MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2006–2007
Prácticas
Hoja 1. Análisis de errores

1 Teniendo en cuenta que MATLAB trabaja en doble precisión, calcular el número máquina inmediatamente anterior a 1 y comprobar que dista 2^{-53} de 1.

2 Calcular $1 \oplus 2^{-52}$, $1 \oplus 2^{-53}$, $1 \ominus 2^{-53}$ y $1 \ominus 2^{-54}$ y comprobar que los resultados coinciden con los que teóricamente deben obtenerse.

3 Determinar el mayor y menor número máquina normal positivo, así como el mayor y menor número subnormal positivo, cuando se trabaja en simple precisión. Comprobar que coinciden con los expuestos en clase.

4 Idem para doble precisión. Comparar con los comandos `realmax` y `realmin` de `MATLAB`.

5 Determinar el épsilon de la máquina. Para ello, calcular $1 + x$ con $x = 2^{-i}$ para $i = 1, 2, \ldots$ mientras que $1 + x > 1$. Comparar con el comando `eps` de `MATLAB`.

6 Aproximar la derivada de la función $\operatorname{sen} x$ en $x = 1$ mediante la fórmula

$$\frac{\operatorname{sen}(1+h) - \operatorname{sen} 1}{h}$$

con $h = 10^{-i}$ para $i = 1, 2, \ldots, 20$ comparando los resultados obtenidos con el valor exacto. Comprobar que se produce una pérdida de precisión por cancelación.

7 Las raíces exactas de la ecuación de segundo grado

$$x^2 - (64 + 10^{-15})\, x + (64 \times 10^{-15}) = 0$$

son $x_1 = 64$ y $x_2 = 10^{-15}$. Calcular sus raíces comprobando que el resultado obtenido para la menor de ellas no coincide con el exacto en ninguna cifra significativa.

8 Comprobar los resultados del ejemplo estudiado en clase relativo al cálculo de los 100 primeros términos de la sucesión definida por

$$\begin{cases} x_0 = 1, \; x_1 = \dfrac{1}{7} \\ x_{n+1} = \dfrac{22}{7} x_n - \dfrac{3}{7} x_{n-1}, \; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Prácticas

Hoja 2. Complementos de álgebra matricial

1 Comprobar el resultado del Problema 8 apartado a) para descomposiciones coherentes por bloques de las matrices M y N.

2 Comprobar, para matrices arbitrarias $A, B \in \mathcal{M}_n$, las siguientes propiedades:

$$\text{a) } \det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B) \qquad \text{b) } \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

$$\text{c) } \det(A^*) = \overline{\det(A)} \qquad \text{d) } \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$$

siendo $\mathrm{sp}(A) = \{\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)\}$. **Indicación**: utilizar los comandos `det` y `eig` de MATLAB.

3 Escribir un programa que calcule las normas uno, infinito y Fröbenius de una matriz dada. Comparar los resultados con los obtenidos con el comando `norm` de MATLAB.

4 Escribir un programa específico para el producto de una matriz triangular superior (resp. inferior) por un vector y el producto de dos matrices triangulares superiores (resp. inferiores).

5 Escribir un programa que calcule las potencias sucesivas de una matriz A, verificando previamente si $|||A|||_1$, $|||A|||_\infty$ o $|||A|||_{\mathrm{F}}$ es menor que uno.

6 Utilizar el comando `eig` de MATLAB para calcular $\mathrm{cond}_2(A)$ siendo A la matriz de Wilson

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Calcular también, usando el comando `cond` de `MATLAB`, los condicionamientos de dicha matriz respecto a las normas $|||\cdot|||_1$, $|||\cdot|||_\infty$ y $|||\cdot|||_{\mathrm{F}}$; comprobar que los tres son mayores que $\mathrm{cond}_2(A)$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2006–2007
Prácticas
Hoja 3. Métodos directos

---

1 * Programar el método de eliminación gaussiana, implementándolo siguiendo las indicaciones dadas en clase, de forma que sirva para resolver sucesivos sistemas con la misma matriz. Comparar con el comando $\backslash$ de MATLAB.

2 Escribir un programa que calcule la inversa de una matriz mediante el método de Gauss–Jordan. Comparar con el comando `inv` de MATLAB.

3 Escribir funciones que proporcionen la solución de:

- un sistema triangular inferior con unos en la diagonal
- un sistema triangular inferior arbitrario
- un sistema triangular superior

a partir de la matriz del sistema y del vector segundo miembro.

4 Programar el método de la factorización LU de forma que se puedan resolver varios sistemas con la misma matriz. Comparar con el comando `lu` de MATLAB.

5 * Hacer una versión del programa anterior pensada para matrices banda.

6 Programar el método de la factorización de Cholesky de forma que se puedan resolver varios sistemas con la misma matriz. Comparar con el comando `chol` de MATLAB.

7 * Hacer una versión del programa anterior pensada para matrices banda.

8 * Escribir una función que implemente el método del Problema 7 para matrices tridiagonales.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2006–2007
Prácticas
Hoja 4. Métodos iterativos

1 * Escribir un programa que resuelva un sistema lineal mediante el método de Jacobi por puntos, pidiendo por pantalla, además de la matriz y el segundo miembro, el número máximo de iteraciones y la precisión para el test de parada.

2 * Escribir un programa que resuelva un sistema lineal mediante el método de relajación por puntos, pidiendo por pantalla, además de la matriz y el segundo miembro, el parámetro de relajación, el número máximo de iteraciones y la precisión para el test de parada.

3 Dado $n \in \mathbb{N}$ se considera la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 20 + i & \text{si} \quad i = j \\ \dfrac{(-1)^{i+j}}{i+j} & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

y el vector $b = (b_i)_{i=1}^n$ con

$$b_i = \frac{1}{i}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Resolver, para valores grandes de n, el sistema lineal $Au = b$ mediante el método de relajación por puntos, tomando como valores del parámetro $w = 0{,}1 : 0{,}1 : 1{,}9$ y con una precisión en el test de parada de 10^{-10}. Determinar el mejor valor de w entre todos los anteriores.

4 Programar el método de Jacobi por bloques para matrices de diagonal estrictamente dominante de forma que, en cada iteración, los sistemas asociados a los bloques diagonales se resuelvan mediante factorización LU.

5 Programar el método de relajación por bloques para matrices simétricas definidas positivas de forma que, en cada iteración, los sistemas asociados a los bloques diagonales se resuelvan mediante factorización de Cholesky.

6 (Optativo) Dada la matriz A descompuesta por bloques en la forma $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{20}$ donde

$$A_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{i+j} I_{20} \text{ si } i \neq j,$$

siendo I_{20} la matriz identidad de orden 20, y

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & 8 & -1 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 \\ & & & -1 & -1 & 8 & -1 \\ & & & & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

aplicar los programas de las Prácticas 4 y 5 para resolver el sistema lineal $Au = b$ siendo $b = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2006–2007
Prácticas
Hoja 5. Interpolación e integración numéricas

1 * Escribir un programa que calcule el polinomio de interpolación de Lagrange de una función en unos puntos dados mediante la *fórmula de Newton*, y que permita añadir nuevos puntos de interpolación (de uno en uno). Dibujar la función y el polinomio de interpolación obtenido. Hacer una versión que sirva para interpolar los valores de una tabla dibujando, en este caso, el polinomo de interpolación y los valores interpolados.

2 * Programar el cálculo de una función spline cúbica interpoladora de una función dada. Dibujar ambas funciones. Hacer, también en este caso, una versión que interpole los valores de una tabla dibujando la función spline cúbica obtenida y dichos valores.

3 Calcular los polinomios de interpolación de Lagrange de grados $n = 10, 15$ y 20 de la función

$$f(x) = |x|,\ x \in [-1, 1]$$

tomando, por una parte, puntos equiespaciados y, por otra, las abscisas de Tchebychev

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}$$

para $k = 0, 1, \ldots, n$. Comparar gráficamente los resultados.

4 Utilizando las fórmulas de Simpson cerrada y abierta aproximar

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

dando una cota del error cometido en cada caso.

5 Utilizar las fórmulas cerradas de Newton–Côtes de 2 y 3 puntos y las fórmulas abiertas de Newton–Côtes de $1, 2$ y 3 puntos, para aproximar

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x\,dx,$$

calculando el error cometido y comparando los resultados obtenidos con cada fórmula.

6 Programar una función en `MATLAB` que implemente la regla de los trapecios. Calcular con este programa diversas integrales de valor conocido y comparar los resultados hallados con los exactos.

7 Idem para la regla de Simpson compuesta.

8 Utilizar los programas de las prácticas 6 y 7 para obtener

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

con un error inferior a 10^{-4} (estudiar previamente en cada caso cuál debe ser el número de subintervalos).