MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 1996

1 Se considera una matriz simétrica A cuyos menores principales son todos no nulos. Demostrar que, en la factorización LU de A, cada columna de L es múltiplo de la correspondiente fila de U. Explicar en qué puede facilitar esto el cálculo de la factorización LU de una matriz simétrica.

2 Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante.

$a)$ Se considera la descomposición $A = M - N$ con M y N verificando

$$m_{ii} = a_{ii}$$

y

$$|m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (|m_{ij}| + |n_{ij}|)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ es convergente.

$b)$ Demostrar, a partir de $a)$, la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por bloques para matrices de diagonal estrictamente dominante.

$c)$ Probar que toda matriz de diagonal estrictamente dominante admite una descomposición $M - N$ como en $a)$ verificando, además, que los elementos m_{ij} y n_{ij} son no nulos cuando $i \neq j$ en el caso de que $a_{ij} \neq 0$.

3 Se considera la ecuación $x^2 - 1 - \operatorname{sen} x = 0$.

$a)$ Probar que dicha ecuación tiene, al menos, una raíz positiva.

$b)$ Encontrar un intervalo en el que la iteración

$$x_n = \sqrt{1 + \operatorname{sen} x_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}$$

converja, para cualquier valor inicial x_0 de dicho intervalo, a una raíz positiva de la ecuación anterior. ¿Cuántos pasos deben darse, a partir de $x_0 = \frac{\pi}{2}$, para obtener una aproximación de la raíz con un error inferior a la milésima?

$c)$ Hallar un intervalo en el que se pueda aplicar el Método de Newton para aproximar dicha raíz (comprobando las hipótesis de convergencia) y calcular el valor de x_1.

4 Dados dos números, $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, se considera el polinomio

$$P(x) = x^3 - bx^2 + ax - ab.$$

$a)$ Encontrar una relación entre a y b que garantice que la sucesión de Sturm de P tenga sólo tres términos $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$.

$b)$ Decidir, en el caso en que a y b verifiquen la relación anterior, el número de raíces reales y distintas de P. ¿Son simples?

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 1996

1 Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante. Probar que A admite factorización LU.

2 Sea A una matriz hermítica definida positiva y $A = D - E - F$ una descomposición $D - E - F$ por bloques de A.

$a)$ Demostrar que el método de Jacobi por bloques para A está bien definido.

$b)$ Probar que si $B = 2D - A$ es definida positiva, el método de Jacobi por bloques para A es convergente.

3 Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante. Se considera la descomposición $A = M - N$ con $M = D - F$ y $N = E$, siendo $A = D - E - F$ la descomposición $D - E - F$ por puntos de la matriz A. Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ de A es convergente.

4 Se considera la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.

$a)$ Probar que dicha ecuación tiene, en el intervalo $[1, 2]$, una única raíz.

$b)$ Encontrar un intervalo en el que la iteración

$$x_n = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_{n-1}^3},\ n \in \mathbb{N}$$

converja, para cualquier valor inicial x_0 de dicho intervalo, a la raíz del apartado anterior.

5 Se considera la ecuación

$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0.$$

$a)$ Separar, en intervalos de longitud uno, todas las raíces reales de la ecuación anterior.

$b)$ Hallar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar una raíz real de dicha ecuación (comprobando las hipótesis de convergencia) y calcular el valor de x_1.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 1997

1 a) Hallar el valor de la aproximación que se obtiene al calcular

$$\int_{-4}^{4} |x-2|^3(1-\operatorname{sen}\pi x)dx$$

mediante la *fórmula de Simpson cerrada compuesta* para 4 subintervalos.

b) Determinar los valores de las constantes $\alpha,\ \beta$ y γ que hacen que la fórmula de integración

$$\int_{0}^{3h} f(x)dx \simeq \alpha f(0) + \beta f(h) + \gamma f(3h) \qquad (h>0)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?.

2 Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante y $A = D - E - F$ su descomposición $D - E - F$ por puntos. Se considera $0 \leq w \leq 1,\ M = D - wE - wF$ y $N = M - A$.

a) Demostrar que el método asociado a la descomposición $Mx = Nx + b$ está bien definido.

b) Probar que dicho método es convergente.

c) Deducir la convergencia del *método de Jacobi* para matrices de diagonal estrictamente dominante.

3 Consideremos el polinomio

$$P(x) = 9x^3 + 9x^2 + 9\lambda x + \lambda$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Estudiar, en función del parámetro λ, el número de raíces (reales y complejas) de la ecuación $P(x) = 0$.

b) ¿Para qué valores de λ las raíces de P son múltiples?. Hallar todas las raíces de P para esos valores de λ.

c) Fijado $\lambda = \sqrt{3}$ encontrar un intervalo donde pueda aplicarse el *método de Newton* para calcular una raíz negativa de P. Determinar los dos primeros términos de la sucesión definida por dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 1997

---

1 [3 puntos] a) Hallar el valor que se obtiene al aplicar la *fórmula de Simpson cerrada compuesta* para $m = 1001$ subintervalos a la integral

$$\int_{-1001}^{1001} |x \cos \pi x|^3 dx.$$

b) Si $T_k(x)$ denota el polinomio de Tchebychev de orden $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, probar que

$$T_{20}\left(T_5(7)\right) = T_{100}(7).$$

(**Ind**: demostrar que, de hecho, para todo $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica

$$T_n\left(T_m(x)\right) = T_{nm}(x) \; \forall x \in \mathbb{R}).$$

2 [3 puntos] Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante y $A = D - E - F$ su descomposición $D - E - F$ por puntos. Se consideran $\alpha, \beta \in [0, 1],\; M = D - \alpha E - \beta F$ y $N = M - A$.

a) Demostrar que el método asociado a la descomposición $Mx = Nx + b$ está bien definido.

b) Probar que dicho método es convergente y deducir la convergencia de los métodos de *Gauss–Seidel* y *Jacobi* por puntos para matrices de diagonal estrictamente dominante.

c) Demostrar que el método también es convergente si se considera la descomposición $D - E - F$ por bloques de A.

3 [1 punto] Demostrar que la factorización LU de una matriz también es única si se impone que los elementos diagonales de U valgan uno.

4 [3 puntos] Consideremos el polinomio

$$P(x) = x^3 + \sqrt{6}x^2 + 2x + \lambda$$

donde $\lambda > 0$.

a) Estudiar, en función del parámetro λ, el número de raíces (reales y complejas) de la ecuación $P(x) = 0$.

b) ¿Para qué valores de λ las raíces de P son múltiples? Hallar todas las raíces de P para esos valores de λ.

c) Fijado $\lambda = 1$ encontrar un intervalo donde pueda aplicarse el *método de Newton* para calcular una raíz negativa de P. Determinar los dos primeros términos de la sucesión definida por dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 1997

1 [1'5 puntos] Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ puntos distintos del intervalo $[a,b]$. Si P y Q son, respectivamente, los polinomios de interpolación de f y g en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

a) ¿es $\alpha P + \beta Q$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ el polinomio de interpolación de $\alpha f + \beta g$ en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$?

b) ¿es PQ el polinomio de interpolación de fg en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$?

2 [2'5 puntos] Aplicar la *fórmula de Simpson cerrada compuesta* a la integral

$$\int_1^x \frac{dt}{t}$$

para obtener una aproximación del logaritmo neperiano de 2 determinando el número m de subintervalos necesario para que el error cometido en esa aproximación sea inferior a 10^{-3}. (**Indicación**: el error en la fórmula de Simpson compuesta viene dado por

$$E_{(a,b)}(f) = (b-a)\frac{h^4}{180}f^{iv)}(\theta) = \frac{(b-a)^5}{2880m^4}f^{iv)}(\theta)).$$

3 [3 puntos] a) Dada una matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

sea δ_k el menor principal de orden k de A $(k = 1, 2, \ldots, n)$ donde $\delta_0 = 1$. Probar que

$$\delta_1 = b_1 \text{ y } \delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_k c_{k-1}\delta_{k-2},\ k = 2, 3, \ldots, n.$$

b) Consideremos, en particular, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2+\lambda_1 & 1 & & & \\ 1 & 2+\lambda_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2+\lambda_{n-1} & 1 \\ & & & 1 & 2+\lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$.

1) Probar que si $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, entonces el método de Jacobi por puntos para A es convergente.

2) Demostrar que si $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, entonces el método de relajación para A es convergente. (**Indicación**: utilizar el apartado a) para probar que

$$\delta_k > \delta_{k-1} > \cdots > \delta_0,\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

4 [3 puntos] a) Aplicar el Teorema del Punto Fijo para aproximar una raíz ξ de la ecuación

$$x^2 + \frac{\operatorname{sen} x}{2} - 1 = 0$$

en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ demostrando las hipótesis de convergencia del método y determinar una sucesión $\{x_n\}_n$ que converja a ξ.

b) ¿Qué términos de la sucesión anterior distan de ξ una cantidad inferior a 10^{-3}?.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 1998

1 [1 punto] Determinar la constante $A \in \mathbb{R}$ y los puntos $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ para que la fórmula de integración

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = A\,(f(x_1) + f(0) + f(x_2))$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?.

2 [2 puntos]

a) Probar que toda matriz de diagonal estrictamente dominante admite factorización LU.

b) Demostrar que toda matriz simétrica $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n$ de diagonal estrictamente dominante verificando

$$a_{ii} > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

admite factorización de Cholesky.

3 [2 puntos] Se considera una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

verificando

$$a_{11} \neq 0 \text{ y } a_{22} \neq 0.$$

a) Demostrar que los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel para A convergen o divergen simultáneamente. (**Indicación**: *considerar los autovalores de las matrices de los métodos*).

b) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre los elementos de la matriz A para que ambos converjan. ¿Cuál lo hace más rápidamente?.

4 [2'5 puntos] Se considera la ecuación

$$(x + 1)\tan(x) - 1 = 0.$$

a) Probar que la ecuación anterior tiene infinitas raíces positivas y determinar intervalos que contengan a cada una de ellas.

b) Si ξ es la menor raíz positiva, demostrar que se puede aproximar mediante el método del punto fijo.

c) Comenzando en $x_0 = 0$ construir una sucesión $\{x_n\}_n$ que converja a ξ. Determinar un valor de $n \in \mathbb{N}$ a partir del cual todos los términos de la sucesión distan de ξ una cantidad inferior a 10^{-4}. Justificar la respuesta.

5 [2'5 puntos] Dada la ecuación algebraica:

$$x^5 + x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 13x - 10 = 0$$

a) Determinar el número de raíces positivas.

b) Encontrar una raíz racional negativa.

c) Hallar el número de raíces reales y complejas de la ecuación anterior.

d) Determinar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva más pequeña, así como los dos primeros términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que determina dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 1998

---

1 [2 puntos] Determinar los valores de las constantes $A,\ B$ y de los puntos $x_0,\ x_1 \in [-1,1]$ para que la fórmula de integración

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \sim Af(x_0) + Bf(x_1)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?.

2 [3 puntos] Sea $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma $A = M - N$ siendo $M \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible y sea $B = M^{-1}N$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ se definen las matrices

$$M_\alpha = (1+\alpha)M,\ N_\alpha = M_\alpha - A \text{ y } B_\alpha = M_\alpha^{-1}N_\alpha.$$

a) Demostrar que

$$B_\alpha = \frac{1}{1+\alpha}(B + \alpha I).$$

b) Probar que

$$\lambda \in \mathrm{sp}(B) \Leftrightarrow \frac{\lambda+\alpha}{1+\alpha} \in \mathrm{sp}(B_\alpha)$$

(**Indicación**: probar que λ y $\dfrac{\lambda+\alpha}{1+\alpha}$ tienen asociados los mismos autovectores).

c) Si los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ de B verifican

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n < -1,$$

determinar para qué valores de $\alpha > 0$ el método iterativo definido por la matriz B_α es convergente.

3 [2'5 puntos] Dado $\alpha > 0$ se considera la sucesión

$$x_n = \sqrt{\alpha + x_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}.$$

a) Encontrar un intervalo I en el que la sucesión $\{x_n\}_n$ sea convergente para cualquier dato inicial $x_0 \in I$ y calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

b) Hallar el valor de

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots}}}$$

4 [2'5 puntos] Dados $\lambda,\ \mu > 0$ se considera el polinomio

$$P(x) = x^3 + \lambda x^2 + \frac{\lambda^2}{3}x + \mu.$$

a) Hallar la secuencia de Sturm para el polinomio $P(x)$ distinguiendo los diversos casos que pueden presentarse en función del valor de los parámetros λ y μ.

b) Determinar, en función de λ y μ, el tipo de raíces (reales y complejas) que tiene $P(x)$.

c) Encontrar intervalos y valores iniciales en los que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar las raíces reales de la ecuación

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = 0$$

determinando los dos primeros términos de la sucesión que define dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 1998

1 [2 puntos] a) Determinar los valores de λ y μ para que

$$S(x) = \begin{cases} \lambda x(x^2+1), & 0 \leq x \leq 1 \\ -\lambda x^3 + \mu x^2 - 5\lambda x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

sea una función spline cúbica.

b) Con los valores de λ y μ obtenidos en el apartado anterior, ¿puede ser S una función spline cúbica de interpolación de la función

$$f(x) = x^2, \; 0 \leq x \leq 2$$

respecto de la partición $\Delta = \{0, 1, 2\}$?.

2 [2 puntos] Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz con todos sus menores principales no nulos. Demostrar que existen matrices $B \in \mathcal{M}_n$ triangular inferior y $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ triangular superior con

$$c_{ii} = 1, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

tales que $A = BC$. ¿Es única la factorización anterior?.

3 [2 puntos] Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz simétrica definida positiva y la descomposición $A = D - E - F$ por puntos de A. Demostrar que si la matriz $2D - A$ es definida positiva entonces el método de Jacobi por puntos para A es convergente.

4 [2 puntos] a) Demostrar que la ecuación

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0$$

tiene una única raíz positiva.

b) Encontrar un intervalo y un valor inicial en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva de la ecuación anterior determinando los dos primeros términos de la sucesión que define dicho método.

5 [2 puntos] Aplicar el Método del Punto Fijo para aproximar la menor raíz positiva de la ecuación

$$\cos x + 3x^2 - 6x = 0$$

determinando una sucesión que converja a dicha raíz y justificando las hipótesis de convergencia.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 1999

1 [1 punto] Determinar las constantes $A,\ B \in \mathbb{R}$ y el punto $\xi \in [0,2]$ para que la fórmula de integración

$$\int_0^2 f(x)dx \simeq A\left(f(0)+f(2)\right)+Bf(\xi)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?.

2 [3'5 puntos] Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ descompuesta en bloques de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right) \tag{1}$$

donde las matrices A_1 y A_4 son inversibles.

a) Demostrar que

$$\det A = \det A_1 \det\left(A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2\right).$$

(**<u>Indicación</u>**: utilizar el método de eliminación gaussiana por bloques para anular el bloque ocupado por A_3).

b) Utilizar el apartado a) para probar que para todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se verifica que

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \lambda^2 A_1 & A_2 \\ \hline \lambda^2 A_3 & \lambda^2 A_4 \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} \lambda^2 A_1 & \lambda A_2 \\ \hline \lambda A_3 & \lambda^2 A_4 \end{array}\right).$$

c) Se considera la descomposición $D-E-F$ por bloques de la matriz A asociada a la descomposición (1) y los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por bloques correspondientes. Demostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se verifica que

$$\lambda^n \det(-D) P_{\mathcal{J}}(\lambda) = \det(E-D) P_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2)$$

donde $P_{\mathcal{J}}$ y $P_{\mathcal{L}_1}$ son, respectivamente, los polinomios característicos de las matrices de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel.

d) Encontrar la relación existente entre $\varrho(\mathcal{J})$ y $\varrho(\mathcal{L}_1)$. Deducir que ambos métodos convergen o divergen simultáneamente.

e) Si la matriz A es, además, hermítica y definida positiva, demostrar que los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel asociados a esta descomposición por bloques son convergentes. ¿Cuál lo hace más rápidamente?.

3 [3'5 puntos] Se considera la ecuación

$$x^3 + x - 1 = 0. \tag{2}$$

a) Probar que la ecuación anterior tiene una única raíz real.

b) Encontrar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar dicha raíz y determinar los dos primeros términos de la sucesión que define ese método.

c) Comprobar que la ecuación (2) puede escribirse de forma equivalente como $f(x) = x$ siendo

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Probar que $f : [0,1] \to [0,1]$ y que para cualquier valor inicial $x_0 \in [0,1]$ la sucesión definida como

$$x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}^2},\ n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

es convergente.

d) Si tomamos $x_0 = 1$ y denotamos por

$$\xi \doteq \lim_{n\to+\infty} x_n$$

determinar qué términos x_n de la sucesión anterior distan de ξ una cantidad inferior a 10^{-4}.

e) Demostrar que la sucesión definida en (3) también converge a ξ para cualquier valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$.

4 [2 puntos] Determinar de forma exacta todas las raíces de la ecuación algebraica

$$2x^3 - 3\pi^2 x + \sqrt{2}\pi^3 = 0.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 1999

1 [2 puntos] Sea A una matriz $n \times n$ inversible y que tiene una factorización $A = LU$ con L triangular inferior y $l_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, y U triangular superior.

$a)$ Probar que A admite una factorización $A = \tilde{L}\tilde{U}$ con $\tilde{L}$ triangular inferior y $\tilde{U}$ triangular superior y $\tilde{u}_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. ¿Es única tal factorización?

$b)$ Demostrar que si además A es simétrica entonces las columnas de L son múltiplos de las filas de U.

2 [3 puntos] Dado el sistema $Au = b$ con $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$, a partir de un vector $u^0 \in \mathbf{V}$ se considera el método iterativo asociado

$$u^k = Bu^{k-1} + b, \; k \in \mathbb{N}$$

donde $B = I - A$.

$a)$ Demostrar que si $\|B\| < 1$ para alguna norma matricial subordinada, entonces se tiene la siguiente cota del error

$$\left|\left|u^k - u\right|\right| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \left|\left|u^1 - u^0\right|\right|.$$

$b)$ Probar que si A verifica que

$$a_{ii} = 1 > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{o} \quad a_{jj} = 1 > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|,$$

entonces el método es convergente.

$c)$ Aplicar si es posible los resultados anteriores al sistema

$$\begin{aligned}
10u_1 + 5u_2 \qquad\qquad &= 6 \\
5u_1 + 10u_2 - 4u_3 \qquad &= 25 \\
-4u_2 + 8u_3 - u_4 &= -11 \\
-u_3 + 5u_4 &= -11
\end{aligned}$$

para determinar el número de iteraciones necesario para aproximar la solución con un error inferior a 10^{-4} (usar $||\cdot||_\infty$ y tomar $u^0 = 0$).

3 [3 puntos]

$a)$ Dada la fórmula de cuadratura

$$\int_2^5 f(x)dx \simeq A\left(f(x_0) + f(x_1)\right),$$

calcular A, x_0 y x_1 para que sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es dicho grado? ¿Corresponde esta fórmula con alguna de las estudiadas?

$b)$ Aplicar la fórmula obtenida para estimar

$$\int_2^5 \frac{1}{\ln x} dx. \tag{4}$$

$c)$ Determinar el número de subintervalos necesarios para que el error cometido en el cálculo de (4) por la fórmula compuesta de Newton–Côtes abierta de 2 puntos sea inferior a 10^{-3}.

4 [2 puntos] Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ se considera la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lambda x(1 - x).$$

$a)$ Probar que si $0 \leq \lambda \leq 4$, f transforma el intervalo $[0, 1]$ en sí mismo.

$b)$ Demostrar que si $0 \leq \lambda \leq 1$, la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a $\xi = 0$ para cualquier valor inicial $x_0 \in [0, 1]$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 1999

1 **[1 punto]** Se considera la función $f(x) = \operatorname{sen} \pi x - x$ y los nodos $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

a) Hallar el polinomio de interpolación $P(x)$ de la función $f(x)$ en dichos nodos.

b) Determinar el error que se comete cuando se aproxima

$$\int_0^1 f(x)dx$$

mediante la fórmula de Simpson (cerrada).

2 **[3 puntos]** Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz que admite factorización LU y δ_k el menor principal de orden k de la matriz A, $k = 1, 2, \ldots, n$.

a) Si A es inversible demostrar que

$$\delta_k \neq 0, \; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Probar con un contraejemplo de una matriz 2×2 que (5) no se verifica, en general, si A no admite factorización LU.

b) Si A no es inversible probar que existe $k_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$$\delta_k = 0, \; k = k_0, k_0 + 1, \ldots, n.$$

3 **[3 puntos]** Se considera el sistema lineal $Ax = d$ para una matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

de diagonal estrictamente dominante. Demostrar los siguientes resultados:

a) $||x||_\infty \leq c(A)\, ||d||_\infty$ siendo

$$c(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{|b_i| - |a_i| - |c_i|} \right\} \qquad (a_1 = c_n = 0).$$

b) $\varrho(\mathcal{L}_1) \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left\{ \dfrac{|c_i|}{|b_i| - |a_i|} \right\}$ donde $\mathcal{L}_1$ es la matriz del método de Gauss–Seidel.

4 **[3 puntos]** Se considera la ecuación

$$3x(1+x)^3 = 4\left((1+x)^3 - 1\right).$$

a) Probar que la ecuación anterior tiene una única raíz real positiva ξ.

b) Encontrar un intervalo y un valor inicial donde el método de Newton sea convergente a la raíz ξ, justificando las hipótesis de convergencia.

c) Determinar un intervalo en el que se pueda aplicar el teorema del Punto Fijo para aproximar dicha raíz e indicar el número de iteraciones necesario para que el error cometido sea inferior a 10^{-4}.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2000

1 [1'5 puntos]

a) Determinar el valor que se obtiene al aproximar la integral

$$\int_0^{1000} e^{\operatorname{sen} \pi x} dx \tag{6}$$

mediante la fórmula de Newton–Côtes cerrada de 1001 puntos.

b) Determinar un número m de subintervalos para que el error cometido al aproximar la integral (6) mediante la regla de los trapecios (fórmula del trapecio cerrada compuesta) sea inferior a la décima.

2 [3 puntos] Dado $\gamma \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ se consideran las matrices tridiagonales

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \text{ y } A(\gamma) = \begin{pmatrix} b_1 & \frac{c_1}{\gamma} & & & \\ \gamma a_2 & b_2 & \frac{c_2}{\gamma} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma a_{n-1} & b_{n-1} & \frac{c_{n-1}}{\gamma} \\ & & & \gamma a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

a) Llamando $\delta_0 = 1$ y δ_k al menor principal de orden k de A, $k = 1, 2, \ldots, n$, probar que

$$\delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2}, \ k = 2, 3, \ldots, n.$$

b) Demostrar que

$$\det(A(\gamma)) = \det(A).$$

Para ello probar que, si se denota por $\delta_0(\gamma) = 1$ y $\delta_k(\gamma)$ al menor principal de orden k de $A(\gamma)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, se tiene que $\delta_k(\gamma) = \delta_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

c) Se considera la descomposición $D - E - F$ por puntos de la matriz A. Demostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ se verifica que

$$\lambda^n \det(-D) P_{\mathcal{J}}(\lambda) = \det(E - D) P_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2)$$

donde $P_{\mathcal{J}}$ y $P_{\mathcal{L}_1}$ son, respectivamente, los polinomios característicos de las matrices de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel (por puntos).

d) Encontrar la relación existente entre $\varrho(\mathcal{J})$ y $\varrho(\mathcal{L}_1)$. Deducir que ambos métodos convergen o divergen simultáneamente. En caso de que converjan, ¿cuál lo hace más rápidamente?

3 [1 punto] Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible que admite factorización de Cholesky de la forma $A = BB^{\mathrm{T}}$ siendo $B \in \mathcal{M}_n$ una matriz real triangular inferior. Demostrar que A es simétrica y definida positiva.

4 [3 puntos] Se considera la ecuación

$$\tan x - e^{-x} = 0. \tag{7}$$

a) Determinar el número de raíces reales de (7).

b) Encontrar una función y un intervalo con los que se pueda aplicar el teorema del Punto Fijo para aproximar la menor raíz positiva de (7) e indicar un número de iteraciones suficiente para que el error cometido sea inferior a la milésima.

5 [1'5 puntos] Se considera el polinomio

$$P(x) = x^3 + 7x^2 + 3.$$

a) Determinar el número de raíces (reales y complejas) de P.

b) Encontrar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar una raíz real de P, justificando las hipótesis de convergencia y determinando los dos primeros términos de la sucesión.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2000

1 [2'5 puntos] Se considera el sistema de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas

$$\left\{\begin{array}{l} x + Sy = b \\ S^{\mathrm{T}}x + y = c \end{array}\right.$$

donde $b, c \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ y $S \in \mathcal{M}_n$.

$a)$ Escribir el sistema en forma

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

donde $A \in \mathcal{M}_{2n}$ es una matriz por bloques $n + n$.

$b)$ Se consideran los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por bloques asociados a la descomposición por bloques de A dada en $a)$. Probar que

$$\varrho(J^2) = \varrho(\mathcal{L}_1) = \varrho(S^{\mathrm{T}}S)$$

y deducir que ambos métodos convergen o divergen a la vez.

$c)$ Demostrar que si $\|S\|_2 < 1$ ambos métodos son convergentes. ¿Cuál converge más rápidamente?

2 [2 puntos] Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal estrictamente dominante. Se considera la descomposición $A = M - N$ donde $M = D - \alpha E - (1-\alpha)F$ con $0 < \alpha \leq 1$.

$a)$ Justificar que el método asociado a esta descomposición está bien definido.

$b)$ Probar que el método es convergente y deducir de ello la convergencia del método de Gauss–Seidel (**Indicación**: utilizar que si $|\lambda| \geq 1$ y $0 < \beta \leq 1$ entonces $\left|\frac{1-\beta+\lambda\beta}{\lambda}\right| \leq 1$).

3 [2'5 puntos] Sea $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$. Dada la fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)dx = Af(x_0) + kf''(\theta)$$

con $\theta \in [a,b]$ se pide:

$a)$ Obtener A y x_0 para que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 1 y dar una interpretación geométrica del resultado.

$b)$ Aplicando la fórmula a $f(x) = x^2$ determinar el valor de k en el término de error.

$c)$ Aproximar el valor de la integral

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx$$

aplicando la fórmula anterior compuesta para 4 subintervalos, acotando el error cometido y comparándolo con el error real.

4 [3 puntos] Dada la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ se pide:

$a)$ Determinar el número de raíces positivas y negativas.

$b)$ Hallar un intervalo en el que se puede aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva más pequeña.

$c)$ Dada la función

$$g(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$$

estudiar si se puede aplicar al teorema del Punto Fijo para aproximar la raíz anterior. Calcular los dos primeros términos de la sucesión.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2000

---

1 [1'5 puntos] Encontrar los valores de A, B, C y D para que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq Af(0) + Bf(1) + Cf'(0) + Df'(1)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

2 [2 puntos] Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica y definida positiva escrita en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array} \right)$$

siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$a)$ Demostrar que si

$$A_{n-1} = L_{n-1} D_{n-1} (L_{n-1})^{\mathrm{T}}$$

con $L_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$ triangular inferior con unos en la diagonal y $D_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$ diagonal con elementos diagonales positivos entonces existen $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $d \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^{\mathrm{T}} & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} D_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & d \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} (L_{n-1})^{\mathrm{T}} & x \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right).$$

Deducir que, en este caso, $d > 0$.

$b)$ Demostrar, por inducción sobre la dimensión de la matriz, que si A es simétrica definida positiva entonces existen L triangular inferior con unos en la diagonal y D diagonal con elementos diagonales positivos tales que $A = LDL^{\mathrm{T}}$.

3 [3 puntos]

$a)$ Dada una matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

sea δ_k el menor principal de orden k de A $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y $\delta_0 = 1$. Probar que

$$\delta_1 = b_1 \text{ y } \delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2},\ k = 2, 3, \ldots, n.$$

$b)$ Consideremos, en particular, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2+\alpha_1 & -1 & & & \\ -1 & 2+\alpha_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+\alpha_{n-1} & -1 \\ & & & -1 & 2+\alpha_n \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

$i)$ Demostrar por inducción que para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se verifica que

$$\delta_k > \delta_{k-1} > \cdots > \delta_0.$$

Deducir que la matriz A es definida positiva.

ii) Para cada $\beta \geq 0$ se considera la descomposición $A = M_\beta - N_\beta$ donde

$$N_\beta = \operatorname{diag}(\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \ldots, \beta - \alpha_n)\,.$$

Encontrar valores del parámetro β para los cuales el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ de A sea convergente.

4 [3'5 puntos] Se considera la función $F(x) = x - e^{x-2}$.

a) Probar que la ecuación $F(x) = 0$ tiene, exactamente, dos raíces reales.

b) Encontrar sendos intervalos donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar cada una de ellas.

c) Estudiar si se puede aplicar el Teorema del Punto Fijo a la función

$$f(x) = 2 + \ln x$$

para aproximar las raíces de F.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2001

1 [2 puntos] Consideremos una matriz $M \in \mathcal{M}_{2n}$ simétrica y definida positiva escrita en la forma

$$M = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline Q^{\mathrm{T}} & R \end{array} \right)$$

donde $P, Q, R \in \mathcal{M}_n$.

$a)$ Tomando $w = -P^{-1}Qv$ comprobar que

$$\begin{pmatrix} w^{\mathrm{T}} & v^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline Q^{\mathrm{T}} & R \end{array} \right) \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = v^{\mathrm{T}} S v$$

siendo $S = R - Q^{\mathrm{T}} P^{-1} Q$. Deducir que la matriz S es también simétrica definida positiva.

$b)$ Suponiendo conocidas las factorizaciones de Cholesky de $P = BB^{\mathrm{T}}$ y de $S = CC^{\mathrm{T}}$ determinar, a partir de ellas, la factorización de Cholesky de la matriz M.

2 [3 puntos] Se considera el sistema lineal $Au = b$ y $\mathcal{J} = D^{-1}(E + F)$ la matriz del método de Jacobi por puntos asociada a A.

$a)$ Si $\|\cdot\|$ es una norma matricial subordinada a la norma vectorial $||\cdot||$, demostrar:

$i)$ $||u|| \leq \|\mathcal{J}\| \, ||u|| + \|D^{-1}\| \, ||b||$.

$ii)$ Si $\|\mathcal{J}\| < 1$ y se toma $u^0 = 0$, entonces

$$||u^k - u|| \leq \frac{\|\mathcal{J}\|^k}{1 - \|\mathcal{J}\|} \|D^{-1}\| \, ||b||, \; k \in \mathbb{N}.$$

$b)$ Probar que si A es de diagonal estrictamente dominante se verifica que $\|\mathcal{J}\|_\infty < 1$.

$c)$ Sean

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar un número k de iteraciones para que el error en norma infinito cometido en la resolución del sistema $Au = b$ mediante el método de Jacobi por puntos a partir de $u^0 = 0$ sea inferior a la milésima.

3 [2 puntos] Aplicar la *regla del trapecio abierta compuesta* a la integral

$$\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}$$

para obtener una aproximación de $\arctan \frac{1}{2}$ determinando el número m de subintervalos necesario para que el error cometido en esa aproximación sea inferior a 10^{-3}. (**Indicación**: el error en la regla del trapecio abierta simple viene dado por

$$R_{(a,b)}(f) = \frac{(b - a)^3}{36} f''(\theta)).$$

4 [3 puntos] Se considera la función $F(x) = 1 - 2(1 + x)e^{-x}$.

$a)$ Demostrar que la ecuación $F(x) = 0$ tiene una única raíz ξ positiva.

$b)$ Determinar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para dar una aproximación de ξ, así como las dos primeras iteraciones del método.

$c)$ Se considera la función

$$\psi(x) = 1 - \lambda x - 2e^{-x}.$$

Supuesto conocido el valor de ξ, encontrar el valor de $\lambda > 0$ que hace que la función ψ tenga una raíz positiva doble.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2001

1 [2 puntos] Sea $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz inversible y $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrices simétricas definidas positivas. Probar que las matrices A^{-1}, $A + B$, $C^{\mathrm{T}}AC$ y la submatriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix}$ de A son también definidas positivas.

2 [3 puntos] Se considera el método iterativo de Jacobi por puntos para resolver el sistema lineal $Ax = b$ partiendo de $x^0 = 0$, para una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ verificando

$$|a_{ii}| > \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

donde $\alpha > 1$ y

$$|a_{ii}| > \gamma > 0, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

a) Demostrar que $||\mathcal{J}||_\infty < \dfrac{1}{\alpha}$ donde $\mathcal{J} = D^{-1}(E + F)$.

b) Probar que

$$x = \mathcal{J}x + D^{-1}b \; \text{ y } \; x^k - x = \mathcal{J}^k(x^0 - x).$$

Deducir de lo anterior que

$$||x||_\infty < \frac{\alpha\, ||b||_\infty}{\gamma(\alpha - 1)} \; \text{ y } \; ||x^k - x||_\infty < \frac{||b||_\infty}{\gamma \alpha^{k-1}(\alpha - 1)}.$$

c) En particular, se considera el sistema $Ax = b$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}3 & 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & -1{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}1 & 1{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}3 & 1{,}3 \end{pmatrix} \; \text{ y } \; b = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizar la cota obtenida anteriormente para determinar un número k de iteraciones tal que el error cometido en norma infinito, al aplicar el método de Jacobi por puntos con $x^0 = 0$, sea inferior a 10^{-6}.

3 [2 puntos]

a) Determinar las relaciones que deben verificar los parámetros a, b, c, d y e para que la función

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3, & x \in \left[-\frac{1}{6}, 1\right] \\ c(x-2)^2, & x \in [1, 3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3, & x \in [3, 4] \end{cases}$$

sea una *spline* cúbica.

b) Determinar los valores de los parámetros para que $f(x)$ interpole la tabla

x	0	1	4
$f(x)$	26	7	25

c) ¿Es la función $f(x)$ obtenida una función *spline* cúbica de tipo I (o natural)?

4 [3 puntos] Se considera la función $f(x) = \lambda e^{-x}$.

a) Probar que si $0 \leq \lambda < 1$ se puede aplicar a la función $f(x)$ el teorema del punto fijo en el intervalo $[0, 1]$.

b) Utilizar *a*) para probar que la función $F(x) = 2x - e^{-x}$ tiene una única raíz real ξ y determinar un número de iteraciones para aproximar a ξ con un error inferior a 10^{-3} comenzando en el punto medio del intervalo.

c) Aplicar el método de Whittaker a la ecuación $F(x) = 0$ eligiendo el valor óptimo del parámetro y comprobando que se cumplen las hipótesis de convergencia de dicho método en el intervalo $[0, 1]$. Determinar un número de iteraciones para aproximar ξ con el mismo error y el mismo valor inicial que en el apartado *b*).

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2001

---

1 [1'5 puntos] Determinar el número de intervalos necesarios para aproximar el valor de la integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

con un error menor que 10^{-2} cuando se emplea la regla de los trapecios (o fórmula del trapecio compuesta).

2 [3'5 puntos] Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ con autovalores reales $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ tales que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

Para resolver el sistema $Au = b$ se considera el método iterativo

$$\begin{cases} u^0 \text{ arbitrario} \\ u^{k+1} = B_w u^k + c_w,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

donde

$$B_w = I - wA \ \text{ y } \ c_w = wb \quad (w \neq 0).$$

a) Demostrar que los autovalores de B_w son

$$\mu_i = 1 - w\lambda_i,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

b) Probar que si $0 < w < \dfrac{2}{\lambda_n}$ entonces

$$1 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > -1.$$

Deducir que el método iterativo asociado a B_w es convergente.

c) Comprobar que para el valor

$$w = \frac{2}{\lambda_n + \lambda_1}$$

se tiene que $\mu_1 = -\mu_n$ y deducir que

$$\varrho(B_w) = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}.$$

d) Demostrar que para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

el método anterior coincide con el de Jacobi si se elige un valor adecuado del parámetro w.

e) Probar que la matriz A del apartado d) admite factorización LU.

3 [3 puntos] Se considera la ecuación $3x^2 - e^x = 0$.

a) Probar que la ecuación anterior tiene una única raíz negativa ξ.

b) Determinar un intervalo $[a, b]$ para el cual la iteración

$$x_{n+1} = -\sqrt{\frac{e^{x_n}}{3}},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

converja a ξ para cualquier valor inicial $x_0 \in [a, b]$.

c) Partiendo de $x_0 = b$ estimar, a partir de b), el error cometido tras las cuatro primeras iteraciones.

$d)$ ¿Se puede utilizar la iteración

$$x_{n+1} = \ln(3x_n^2)$$

para aproximar ξ? Razonar la respuesta.

4 [2 puntos] Determinar el número de raíces reales del polinomio

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1.$$

Encontrar intervalos en los que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar dichas raíces y escribir las dos primeras aproximaciones en cada caso.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2002

1 [1'5 puntos] Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma $A = LDL^{\mathrm{T}}$ donde L es una matriz real triangular inferior con unos en la diagonal y $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ es una matriz diagonal con $d_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

$a)$ Demostrar que A admite factorización de Cholesky.

$b)$ Determinar los elementos de la matriz de la factorización de Cholesky de A a partir de los elementos de las matrices L y D.

2 [2'5 puntos] Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ de diagonal estrictamente dominante se considera un número natural p, con $1 \leq p \leq n$, y las matrices $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ donde

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si} \quad |i-j| < p \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| \geq p, \end{cases}$$

y $N = M - A$.

$a)$ Demostrar que el método iterativo asociado a esta descomposición $A = M - N$ está bien definido y es convergente.

$b)$ En el método anterior, ¿qué método se obtiene si $p = 1$? ¿Qué ocurre si $p = n$?

3 [2 puntos]

$a)$ Demostrar que si una función spline cúbica coincide, en cada subintervalo de una partición del intervalo $[a, b]$, con un polinomio de grado ≤ 2, entonces dicha función es un polinomio de grado ≤ 2 globalmente en todo $[a, b]$.

$b)$ Determinar los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ para que la función

$$S(x) = \begin{cases} c_1x^2 + c_2x + c_3 & \text{en} \quad [a, x_1] \\ c_4x^2 + c_5x + 1 & \text{en} \quad [x_1, x_2] \\ c_6x^2 + c_7x + c_8 & \text{en} \quad [x_2, x_3] \\ c_9x^2 + 2x + c_{10} & \text{en} \quad [x_3, b] \end{cases}$$

con $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, sea una función spline cúbica de tipo I en $[a, b]$.

4 [1'5 puntos] Determinar el valor que se obtiene al aproximar, mediante la fórmula de Simpson compuesta con $m = 1000$ subintervalos, la integral definida

$$\int_{-1000}^{1000} |x|^3 e^{\operatorname{sen} \pi x} dx.$$

5 [2'5 puntos] Se considera el polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

$a)$ Demostrar que P tiene una única raíz ξ positiva.

$b)$ Encontrar un intervalo y una función con los que se pueda utilizar el método del Punto Fijo para dar una aproximación de dicha raíz.

$c)$ ¿Con cuántas iteraciones queda garantizado que el error cometido, cuando se parte del extremo derecho del intervalo considerado, es inferior a la milésima?

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2002

---

1 Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Se pide:

$a)$ Calcular el radio espectral de la matriz del método iterativo de Jacobi.

$b)$ Hallar el radio espectral de la matriz del método iterativo de Gauss–Seidel.

$c)$ Comprobar que ambos métodos son convergentes o divergentes simultáneamente. En caso de convergencia, ¿cuál de los dos lo hace más rápidamente?

$d)$ Determinar los valores $\alpha \in \mathbb{C}$ para los que ambos métodos convergen para la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

2 Se considera la función $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\lambda}{x}\right)$. Se pide:

$a)$ Demostrar que es contractiva en el intervalo $[\lambda, 1]$ si $\dfrac{1}{2} \leq \lambda < 1$.

$b)$ Justificar si la ecuación $f(x) = x$ puede resolverse utilizando el método del Punto Fijo.

$c)$ Hallar un número de iteraciones para que la aproximación obtenida por el método anterior diste de la solución real menos de 10^{-4}.

$d)$ ¿Cuál es la solución exacta?

3 Se considera la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right),$$

donde A es una constante y x_0, x_1, x_2 son puntos en el intervalo $[-1, 1]$.

$a)$ Hallar los valores de A, x_0, x_1, x_2 para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible y determinar éste.

$b)$ Ídem para la fórmula de cuadratura

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = A\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

para el intervalo $[a, b]$, donde ahora $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$. (**Indicación**: usar el apartado anterior y la dilatación $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\theta(x) = a + \dfrac{b-a}{2}(x+1)$ que transforma el intervalo $[-1, 1]$ en el intervalo $[a, b]$).

$c)$ ¿Existe alguna relación entre la fórmula anterior y la fórmula de Simpson? Explica razonadamente tu conclusión.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2002

1 [2 puntos] Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinar los valores del parámetro α para los cuales la matriz A admite:

$a)$ Factorización LU.

$b)$ Factorización de Cholesky.

2 [2 puntos] Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ de diagonal estrictamente dominante se considera un número natural p, con $1 \leq p \leq n$, y las matrices $M = (m_{ij})_{i,j=1}^{n}$ donde

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si} \quad |i-j| < p \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| \geq p, \end{cases}$$

y $N = M - A$. Para cada número $w \in (0,1]$ se consideran las matrices

$$M_w = \frac{1}{w} M \;\text{ y }\; N_w = M_w - A.$$

Demostrar que el método iterativo asociado a la descomposición $A = M_w - N_w$ es convergente.
(**<u>Indicación</u>**: Utilizar que si $0 < w \leq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \geq 1$ entonces $\left| \dfrac{1-w-\lambda}{\lambda w} \right| \geq 1$).

3 [2 puntos] Sabiendo que la longitud de la curva $y = f(x)$ definida sobre el intervalo $[a,b]$ es

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

determinar un número n de intervalos para aproximar la longitud de la curva dada por la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ usando la regla de los trapecios compuesta de forma que el error cometido sea inferior a 10^{-2}.

4 [2 puntos] Las ecuaciones paramétricas del movimiento de un proyectil vienen dadas por

$$\begin{cases} x(t) = 3(1 - e^{-t}) \\ y(t) = 6(1 - e^{-t}) - 2t \end{cases}$$

donde $t > 0$. El tiempo de impacto del proyectil con el suelo se calcula resolviendo la ecuación $y(t) = 0$.

Encontrar un intervalo en el que se pueda aproximar dicho tiempo de impacto mediante el método de Newton.

5 [2 puntos] Obtener la secuencia de Sturm del polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ y encontrar, a partir de ella, todas las raíces de P.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2003

1 $a)$ Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & b \\ \hline a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array} \right)$$

siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1},\ a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que si A_{n-1} es inversible y admite factorización LU

$$A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$$

entonces existen $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^{\mathrm{T}} & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline \mathbf{0} & \beta \end{array} \right).$$

$b)$ Demostrar, por inducción sobre la dimensión de la matriz, que si todos los menores principales de la matriz A son no nulos entonces existen L triangular inferior con unos en la diagonal y U triangular superior tales que $A = LU$.

2 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

$a)$ Dar una condición suficiente que garantice la convergencia del método de Jacobi asociado a la matriz A.

$b)$ Dar una condición necesaria y suficiente para que dicho método sea convergente.

$c)$ Encontrar valores de α para los cuales el método de relajación de parámetro $0 < w < 2$ asociado a A sea convergente.

3 Dado $n \in \mathbb{N}$, determinar el valor que se obtiene al aproximar las siguientes integrales:

$a)$ $\displaystyle\int_0^{2n} x^{2n} \cos(2\pi x)\, dx.$

$b)$ $\displaystyle\int_0^{2n} x^{2n+1} \cos(2\pi x)\, dx.$

$c)$ $\displaystyle\int_0^{2n} \left(a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0\right) \cos(2\pi x)\, dx \quad (a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, 2n+1).$

mediante la fórmula de Newton–Côtes cerrada de $2n+1$ puntos.

4 $a)$ Probar que la función

$$f(x) = \frac{3 - 2x^3 + x^4 - x^5}{5}$$

es contractiva en el intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$. Determinar la constante de contractividad.

$b)$ Demostrar que el polinomio

$$P(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + 5x - 3$$

tiene una única raíz ξ en el intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

$c)$ Determinar los dos primeros términos de una sucesión que converja a la raíz ξ de P, justificando su convergencia.

$d)$ ¿Tiene P raíces negativas?

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2003

1 Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 1 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Encontrar la relación que deben verificar α y β para que el método de Jacobi por puntos sea convergente.

b) Dado el sistema
$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{3} = 3 \\ x + y + z = 4 \\ \dfrac{y}{3} + z = 0, \end{cases}$$
calcular la primera aproximación a la solución del mismo, por el método anterior, para el valor inicial $(2, 3, 0)^{\mathrm{T}}$.

2 Para calcular de forma aproximada el valor $\dfrac{1}{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ no nulo, se consideran las funciones
$$F(x) = \alpha - \frac{1}{x} \text{ y } G(x) = \alpha^3 - \frac{1}{x^3}.$$

a) Comprobar que los métodos de aproximación de Newton para dichas funciones son, respectivamente,
$$x_{n+1} = x_n(2 - \alpha x_n) \tag{8}$$
y
$$x_{n+1} = \frac{x_n}{3}(4 - \alpha^3 x_n^3) \tag{9}$$
para todo $n \in \mathbb{N}\{0\}$.

b) Se considera la sucesión $r_n = 1 - \alpha x_n$, con $n \in \mathbb{N}\{0\}$. Comprobar que se verifica
$$r_{n+1} = r_n^2 \quad \text{y} \quad r_{n+1} = \tfrac{1}{3}(r_n^4 - 4r_n^3 + 6r_n^2)$$
para las sucesiones (8) y (9), respectivamente.

c) Para cada $\alpha > 0$, hallar un intervalo $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ de forma que la sucesión (8) converja para cualquier $x_0 \in I_\alpha$.

d) Si $0 < r_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}\{0\}$, comprobar que
$$\frac{1}{3}(r_n^4 - 4r_n^3 + 6r_n^2) > r_n^2.$$
Deducir cuál de los dos métodos, (8) o (9), converge más rápidamente.

3 Se considera la fórmula de derivación aproximada
$$f'(x) \simeq \frac{1}{12h}\left(f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)\right).$$

a) Usando desarrollos en serie, calcular el orden de aproximación del error, en función de h.

b) Para $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, hallar la aproximación de $f'(2)$ cuando se toma $h = \dfrac{1}{10}$ y calcular el error cometido.

4 La sucesión de Sturm del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ es
$$\left\{P_0(x) = P(x), P_1(x) = P'(x), P_2(x) = -x + \frac{50}{13}, P_3(x) = -1\right\}.$$

a) Determinar el número de raíces reales de $P(x)$ y, para cada una de ellas, un intervalo que la contenga.

b) Hallar la primera aproximación de la raíz más cercana a 1, por el método de las cuerdas, cuando se toma como valor inicial $x_0 = 1$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2003

1 [**3 puntos**] Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica definida positiva, se considera la descomposición $D - E - F$ por bloques de A.

$a)$ Demostrar que las matrices

$$i)\ D \qquad\qquad ii)\ \mu A \ \text{ con } \ \mu > 0 \qquad\qquad iii)\ D - \mu E - \mu F \ \text{ con } \ 0 \le \mu \le 1$$

son, también, simétricas definidas positivas.

$b)$ Si A se escribe en la forma $A = M - N$, con M inversible, siendo $M = D - \alpha E - \beta F$, determinar un rango de valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que el método iterativo asociado a la descomposición anterior es convergente.

$c)$ ¿Se deduce del apartado $b)$ la convergencia del método de Jacobi? ¿Y la del método de Gauss–Seidel?

2 [**3 puntos**]

$a)$ Teniendo en cuenta que el error en la fórmula del trapecio (cerrada) viene dado por la expresión

$$R_{(a,b)}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\theta)$$

con $\theta \in (a, b)$, deducir la regla de los trapecios (o fórmula del trapecio compuesta cerrada) con m subintervalos, obteniendo la expresión del error de dos formas:

$i)$ Sumando los errores cometidos en cada subintervalo.

$ii)$ Aplicando a lo anterior el Teorema de los Valores Intermedios.

$b)$ Dado $n \in \mathbb{N}$, aplicar el apartado $a)$ con $m = n - 1$ subintervalos a la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo $[1, n]$. Escribir los términos de error en las formas $a)i)$ y $a)ii)$.

$c)$ Sabiendo que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

y

$$\frac{1}{n} \le \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^2} \le \frac{1}{n-1},$$

acotar las dos expresiones del error obtenidas en el apartado $b)$. ¿Cuál de las dos cotas es mejor?

$d)$ Teniendo en cuenta que

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1),$$

utilizar los apartados $b)$ y $c)$ para aproximar la cantidad

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n.$$

3 [**2 puntos**] Sea $a > 0$ y $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una función par. Dado $n \in \mathbb{N}$, se consideran una partición equiespaciada del intervalo $[-a, a]$ de $n + 1$ puntos y P_n el polinomio de interpolación de f en dichos puntos. Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

$a)$ P_2 tiene grado exactamente 2.

$b)$ P_3 tiene grado menor o igual que 2.

$c)$ $P_2 = P_3$.

4 [**2 puntos**] Utilizar el método de Newton, justificando las hipótesis de convergencia, para aproximar el valor de x que en la gráfica $y = x^2$ produce el punto más cercano a $(1, 0)$, determinando el valor de las dos primeras iteraciones. (**Indicación**: Minimizar la distancia al cuadrado del punto $(1, 0)$ a un punto genérico de la curva).

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2004

1 Nos gustaría tener una cuenta de ahorros con un saldo de 100.000 euros en el momento de comprar una casa dentro de 5 años y podemos depositar 6.000 euros anuales. El interés anual x que deberá proporcionarnos la cuenta de ahorros es solución de la ecuación:

$$100{,}000x = 6{,}000((1+x)^5 - 1).$$

1. Probar que esta ecuación posee una solución estrictamente positiva.

2. Determinar un intervalo en el que aplicar el método de Newton para calcularla.

2 Se desea aproximar el valor de la integral $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ con un error menor que 10^{-2}. Para ello seguimos el proceso siguiente:

1. Calculamos un valor $L \geq 1$ para el cual $\int_L^\infty e^{-x^2}dx \leq \frac{10^{-2}}{2}$. Comprobar que podemos elegir $L = 6$. (Indicación: se puede usar la desigualdad $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ si $x \geq 1$ y tener en cuenta que $\ln(200) \approx 5{,}2983$).

2. A continuación, determínese el número de intervalos necesarios para calcular $\int_0^6 e^{-x^2}dx$ con un error menor que $\frac{10^{-2}}{2}$ mediante la fórmula del trapecio cerrada compuesta usando la fórmula del error:

$$R_{(a,b)}(f) = -(b-a)\frac{h^2}{12}f''(\theta), \quad \theta \in (a,b), \quad h = \frac{b-a}{m}.$$

3 Utilizamos el método iterativo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u^{k+1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ \eta & \zeta & 0 \end{pmatrix} u^k = b, \qquad u^0 \in \mathbf{R}^3$$

para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi & 1 & 1 \\ \eta & \zeta & 1 \end{pmatrix} u = b, \qquad b \in \mathbf{R}^3,$$

siendo ξ, η, ζ constantes reales.

1. Encontrar todos los valores de ξ, η, ζ para los que, sean cuales sean u^0 y b, la sucesión $\left(u^k\right)$ converge.

2. Supongamos $\xi = \eta = \zeta = -1$. Encontrar vectores u^0 y b para los que $\left(u^k\right)$ **NO** converge.

3. Supongamos ahora $\xi = \zeta = 0$. ¿Es cierto que en este caso el método siempre permite encontrar la solución exacta en un número finito de iteraciones? En caso afirmativo, encontrar dicho número; en cualquier caso, razonar la respuesta.

4 Se considera el sistema lineal $Ax = y$ para una matriz tridiagonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b & 0 & 0 \\ c & a_2 & b & 0 \\ 0 & c & a_3 & b \\ 0 & 0 & c & a_4 \end{pmatrix}$$

1. Usar el método de eliminación gaussiana para triangularizar la matriz A.

2. Probar que $A = LU$, siendo L una matriz triangular inferior con unos en su diagonal y U una matriz triangular superior, calculando los elementos de las matrices L y U directamente a partir de los elementos de la matriz A.

5 Sea ε el error de redondeo unitario de la máquina, i.e.

$$fl(x*y) = [fl(x)*fl(y)](1+\delta) = \frac{[x*y]}{(1-\delta')}, \qquad |\delta|, |\delta'| < \varepsilon.$$

Sean ahora x, y vectores columna cuyas componentes son números máquina. Sean $z_1 = fl(x_1 y_1)$ y $z_{k+1} = fl(z_k + x_{k+1}y_{k+1})$. Supongamos que $n\varepsilon < 1/3$. Sean δ_i tales que

$$fl\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i (1+\delta_i).$$

1. Demuestra por inducción sobre n que $|\delta_i| \leq (1+\varepsilon)^{n+2-i} - 1$.

2. Sabiendo que $n\varepsilon < 1/3$, demuestra que

$$(1+\varepsilon)^k - 1 \leq \frac{k\varepsilon}{1-\frac{1}{2}k\varepsilon} < \frac{6}{5}k\varepsilon.$$

3. Demuestra que el error relativo satisface

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - fl\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\right|}{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|} < \frac{6}{5}(n+1)\varepsilon.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2004

1 [3 puntos]

$a)$ Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica y definida positiva escrita en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

donde $A_{11} \in \mathcal{M}_{n_1}$ y $A_{22} \in \mathcal{M}_{n_2}$, con $n_1 + n_2 = n$. Elegir convenientemente w verificando

$$\left(\begin{array}{cc} w^{\mathrm{T}} & v^{\mathrm{T}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} w \\ v \end{array} \right) = v^{\mathrm{T}} M v,$$

donde $M = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{21}^{\mathrm{T}}$, para deducir que la matriz M es también simétrica definida positiva.

$b)$ Dada una matriz $A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & u^{\mathrm{T}} \\ \hline u & B \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n$ simétrica definida positiva, con $B \in \mathcal{M}_{n-1}$, probar que existen $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $C \in \mathcal{M}_{n-1}$ simétrica definida positiva, tales que $A = R_1 A_1 R_1^{\mathrm{T}}$, siendo

$$R_1 = \left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ \frac{1}{\alpha} u & I \end{array} \right) \text{ y } A_1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & C \end{array} \right).$$

$c)$ Iterar el proceso anterior para concluir que $A = R_1 \cdots R_n R_n^{\mathrm{T}} \cdots R_1^{\mathrm{T}}$. ¿Identificas la matriz $R = R_1 \cdots R_n$?

2 [2.5 puntos] Sea A una matriz cuyos autovalores sean todos positivos. Se considera el método iterativo

$$u^{k+1} = B_\theta u^k + \theta b$$

con $\theta > 0$, donde $B_\theta = I - \theta A$.

$a)$ Demostrar que $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ si y sólo si $1 - \lambda\theta \in \mathrm{sp}(B_\theta)$.

$b)$ Encontrar el intervalo de valores de θ para los que el método anterior es convergente.

$c)$ ¿Se puede aplicar el método anterior a la matriz $\left(\begin{array}{cc} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{array} \right)$? ¿Para qué valores de θ es convergente?

3 [1.5 puntos] Encontrar el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ que hace que la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(-\alpha) + f(\alpha)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste? ¿Qué error se comete cuando se aplica esta fórmula para aproximar

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \operatorname{sen} x\,dx?$$

4 [3 puntos] Dados $x_0, a, b \in \mathbb{R}$ se considera la función

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{lll} P(x) & \text{si} & x \in [x_0 - 1, x_0] \\ ax + b & \text{si} & x \in [x_0, x_0 + 1] \end{array} \right. ,$$

donde $P(x) = x^3 + x + 1$.

$a)$ Demostrar que si $x_0 \neq 0$ la función h no puede ser una función *spline* cúbica.

$b)$ Hallar los valores de x_0, a y b para los que h es una función *spline* cúbica y esbozar la gráfica de h.

$c)$ Determinar el número de raíces reales del polinomio $P(x)$ y encontrar, para cada una de ellas, un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton o el método de Whittaker, dando los dos primeros términos de la sucesión definida por el método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2004

1 [3 puntos] Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz con *estructura de flecha*:

$$\begin{pmatrix} \times & & & & & \times \\ & \times & & & & \times \\ & & \times & & & \times \\ & & & \cdots & & \cdots \\ & & & & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

es decir, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ donde $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ para $i, j = 1, \cdots, n-1$.

$a)$ Demostrar que si $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, \cdots, n-1$ entonces la matriz A admite factorización LU.

$b)$ Probar que la factorización LU preserva la estructura de matriz flecha, i. e., si A tiene esta estructura también la tienen las matrices L y U.

$c)$ Enunciar resultados análogos a $a)$ y $b)$ para la factorización de Cholesky.

2 [2.5 puntos] Consideremos las iteraciones dadas por

$$u^{k+1} = Bu^k + b, \qquad k = 0, 1, 2...$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \qquad |\alpha|, |\beta| < 1.$$

$a)$ Dado $b \in \mathbb{R}^2$, probar que la ecuación $u = Bu + b$ posee una única solución $u^* \in \mathbb{R}^2$ y que la sucesión (u^k) converge a u^*, para cualquier $u^0 \in \mathbb{R}^2$.

$b)$ Supongamos que $\alpha = \beta$.

i) Si $u^0 - u^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcular $u^k - u^*$. ¿Cuál es el menor número k de iteraciones necesarias para tener

$$\left\| u^k - u^* \right\|_\infty < 10^{-3}?$$

Estudiar el comportamiento de dicho número mínimo k en función de α y γ.

ii) Supongamos, además, que $\gamma = 1$. Fijado $k > 0$, ¿cuál es la menor constante $c(k)$ para la que se verifica

$$\left\| u^k - u^* \right\|_\infty \leq c(k) \left\| u^0 - u^* \right\|_\infty$$

para todos los vectores $u^0 \in \mathbb{R}^2$? Nuevamente, estudiar el comportamiento de $c(k)$ cuando α varía.

3 [1.5 puntos] Se considera la función $f(x) = e^x$ y $n \in \mathbb{N}$.

$a)$ Hallar los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ para que el error en la interpolación polinomial de la función f en dicho intervalo, relativa a dichos puntos, sea mínimo.

$b)$ Encontrar el menor $n \in \mathbb{N}$ para el que dicho error es menor que 10^{-6}.

4 [3 puntos] Sea la función $F(x) = (x+1)\tan x - 1$.

$a)$ Demostrar que en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ existe una única raíz, ξ, de F.

$b)$ Demostrar que ξ se puede aproximar por un método de punto fijo en dicho intervalo. Decidir si $k = 0{,}51$ es una posible constante de contractividad para dicho método. (*Indicación*: $\arctan(\frac{2}{\pi+2})$ está entre $0{,}3$ y $0{,}4$).

$c)$ Comenzando con $x_0 = 0$, determinar una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que converja a ξ. Hallar el término x_1 y el mínimo n tal que $|x_n - \xi| < 10^{-4}$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2005

1 [2'5 puntos] Se pretende calcular numéricamente la raíz cuadrada de un número real $a > 0$.

(i) Considérese la siguiente fórmula recursiva:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbf{R} & \text{dado,} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}). \end{cases} \tag{10}$$

Demuéstrese que si la sucesión (x_n) es convergente entonces necesariamente su límite es $\sqrt{a}$. (Indicación: puede ser útil comprobar que (10) se obtiene como las iteraciones del método de Newton aplicado a cierta ecuación $f(x) = 0$).

(ii) Pruébese que si $x_n > \sqrt{a}$ para todo $n \geq 0$ entonces el método definido por (10) converge cuadráticamente, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a} - x_{n+1}}{(\sqrt{a} - x_n)^2} \qquad \text{existe y es un número real.}$$

(iii) Consideramos ahora el siguiente método:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbf{R} & \text{dado,} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}. \end{cases}$$

Suponiendo que $x_n > \sqrt{a}$ para todo $n \geq 0$, pruébese que el orden de convergencia del método es cúbico, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a} - x_{n+1}}{(\sqrt{a} - x_n)^3} \qquad \text{existe y es un número real.}$$

2 [2'5 puntos] Dedúzcase la expresión de la fórmula de Simpson y de su término de error del siguiente modo. Suponemos que existe una regla que satisface, dados $x_0 < x_2$ y f una función cuatro veces derivable en el intervalo (x_0, x_2):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + K f^{(iv)}(\xi), \tag{11}$$

siendo $x_1 := (x_0 + x_2)/2$ y $\xi \in (x_0, x_2)$ un punto que depende eventualmente de f.

(i) Calcúlense los coeficientes α_0, α_1 y α_2 aplicando la fórmula anterior a polinomios de grado 0, 1, 2.

(ii) Una vez hecho esto, obténgase a partir de (11) el valor del coeficiente K.

3 [2'5 puntos] Se pretende utilizar el método iterativo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot u^{k+1} + \begin{bmatrix} 0 & 4\alpha(1-\alpha) & 13 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot u^k = b$$

para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4\alpha(1-\alpha) & 13 \\ 1 & 1 & 1-\alpha \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot u = b,$$

siendo $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq -1$, y $b \in \mathbf{R}^3$.

(i) Determinar para qué valores de α el método es convergente.

(ii) Razónese si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: *Sea $\alpha \neq -1$ y $u^* \in \mathbf{R}^3$ la solución exacta del sistema. Entonces existe una iteración inicial $u^0 \in \mathbf{R}^3$ con la propiedad de que la sucesión (u^k) converge a u^* cuando $k \to \infty$.*

4 [2’5 puntos] Sea A una matriz $n \times n$ real, simétrica y definida positiva.

(i) Demuéstrese que es posible encontrar L triangular y D diagonal con $d_{ii} > 0$, $i = 0, ..., n$, tales que $A = D - L - L^T$. Más aún, demuéstrese que $D - L$ es invertible.

(ii) Se considera la matriz $B_g := (D - L)^{-1} \cdot L^T$ asociada al método de Gauss-Seidel. Compruébese la siguiente identidad:

$$B_g = \mathrm{Id} - (D - L)^{-1} \cdot A.$$

(iii) Sea $P := A - B_g^T \cdot A \cdot B_g$. Compruébese que P es simétrica.

(iv) Sea $Q := (D - L)^{-1} \cdot A$. Demuéstrese que

$$P = Q^T \cdot D \cdot Q$$

y conclúyase que P es definida positiva.

(v) Utilícese que P es simétrica y definida positiva para probar que $\rho(B_g) < 1$ y, por tanto, que el método de Gauss-Seidel aplicado a A es convergente.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2005

1 [2'5 puntos]

$a)$ Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante. Se considera la descomposición $A = M - N$ con $M = D - F$ y $N = E$, siendo $A = D - E - F$ la descomposición $D - E - F$ por puntos de la matriz A. Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ de A es convergente.

$b)$ Demostrar que si A verifica

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \; j = 1, \ldots, n$$

el método de Gauss-Seidel por puntos para A es convergente. (**Indicación**: Utilizar a)).

$c)$ Demostrar resultados análogos a a) y b) cuando se toma una descomposición $D - E - F$ por bloques.

2 [2'5 puntos]

$a)$ Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ descompuesta en bloques de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right)$$

donde la matriz A_1 es inversible. Demostrar que $\det A = \det A_1 \det \left(A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2\right)$. (**Indicación**: Utilizar el método de eliminación gaussiana por bloques para anular el bloque ocupado por A_3).

$b)$ Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica escrita en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array} \right)$$

con $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$ inversible, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que si A no es inversible entonces $\alpha = a^{\mathrm{T}}(A_{n-1})^{-1}a$.

$c)$ Sea A simétrica con sus $n-1$ primeros menores principales positivos y con $\det(\mathrm{A}) = 0$. Demostrar que A admite factorización de Cholesky y se tiene que $b_{nn} = 0$.

3 [1 punto] Decidir si existen números reales a, b, c y d tales que la función

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & \text{si} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

sea una función *spline* cúbica con condiciones de tipo I (condiciones naturales).

4 [1 punto] Encontrar el valor de $x_1 > 0$ que hace que la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \simeq \frac{1}{9}\big(2f(-1) + 6f(-x_1) + 10f(x_1)\big)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

5 [3 puntos] Se considera la ecuación $x^3 - x^2 - 10x + 1 = 0$.

$a)$ Hallar el número de raíces reales y complejas de dicha ecuación, separando, mediante el método de Sturm, las raíces reales en intervalos que contengan una única raíz.

$b)$ Encontrar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la menor raíz real, demostrando la convergencia del método y dando los dos primeros términos de la sucesión.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2005

---

1 [2'5 puntos] Dado $t \in \mathbb{R}$, se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 5 & t^2+6 & 0 \\ 5 & 2t+9 & 5 \end{pmatrix}$$

$a)$ Decidir para qué valores de t la matriz A no admite factorización LU.

$b)$ Para cada uno de los valores de t hallados en el apartado anterior, encontrar una matriz de permutaciones P tal que la matriz PA sí admita factorización LU.

2 [2'5 puntos] Para cada número natural $n \geq 2$ se considera la matriz $A_n \in \mathcal{M}_n$ que tiene por elementos

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \neq j \\ 2^i & \text{si} \quad i = j \end{cases} .$$

$a)$ Calcular la matriz de Jacobi por puntos asociada a A_n. Demostrar que el método de Jacobi por puntos para A_n es convergente.

$b)$ Demostrar que el método de Gauss-Seidel por bloques asociado a A_3 es convergente.

3 [1'5 puntos] Determinar números reales a, b, c, d de modo que la fórmula de integración numérica:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)\,,$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

4 [3'5 puntos] Se considera la ecuación:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

y los esquemas equivalentes de punto fijo:

$$\text{(a)} \quad x = \frac{20 - 2x^2 - x^3}{10}; \qquad \text{(b)} \quad x = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}.$$

(i) Probar que la ecuación de partida tiene una única raíz en el intervalo $(1, 2)$.

(ii) Estudiar la convergencia a dicha raíz de las iteraciones de punto fijo correspondientes a (a) y (b) con $x_0 \in [1, 2]$.

(iii) Suponiendo que se parte de $x_0 = 1$, determínese, para las iteraciones que sean convergentes, un número natural n_0 de forma que, si $n \geq n_0$, el error correspondiente a la iteración x_n sea menor que 10^{-4}.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2006

1 Se quiere resolver el sistema lineal,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -3\,x - y & = 1 \\ -x + 3\,y & = 2 \end{array} \right. \text{ o sea } \mathbf{A}u = b \;\text{ con } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

usando el método SOR:

$$\left(\frac{1}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{E}\right) u^{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{F}\right) u^k + b$$

Siendo:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide hallar el valor de $\omega \in \Re$ óptimo.

2 Sea A una matriz definida positiva y simétrica. Supongamos que A tiene las factorizaciones $A = L_1 L_1^t$ y $A = L_2 D L_2^t$, siendo D una matriz diagonal con elementos diagonales positivos $d_1, ..., d_n$. Si $D^{1/2} = (\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_n})$:

1. Demostrar que $D = D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}$.
2. Demostrar que $A = L_2 D^{\frac{1}{2}} (L_2 D^{\frac{1}{2}})^t$.

3 Consideramos el polinomio de Laguerre de cuarto grado:

$$L(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

La ecuación $L(x) = 0$ tiene al menos una raíz positiva. Se pide:
a) Hallar un intervalo adecuado para poder emplear el método de Newton cuando se quiera aproximar el valor de la raíz más pequeña.
b) Demostrar que todas las raíces son reales positivas.
c) Demostrar que todas son simples.

4 Se desea calcular $C = \int_0^1 f(x)dx$ cuando $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Consideramos fórmulas de Newton-Côtes de tipo trapecio.

1. Elegirías una fórmula del trapecio abierta o cerrada? Por qué?
2. Calcula la aproximación que se obtiene empleando la fórmula del trapecio abierta.
3. Calcular el error exacto cometido. La estimación teórica del error en la fórmula del trapecio abierta viene dada por $3\frac{h^3}{4}f''(\xi)$, $\xi \in (0,1)$. Es útil esta estimación?
4. Nos planteamos a continuación el uso de una fórmula del trapecio cerrada para calcular $\int_{0,01}^1 f(x)dx$. Comparar el resultado obtenido con el valor exacto de esta integral y con la aproximación obtenida en el segundo apartado.
5. Reemplazamos la integral anterior por $\int_{0,1}^1 f(x)dx$. Comparar el resultado obtenido con el valor exacto de esta integral y con la aproximación obtenida en el segundo apartado.
6. La estimación teórica del error en este caso es $-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$, $\xi \in (\epsilon, 1)$, $\epsilon = 0{,}1$, $\epsilon = 0{,}01$. Qué cota da para el error?
7. Qué conclusión sacas de estos resultados?

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2006

1 **[2'5 puntos]** Sea $A \in \mathcal{M}_n$ inversible.

$a)$ Probar que si A admite factorización LU entonces todos sus menores principales son no nulos.

$b)$ Demostrar que si A admite factorización de Cholesky entonces es simétrica y definida positiva.

2 [**3'5 puntos**] Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ se considera su descomposición $D - E - F$ por puntos y, a partir de ella, se definen las matrices $M = D - \alpha E - (1 - \alpha)F$ y $N = M - A$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que M sea inversible.

$a)$ Demostrar que si A es hermítica definida positiva el método asociado a tal descomposición $M - N$ de A es convergente.

$b)$ Probar que si A es una matriz de diagonal estrictamente dominante y $\alpha \in [0, 1]$ entonces el método iterativo asociado a tal descomposición $M - N$ de A es convergente. (**Indicación:** Demostrar que si $|\lambda| \geq 1$ y $\alpha \in [0, 1]$ entonces

$$\frac{|1 - \alpha + \lambda\alpha|}{|\lambda|} \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{|\lambda - \lambda\alpha + \alpha|}{|\lambda|} \leq 1 \quad)$$

$c)$ ¿Se deduce de los apartados anteriores la convergencia del método de Jacobi por bloques para algún tipo de matrices? ¿Y la del método de Gauss–Seidel?

3 **[1 punto]** Determinar el número de subintervalos que deben tomarse para que el error cometido al aproximar

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$

mediante la regla de los trapecios (o fórmula del trapecio cerrada compuesta) sea inferior a la milésima. Escribir la expresión que toma la regla de los trapecios para este caso concreto y con el número de subintervalos hallado.

4 **[3 puntos]** Consideremos el polinomio

$$P(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2 + x + \lambda$$

donde $\lambda > 0$.

a) Estudiar, en función del parámetro λ, el número de raíces (reales y complejas) de la ecuación $P(x) = 0$. ¿Para qué valores de λ las raíces de P son múltiples? Hallar todas las raíces de P para esos valores de λ.

b) Fijado $\lambda = 1$ encontrar un intervalo donde pueda aplicarse el *método de Newton* para calcular una raíz negativa de P. Determinar los dos primeros términos de la sucesión definida por dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2006

---

1 [2'5 puntos] Se considera una matriz A simétrica no inversible cuyos $n-1$ primeros menores principales son todos positivos, escrita en la forma $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array}\right)$ siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$a)$ Demostrar que $\alpha - a^{\mathrm{T}}(A_{n-1})^{-1}a = 0$. (**Indicación**: aplicar el método de Gauss por bloques para anular el bloque ocupado por a^{T}).

$b)$ Demostrar que A_{n-1} admite factorización de Cholesky.

$c)$ Si $A_{n-1} = B_{n-1}(B_{n-1})^{\mathrm{T}}$ es la factorización de Cholesky de A_{n-1} ¿cómo deben elegirse $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ para que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^{\mathrm{T}} & \beta \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{n-1}^{\mathrm{T}} & x \\ \hline \mathbf{0} & \beta \end{array}\right)?$$

Probar que tal elección de x y β es posible.

$d)$ Deducir que A admite factorización de Cholesky $A = BB^{\mathrm{T}}$ y se tiene que $b_{nn} = 0$.

2 [2'5 puntos] Consideramos el sistema lineal $Ax = b$, con $b \in R^3$ y $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Hallar la matriz del método de relajación por puntos.

$b)$ Demostrar que el método de Gauss-Seidel es óptimo.

3 [2'5 puntos] Se desea calcular $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$ mediante la regla de Simpson compuesta. La función a integrar, $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$, no está definida en cero. Por ello, se reescribe la integral como:

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{e^x - p(x)}{\sqrt{x}}dx + \int_0^1 \frac{p(x)}{\sqrt{x}}dx.$$

donde $p(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$ es el polinomio de Taylor de e^x de orden 4. Sea $g(x) = \dfrac{e^x - p(x)}{\sqrt{x}}$. Se pide:

$a)$ Demostrar que $g(0) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

$b)$ Aproximar $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ mediante la regla de Simpson compuesta con $h = 0{,}25$ y dos subintervalos (m=2).

$c)$ Calcular el valor exacto de $\displaystyle\int_0^1 \frac{p(x)}{\sqrt{x}}dx$.

$d)$ ¿Cuál es el valor aproximado de I que se obtiene con esta estrategia? ¿Se obtendría una aproximación mejor o peor usando un polinomio de Taylor de orden menor?

4 [2'5 puntos] Se desea calcular $\sqrt[3]{21}$ mediante la iteración siguiente:

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = g(x_{n-1}) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

con $g(x) = \dfrac{1}{21}\left(20x + \dfrac{21}{x^2}\right)$. Se pide:

$a)$ Encontrar un intervalo $[a, b]$ que contenga a 2 en el que se pueda aplicar el teorema del punto fijo para garantizar la convergencia de la iteración.

$b)$ Concluir que la iteración sugerida converge a un valor, que es precisamente $\sqrt[3]{21}$.

$c)$ Determinar el número de iteraciones para que el error cometido sea menor que 10^{-3}.