PROBLEMAS ABIERTOS DE GEOMETRIA DE VARIEDADES DIFERENCIABLES

Todas las variedades salvo aviso explícito serán de clase infinito, T_2 y $IIAN$

Nota: El símbolo $\star$ indica que aún se admiten soluciones

1. Poner un ejemplo de variedad diferenciable conexa que no sea IIAN.

2. Probar que el conjunto $M = \{(t^2, t^3) : t \in \mathbb{R}\}$ admite estructura de variedad diferenciable con la topología usual heredada de la de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo (probar que) M no es variedad euclidea de $\mathbb{R}^2$.

3. Sean M_1 y M_2 dos variedades diferenciables con el mismo conjunto de puntos, digamos M. Probar que $M_1 = M_2$ si y solo si el anillo de funciones $\mathcal{F}(M_1)$ coincide con $\mathcal{F}(M_2)$

4. Sea $\mathcal{F}$ un anillo conmutativo con elemento unidad y $\mathcal{M}$ la familia de sus ideales maximales. Para cada $f \in \mathcal{F}$, se define $\mathcal{U}_f = \{x \in \mathcal{M} : f \notin x\}$.

   a) Probar que la familia $\{\mathcal{U}_f : f \in \mathcal{F}\}$ es base para una topología de $\mathcal{M}$ denominada topología de Zariski.

   b) Supuesto que M es variedad diferenciable compacta y$\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ demostrar que la aplicación

   $$M \ni x \to \mathcal{F}_x = \{f \in \mathcal{F} \ : f(x) = 0\} \in \mathcal{M}$$

   es un homeomorfismo cuando se dota a $\mathcal{M}$ de la topología de Zariski.

5. $\star$ Reconsiderar el apartado b) del problema anterior para M variedad diferenciable no compacta, tomando como anillo

   $$\mathcal{F} = \mathcal{F}^c(M) = \{f \in \mathcal{F}(M) : \ sop(f) \text{ es compacto}\}$$

6. $\star$ Sea M variedad diferenciable, $F \in \mathcal{F}(M)$ y sea $\varnothing \neq N = F^{-1}(0)$. Supongamos $dF(x) \neq 0$ para todo $x \in N$ (se dice por esto que $F = 0$ es una *buena ecuación* para N). Demostrar que entonces para todo $f \in \mathcal{F}(M)$ tal que$f|_N = 0$, existe $h \in \mathcal{F}(M)$ tal que $f = hF$. Esto significa que el ideal $I(N) = \{f \in \mathcal{F}(M) : f|_N = 0\}$ es principal. Probar que si una función $G \in I(N)$ es generador de $I(N)$, entonces $G = 0$, es una buena ecuación para N.

7. $\star$ Sea F un difeomorfismo local entre las variedades M y $\overline{M}$, y sea $G : I_\varepsilon \times M \to \overline{M}$ una aplicación diferenciable. Denotando $G(t, x) = F_t(x)$, supóngase que $F_0 = F$ y que existe una sucesión $(t_m) \to 0$ tal que F_{t_m} es inyectiva para todo m. Probar que entonces necesariamente es F inyectiva.

8. Los espacios lenticulares son variedades cociente de la esfera $\mathbb{S}^3$. Para describirlos, identificaremos $\mathbb{R}^4$ con $\mathbb{C}^2$, y $\mathbb{S}^3$ se identifica entonces con el conjunto de los $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tales que $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Entonces dados dos enteros p, q con $p > 0$ y $mcd\,(p, q) = 1$ se considera el grupo de transformaciones de $\mathbb{S}^3$ generado por la transformación

$$(z_1, z_2) \to (z_1\omega, z_2\omega^q)$$

donde ω es una p-raiz primitiva de la unidad. Esto da lugar a un grupo finito de transformaciones que actua de forma discontinua sobre la variedad $\mathbb{S}^3$ y la correspondiente variedad cociente se llama espacio lenticular $L\,(p, q)$. Verificar todas estas afirmaciones y demostrar que:

a) $L\,(p, q) = L\,(p, q')$ si $q' \equiv q \pmod p$.

b) $L\,(2, 1)$ es difeomorfo a $P^3\,(\mathbb{R})$.

c) $L\,(p, q)$ y $L\,(p, q')$ son difeomorfos si $q' \equiv -q \pmod p$ o $q'q \equiv 1 \pmod p$.

9. $\star$ Sumergiendo $\mathbb{S}^3$ en $\mathbb{C}^2$ como antes, demostrar que la aplicación $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{CP}^1$ definida por

$$\pi\,(z_1, z_2) = \begin{cases} [1, z_2/z_1] & \text{si } z_1 \neq 0 \\ [0, 1] & \text{si } z_1 = 0 \end{cases}$$

da lugar a un fibrado sobre $\mathbb{CP}^1 \approx \mathbb{S}^2$ con fibra tipo $\mathbb{S}^1$. Se llama fibración de Hpof. Demostrar que no es un fibrado trivial.

10. $\star$ Una forma simpléctica ω sobre una variedad diferenciable M es un tensor antisimétrico $\omega \in \mathfrak{T}_2^0\,(M)$ que es no degenerado en cada punto (se exige tambien que ω sea 1-forma cerrada). Probar que necesariamente M tiene dimensión par.

Demostrar que sobre el fibrado cotangente T^*M de una variedad diferenciable hay una 1-forma canónica α, cuya diferencial $\omega = d\alpha$ define una forma simpléctica canónica.

11. $\star$ Sea M variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}\,(M)$ y $\alpha \in \mathfrak{X}^*\,(M)$. Si (Φ_t) es flujo (local) de X, se define (localmente)

$$\mathfrak{L}_X(\alpha) = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi_t^*(\alpha) - \alpha}{t}$$

Demostrar que $(\mathfrak{L}_X\alpha)\,(V) = X\,(\alpha\,(V)) - \alpha\,([X, V])$ para todo campo $V \in \mathfrak{X}\,(M)$.