PROBLEMAS DE GEOMETRIA DE VARIEDADES DIFERENCIABLES (Curso 11-12)

1. Demostrar que una variedad euclidea M de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ admite una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión m dada por el atlas $\mathcal{M}$ formado por las cartas $(\mathcal{U}, \varphi = P^{-1})$ tales que $\mathbb{R}^m \underset{ab}{\supset} \mathbb{U} \xrightarrow{P} \mathcal{U} \underset{ab}{\subset} M \subset \mathbb{R}^n$ es una parametrización local de M. Probar que $\mathcal{M}$ constituye un atlas maximal para M.

2. Sea M el conjunto de todas las rectas afines de $\mathbb{R}^2$. Demostrar la aplicación φ que hace corresponder a la recta de ecuación $y = mx + b$ el par (m, b) define una carta de M. Encontrar otra carta análoga que forme con la anterior un atlas para M.

3. Dar estructura de variedad diferenciable al espacio proyectivo
$$\mathbb{R}P^1 = \{[x, y] : (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}\}$$
mediante las cartas naturales
$$\begin{aligned} \varphi &: \mathcal{U} = \{[x, y] : x \neq 0\} \ni [x, y] \to u = \frac{y}{x} \in \mathbb{R} \\ \overline{\varphi} &: \overline{\mathcal{U}} = \{[x, y] : y \neq 0\} \ni [x, y] \to \overline{u} = \frac{x}{y} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
Generalizar la construcción para el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^m$.

4. Identificando el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos con $\mathbb{R}^2$ mediante la biyección canónica:
$$\mathbb{C} \ni x + iy \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
Dar estructura de variedad diferenciable bidimensional a la recta proyectiva $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ mediante las cartas naturales
$$\begin{aligned} c &: \mathcal{U} = \{[z_0, z_1] : z_0 \neq 0\} \ni [z_0, z_1] \to \frac{z_1}{z_0} \in \mathbb{R}^2 \\ \bar{c} &: \overline{\mathcal{U}} = \{[z_0, z_1] : z_1 \neq 0\} \ni [z_0, z_1] \to \frac{z_0}{z_1} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

5. Dar estructura de variedad diferenciable al conjunto $M = \mathbb{G}_2(\mathbb{R}^4)$ de los planos vectoriales de $\mathbb{R}^4$ construyendo cartas del tipo
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} = \mathbb{R}^4$$
donde $[v, w]$ representa el plano generado por los vectores (columna) v y w de $\mathbb{R}^4$.

   Generalizar la construcción para $\mathbb{G}_p(\mathbb{R}^n)$ con $p < n$.