GVD: Problema 59

Andrea Cadarso

2010/2011

Proposición Si H es subgrupo cerrado y conexo del grupo de Lie G y G/H es conexo, entonces G es conexo. Úsese esto para probar que $SO(n)$, $SU(n)$ y $U(n)$ son conexos para $n \geq 1$.

Demostración Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existen subconjuntos U y V abiertos no vacíos de G tales que

$$G = U \cup V$$

En ese caso, a partir de la definición de la aplicación $\pi : G \to G/H$, proyección canónica en el cociente se observa que

$$\pi(G) = G/H = \pi(U) \cup \pi(V)$$

así como que $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son ambos subconjuntos no vacíos de G/H y abiertos ya que la proyección canónica es aplicación continua, sobreyectiva y abierta.

Puesto que, por hipótesis G/H es conexo, necesariamente

$$\pi\,(U) \cap \pi\,(V) \neq \emptyset$$

de donde se deduce que debe existir un cierto $x \in G/H$, $x = \alpha H$ en G/H tal que

$$x = \alpha H \in \pi\,(U) \cap \pi\,(V)$$

Utilizando la siguiente identidad conjuntista

$$\alpha H = (\alpha H \cap U) \cup (\alpha H \cap V)$$

Teniendo en cuenta la topología relativa respecto a H, podemos afirmar que los conjuntos $(\alpha H \cap U)$ y $(\alpha H \cap V)$ son subconjuntos abiertos de αH para la susodicha topología relativa.

Ya que $\alpha H \in \pi(U) \cap \pi(V)$, entonces es claro que

$$\alpha H \cap U \neq \emptyset$$

así como que

$$\alpha H \cap V \neq \emptyset$$

Por último, observando que αH es homeomorfo a H

$$\alpha H \approx H$$

entonces el hecho de que H sea conexo implica que αH es asimismo conexo.

Por definición de conexión, si

$$\alpha H = (\alpha H \cap U) \cup (\alpha H \cap V)$$

entonces necesariamente

$$(\alpha H \cap U) \cap (\alpha H \cap V) \neq \emptyset \Rightarrow \alpha H \cap U \cap V \neq \emptyset$$

Por tanto,

$$U \cap V \neq \emptyset$$

Así, si $G = U \cup V$ hemos deducido que se cumple $U \cap V \neq \emptyset$ por lo que G es conexo, tal y como queríamos demostrar.

- $SO(n)$: Probaremos que $SO(n)$ es conexo por inducción en n. Para $n = 1$, esto es obvio, ya que $SO(1)$ es el grupo trivial (únicamente contiene a la matriz identidad 1×1).

  Supongamos ahora que $SO(n-1)$ es conexo para $n \geq 2$. Teniendo en cuenta que el espacio homogéneo $SO(n)/SO(n-1)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$ y por tanto conexo, utilizamos la proposición probada previamente, así como la hipótesis de inducción y se sigue claramente que $SO(n)$ es conexo.

- $U(n)$: Probaremos que $U(n)$ es conexo nuevamente por inducción en n.

  Para $n = 1$, esto es obvio, ya que $U(1)$ está definido por

  $$U(1) = \{(\lambda) : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$$

  Supongamos ahora que $U(n-1)$ es conexo para $n \geq 2$. Teniendo en cuenta que el espacio homogéneo $U(n)/U(n-1)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^{2n-1}$ y por tanto conexo, utilizamos la proposición probada previamente, así como la hipótesis de inducción por lo que se deduce que $U(n)$ es conexo.

- $SU(n)$: Probaremos que $SU(n)$ es conexo por inducción en n.

  Para $n = 1$, esto es obvio, ya que $U(1)$ es el grupo trivial (únicamente contiene a la matriz identidad 1×1).

  Supongamos ahora que $SU(n-1)$ es conexo para $n \geq 2$. Teniendo en cuenta que el espacio homogéneo $SU(n)/SU(n-1)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^{2n-1}$ y por tanto conexo, utilizamos la proposición probada previamente, así como la hipótesis de inducción por lo que observamos que $SU(n)$ es conexo tal y como queríamos probar.