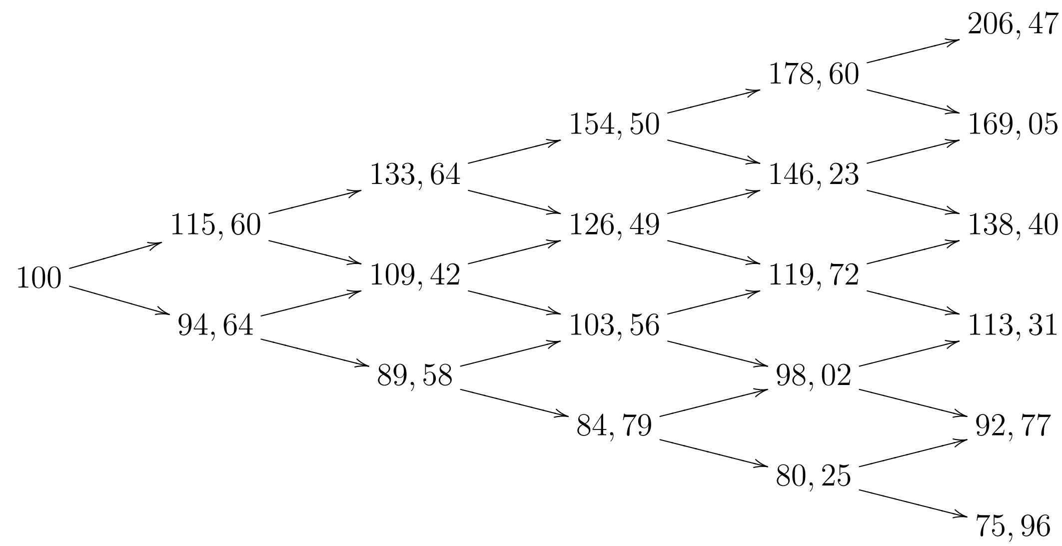

Figura 3.1: Árbol del subyacente

Se procede a calcular la valoración del bono convertible, y el modelado se muestra en la siguiente figura:

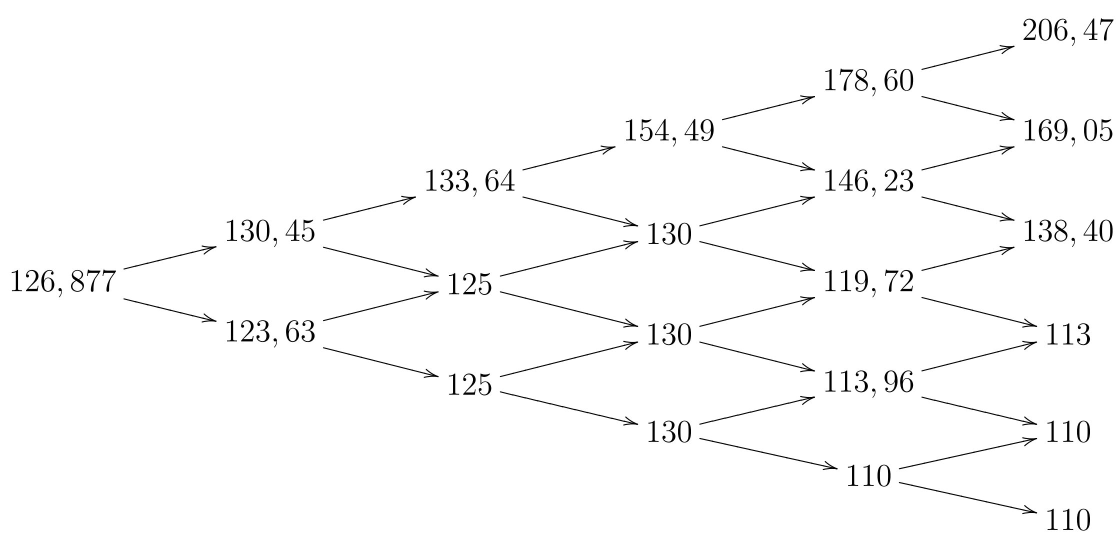

Figura 3.2: Valoración de bonos convertibles

De esta manera se obtiene el valor del bono convertible: 126,8770. Por lo tanto, se ha valorado un bono convertible en base a ciertas suposiciones, entre ellas que las tasas de interés son conocidas. No obstante, si por el contrario se posee una curva cupón cero, una de las maneras de describir completamente la estructura temporal de la tasa de interés en el mercado es con la *función de descuento*, el cual varía un poco el modelo de valoración de Goldman (1994) y que será mostrado en el siguiente apartado.

3.3 Segundo modelo de valoración

Existen procedimientos semejantes que describen completamente la estructura temporal de la tasa de interés en el mercado. Una de ellas es la *Función de Descuento* que especifica el precio en t de un bono cupón cero[1] con una madurez al tiempo T. En otras palabras, si se conoce la Curva Cupón Cero aplicable al bono convertible, la valoración de los bonos con cupón fijo es muy sencilla, debido a que se conoce el valor de los flujos futuros con certidumbre. De este modo, la valoración consiste en obtener los factores de descuento aplicable en cada fecha de pago de cupón y calcular el valor presente de los flujos futuros.

El modelo de valoración utilizado por Inter Money Valora Consulting (2012) consiste en el cálculo del valor presente de los flujos futuros esperados. Al igual que con el modelo explicado anteriormente, se debe modelizar el subyacente y luego la opción de conversión en acciones ordinarias del emisor. Esto se logra mediante un árbol binomial para cada caso, en donde se discretiza la evolución de los mismos y a su vez recogiendo todas las características del contrato del convertible.

En primera instancia, se determina el modelo de evolución con ayuda de los árboles binomiales y se modeliza la evolución del subyacente con probabilidades de transición constantes.

[1] Con madurez T, es un contrato que garantiza al poseedor que un valor principal será pagado en el día T.

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma\sqrt{t}W} \\ u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= \frac{1}{u} \\ p &= \frac{e^{(r-q)} - d}{u - d} \end{aligned}$$

En la la madurez, el valor del convertible viene dado por:

$$VC_t = S(i,t) * NS + B \tag{3.2}$$

Para los periodos anteriores a la madurez, se debe evaluar el valor de continuar (valor de retención) sin ejercer la opción de conversión (si la hubiese) y el valor de conversión inmediata si existe opción a canje. Hay que tener en cuenta la existencia de pago de cupón, de este modo el valor del convertible en dichos nodos viene dado por la siguiente expresión:

$$VC_t = \max(Continuación, Conversión) + B \tag{3.3}$$

donde

$$Continuación_t = E[VC_{t+1}] * DF_t(dt) + B$$

siendo $E[VC_{t+1}]$ el valor esperado del bono convertible:

$$E[VC_{t+1}] = p * VC_{i,t+1} + (1-p) * VC_{i+1,t+1}$$

y siendo $DF_t(dt)$ la función de descuento, que a su vez se determina por medio de la siguiente expresión:

$$DF_t = \frac{1}{(1+i)^t}$$

el cual t representa el tiempo en años transcurrido desde hoy hasta la fecha concreta que se desea actualizar, e i se refiere al tipo de interés expresado en términos efectivos anuales. En este último valor viene agregado el diferencial de crédito.

Y el valor de la conversión viene dado por:

$$Conversión_t = S(i,t) * NS$$

En los dos modelos de valoración que han sido explicados, el cupón del bono (B) se consideró como un valor fijo. No obstante, éste puede ser determinado modelando la tasa de interés con el método de Hull - White como se describirá en la siguiente parte.

3.4 Cupón del bono con el modelo de Hull - White

En la sección anterior se pudo observar que el cupón del cual depende el valor del bono convertible ha sido constante hasta la madurez del mismo. En este apartado, dicho bono se modelará según el tipo de interés estocástico, para ello se hará uso del modelo de Hull - White y de los árboles trinomiales.

Este modelo de tipos de interés proporciona información sobre la evolución esperada de la estructura temporal, útil cuando los cupones de los bonos no son lineales. Se simula los tipos de interés calibrado a partir de la volatilidad de los **caps** que cotiza el mercado y la estructura temporal de los tipos de interés de acuerdo al modelo Hull - White. Luego, con el árbol trinomial se representa en tiempo discreto el proceso estocástico para el tipo de interés, el cual permitirá calcular los pagos contingentes en cada nodo y valorar, en su caso, la opción calculando el valor esperado de los mismos.

En el siguiente apartado se presentarán algunas valoraciones de bonos convertibles en el Mercado Español.

3.5 Valoración de Bonos Convertibles en el Mercado Español

Convertibles en Acciones del Banco Popular S.A

Para un primer ejemplo de valoración de convertibles del Banco Popular, se muestran a continuación los datos de entrada:

- $Spot = 2,61$

- $Cupón = 7\%$
- $Principal = 1.000$
- $RazóndeConversión = 274,7253$
- $Volatilidad = 44,57\%$
- Fecha: 25/08/2013 - 25/11/2015
- Pago de cupón trimestral.

La valoración del bono convertible mediante el primer modelo fue de un valor de €717,03 y con el segundo modelo fue de €717,28.

Para un segundo ejemplo de valoración de convertibles del Banco Popular, se presenta en lo que sigue los datos de entrada. Una variante de este ejemplo, es que al momento de modelar el subyacente, si en cada nodo el precio es menor a 0,77 se le asigna dicho valor, o si es mayor a 7,79 se utiliza este otro valor.

- $Spot = 2,469$
- $Cupón = 6,75\%$
- $Principal = 100$
- $RazóndeConversión = 27$
- $Volatilidad = 44,57\%$
- Fecha: 04/10/2013 - 04/10/2018
- Pago de cupón trimestral.

La valoración del bono convertible por el segundo modelo fue de un valor de €66,66 y con el segundo modelo fue de €66,68.

Convertibles en Acciones del Banco Sabadell

Para un primer ejemplo de valoración de convertibles del Banco Sabadell, se exponen a continuación los datos de entrada:

- $Spot = 1,483$
- $Cupón = 7,75\%$
- $Principal = 5$
- $RazóndeConversión = 4,19$
- $Volatilidad = 37,39\%$
- Fecha: 11/08/2013 - 11/11/2013
- Pago de cupón trimestral.

La valoración del bono convertible mediante el primer modelo fue de un valor de €1,77 y por el segundo modelo ha sido de €2,36.

Un segundo ejemplo de valoración de convertibles del Banco Sabadell, se presenta a continuación los datos de entrada:

- $Spot = 1,489$
- $Cupón = 5,208\%$
- $Principal = 1.000$
- $RazóndeConversión = 239,2345$
- $Volatilidad = 37,39\%$
- Fecha: 10/07/2013 - 17/07/2015
- Pago de cupón trimestral.

La valoración del bono convertible por el primer modelo fue de €356,22 y para el segundo modelo fue de €356,34.

Convertibles en Acciones del FCC

A continuación se exhiben los datos de entrada para la valoración de un bono convertible del Fomento de Construcciones y Contratas, S.A:

- $Spot = 9,088$
- $Cupón = 6,5\%$
- $Principal = 50.000$
- $RazóndeConversión = 1.321,004$
- $Volatilidad = 37,85\%$
- Fecha: 30/07/2013 - 30/10/2014
- Pago de cupón semestral.

La valoración del bono convertible para el primer modelo fue de €12.005 y para el segundo modelo €41.285.

3.5.1 Calibración en el Mercado Español

Como se comentó en el capítulo anterior, los parámetros de reversión a la media y la volatilidad del tipo de interés, pueden ser calibrados a partir de **caplets** del mercado. Por lo tanto, se procedió a valorar los bonos convertibles con los parámetros determinados mediante la calibración para luego usarlos en el método de Hull - White, y de esta manera calcular el cupón del bono para cada periodo y seguidamente valorar el convertible cómo se ha venido realizando. Estos resultados se mostrarán junto con los obtenidos previamente, para observar las semejanzas entre ellos.

Tabla 3.1: Resultados valoración de bonos convertibles

Ejemplo	**Modelo 1**	**Modelo 2**	**Modelo Calibrado**
B. Popular 1	717,03	717,28	722,13
B. Popular 2	66,66	66,68	67,11
B. Sabadell 1	1,77	2,36	2,47
B. Sabadell 2	356,22	356,34	364,01
FCC	12.005	41.285	41.285

Capítulo 4

Conclusiones

Los bonos convertibles son bonos que incorporan una o varias opciones de conversión por acciones nuevas del emisor. Dan el derecho a sus tenedores de cambiar el bono por un cierto número de acciones en cualquier momento desde hoy hasta el día de la maduración del bono. Este proyecto ha estimado los valores de bonos convertibles, el primero con un valor de bono constante y luego computado por medio de tasas de interés estocástica mediante el modelo Hull-White. Para lograr esto, se implementaron dichos modelos numéricamente mediante un árbol binomial y trinomial de tasas, respectivamente. Este último árbol permite calcular el cupón del bono en cada periodo. Además, la metodología implementada en el software de MATLAB está hecha para valorar un bono convertible genérico, para que pueda ser empleado en otros escenarios.

En concreto, para la valoración de bonos convertibles el procedimiento se estructura en cuatro fases. En la primera fase se estiman los parámetros que caracterizan el proceso estocástico, seguido por los tipos de interés a partir de las volatilidades de los **caps** cotizadas en el mercado. En la segunda fase, se construye un árbol trinomial que simule los tipos de interés consistentes con la estructura temporal de tipos de cada momento del tiempo. En la tercera fase, se calculan los cupones del bono en cada nodo del árbol. Y finalmente, en la cuarta fase, de determina el valor del convertible de acuerdo a las características que se tenga en cada periodo.

Como se pudo observar, en los distintos ejemplos de valoración realizados en este proyecto, dichas valoraciones fueron aproximadamente iguales. Por lo que, los distintos métodos pueden adecuarse según los datos que se posean para valorar, y a su vez utilizarlos para comparar los resultados. En una línea de investigación futura, se pueden variar los modelos de valoración, bien sea en cómo valorar los bonos convertibles, o en utilizar otra metodología distinta al modelo de Hull - White para modelar la tasa de interés y con ella calcular el valor del cupón del bono.

Bibliografía

Backus, D, W. L. y. Z. S. (1999). Technical Note on Hull and White. *NYU Stern School of Business.*

Brigo, D y Mercurio, F. (2012). *Interest Rate Models - Theory and Practice.* Milano, Italia.

De Spiegeleer, J., S. W. y. J. P. (2011). *The Handbook of Convertible Bonds: Pricing, Strategies and Risk Management.* The Wiley Finance Series. Wiley, Milano, Italia.

Goldman, S. (1994). Valuing Convertible Bonds as Derivates. *Quantitative Strategies Research Notes.*

Hull, J. (2008). *Options, Futures and Other Derivatives.* New Jersey, USA, seventh edition.

Inter Money Valora Consulting (2012). Informe de Emisión de Obligaciones Subordinadas Obligatoriamente Convertibles en Acciones de Banco Popular S.A. *Grupo cimd.*

London, J. (2012). *Modeling Derivatives in C++.* Milano, Italia.

Moreno, M. (2000). Modelización de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés: Valoración de Activos Derivados y Comportamiento Empírico. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XXIX(104):345–376.

Tuckman, B. (2002). *Fixed Income Securities. Tools for Today's Markets.* New Jersey, USA.

Öhrn, M y Nordqvist, T. Pricing Convertible Bonds using Stochastic Interest Rate. *2001*.