

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

Introducción al diseño y optimización aerodinámica de un coche de Fórmula 1

Por:

Yaiza González de la Torre

Tutores:

Benjamin Ivorra y Ángel Manuel Ramos

Trabajo Fin de Máster Ingeniería Matemática

Septiembre, 2017

Índice

Resumen	1
1. Introducción	2
2. Introducción a la aerodinámica	3
2.1. Fundamentos teóricos	3
2.1.1. Fluido laminar y turbulento	5
2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes	6
2.2.1. Ecuación de continuidad	6
2.2.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.	7
3. Diseño y resolución de los modelos	9
3.1. Planteamiento del problema	9
3.2. Resultados obtenidos	11
3.2.1. Resultados de los modelos 1 y 2	11
3.2.2. Resultados del modelo 3	14
4. Optimización del alerón trasero	17
4.1. Algoritmo genético	17
4.2. Algoritmo de mejora de la condición inicial	19
4.3. Aplicación de los métodos y resultados	20
5. Conclusiones	24
Referencias	25
Anexo	26
A. Códigos de Matlab	26
A.1. Código para calcular la pieza con sustentación mínima y máxima	26
A.2. Funciones de GOP	26

Resumen

La aerodinámica es una rama de la mecánica de fluidos que se ha convertido en una pieza clave en el diseño de coches de Fórmula 1, debido a que el control de las cargas aerodinámicas (resistencia y sustentación) de un automóvil puede aumentar tanto su velocidad, como su seguridad. Con el objetivo de que el monoplaza posea una mayor tracción con la carretera, en este trabajo se ha diseñado un alerón trasero de un coche de Fórmula 1 buscando que su sustentación sea mínima. Para ello, se han estudiado las curvas de sustentación y resistencia de varios modelos, empleando el software de simulación numérica COMSOL. Además, se ha aplicado un algoritmo genético junto con un algoritmo de mejora de la población inicial, mediante el uso de la herramienta de optimización *Global Optimization Platform*, a uno de estos modelos, obteniendo así el diseño óptimo del alerón.

Abstract

Aerodynamic is a branch of fluid mechanics that has become instrumental in the design of Formula 1 cars, due to the fact that the control of the its aerodynamic forces (drag and lift) both speed and safety may be raised. With the aim of providing the car with a higher traction on the road, a Formula 1 car rear wing has been designed seeking for the minimum lift. To achieve it, lift and drag curves from different models have been studied, making use of COMSOL, a numerical simulation software. Moreover, a genetic algorithm has been applied with an improvement of the initial population algorithm to one of those previous models, by means of the Global Optimization Platform tool. This way, the optimum rear wing design has been achieved.

1. Introducción

La Fórmula 1 es un deporte donde la aerodinámica cobra una vital importancia, ya que gracias a ello se mejora la eficiencia del automóvil. A la hora de diseñar un monoplace, el objetivo de los ingenieros de este deporte es crear carga aerodinámica de forma que la tracción con la carretera sea mayor y minimizar la resistencia de avance del vehículo, es decir, aumentar su seguridad y velocidad.

En concreto, este trabajo se centra en el diseño de un alerón trasero de Fórmula 1, de forma que aporte al vehículo un buen agarre con la carretera. Para ello buscaremos una pieza cuya forma sea tal que su sustentación sea mínima, y por tanto, el empuje que ejerce el aire sobre la misma sea mayor.

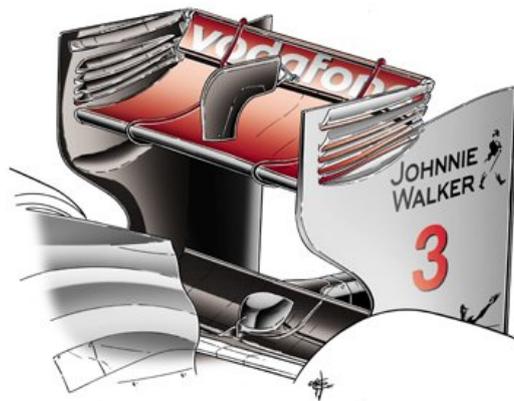


Figura 1: Alerón trasero de un F1.

La estructura que se sigue a lo largo de esta memoria es la siguiente: en la Sección 2 se define aerodinámica junto con ciertos conceptos aerodinámicos (ángulo de ataque, sustentación, resistencia, etc.) y se desarrollan las ecuaciones necesarias para calcular las fuerzas aerodinámicas. La Sección 3 se resuelven diferentes modelos con el software de simulación numérica COMSOL y se realiza un estudio de los mismos con el objetivo de analizar los valores de las fuerzas aerodinámicas para distintos ángulos de ataque. En la Sección 4 se presentan los algoritmos de optimización y los resultados que se obtienen al aplicar dichos algoritmos, empleando la herramienta de optimización en Matlab, *Global Optimization Platform* (GOP), un modelo de los estudiados anteriormente. Finalmente, en la Sección 5 se exponen las conclusiones y el posible futuro trabajo.

2. Introducción a la aerodinámica

La aerodinámica es una rama de la mecánica de fluidos que estudia la interacción entre el aire y cuerpos sólidos cuando existe un movimiento relativo entre ellos. Por ello, es una de las principales disciplinas que se emplean para diseñar los coches de Fórmula 1.

A la hora de diseñar piezas en aeronaves es necesario conocer las cargas aerodinámicas que actúan sobre él. Existen métodos analíticos (en el caso de que el problema sea sencillo), numéricos y experimentales que nos permiten calcular dichas fuerzas. En concreto, en este trabajo, se emplean métodos numéricos para resolver el problema que se propone. A continuación se muestran los principales conceptos teóricos sobre aerodinámica y las ecuaciones de interés en nuestro caso.

2.1. Fundamentos teóricos

En el diseño de piezas en aerodinámica como alas, alerones o hélices es usual trabajar con perfiles aerodinámicos. Un perfil aerodinámico es la figura que resulta de la intersección de la pieza con un plano paralelo al plano de simetría de la aeronave. En la Figura 2 se muestra un perfil aerodinámico.

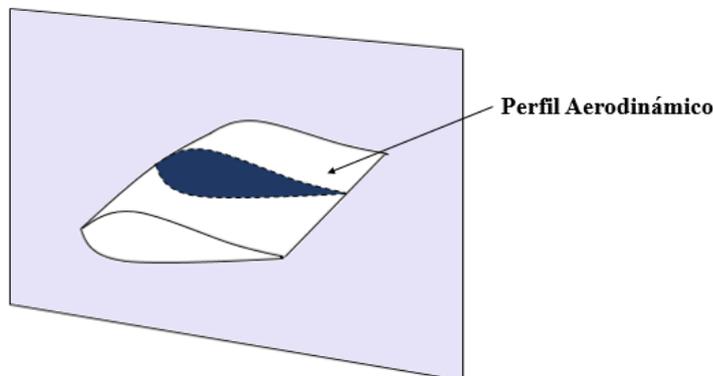


Figura 2: Perfil aerodinámico.

Al punto más adelantado del perfil se le conoce como borde de ataque, mientras que el más atrasado se denomina borde de salida. Un concepto de vital importancia en aerodinámica de perfiles es el ángulo de ataque. Éste es el ángulo que forma la dirección del vector velocidad respecto al eje longitudinal del perfil (Figura 3).

La forma del perfil y el ángulo en el que se disponga es importante ya que, dependiendo de ellos, se presenta una mayor o menor resistencia al avance del aire.

Además, influyen sobre las fuerzas que se generan sobre el perfil. Estas fuerzas aerodinámicas se conocen como resistencia (o *drag*), d , y sustentación (o *lift*), l . La resistencia es la componente de la fuerza paralela a la dirección del flujo, lo que provoca una oposición al avance del cuerpo a través del aire. Por otra parte, la sustentación es la fuerza que permite que un avión se mantenga en vuelo o que un automóvil tenga un mejor agarre, siendo esta fuerza perpendicular a la dirección de la velocidad del aire. Tomando como origen del sistema de referencia el centro de masas del perfil, las direcciones de las fuerzas aerodinámicas en un perfil se muestran en la Figura 3.

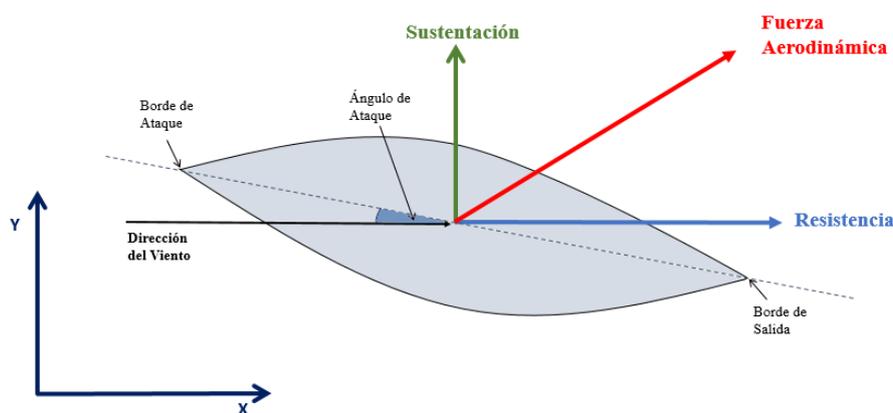


Figura 3: Ángulo de ataque, sustentación y resistencia de un perfil aerodinámico.

Si la resistencia se encuentra en sentido positivo implica que el perfil se opone al movimiento del aire, mientras que en el caso contrario el aire arrastraría a la pieza en el sentido del flujo de aire. Por ello, cabe suponer que la resistencia siempre se encontrará en sentido opuesto al flujo. De igual manera, una sustentación en el sentido positivo del eje de ordenadas indica que la aeronave tiende a elevarse, viéndose empujada hacia abajo en caso contrario.

Las cargas aerodinámicas dependen de variables físicas que conciernen al fluido (como la densidad o la viscosidad dinámica), y al perfil aerodinámico que interactúa con el fluido (como el tamaño, el ángulo de ataque (α), la velocidad relativa del fluido y el cuerpo, etc). Realizando un análisis dimensional de las mismas se obtienen los coeficientes de sustentación y resistencia, dados por

$$c_l = \frac{2l}{\rho v^2 A} \quad (1)$$

$$c_d = \frac{2d}{\rho v^2 A}, \quad (2)$$

donde A es el área del perfil aerodinámico y v la velocidad relativa del fluido.

En automovilismo una reducción de la resistencia provoca que el vehículo incremente su velocidad máxima y su eficiencia. El área frontal del vehículo provoca un

gran impacto en este valor. Sin embargo, un valor muy bajo de la resistencia puede causar un valor muy alto de sustentación, lo que implica una pérdida de tracción con la carretera, lo cual es muy inseguro. Por tanto, como queremos modelizar un alerón trasero de un coche de Fórmula 1, buscaremos minimizar el valor de la fuerza de sustentación para aportar una mayor seguridad al automóvil.

2.1.1. Fluido laminar y turbulento

Un número adimensional de gran importancia en aerodinámica es el número de Reynolds, que relaciona la fuerzas inerciales y la fuerzas viscosas presentes en un fluido, relacionando la densidad (ρ), la viscosidad (μ), la velocidad característica (v) y una longitud característica (D) del fluido. La expresión del número de Reynolds (Re) se muestra en la ecuación (3).

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}. \quad (3)$$

Este número adimensional determina si el fluido es laminar o turbulento.

Diremos que el flujo es laminar si el número de Reynolds es pequeño ($Re \leq 2100$). En este caso las partículas del fluido se mueven siguiendo trayectorias uniformes. Por el contrario, un fluido es turbulento cuando sus partículas se mueven siguiendo trayectorias desordenadas y se asocia con un número de Reynolds grande. En la Figura 4 se muestra el comportamiento de cada tipo de flujo.

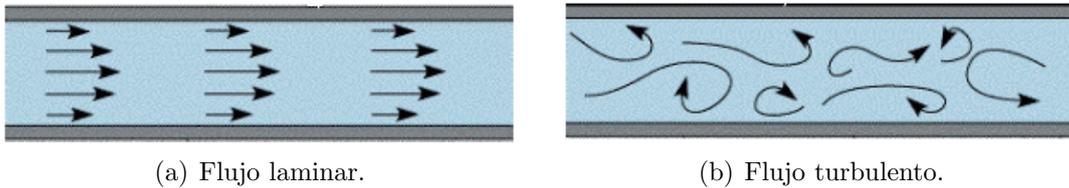
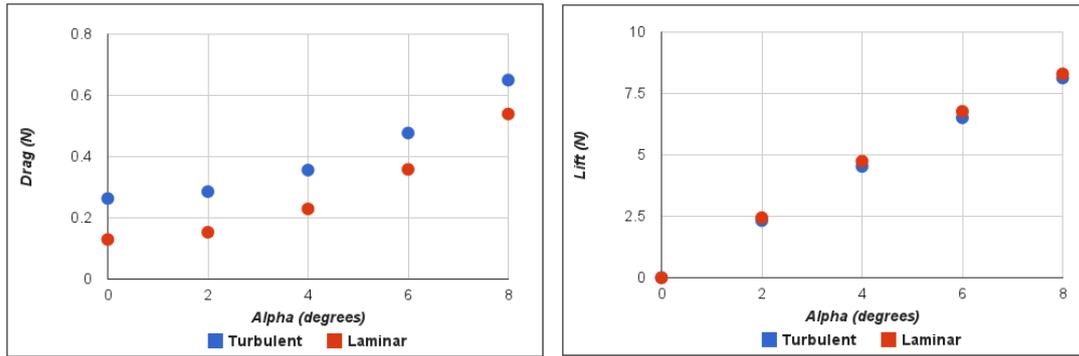


Figura 4: Flujos laminar y turbulento.

En cuerpos aerodinámicos el mantenimiento del flujo en forma laminar ayuda a reducir al mínimo la resistencia, lo que conlleva un aumento la eficiencia de la aeronave. Sin embargo, es una tarea difícil mantener el flujo del fluido en este estado, y, por tanto, se produce una transición a la turbulencia.

Debido a las velocidades que alcanzan los automóviles, cuando se trabaja el diseño de piezas de Fórmula 1 se debe considerar que el aire es en fluido turbulento.

En el estudio realizado en [10] se realiza una comparación de la sustentación y la resistencia del perfil NACA0012, que es un perfil alar de una aeronave desarrollado por el *National Advisory Committee for Aeronautics*, en un flujo laminar y en uno turbulento, para varios ángulos de ataque. Los resultados obtenidos en dicho estudio se muestran en la Figura 5.



(a) Curvas de resistencia.

(b) Curvas de sustentación.

Figura 5: Comparación de las curvas de las fuerzas en un fluido laminar y turbulento.

Como cabía esperar, en la Figura 5(a) se observa que la resistencia es mayor en el caso turbulento. Sin embargo, las curvas de sustentación de ambas simulaciones son muy similares, como se muestra en la Figura 5(b). Teniendo en cuenta este estudio, puesto que nuestro objetivo es estudiar la sustentación, y debido a que simular un caso turbulento es mucho más costoso, desde un punto de vista computacional, y a las capacidades del software de simulación numérica que vamos a utilizar (COMSOL) nos centramos en los casos laminares, a pesar de que, como se ha mencionado anteriormente, en Fórmula 1 se suele estar en situaciones de flujos turbulentos.

2.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

En aerodinámica, para poder calcular la fuerza que actúan sobre un cuerpo es necesario conocer el campo de velocidad y la distribución de la presión del fluido con el que interactúa. Para ello, se emplean las ecuaciones de Navier-Stokes, compuestas por la ecuación de continuidad y las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento. A continuación se muestra el desarrollo de las mismas.

2.2.1. Ecuación de continuidad

El aire al ser un medio continuo satisface, entre otros, el principio de conservación de masa. Este principio establece que en un volumen fijo D limitado por una frontera S , el flujo neto de masa a través de la superficie del volumen a de ser igual a la variación con el tiempo de la masa contenida en D , lo que da lugar a la ecuación

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho dv + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = 0, \quad (4)$$

donde ρ es la densidad del fluido, \mathbf{u} la velocidad y ds , dv la diferencial de superficie y volumen.

Al transformar la integral de superficie en una de volumen, empleando el teorema de la divergencia, se obtiene

$$\int_D \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dv = 0. \quad (5)$$

Esta expresión debe cumplirse independientemente del volumen que se tome por lo que se cumple que

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

considerando la derivada material $D\rho/Dt = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$.

Un fluido incompresible es aquel cuya densidad es constante, por lo que en este caso se cumpliría que $D\rho/Dt = 0$. En este caso, vamos a considerar el aire como un fluido incompresible, ya que su velocidad es muy pequeña respecto a la velocidad del sonido, es decir, esta por debajo de los 100 m/s. Por tanto, la expresión de la ecuación de continuidad es

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (7)$$

2.2.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

La segunda ley de Newton nos dice que la variación con el tiempo de la cantidad de movimiento de un volumen es proporcional a las fuerzas que actúan sobre el mismo. Al aplicar esta ley a un fluido obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \mathbf{u} dv + \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds = \mathbf{F}. \quad (8)$$

Las fuerzas que actúan sobre el volumen son fuerzas que actúan sobre la superficie, como la presión y la debida a la viscosidad del fluido, y fuerzas que dependen de la masa.

$$\mathbf{F} = - \int_S p \mathbf{n} ds + \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} ds + \int_D \rho \mathbf{F}_m dv,$$

donde p es la presión, F_m son las fuerzas másicas y $\boldsymbol{\tau}$ el tensor de esfuerzos viscosos (véase [5]). Empleando esta expresión y teniendo en cuenta el teorema de la divergencia se obtiene

$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \right] dv = \int_D (\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{F}_m) dv, \quad (9)$$

donde $\mathbf{u} \mathbf{u}$ denota el producto tensorial (también llamado diádico) del vector \mathbf{u} por sí mismo. Como la ecuación 9 no depende del volumen considerado se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{F}_m. \quad (10)$$

Por otra parte, el tensor de esfuerzos viscosos viene dado por $\tau = \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$. Además,

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \nabla\rho) + \rho\mathbf{u}\nabla \cdot \mathbf{u} + \rho\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}$$

.

Considerando la ecuación de continuidad (7) y teniendo en cuenta que la densidad es constante se llega a la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, cuya expresión es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \cdot [p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)] + \rho\mathbf{F}_m. \quad (11)$$

3. Diseño y resolución de los modelos

El objetivo de este trabajo es diseñar el alerón trasero de un coche de Fórmula 1 de forma que proporcione al vehículo mayor tracción con la carretera, es decir, buscando una sustentación baja. Para ello, en primer lugar se ha empleado el software de modelización COMSOL 5.2 con el que se ha resuelto, empleando el Método de Elementos Finitos (véase [7]), una versión estacionaria de las ecuaciones de Navier-Stokes anteriormente descritas (ecuaciones (7) y (11)) junto con las adecuadas condiciones de contorno. Con ello, posteriormente, se han calculado las fuerzas de resistencia y sustentación.

En esta sección se presentan los distintos modelos planteados y su resolución con COMSOL, así como el cálculo de las fuerzas aerodinámicas de los mismos. Además, se realiza un estudio de los resultados que se han obtenido con las distintas piezas viendo para qué ángulos de ataque se obtiene la mínima sustentación.

3.1. Planteamiento del problema

Para estudiar el comportamiento del aire cuando incide sobre el alerón trasero de un coche de Fórmula 1 y conocer así el valor de las cargas aerodinámicas se han construido tres modelos con geometría cada vez mas compleja. Los dos primeros casos considerados son dos modelos sencillos en los que se tiene una pieza rectangular y una elíptica. En el tercer modelo, que será el que posteriormente se modifique para obtener la forma del alerón óptima, es una figura formada por dos polígonos de Bezier cuadráticos. Los correspondientes modelos se muestran en la Figura 6.

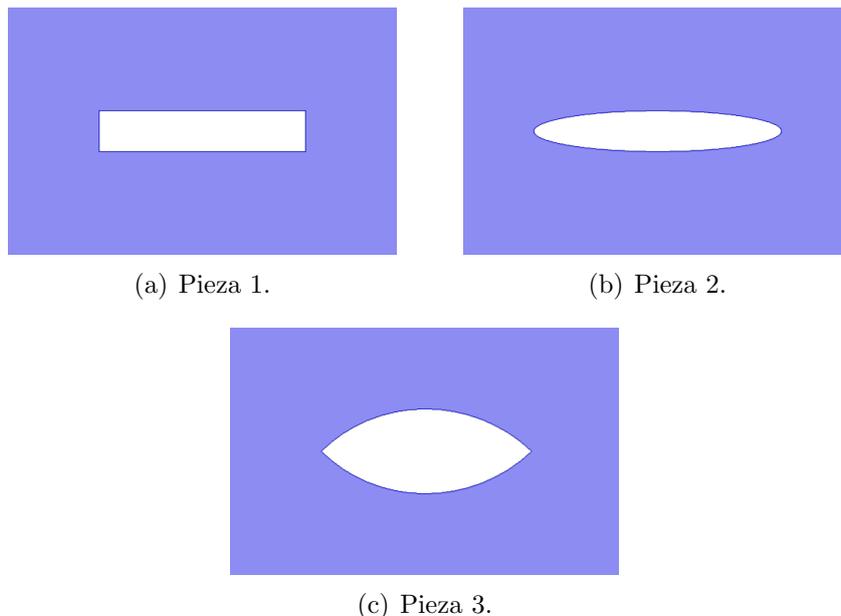


Figura 6: Piezas estudiadas.

Estas piezas se han introducido en el centro de un tubo rectangular por el que fluye el aire, lo cual se muestra en la Figura 7.

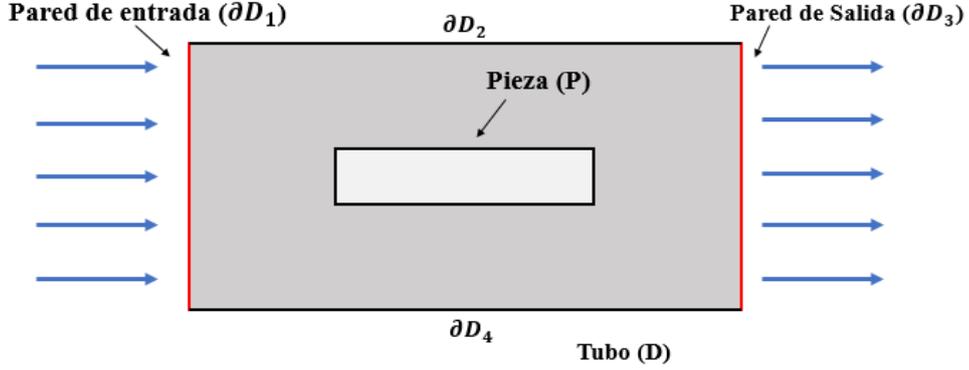


Figura 7: Modelo genérico.

En este tubo se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias, puesto que nos interesa calcular las fuerzas aerodinámicas en lugar de estudiar cómo evoluciona la solución a lo largo del tiempo. De esta forma, teniendo en cuenta (7) y (11), las ecuaciones que se resuelven son las siguientes

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \cdot [p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)] + \rho\mathbf{F}_m & \text{en } D, \\ \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } D, \end{cases} \quad (12)$$

donde D es el rectángulo con el hueco interior que genera la pieza P .

Como se muestra en la Figura 7 a la izquierda del tubo se encuentra el borde de entrada a través del cual el aire entra con una velocidad u_0 , mientras que a la derecha se tiene el borde de salida donde la presión es 0. Además, en el resto del contorno del tubo y en los bordes de la pieza se consideran paredes donde no hay entrada ni salida de aire y la velocidad es nula, ya que suponemos que la pieza se encuentra en un túnel de grandes dimensiones. Por lo tanto, las condiciones de contorno vienen dadas por:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0 & \text{si } \partial P \cup \partial D_2 \cup \partial D_4, \\ \mathbf{u} = u_0\mathbf{n} & \text{si } \partial D_1, \\ \mathbf{n}^T [p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)] = 0 & \text{si } \partial D_3. \end{cases} \quad (13)$$

En los dos primeros casos se ha tomado como velocidad de entrada $u_0 = 0,01$ m/s, mientras que en el tercero para asegurar la convergencia y puesto que será el caso que posteriormente se buscará optimizar se ha empleado $u_0 = 0,005$ m/s.

Al resolver las ecuaciones (12) con las condiciones de contorno dadas en (13) obtenemos el campo de velocidad y la distribución de la presión del aire, mediante lo cual se puede calcular la resistencia y la sustentación de la pieza. Para ello, como se indica en [9], se realiza la integral sobre los bordes de la pieza del esfuerzo total. El esfuerzo total es el resultado de las fuerzas que actúan en el aire, por lo que está compuesto por la fuerza de presión y la fuerza de viscosidad. Debido a que la resistencia es una fuerza paralela a la dirección del fluido para calcularla se toma la componente x del esfuerzo total. Por otro lado, para calcular la sustentación se realiza la integral del esfuerzo en la componente y , al ser su dirección perpendicular al flujo. Las expresiones de las fuerzas de resistencia (d) y sustentación (l) vienen dadas por

$$d = \int_{\partial P} \tilde{\Pi}_x dl \quad (14)$$

$$l = \int_{\partial P} \tilde{\Pi}_y dl, \quad (15)$$

donde $\tilde{\Pi}$ es el esfuerzo total y dl la diferencial de línea (véase [6]).

3.2. Resultados obtenidos

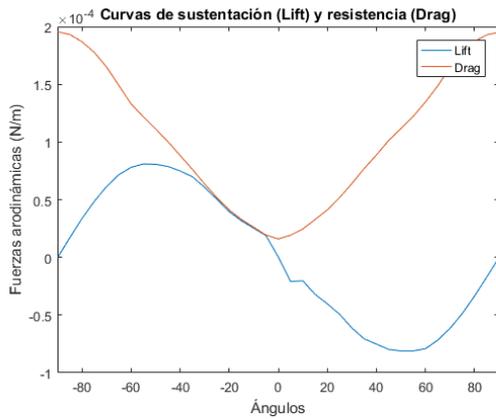
Con el objetivo de estudiar para qué ángulos se obtienen una mayor o una menor sustentación de la pieza y, puesto que las cargas aerodinámicas depende del ángulo de ataque, se han calculado dichas cargas de los distintos modelos para ángulos entre -90° y 90° con paso 5 y se han comparado sus resultados.

Como se ha mencionado en el apartado anterior, las piezas se han introducido en un tubo rectangular. Éste se ha tomado con dimensiones $3,5 \times 4,5$ metros, de forma que los cuerpos se encuentren lo suficientemente alejados de las paredes del tubo asemejándose así al caso real en el que el alerón no se encontraría en un dominio acotado. En concreto, las piezas en los tres casos tienen unas dimensiones similares siendo aproximadamente 80 veces mas pequeña que el tubo.

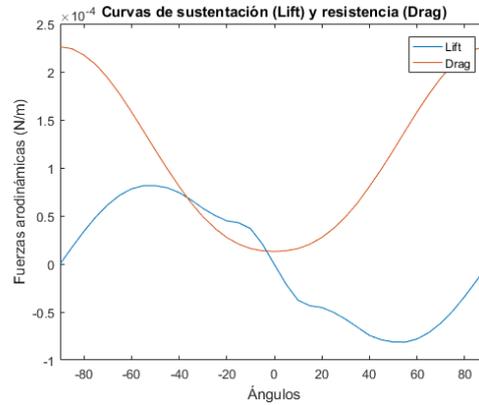
3.2.1. Resultados de los modelos 1 y 2

Considerando éstas dimensiones, las curvas de sustentación y resistencia que se obtienen para ambos modelos se muestran en la Figura 8. En ella se puede observar que no existe una gran diferencia entre los dos primeros modelos, obteniéndose máximos y mínimos para las distintas fuerzas en ángulos muy similares.

En ambas imágenes se observa que el punto con menor resistencia se alcanza en torno a los 0° , cuando el cuerpo se dispone horizontalmente, mientras que los puntos con resistencia máxima se encuentran en -90° y 90° , como cabía esperar, ya que cuando las piezas se disponen verticalmente ejercen una mayor oposición al movimiento.



(a) Modelo 1.



(b) Modelo 2.

Figura 8: Curvas de sustentación y resistencia en función de los ángulos.

Estudiamos la curva de sustentación de cada modelo individualmente.

■ **Curva de sustentación del modelo 1**

Para el modelo de la pieza rectangular, la curva de sustentación se muestra en la Figura 9.

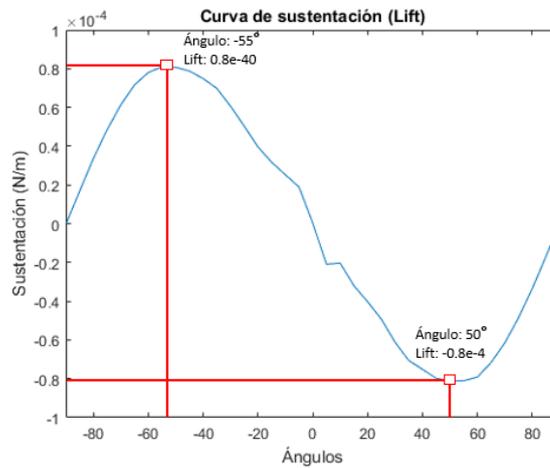


Figura 9: Valor máximo y mínimo de la sustentación en el modelo 1.

En esta gráfica observamos ciertas irregularidades debidas a errores de aproximación del software COMSOL. Así mismo, se ve que la mínima sustentación se obtiene en 50° , mientras que la máxima se alcanza en -55° . Los resultados de la velocidad para dichos ángulos y la posición en la que se encuentra la pieza se muestran en la Figura 10.

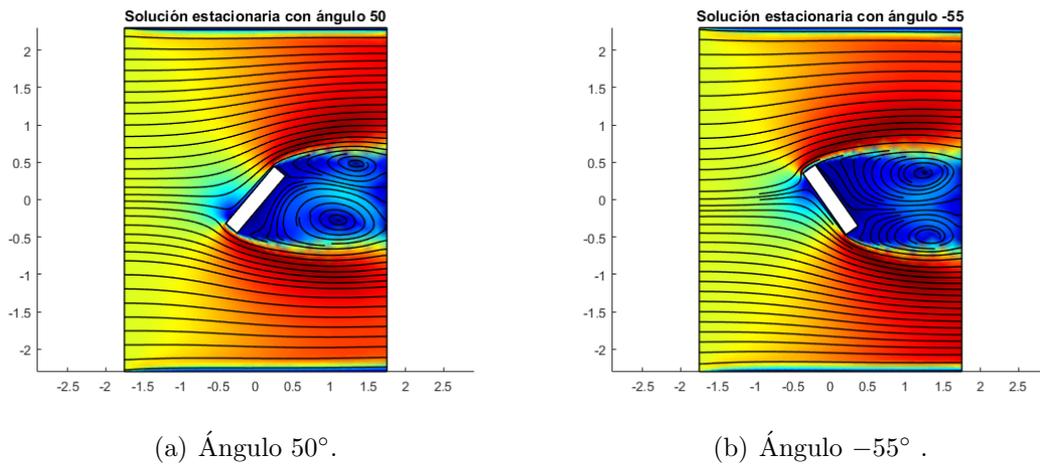


Figura 10: Solución del modelo 1 para los ángulos 50° y -55° .

Como se observa en la Figura 10(a) se tiene una fuerza de sustentación más baja cuando la parte delantera respecto a la dirección del viento de la pieza se encuentra mas baja respecto a la parte trasera. Éste resultado es lógico, puesto que, como se ha mencionado anteriormente, una sustentación baja implica una mayor tracción con la carretera y en esta disposición, al incidir el aire sobre la pieza esta se verá empujada hacia el suelo. Por el contrario, la pieza en la Figura 10(b) el aire elevaría hacia arriba la pieza al encontrarse la parte trasera mas baja respecto a la delantera.

■ Curva de sustentación modelo 2

En el segundo caso la curva de sustentación presenta el máximo -55° y 55° como se observa en la Figura 11.

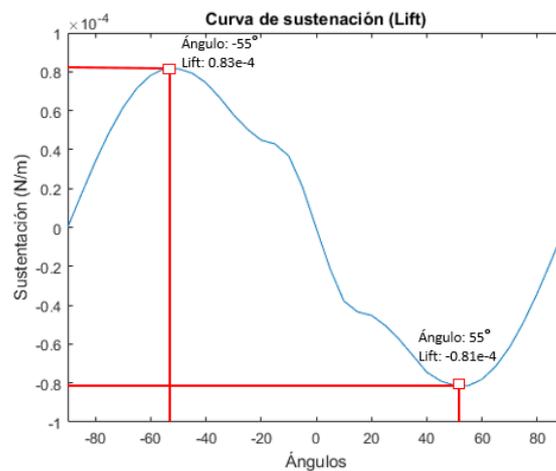


Figura 11: Valor máximo y mínimo de sustentación en el modelo 2.

Como se había visto en la Figura 8 estos ángulos son muy similares a los que se obtenían en el modelo 1. Por tanto, la disposición de la pieza con sustentación mínima y máxima son semejantes a la del caso anterior, como se puede observar en la Figura 12.

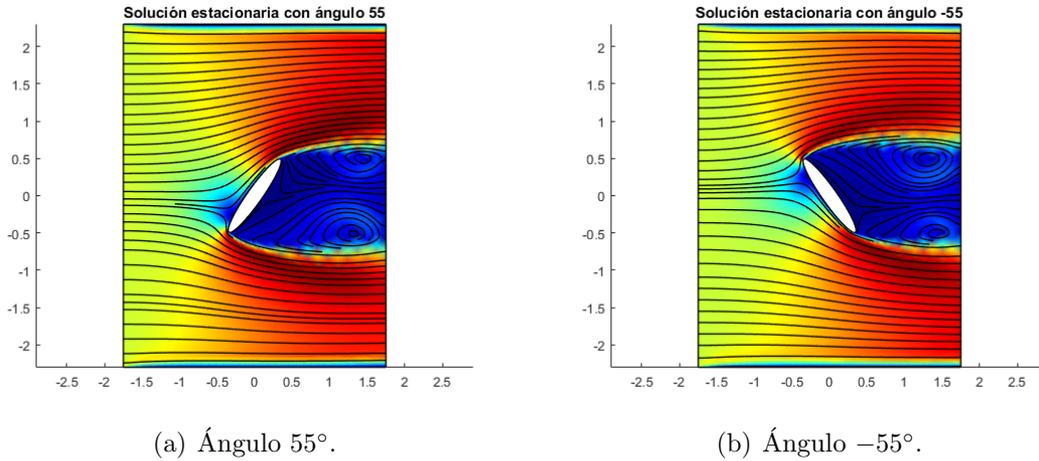


Figura 12: Solución del modelo 2 para los ángulos 55° y -55° .

3.2.2. Resultados del modelo 3

A la vista de los resultados anteriores, se ha realizado el mismo estudio para el tercer modelo. Las curvas de sustentación y resistencia aquí obtenida se muestra en la Figura 13.

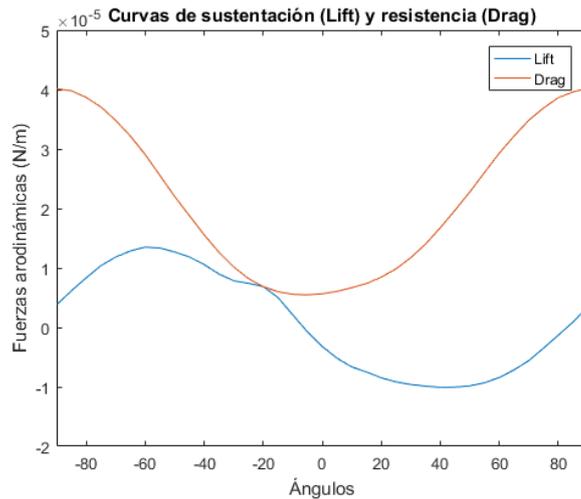


Figura 13: Curvas de cargas aerodinámicas del modelo 3.

Igual que en los casos anteriores se observa que el punto con menor resistencia, es

decir, el punto donde la pieza se opone en menor medida al movimiento, se alcanza cerca de los 0° , siendo 90° y -90° los ángulos en los que la oposición al movimiento es mayor

En el gráfico de la Figura 14 se observa que la mínima sustentación se alcanza en 40° , mientras que la máxima se tiene con un ángulo de -60° .

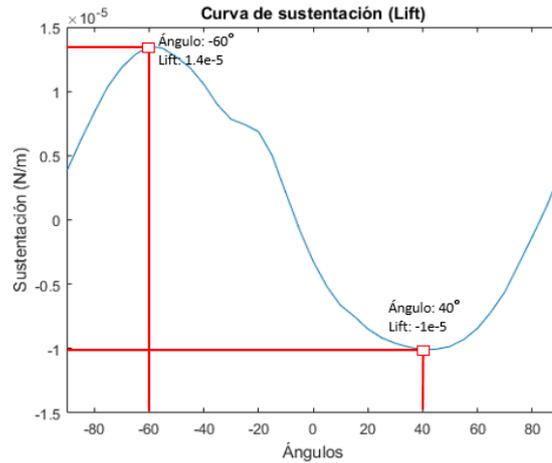


Figura 14: Curva de sustentación modelo 3.

De nuevo, los ángulos de ataque en los que se alcanzan los extremos son similares a los conseguidos en los modelos anteriores, como cabía esperar. Las soluciones de dichos ángulos se muestran en la Figura 15.

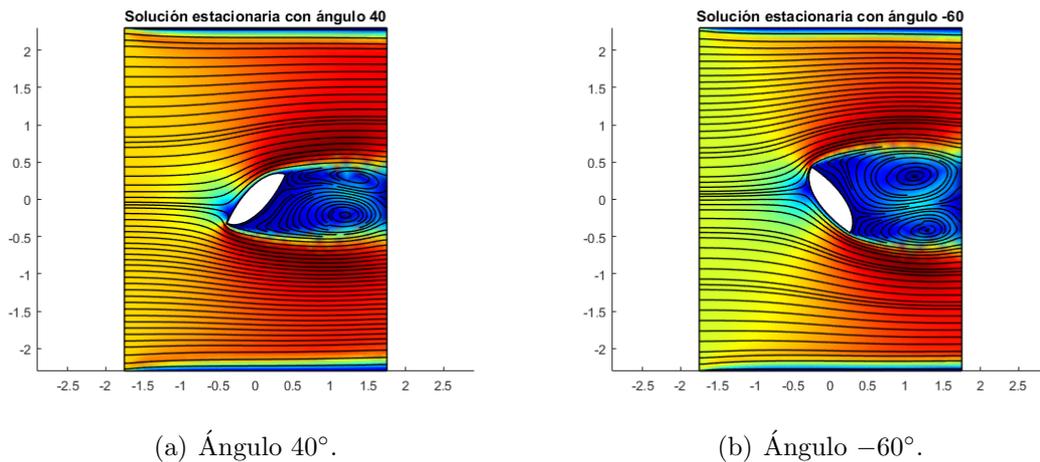


Figura 15: Solución del modelo 3 para los ángulos 40° y -60° .

En la Figura 15(a) volvemos a observar que la pieza recibe mayor empuje cuando

la parte delantera se encuentra mas baja que la parte trasera, mientras que en el caso contrario la pieza tiende a elevarse (Figura 15(b)).

Considerando los resultados obtenidos en los tres modelos, a la hora de optimizar el diseño del alerón de forma que este tenga una sustentación mínima cabe suponer que la pieza tendrá un ángulo de ataque similar a los logrados en estos estudios y, por tanto, una posición parecida independientemente de su forma.

4. Optimización del alerón trasero

Como se ha comentado en numerosas ocasiones el objetivo de este trabajo es diseñar un alerón trasero de forma que éste proporcione una mayor tracción al automóvil, lo que implica que tenga un valor de sustentación bajo. Para ello se ha empleado el algoritmo genético implementado en el software de optimización *Global Optimization Platform (GOP)*. Además, puesto que la población con la que se inicializa este algoritmo es de vital importancia para encontrar una solución buena se ha usado el algoritmo de mejora de esta población propuesto en el artículo [3].



Figura 16: *Global Optimization Platform (GOP)* <http://www.mat.ucm.es/~ivorra/soft.htm>.

En esta sección se describiremos las técnicas empleadas y las aplicaremos a nuestro caso concreto empleando el software GOP, analizando los resultados obtenidos.

4.1. Algoritmo genético

El algoritmo genético (*Genetic Algorithm, GA*) es una metaheurística que se engloba dentro de los algoritmos evolutivos. Estos algoritmos consisten en mejorar el valor de la función de costes aplicando procesos, basados en la evolución de las especies de Darwin, a un número finito de puntos del conjunto de soluciones factibles Ω , que se denomina población inicial (véase [3]).

El uso de estos algoritmos es muy útil en ingeniería ya que permite resolver problemas complejos de optimización global, siendo razonablemente costosos computacionalmente. Sin embargo, hay que tener en cuenta que estos algoritmos tienen una convergencia más lenta y peor precisión que otros métodos de optimización

Supongamos que tenemos el siguiente problema de optimización:

$$\min_{x \in \Omega} h_0(x) \quad (16)$$

El algoritmo genético consiste en dada una población inicial X^0 hacer que evolucione mediante una serie de operadores genéticos (selección, cruce, mutación y supervivencia) para obtener una mejor solución. Por tanto, para el algoritmo genético

es necesario definir, en primer lugar, el número de individuos N_p , y la población inicial definida por

$$X^0 = \{x_j^0 \in \Omega, j = 1, \dots, N_p\}.$$

Además, se debe establecer el número de generaciones que se quieren realizar, N_g , unas probabilidades de mutación, $p_m \in [0, 1]$, y cruce, $p_c \in [0, 1]$, y un $\epsilon \in \mathbb{R}$ que indica la precisión que se desea alcanzar.

Una vez definidos estos parámetros, partiendo de la población inicial se crean N_g de forma recursiva aplicando en cada iteración los procesos de selección, cruce, mutación y supervivencia. La población i -ésima se define como:

$$X^i = \{x_j^i \in \Omega, j = 1, \dots, N_p\} \text{ con } i = 1, \dots, N_g - 1,$$

siendo su expresión en forma matricial $X^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_{N_p}^i \end{pmatrix}$. Aplicando los operadores a

la población X^i mencionados anteriormente obtendremos la población X^{i+1} donde $i = 1, \dots, N_g - 1$. Veamos en que consisten dichos operadores.

- **Selección.** Se toman aleatoriamente N_p individuos de X^i con algunas repeticiones, siendo la probabilidad de ser escogido $\frac{h_0(x_j^i)}{\sum_{k=1}^{N_p} h_0(x_k^i)}$ para el individuo x_j^i . Definimos la matriz de selección S^i , de dimensión (N_p, N_p) , de forma que:

$$S_{jk}^i = \begin{cases} 1 & \text{si el individuo } k \text{ es seleccionado como individuo } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto, designando a la población que se le aplica la selección como $X^{i+1,1}$ se tiene que

$$X^{i+1,1} = S^i X^i$$

- **Cruce.** Cada par de individuos consecutivos, $2j - 1$ y $2j$ con $j = 1, \dots, N_p/2$ con probabilidad p_c intercambian datos en $X^{i+1,1}$. De esta forma, la matriz, denotada por C^i , es una matriz (N_p, N_p) cuyos elementos vienen dados por :

$$\begin{aligned} C_{2j-1, 2j-1}^i &= \lambda_1 & C_{2j-1, 2j}^i &= 1 - \lambda_1 \\ C_{2j, 2j-1}^i &= 1 - \lambda_2 & C_{2j, 2j}^i &= \lambda_2 \end{aligned}$$

con $\lambda_1, \lambda_2 = 1$ con probabilidad $1 - p_c$. Con lo que obtenemos

$$X^{i+1,2} = C^i X^{i+1,1}$$

- **Mutación.** Los individuos son perturbados con probabilidad p_m , siendo la matriz de mutación M^i , de dimensión (N_p, N) , que contiene en la columna j -ésima ceros si el individuo no es perturbado y un vector de mutación en caso de sufrir una mutación. Así,

$$X^{i+1,3} = M^i + X^{i+1,2}$$

- **Supervivencia.** Si un individuo de la población i -ésima tiene el valor más pequeño de la función de coste, este se copiará en la fila correspondiente si su valor se encuentra por debajo de todos los individuos de $X^{i+1,3}$. Obtendremos entonces la población X^{i+1} , siendo

$$X^{i+1} = (I_N - E^i)X^{i+1,3} + E^i X^i$$

, siendo E^i la matriz con todo 0 salvo el elemento $E^i(b, b) = 1$ si x_b^i tiene un valor menor de la función de coste que los individuos de la nueva población existente.

Por tanto, la generación $i + 1$ viene dada por la expresión

$$X^{i+1} = (I_N - E^i)(M^i + C^i S^i X^i) + E^i X^i \quad (17)$$

El algoritmo finaliza cuando se satisface el criterio de parada asociado a la precisión al menos para al menos un individuo de la población actual o si se han realizado las N_g iteraciones. La solución será tal que:

$$A_0(X^0) = \operatorname{argmin}\{h_0(x_j^i)/x_j^i \text{ con } i = 1, \dots, N_g, j = 1, \dots, N_p\}. \quad (18)$$

4.2. Algoritmo de mejora de la condición inicial

El algoritmo genético es muy sensible a la población inicial que se tome, ya que una falta de diversidad en la población inicial puede conllevar una convergencia a un mínimo local de h_0 . Además, con una buena inicialización se puede reducir el número de evaluaciones. Por ello, se ha empleado un algoritmo de mejora de esta población de partida propuesto en [3], denominado *Algoritmo multicapa (MLA)*, que se basa en la búsqueda lineal.

Consideremos que tenemos el problema general de optimización dado en (16) y V el espacio en el que podemos tomar la condición inicial (en nuestro caso $V = \Omega$). Suponiendo que A_0 es el algoritmo de optimización que vamos a emplear para resolver (16) con $A_0 : V \rightarrow \Omega$, asumimos que existe $v \in V$ tal que

$$h_0(A_0(v)) - \min_{x \in \Omega} h_0(x) < \epsilon$$

, para cierta precisión dada, ϵ . Entonces, esto se puede plantear como que queremos encontrar $v \in V$ tal que:

$$A_0(v) \in \operatorname{argmin}_{x \in \Omega} h_0(x)$$

.

Para resolver éste último problema empleamos el MLA. Así introducimos una función $h_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $h_1(v) = h_0(A_0(v))$. Esto se puede reescribir como encontrar $v \in V$ tal que $v \in \operatorname{argmin}_{w \in V} h_1(w)$.

Para resolver este último problema se introduce un algoritmo $A_1 : V \rightarrow V$ de forma que para cualquier $v_1 \in V$ nos devuelve $A_1(v_1) \in V$ siguiendo los siguientes pasos:

1. Tomamos aleatoriamente $v_2 \in V$.
2. Busca $v \in \operatorname{argmin}_{w \in O(v_1, v_2)} h_1(w)$ con $O(v_1, v_2) = \{v_1 + (v_2 - v_1)t, t \in \mathbb{R}\}$, usando el método de búsqueda lineal.
3. Devuelve v .

De esta forma, si se quisiera añadir i capas iteraríamos este proceso i veces siendo el algoritmo para el caso i -ésimo, A_i .

Para el caso concreto del algoritmo genético, sea $X_1^0 = \{x_{1,j}^0 \in \Omega, j = 1, \dots, N_p\}$, para cada i el algoritmo $A_i(X_1^0)$ realiza los siguientes pasos:

1. Para l desde 1 hasta $t_i \in \mathbb{N}$:
 - 1.1. Tomamos $o_l = A_{i-1}(X_l^0)$
 - 1.2. Calculamos $X_{l+1}^0 = \{x_{l+1,j}^0 \in \Omega, j = 1, \dots, N_p\}$ siendo $x_{l+1,j}^0 = x_{l,j}^0$ si $h_0(o_l) = h_0(x_{l,j}^0)$ y $x_{l+1,j}^0 = \operatorname{proj}_\Omega(x_{l,j}^0 - h_0(o_l) \frac{o_l - x_{l,j}^0}{h_0(o_l) - h_0(x_{l,j}^0)})$ en caso contrario.
2. Devuelve $\operatorname{argmin}\{h_i(o_m), m = 1, \dots, t_i\}$

Los valores de i y t_i se escogen dependiendo de la complejidad deseada.

Este algoritmo pretende mejorar uno a uno los individuos de la población inicial del algoritmo A_{i-1} , de forma que si existe una evolución significativa en la función de costes entre un individuo y el mejor elemento de A_{i-1} se crea un nuevo individuo cerca de éste, y si no se crea un nuevo individuo lejos de o_l .

4.3. Aplicación de los métodos y resultados

Empleando los métodos descritos en los apartados anteriores y la herramienta de Matlab, GOP, se ha optimizado el modelo 3 que se presentaba en la Figura 6(c), ya que es el que más se aproxima a un alerón trasero de un coche de Fórmula 1. Como hemos mencionado en la sección anterior la pieza del alerón son dos curvas de Bezier cuadráticas unidas, lo que se muestra en la Figura 17.

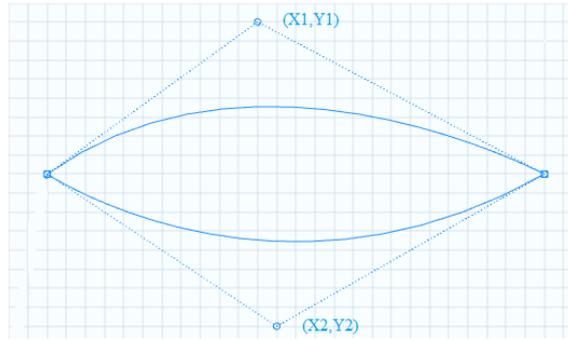


Figura 17: Polígono de Bezier.

Cada polígono se forma con tres puntos siendo el punto (X_i, Y_i) , con $i = 1$ en el polígono superior e $i = 2$ en el inferior, el que influye en su curvatura. Por ello, los parámetros X_1 , Y_1 , X_2 e Y_2 serán aquellos que se modificarán para alcanzar la forma del alerón óptima. Además, también se buscará el ángulo de rotación de la pieza que produzca una mínima sustentación, ya que, como hemos visto, el ángulo de ataque influye en el valor que toma esta fuerza.

Para el uso de GOP es necesario en primer lugar definir dos funciones *userinit.m* y *userfun.m* donde se introducen las condiciones iniciales y la función a optimizar, en este caso el código de COMSOL en Matlab que nos devuelve el valor de la fuerza de sustentación. Estas funciones se muestran en el Anexo. Además, como se ha mencionado en el apartado del algoritmo genético se deben definir el número de individuos y de generaciones que se desean, así como las probabilidades de mutación y cruce. Además, en este caso se ha empleado una única capa en el algoritmo de búsqueda lineal multicapa. Todas las opciones escogidas en GOP vienen dados en la Figura 18.

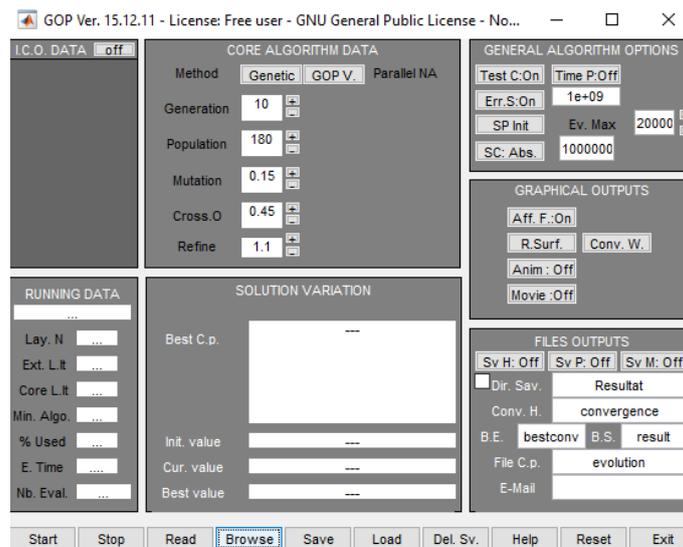


Figura 18: Opciones de GOP.

Como se observa en la imagen se ha escogido un tamaño de población de 180 individuos y 10 generaciones, tomando una probabilidad de mutación baja, 15 %, y una probabilidad de cruce de 45 %. Además, en las opciones generales del algoritmo se han escogido valores muy altos para el número de evaluaciones y como criterio de parada un valor lo suficientemente pequeño para que el algoritmo no pare hasta que no encuentre un solución lo suficientemente pequeña o realice todas las iteraciones.

La solución óptima obtenida con el uso de éste método corresponde a una pieza con puntos $(0,56, -0,36)$ y $(0,59, -0,7)$, y un ángulo de ataque de $42,92^\circ$, siendo la sustentación igual a $-3,0205764 \times 10^{-5}$ N/m. En la Figura 19 se muestra la pieza, y la solución para las ecuaciones de Navier-Stokes (magnitud de velocidad (m/s) y líneas de flujo).

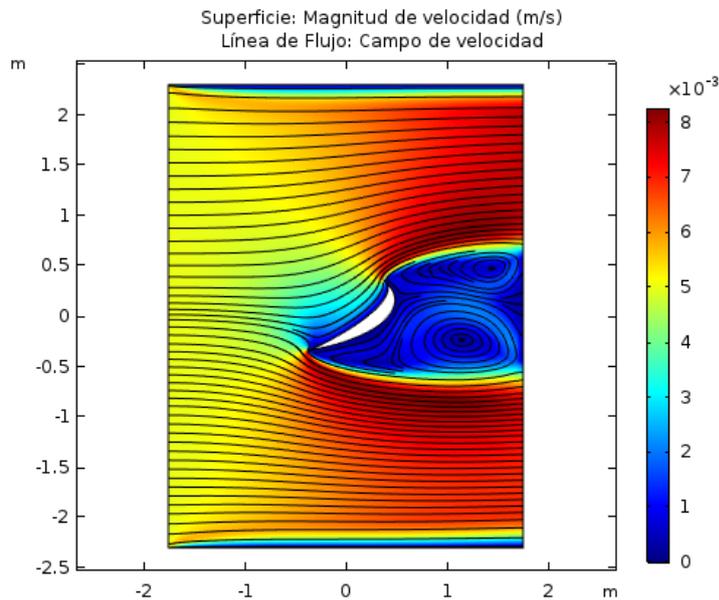


Figura 19: Solución 1.

Cabe destacar que el ángulo de la pieza es similar a los que habíamos obtenido en los modelos anteriores, como se esperaba, ya que de este modo el alerón se ve empujado por la fuerza del aire y crea una mayor tracción. Además, si comparamos la pieza con el perfil de un alerón trasero real, como el que se muestra en la Figura 20, se puede observar que tienen una forma muy similar.

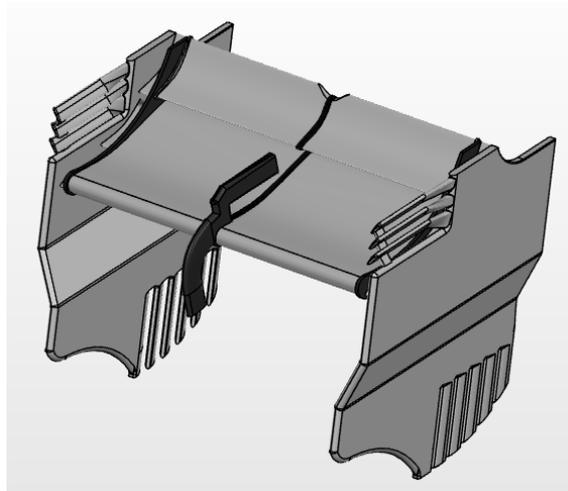


Figura 20: Diseño de un alerón trasero de un F1.

Para finalizar, con el objetivo de mejorar la solución obtenida se ha probado el algoritmo considerando ahora la población inicial la anterior solución y empleando ahora 20 generaciones en lugar de 10. Se ha logrado un valor para la sustentación de $-3,0869 \times 10^{-5}$ N/m. Dicha solución se muestra en la Figura 21.

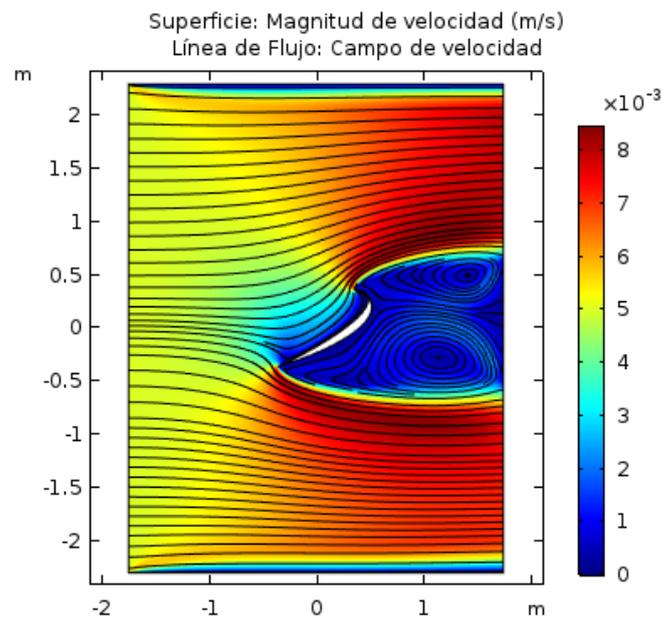


Figura 21: Solución 2.

Una vez más el ángulo de ataque, $45,69^\circ$, es muy próximo a todos los conseguido a lo largo de este trabajo. Como en el caso anterior volvemos a lograr un modelo semejante al caso real, alcanzando así nuestro objetivo.

5. Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido buscar el diseño óptimo de un alerón trasero de Fórmula 1 de forma que este le aporte una buena tracción al automóvil, aumentando así la seguridad del mismo, empleando el software de simulación numérica, COMSOL, y el algoritmo genético con un algoritmo de mejora de la población inicial mediante la herramienta de optimización global de Matlab, GOP.

Gracias al estudio inicial realizado con los tres modelos podemos concluir que, independientemente del diseño de la pieza, el ángulo de ataque que genera una mínima sustentación debe encontrarse entre 40° y 60° , es decir, la pieza debe tener la parte delantera mas baja que la parte trasera. Este resultado es lógico puesto que si observamos la posición de la pieza para dichos ángulos, se puede apreciar que el aire empuja a la pieza en mayor medidas. En el caso opuesto, cuando estos ángulos son negativos, el aire provocaría una elevación en el cuerpo.

Por otro lado, a la vista de los resultados obtenidos tras la optimización se observa que la metodología aplicada en este problema es de interés, ya que el diseño de la pieza optimizada es prácticamente igual al diseño real de un alerón trasero que se emplean en las competiciones de Fórmula 1.

Debido a las capacidades del software de simulación numérica utilizado se ha tenido que considerar el aire como un fluido laminar. Sin embargo, como futuro trabajo se propone repetir los estudios realizados a lo largo de este trabajo considerando el flujo de aire turbulento, de forma que nos aproximemos más al caso real. Cabe esperar que la solución en ese caso no difiera en gran medida del resulta aquí obtenido, puesto que las curvas de sustentación de flujos laminares y turbulentos son similares, como se ha visto en la Sección 2.

Así mismo, sería interesante, partiendo del perfil obtenido en este trabajo, buscar el diseño óptimo del alerón considerando el modelo en tres dimensiones. Además, en un estudio más avanzado podría desarrollarse un diseño del alerón incluyendo el sistema DRS (*Drag Reduction System*), que permita al monoplaza reducir las resistencia, aumentando su velocidad.

Referencias

- [1] CHORIN, A.J. Y MARSDEN, J.E., “*A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*”, Springer-Verlag, 1980.
- [2] CONSTANTIN, P. Y FOIAS, C., “*Navier-Stokes equations*”, Chicago Lectures in Mathematics, Univ. of Chicago press, Chicago, 1988.
- [3] IVORRA, B., MOHAMMADI, B. Y RAMOS, Á.M., “*A multi-layer line search method to improve the initialization of optimization algorithms*”, European Journal of Operational Research, 247(3), pp.711-720, 2015.
- [4] IVORRA, B., MOHAMMADI, B. Y RAMOS, A.M., “*Global Optimization Platform. User Guide(Ver. 15.12.11)*”.
- [5] MESEGUER, J. Y SANZ, A. , “*Aerodinámica Básica*”, 2ª ed., Garceta, Madrid, 2011.
- [6] MORRISON, F. , “*Calculating Fluid Forces on Surfaces in Comsol 5.1*”, Michigan Technological University, 2015.
- [7] RAMOS, Á.M., “*Introducción al análisis matemático del método de elementos finitos*”, Editorial Complutense, 2012.
- [8] WHITE, F., “*Mecánica de fluidos*”, McGraw-Hill, Madrid, 2007.
- [9] “*How do I compute lift and drag*”.URL: <https://www.comsol.com/blogs/how-do-i-compute-lift-and-drag/>. Última visita: 01/09/2017.
- [10] “*Laminar vs Turbulent Flow Over Airfoils*”.URL: http://www.symscape.com/blog/laminar-vs-turbulent-flow-over-airfoils#at_pco=smlrebh-1.0&at_si=56c4a0ad0a798a79&at_ab=per-2&at_pos=1&at_tot=auto. Última visita: 01/09/2017.
- [11] “*The drag equation*”.URL: <https://www.grc.nasa.gov/www/K-12/airplane/drageq.html>. Última visita: 03/09/2017.

Anexo

A. Códigos de Matlab

En este apéndice se muestran los códigos de Matlab empleados para la obtención de los resultados.

A.1. Código para calcular la pieza con sustentación mínima y máxima

En este apartado se muestra el código empleado para calcular el ángulo con mayor y menor sustentación. Para el modelo 3 se han añadido además las coordenadas de los puntos de los polígonos de Bezier cuadráticos.

```
rot = -90:5:90; %Angulos de ataque
rotw = []; %Angulos donde no hay convergencia
Lf = zeros(length(rot),1); %Vector de Lift
Dr = Lf; %Vector de Drags

i = 1;
while i <= length(rot)
    try
        [out, lift, drag, v] = modelo(rot(i));
        Lf(i) = lift;
        Dr(i) = drag;
        i = i+1;
    catch
        rotw = [rotw rot(i)];
        rot(i) = [];
        Lf(i) = [];
        Dr(i) = [];
    end
end
lfmin1 = Lf(Lf==min(Lf)); %Sustentacion minima
lfmax1 = Lf(Lf==max(Lf)); %Sustentacion maxima
amin1 = rot(Lf==min(Lf)); %Angulo de minima sustentacion
amax1 = rot(Lf==max(Lf)); %Angulo de maxima sustentacion
display([lfmin1, amin1, lfmax1, amax1])
```

Código 1: Código para el ángulo de ataque

A.2. Funciones de GOP

EA continuación se muestran los códigos de las funciones necesarias para el uso de GOP, *userinit.m* y *userfun.m*.

Función de las condiciones iniciales.

```

ndim=5;
%&1
xmin(1) = -1;xmax(1) = 1;
%&1
xmin(2) = -0.7;xmax(2) = 0.7;
%&2
xmin(3) = -1;xmax(3) = 1;
%&2
xmin(4) = -0.7;xmax(4) = 0.7;
%Angulo
xmin(5)= -90;xmax(5)= 90;

vinit=zeros(1,ndim);
for i=1:ndim
    x=rand;
    vinit(i)=xmin(i)*x+(1-x)*xmax(i);
end

```

Código 2: Función userinit.m

Función objetivo a optimizar.

```

function J = userfunc(x)
%Coordenadas de los puntos de las curvas cuadraticas de Bezier
x1 = x(1);y1 = x(2);x2 = x(3);y2 = x(4);
%Angulo de ataque
alpha = x(5);

try
    [out, lift, drag, v] = modelo3.2(alpha, x1, y1, x2, y2);
    J = lift;
catch
    disp('Error en el codigo de Comsol')
    J = 1.e9;
end
end

```

Código 3: Función userfun.m