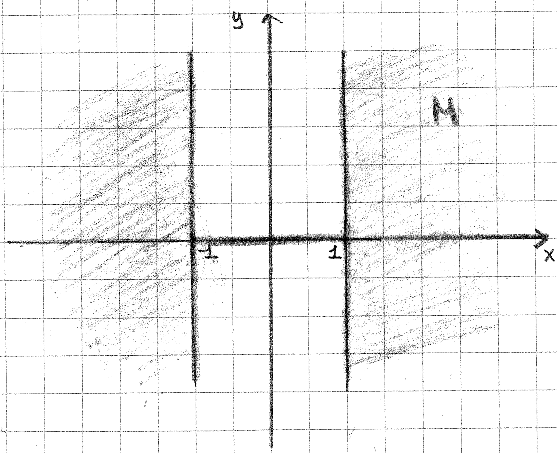
IRENE GIACOMELLI

PROBLEMA ABIERTO 1

Poner un ejemplo de variedad diferenciable conexa que no sea II AN.

Sea $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq 1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ subconjunto de $\mathbb{R}^2$.



Fijado $\lambda \in \mathbb{R}$ sea

$\mathcal{U}_\lambda = \{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq 1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\} \subset M$

y sea

$$\varphi_\lambda : \mathcal{U}_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x$$

- φ_λ es inyectiva:

(x_1,y_1) y $(x_2,y_2) \in$

Hay tres casos:

1) $y_1 = y_2 = \lambda$

$\varphi_\lambda(x_1,\lambda) = \varphi_\lambda(x_2,\lambda) \Rightarrow x_1 = x_2$

entonces $(x_1,\lambda) = (x_2,\lambda)$

$(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ ✓

2) $y_1 = y_2 = 0$

$\varphi_\lambda(x_1, 0) = \varphi_\lambda(x_2, 0) \Rightarrow x_1 = x_2$

entonces $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ✓

3) $y_1 = \lambda$ ~~e~~ $y_2 = 0$ $(\lambda \neq 0)$

($y_1 = 0$ y $y_2 = \lambda$ es ~~lo~~ mismo)

$\underset{(\lambda \neq 0)}{y_1 = \lambda} \Rightarrow |x_1| \geq 1$

$y_2 = 0 \Rightarrow |x_2| < 0$

entonces $\varphi_\lambda(x_1, y_1) = \varphi_\lambda(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

es una condicion que no se puede verificar. ✓

- $\varphi_\lambda(\mathcal{U}_\lambda) = \mathbb{R} \underset{\text{ab}}{\subseteq} \mathbb{R}$

si $x \in \mathbb{R}$, hay dos casos

$x = \varphi_\lambda(x, 0)$ si $|x| < 1$

$x = \varphi_\lambda(x, \lambda)$ si $|x| \geq 1$

Entonces ~~por~~ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{U}_\lambda, \varphi_\lambda)$ es una carta modelada en $\mathbb{R}$ ~~para~~ del conjunto M.

Si $\lambda \neq \mu$ se verifica trivialmente que

$\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$

y $\varphi_\lambda(\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu) = \varphi_\mu(\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu) = (-1, 1)$

este es un abierto de $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc}
\varphi_\lambda(\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu) & & & & \varphi_\mu(\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu) \\
\| & & & & \| \\
(-1,1) & \xrightarrow{\varphi_\lambda^{-1}} & M & \xrightarrow{\varphi_\mu} & (-1,1) \\
x & \longmapsto & (x,0) & \longmapsto & x
\end{array}$$

$\Rightarrow$ $\varphi_\lambda^{-1} \circ \varphi_\mu : (-1,1) \longrightarrow (-1,1)$

es un ~~difeomorsmu~~ difeo (es la identidad)

Esto implica que

$\forall \lambda \neq \mu \quad (\mathcal{U}_\lambda, \varphi_\lambda) \sim (\mathcal{U}_\mu, \varphi_\mu)$

(cartas compatibles)

En fin, es sencillo ver que $M = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathcal{U}_\lambda$

entonces $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\lambda, \varphi_\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un atlas de M modelado en $\mathbb{R}$.

Ahora, damos a M la única topología que hace ~~φ_λ~~ φ_λ a homeomorfismo $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, es decir la topología $\tau_{\mathcal{A}}$

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{ V \subset M \mid \varphi_\lambda(V \cap \mathcal{U}_\lambda) \underset{ab}{\subseteq} \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Con esta topología M es conexo pero no verifica el II axioma de numerabilidad.

- M es conexo:

  $M = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathcal{U}_\lambda$ y con la topología $\tau_{\mathcal{A}}$ cada subjunto U_λ es un abierto conexo (porque homeomorfo a $\mathbb{R}$), $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ $\forall \lambda, \mu$

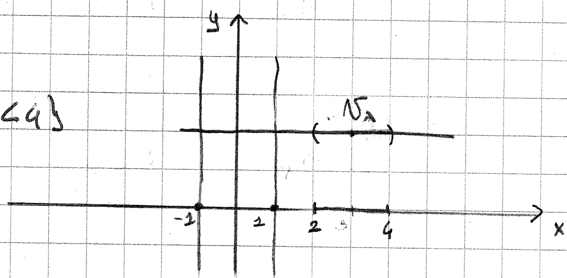
$\Rightarrow$ M es conexo porque unión de conexos con intersección no vacío.

• M no verifica II AN:

Sea $\mathcal{B}$ es una base para τ_A

$\forall \lambda$ llamamos

$V_\lambda = \{(x,\ ) \in M \mid 2 < x < 4\}$



~~$(3,\lambda) \in V_\lambda$~~

V_λ es un abierto de τ_A no vacío $((3,\lambda) \in V_\lambda)$

porque $\varphi_\lambda(V_\lambda \cap U_\lambda) = (2,4) \underset{ab}{\subseteq} \mathbb{R}$ abierto

$\varphi_\mu(V_\lambda \cap U_\mu) = \emptyset$ si $\lambda \neq \mu$ abierto

$\forall \lambda$ $\exists B_\lambda \in \mathcal{B}$ t.c. $B_\lambda \subseteq V_\lambda$

$$\left.\begin{array}{l} V_\lambda \cap V_\mu = \emptyset \\ \text{si } \lambda \neq \mu \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ la aplicación } \mathbb{R} \ni \lambda \longrightarrow B_\lambda \in \mathcal{B} \text{ es inyectiva}$$

Entonces $|\mathcal{B}| \geq |\mathbb{R}|$.

Hugo Fernández Hervás

Problema abierto 2

Probar que el cjto $M=\{(t^2,t^3): t\in\mathbb{R}\}$ admite estructura de variedad diferenciable con la topología heredada de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo M no es variedad euclídea de $\mathbb{R}^2$.

La aplicación $\alpha:\mathbb{R}\to M$, $t\mapsto(t^2,t^3)$ proporciona un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y M, (con inversa $\alpha^{-1}(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)=(0,0)\\ \frac{y}{x} & \text{en otro caso}\end{cases}$)

Así pues M tiene estructura de variedad diferenciable difeomorfa a $\mathbb{R}$.

Sin embargo, no es subvariedad euclídea de $\mathbb{R}^2$. Si lo fuera, tendría una parametrización local en torno al cero.

$$F:\underset{\mathbb{R}}{\underset{\text{abto}}{U}}\to V\subset M$$
$$t\mapsto(f(t),g(t))$$

Podemos suponer que ~~$F(0)=(0,0)$~~ $0\in U$ y $F(0)=(0,0)$.

Como F es parametrización local $DF\neq(0,0)$ en U. Pero esto no es cierto en 0.

Como $F(t)=(f(t),g(t))\in M$ $\forall t\in U$, tenemos que

$$f^3=g^2.$$

Derivando sucesivamente

- $3f^2f'=2gg'$
- $6ff'^2+3f^2f''=2gg''+2g'^2$, evaluando en $t=0$ se deduce $2g'(0)^2=0\Rightarrow g'(0)=0$

Derivando una vez más.

- $6f'^3+12ff'f''+6ff'f''+3f^2f'''=2gg'''+2g'g''+4g'g''$

evaluando en $t=0$ y usando que $f(0)=g(0)=g'(0)=0$ →

Se obtiene $6 f'^3 = 0 \Rightarrow f' = 0$ en $t = 0$.

Por tanto $DF(0) = (f'(0), g'(0)) = (0, 0)$. !!!